Corso di Calcolatori Elettronici I
A.A. 2012-2013

Minimizzazione degli stati nelle Macchine Sequenziali

ing. Alessandro Cilardo

Accademia Aeronautica di Pozzuoli
Corso Pegaso V “GArn Elettronici”

Funzioni uscita e stato prossimo

- L'uscita e lo stato prossimi possono considerarsi funzioni della sequenza di ingressi J_k applicata a partire da un certo stato iniziale, e dallo stato iniziale stesso q_0:

  $$u_\mathrm{k} = \lambda(q_0, J_k)$$
  $$q_{k+1} = \delta(q_0, J_k)$$

  - Se λ è definita ovunque, la macchina si dice **completa**
- Un'uscita potrebbe essere definita per J_k e non per un J_j con $k>j$
  - → sequenza J_j *non applicabile* in q_0

Equivalenza

- E’ possibile che due macchine (eventualmente di diverso costo realizzativo) abbiano lo stesso comportamento?
- Definiamo meglio l’idea di “stesso comportamento”

  → devono reagire nello stesso modo (con le stesse uscite u_k) alle stesse sequenze di ingressi J_k per qualsiasi sequenza e qualsiasi stato iniziale q_0
- *Stati equivalenti* in macchine complete*:*
  - producono la stessa sequenza di uscite per qualsiasi sequenza di ingressi J_k ad essi applicata

Equivalenza

- Un modo per riconoscere stati equivalenti (fondamentale negli algoritmi che vedremo) è usare la *proprietà ricorsiva* degli stati equivalenti:

  Due stati sono equivalenti se:

  - *sono equivalenti tutte le possibili coppie dei loro stati successivi*
  - *sono uguali le uscite che i due stati producono per tutti i possibili valori degli ingressi applicati*

- I due stati possono appartenere anche alla stessa macchina
- Due macchine *complete* ***M*** e ***M'*** sono **equivalenti** se per ciascuno stato ***q*** di ***M*** esiste almeno uno stato ***q'*** di ***M'*** ad esso equivalente e, viceversa

Equivalenza e macchine incompete

Materiale facoltativo

- La definizione precedente non può essere applicata così com'è alle macchine incomplete

  → non tutte le possibili sequenze sono *applicabili* a tutti gli stati
- In luogo dell'equivalenza, si introducono i concetti di
  - *Compatibilità* tra stati
  - *Inclusione* tra macchine

Stati compatibili

Materiale facoltativo

- Due stati sono compatibili se *per ogni* sequenza di ingressi applicabili ad *entrambi,* le uscite prodotte sono identiche
- A differenza della relazione vista prima per macchine complete, la compatibilità **NON** è una relazione di equivalenza:

  Gode delle proprietà:
  - Riflessiva
  - Simmetrica
  - Ma NON di quella transitiva
- Ciò complica la ricerca di macchine equivalenti minime

Compatibilità

Materiale facoltativo

- Così come l'equivalenza, anche la compatibilità può essere definita ricorsivamente
- Due stati sono compatibili se tutti i possibili stati prossimi sono compatibili, e tutte le possibili uscite sono uguali
- Non essendo una relazione di equivalenza, non è possibile utilizzare le proprietà delle classi di equivalenza.
- Si generalizza con il concetto di *famiglia di insiemi di stati compatibili massimi*

Compatibilità

Materiale facoltativo

- Per le macchine incomplete, non si parla quindi di equivalenza, ma di *inclusione*:
- Una macchina ***M'*** ne include una ***M*** *in una coppia di stati* ***q*** e ***q'*** se tutte le sequenze di ingressi applicabili ad ***M*** a partire da ***q*** lo sono anche per ***M'*** a partire da ***q'*** e producono la stessa sequenza di uscite
- Se è possibile trovare per ciascuno stato di ***M*** uno stato ***q'*** che soddisfa la precedente definizione, allora ***M'*** include ***M*** → è possibile usare ***M'*** in luogo della ***M***
- ***M*** ed ***M'*** possono includersi l'un l'altra

