Corso di Calcolatori Elettronici I
A.A. 2012-2013

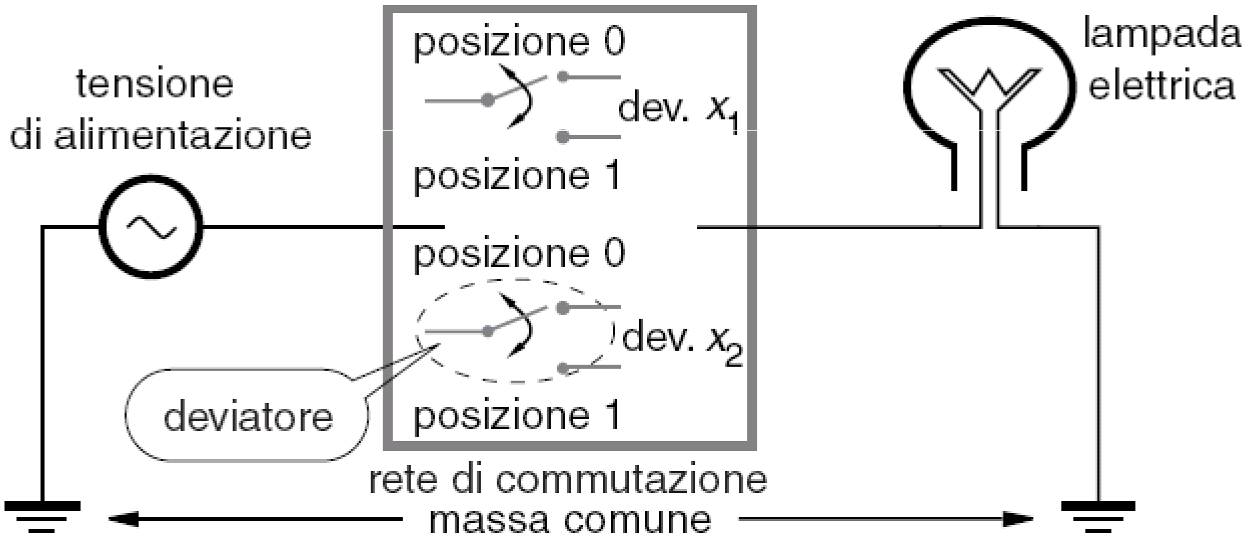
Lezione 5
Reti logiche: introduzione

ing. Alessandro Cilardo

Accademia Aeronautica di Pozzuoli
Corso Pegaso V “GArn Elettronici”

Circuiti e porte logiche

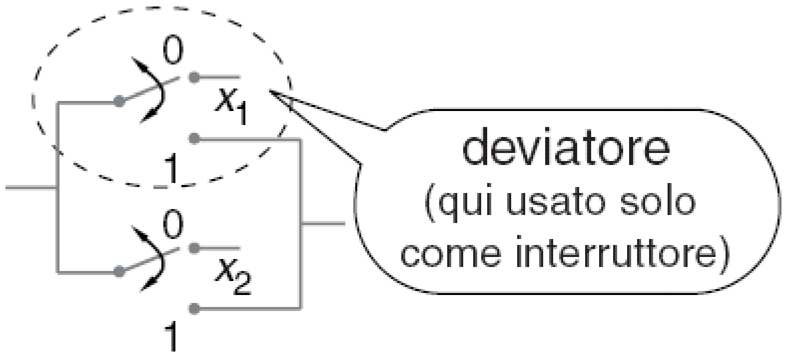
- Esempio di rete di commutazione:



(a) lampada elettrica controllata tramite due deviatori

Circuiti e porte logiche

– Se i due deviatori sono collegati in <u>parallelo</u>, la lampada è *accesa* (*f*=*1*) se almeno uno dei due deviatori è collegato (x_i=*1*)

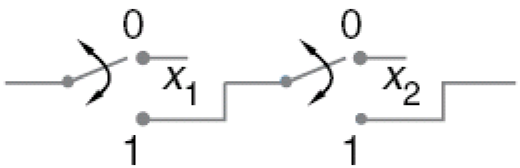


x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(b) deviatori collegati in parallelo (schema OR o somma logica)