  → le due macchine sono allora *equivalenti*

Problema della Minimizzazione

- Tra due macchine equivalenti (o compatibili), conviene scegliere quella con il minor numero di stati

  → problema di minimizzazione: *individuare la macchina con il minor numero di stati tra tutte le possibili macchine equivalenti*

- Partendo da una macchina $\boldsymbol{M(Q,I,U,\tau,\omega)}$, vogliamo trovare una macchina $\boldsymbol{M'(Q',I,U,\tau',\omega')}$ equivalente ad **M** e con il minor numero di stati
- Partiamo dalla famiglia di insiemi di stati compatibili massimi $\boldsymbol{F=(S_1,S_2,\ldots,S_n)}$

Problema della Minimizzazione

- La ***F*** gode delle seguenti proprietà, essenziali nei metodi di minimizzazione:
  - Gli elementi ***S*** di ***F*** sono disgiunti
  - Gli elementi ***S*** di ***F*** coprono l'insieme degli stati ***Q***
  - Tutti gli stati di un elemento ***S*** di ***F*** portano alla stessa uscita (eventualmente non definita)
  - ***F*** è chiusa: da due stati di uno stesso elemento ***S*** di ***F*** si arriva a due stati che appartengono ad una stessa ***S'***

- Ricerchiamo la ***M'(F,I,U,τ',ω')***

  → ha un numero di stati non superiore a ***M***

Ricerca della famiglia F

- Algoritmo del partizionamento
- Metodo tabellare di Paull-Unger

- Procedono per “eliminazione”

  Partono da una presunta ***F*** (inizialmente coincidente con l’insieme di tutti gli stati ***Q***) e cercano di individuare incompatibilità fin quando è possibile

Algoritmo del partizionamento

- Si individuano gli stati incompatibili rispetto alle uscite per ciascun ingresso
- Le partizioni individuate si esaminano rispetto allo stato prossimo
- Si itera fintantoché tutte le partizioni non verificano la definizione di compatibilità

Algoritmo del partizionamento

Esempio

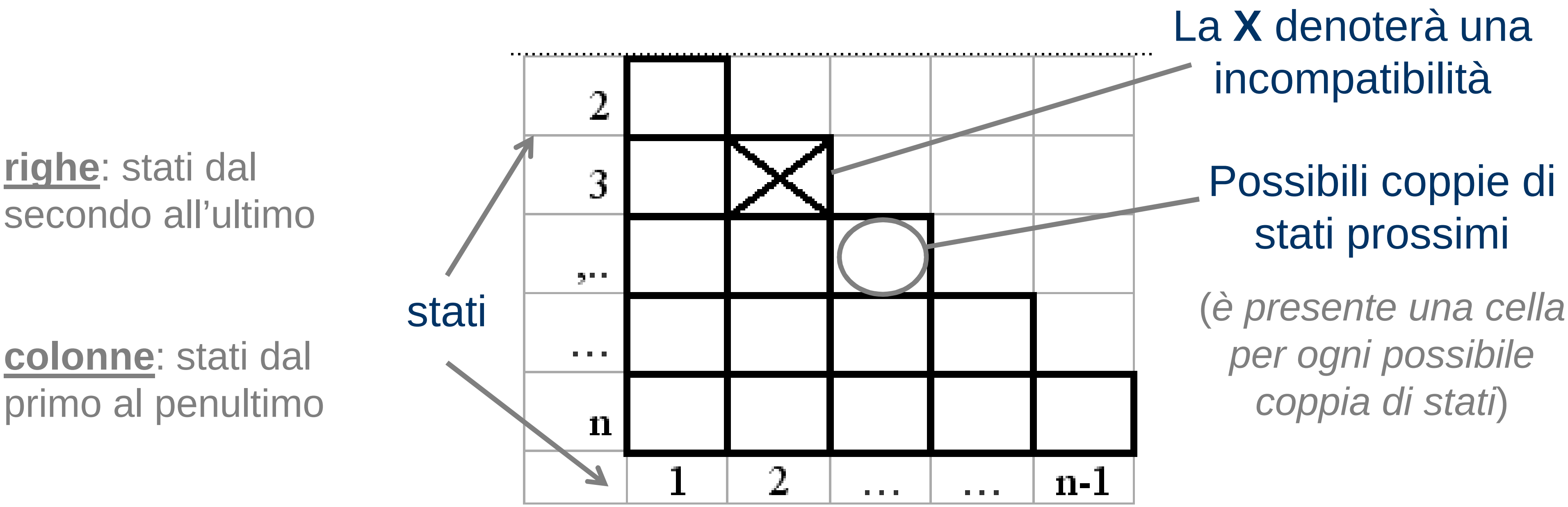
statii	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	$q_7/\ u_2$
q_2	$q_4/\ u_2$	q_7/u_1
q_3	q_1/u_1	$q_5/\ u_2$
q_4	q_2/u_2	q_3/u_1
q_5	q_4/u_1	$q_3/\ u_2$
q_6	q_1/u_2	$q_2/\ u_2$
q_7	q_5/u_1	q_5/u_2

i	Elemento in esame	Analisi uscite	Partizione elementi	Famiglia
				(1,2,3,4,5,6,7)
1	(1,2,3,4,5,6,7)	u_1: (1,3,5,7); u_2:(2,4,6)	(1,3,5,7) (2,4,6)	(1,3,5,7) (2,4,6)
2	(1,3,5,7)	u_2: (1,3,5,7)		
2	(2,4,6)	u_1:(2,4); u_2: (6)	(2,4) (6)	(1,3,5,7) (2,4,)(6)

i	Stati seguenti	Analisi stati seguenti	Partizione elemento	Famiglia
Passo 3				(1,3,5,7) (2,4) (6)
1	(1,3,5,7)→(2,1,4,5)	(2,4) (1,5)→(1,5) (3,7)	(1,5) (3,7)	(1,5) (3,7) (2,4) (6)
1	(2,4)→(4,2)			
2	(2,4)→(7,3)			

Metodo di Paull-Unger

- Riorganizza il procedimento visto prima in forma di griglia triangolare
- Ogni cella rappresenta una coppia di stati diversi, (***S**$_i$*, ***S**$_j$*), con ***i≠j***



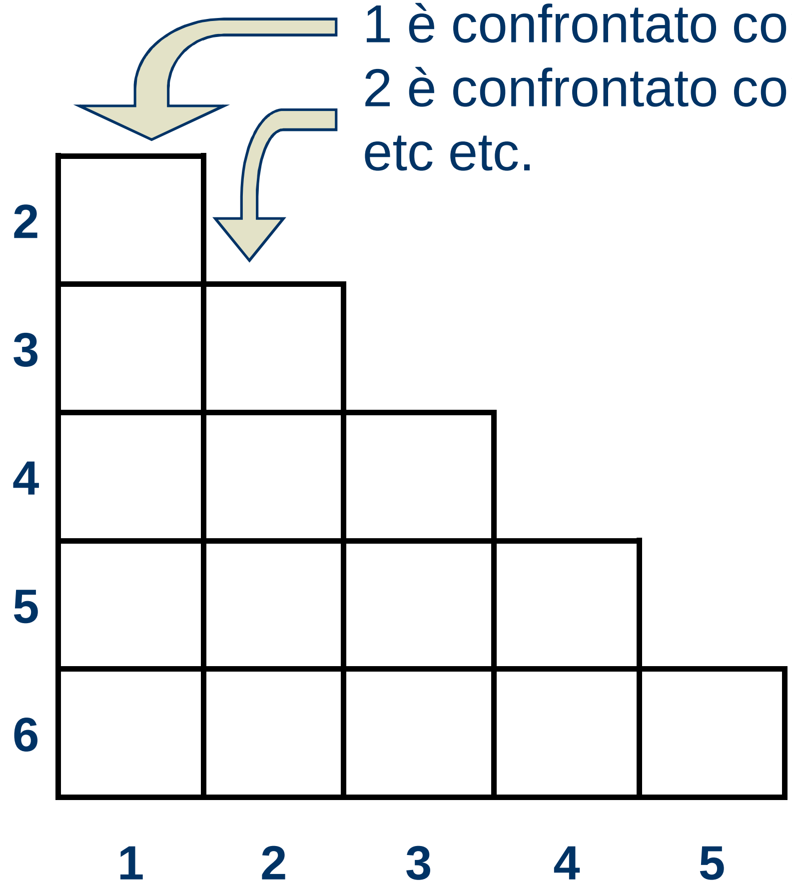
Metodo di Paull-Unger

- Si marcano come incompatibili le coppie di stati che portano ad uscite differenti *per almeno un ingresso*
  - sicuramente violano la proprietà ricorsiva degli stati equivalenti
- Se la coppia di stati produce la stessa uscita *per ogni valore dell'ingresso*:
  - sono stati *potenzialmente* equivalenti
  - si riportano quindi nella corrispondente cella le coppie di differenti stati prossimi prodotti per ciascun ingresso
- Terminato lo scorrimento della griglia, si riparte dall'inizio, verificando, per ciascuna cella rimasta non marcata, se le corrispondenti coppie di stati prossimi sono incompatibili
  - questo determina l'incompatibilità della cella stessa
- Si termina quando non è più possibile marcare altre celle
  - dalle celle non marcate è possibile derivare le classi di equivalenza

Metodo di Paull-Unger

	i_1	i_2
1	2/A	4/B
2	3/B	5/A
3	5/A	4/B
4	2/B	2/B
5	2/B	5/A
6	3/A	5/B

Ogni stato è confrontato con tutti gli altri, ma solo una volta:
1 è confrontato con 2…6
2 è confrontato con 3…6
etc etc.



Metodo di Paull-Unger

	i_1	i_2
1	2/A	4/B
2	3/B	5/A
3	5/A	4/B
4	2/B	2/B
5	2/B	5/A
6	3/A	5/B

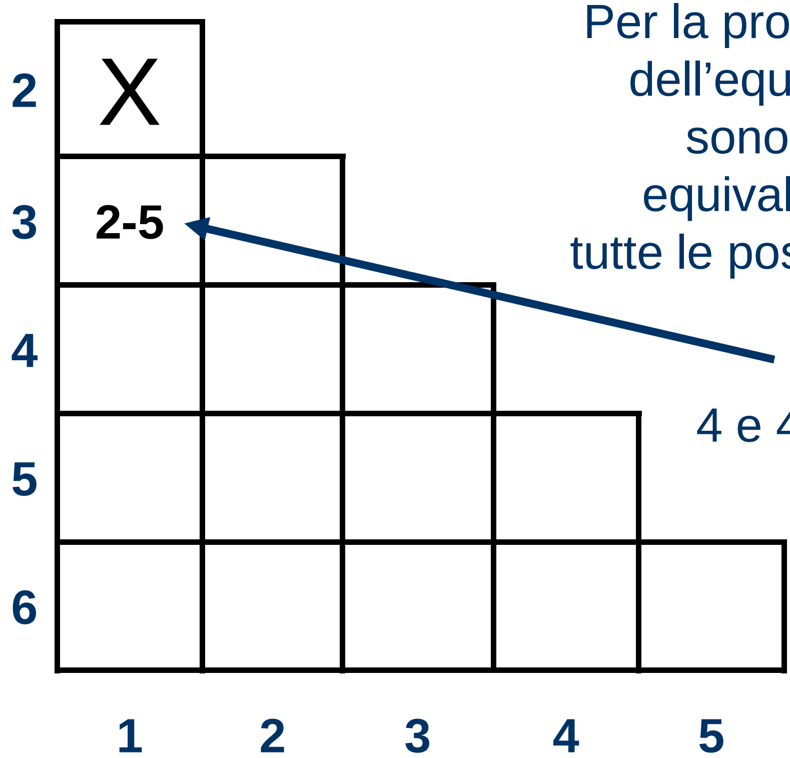
Confrontiamo lo stato 1 con 2:
Per entrambi gli ingressi, le uscite sono diverse → 1 e 2 sono non-equivalenti