Circuiti e porte logiche

– Se i due deviatori sono collegati in <u>serie</u>, la lampada è *accesa* ($f=1$) solo se entrambi i deviatori sono collegati ($x_1=1$ e $x_2=1$)

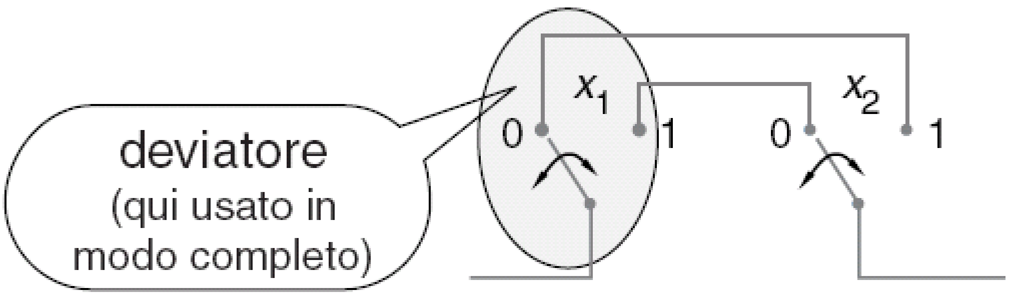


x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(c) deviatori collegati in serie (schema AND o prodotto logico)

Circuiti e porte logiche

– Nella configurazione sottostante, la lampada è *accesa* ($f=1$) solo se i deviatori sono collegati in maniera differente ($x_1=1$ e $x_2=0$ oppure $x_1=0$ e $x_2=1$)

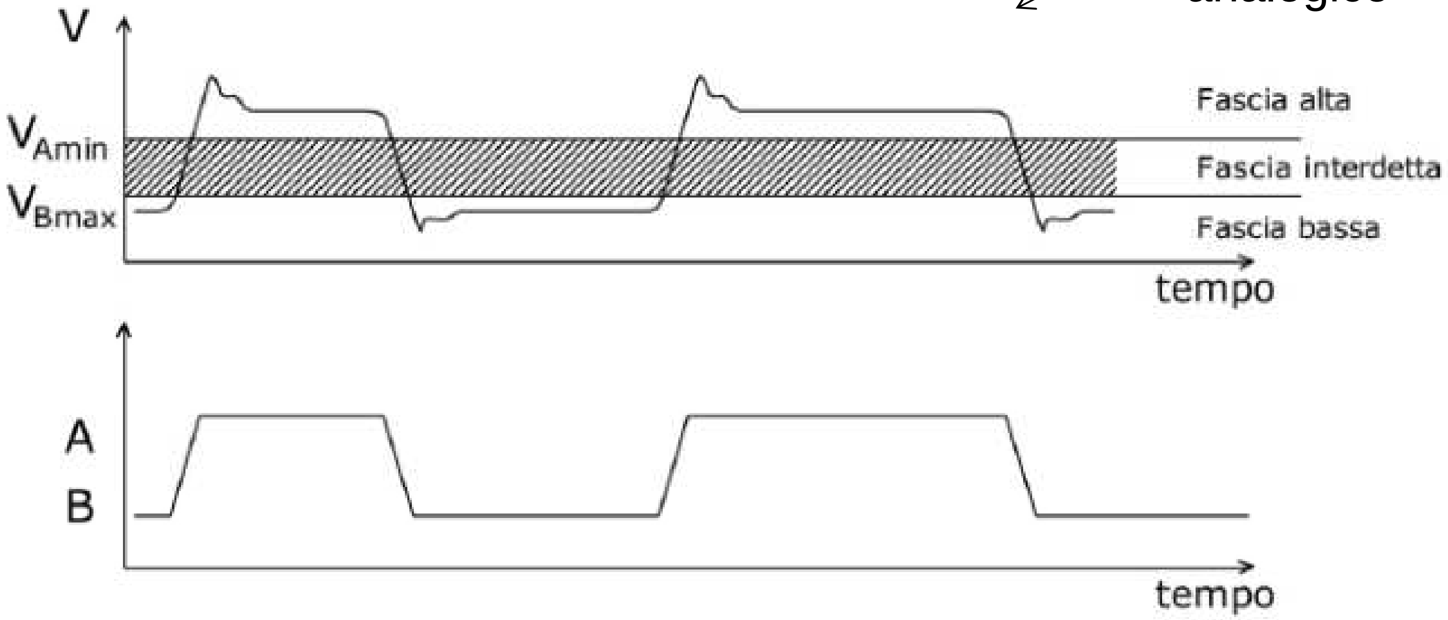


x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(d) schema di collegamento XOR (differenza simmetrica)

Segnali elettrici e valori logici

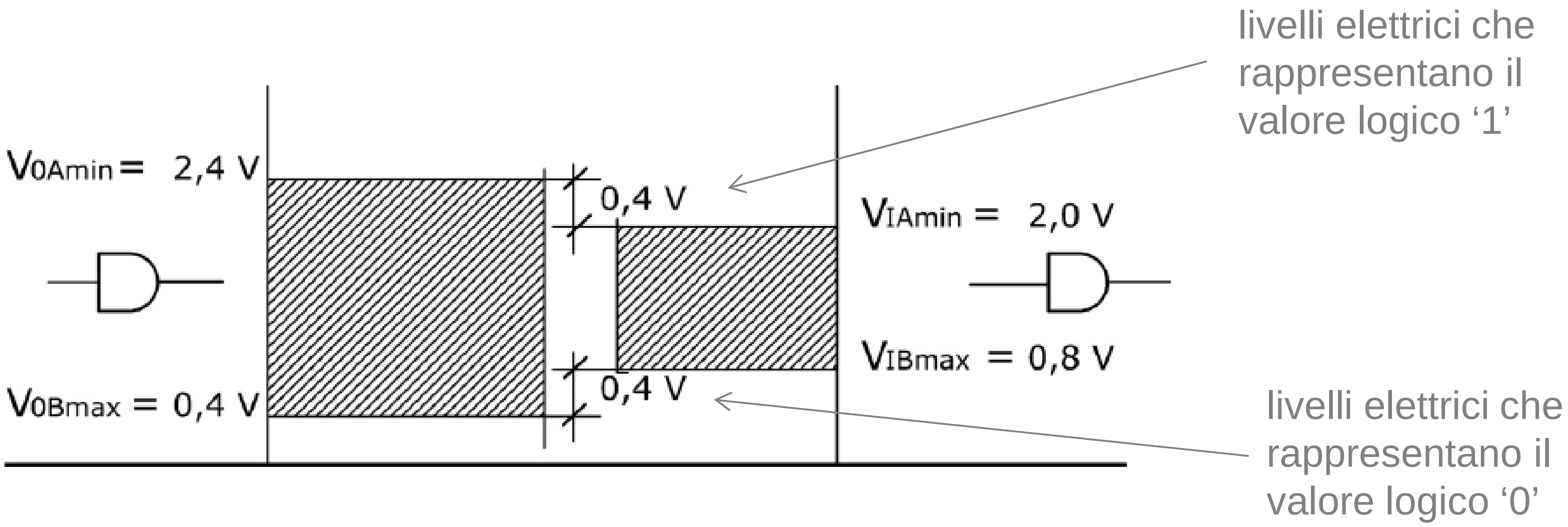
segnale elettrico
analogico



“interpretazione” logica
del segnale come
sequenza di ‘1’ e ‘0’

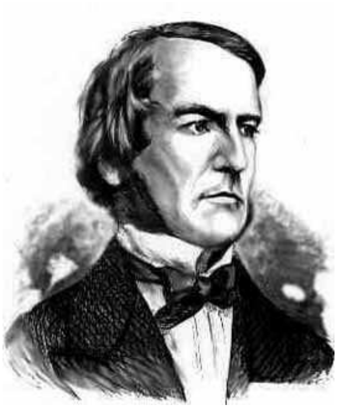
Esempio: porte logiche TTL

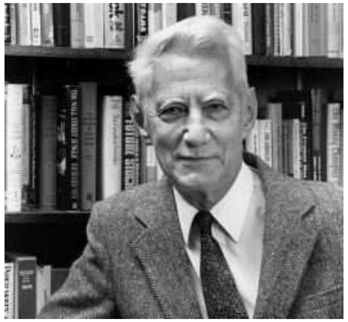
- Esempio:
- soglie e margine di rumore per la tecnologia TTL