2	X				
3					
4					
5					
6					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**

Metodo di Paull-Unger

	i_1	i_2
1	2/A	4/B
2	3/B	5/A
3	5/A	4/B
4	2/B	2/B
5	2/B	5/A
6	3/A	5/B

Confrontiamo lo stato 1 con 3:
Le uscite sono uguali per entrambi gli ingessi
→ 1 e 2 *potrebbero* essere equivalenti

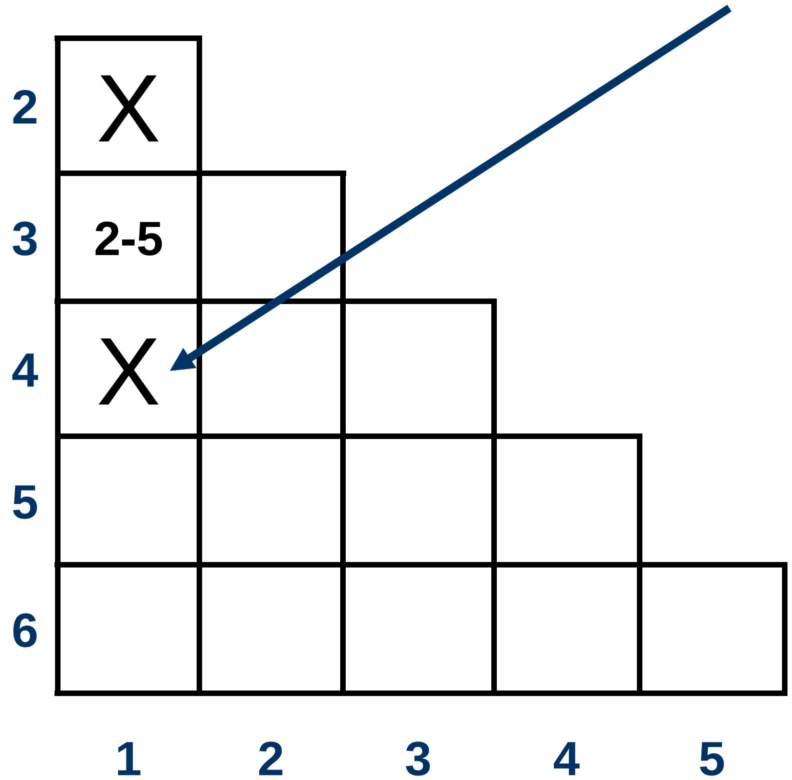


Per la proprietà ricorsiva dell'equivalenza, 1 e 3 sono effettivamente equivalenti se lo sono tutte le possibili coppie di stati prossimi: 2 e 5 (per i_1) e 4 e 4 (per i_2), che è *sempre vera*

Metodo di Paull-Unger

	i_1	i_2
1	2/A	4/B
2	3/B	5/A
3	5/A	4/B
4	2/B	2/B
5	2/B	5/A
6	3/A	5/B

Confrontiamo lo stato 1 con 4:
C'è almeno un ingresso per cui le uscite sono diverse → 1 e 4 sono non-equivalenti



Metodo di Paull-Unger

	i_1	i_2
1	2/A	4/B
2	3/B	5/A
3	5/A	4/B
4	2/B	2/B
5	2/B	5/A
6	3/A	5/B

Al termine del primo passo, abbiamo individuato tutte le coppie che sono sicuramente non-equivalenti in base alle uscite (considerate per tutti i possibili ingressi).

2	X				
3	**2-5**	X			
4	X	X	X		
5	X	**2-3**	X	X	
6	**2-3** **4-5**	X	**5-3** **4-5**	X	X
	1	**2**	**3**	**4**	**5**

Le caselle non barrate sono coppie di *possibili* stati equivalenti. Bisogna adesso ripercorre la tabella per verificare l'equivalenza degli stati prossimi

Metodo di Paull-Unger

Scorriamo come prima la tabella

L’equivalenza 1-3 dipende dall’equivalenza 2-5, che al momento non è nota

	1	2	3	4	5
2	X				
3	2-5	X			
4	X	X	X		
5	X	2-3	X	X	
6	2-3 4-5	X	5-3 4-5	X	X

Metodo di Paull-Unger

2	X				
3	2-5	X			
4	X	X	X		
5	X	2-3	X	X	
6	~~2-3 4-5~~	X	5-3 4-5	X	X
	1	**2**	**3**	**4**	**5**

Gli stati 1 e 6 sono sicuramente non-equivalenti poiché non lo sono 2 e 3

Il procedimento si itera fino quando non è più possibile individuare coppie non equivalenti.