Da Boole a Shannon

- Ci serve un *sistema formale* per descrivere e manipolare segnali logici
- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
  - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*
- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
  - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*





Algebra di Boole

- L'Algebra di Boole può essere vista come un'algebra astratta definita su un *supporto* K = {0,1} e tre operazioni
  - AND ($\cdot$): $K \times K \rightarrow K$
  - OR (+): $K \times K \rightarrow K$
  - NOT ($\neg$): $K \rightarrow K$

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	NOT x
0	1
1	0

Algebra di Boole: postulati (1)

•Un'Algebra di Boole può essere definita in qualsiasi struttura goda dei seguenti postulati:

- Proprietà commutativa:

  $x \cdot y = y \cdot x \qquad\qquad x + y = y + x$
- Proprietà associativa:

  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

  $(x + y) + z = x + (y + z)$
  - per la proprietà associativa posso definire AND e OR a più di 2 operandi. Ad esempio: $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Proprietà di idempotenza:

  $x \cdot x = x \qquad\qquad x + x = x$
- Proprietà di assorbimento:

  $x \cdot (x + y) = x \qquad\qquad x + (x \cdot y) = x$

Algebra di Boole: proprietà (2)

- Proprietà distributiva

  $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

  $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
- Proprietà di convoluzione

  $\neg (\neg x) = x$
- Proprietà del minimo e del massimo:

  $x \cdot 0 = 0$

  $x + 1 = 1$

AdB: riepilogo dei postulati

Commutativa	**P1**	$a+b=b+a$	**P'1**	$a\bullet b=b\bullet a$
Associativa	**P2**	$(a+b)+c=a+(b+c)$	**P'2**	$(a\bullet b)\bullet c=a\bullet(b\bullet c)$
Idempotenza	**P3**	$(a+a)=a$	**P'3**	$(a\bullet a)=a$
Assorbimento	**P4**	$a+(a\bullet b)=a$	**P'4**	$a\bullet(a+b)=a$
Distributiva	**P5**	$a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c$	**P'5**	$a+(b\bullet c)=(a+b)\bullet(a+c)$
Min e max	**P6**	$a\bullet 0=0$	**P'6**	$a+1=1$
Complemento	**P7**	$a\bullet(\bar{a})=0$	**P'7**	$a+(\bar{a})=1$

Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

Teoremi di De Morgan

- Utili quando sia necessario realizzare una funzione contenente OR avendo a disposizione solo AND e viceversa
  - (in entrambi i casi avendo sempre a disposizione anche la NOT)

$$\neg (x \cdot y) = (\neg x) + (\neg y)$$

$$\neg (x + y) = (\neg x) \cdot (\neg y)$$

AdB: altre proprietà utili

- *0* ed *1* sono l'uno il complemento dell'altro

$$\neg 0 = 1 \qquad\qquad \neg 1 = 0$$

- *Convoluzione*: negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso

$$\neg(\neg\, a) = a$$

- *0* è l'elemento neutro della somma

$$a + 0 = a$$

- *1* è l'elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = a$$

- Assorbimento del complemento

$$a + (\neg\, a)b = a + b$$

Assorbimento del complemento

- Esempio di dimostrazione

$$a + (\neg\, a)b = a + b$$

- Per la dimostrazione usare la proprietà distributiva ed infine il complemento

$$a + (\neg\, a)b \;=\; a + ab + (\neg\, a)a + (\neg\, a)b =$$
$$[a + (\neg\, a)]\,(a+b) \;=\; a+b$$

Principio di eliminazione

- Nell'algebra di Boole ***non vale il principio di eliminazione***
- $x+y=x+z$ non implica necessariamente $y=z$
- L'implicazione vale se è verificata la condizione aggiuntiva $x \cdot y=x \cdot z$

Algebre di Boole

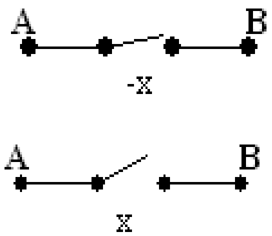
- La definizione di AdB non specifica quale sia K e come siano definite le operazioni “+” , “·” e “¬”
  - Specifica soltanto un insieme di proprietà che devono essere soddisfatte da tali operazioni
- Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole , uno dei quali è quello introdotto all’inizio
- Altri possibili modelli di algebra di Boole:
  - l’algebra dei circuiti
  - l’algebra della logica delle proposizioni
  - l’algebra degli insiemi

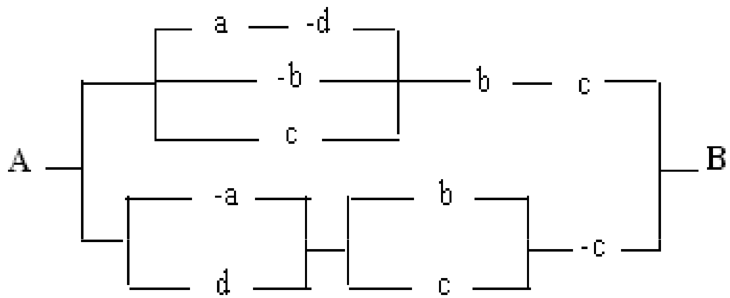
L'Algebra dei circuiti

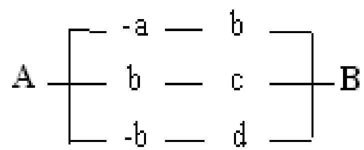
- I circuito logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori , convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1.
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per il quale il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
  - PORTE LOGICHE
- Nelle reti logiche *unilaterali*, le uscite della rete corrispondono a valori di grandezze elettriche misurate in opportuni punti del circuito; il flusso dell'elaborazione procede fisicamente in un'unica direzione, dai segnali di ingresso verso i segnali di uscita
  - Es. la d.d.p. misurata rispetto a massa
- Nelle reti logiche *bilaterali*, invece, l'uscita della rete è determinata dalla presenza o dall'assenza di "contatto" tra due punti della rete.

Algebra dei circuiti: reti bilaterali

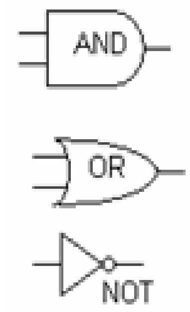
- reti bilaterali

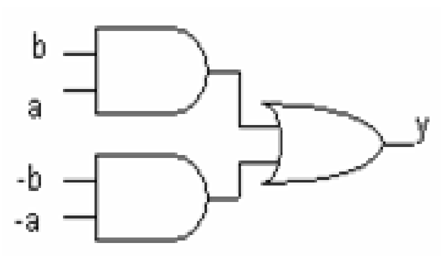






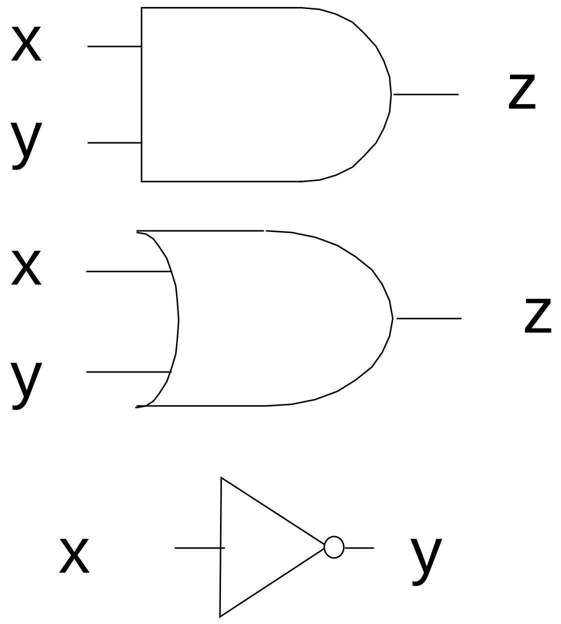
- reti unilaterali





Porte logiche o *gate*

Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



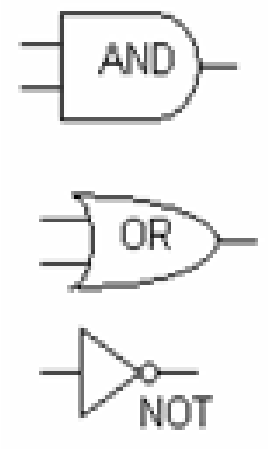
z = x AND y

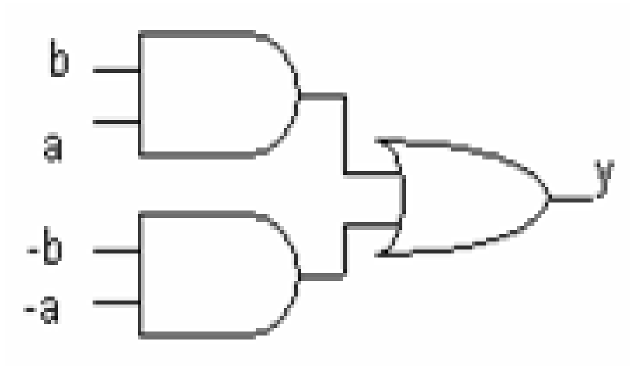
z = x OR y

y = NOT x

Algebra dei circuiti: reti unilaterali

Rete unilaterale: il flusso di informazione procede in un unico senso (ingresso→uscita)





Variabili e funzioni booleane

- Elementi del sostegno dell'algebra *K* → ***valori booleani***
- Variabili che possono assumere valori booleani → ***variabili booleane***
- Funzioni di variabili booleane in *K* → ***funzioni booleane***

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Le variabili possono essere a loro volta funzioni booleane
- Un insieme *F* di funzioni sul sostegno di un'algebra si dice **funzionalmente completo** se *qualsiasi* funzione dell'algebra può essere ottenuta come composizione di funzioni appartenenti ad *F*

Tabelle di verità

- Se l’algebra è finita, qualsiasi funzione può in linea di principio essere rappresentata mediante una tabella, definita ***tabella di verità***

Esempio di tabella di verità

#	x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	x_2x_3	$\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2x_3 = f_1$
0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

Tabella di verità dell'espressione logica $\overline{x}_1\overline{x}_2 + x_2x_3 = f_1$.

Tabelle di verità

- Funzione algebrica
  - Funzione definita in maniera tabellare per cui alla variabile dipendente sono associate tutte le possibili combinazioni delle n variabili indipendenti

righe della tabella di verità: $N=2^n$ *numero delle ripetizioni di 2 valori su n posti*

Numero di differenti modi di riempire le righe della tabella: $M=2^N=2^{2^\wedge n}$ *numero delle ripetizioni di 2 valori su N posti*

ove:

- n=numero delle variabili indipendenti
- N=numero totale di punti della funzione
- M=numero totale delle funzioni di n variabili

Esempio: Funzioni di due variabili

n = 2 → N=2^2=4 righe nella tabella di verità
M = 2^4 = 16 differenti modi di riempire la tabella di verità
Ovvero, esistono16 diverse funzioni booleane di due variabili:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Funzioni di due variabili

f	algebrica	nome	simb-	f	algebrica	nome	simb-
f_0	0	**contraddizione**		f_8	$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$	NOR	$x \downarrow y$
f_1	$x \cdot y$	congiunzione-AND	$x \cdot y$	f_9	$\bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y$	equivalenza	$x \equiv y$ 1
f_2	$x \cdot \bar{y}$	and-not-y		f_{10}	$\bar{y}$	nony	$\bar{y}$
f_3	x	x		f_{11}	$x + \bar{y}$	implicazione	$y \rightarrow x$
f_4	$\bar{x} \cdot y$	and-not-x		f_{12}	$\bar{x}$	nonx	$\bar{x}$
f_5	y	y		f_{13}	$\bar{x} + y$	implicazione	$x \rightarrow y$
f_6	$\bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$	oresclusivo	$x \oplus y$	f_{14}	$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$	nand	$x \uparrow y$
f_7	$x + y$	disgiunzione.OR	$x + y$	f_{15}	1	tautologia	