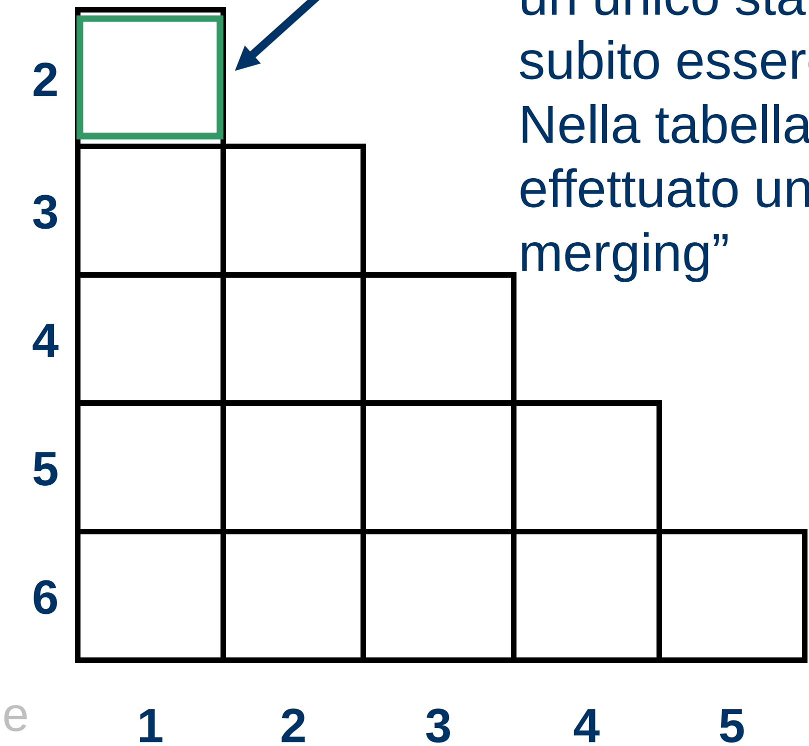
Nell'esempio, continuando ad applicare il procedimento, si può facilmente vedere che non sono presenti stati equivalenti

Row-merging

	i_1	i_2
1	6/A	4/B
2	6/A	4/B
...	...	...
...	...	...

Nel caso che per due stati (ad ed. 1 e 2) siano uguali tutte le possibili uscite e tutti i possibili stati prossimi, l'equivalenza è sempre garantita

I due stati sono di fatto un unico stato e possono subito essere accorpati. Nella tabella può essere effettuato un "row-merging"



Row-merging

	I_1	i_2
1	6/A	4/B
2	6/A	4/B
...	...	...
...	...	...

Si elimina uno dei due (ad esempio lo stato ‘2’)
Nella tabella, dovunque compaia ‘2’ come stato prossimo, si sostituisce ‘1’

Paull-Unger: esempio

Riconosciamo immediatamente le equivalenze tra

10 - 14: sostituiti con 10 (row-merging)

8 – 16 (essendo 10≈14): sostituiti con 8

4 – 12 (essendo 8≈16): sostituiti con 4

5 – 7 (essendo 10 ≈14): sostituiti con 5

11 – 13 - 15: sostituiti con 11

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	q_3/ u_1
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	q_7/ u_1
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_{12}/u_1	q_{13}/u_1
q_7	q_{14}/u_1	q_{15}/u_1
q_8	q_1/u_2	q_{14}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{12}	q_{16}/u_1	q_9/u_1
q_{13}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{14}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{15}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{16}	q_1/u_2	q_{10}/u_1

Paull-Unger: esempio

Riconosciamo immediatamente le equivalenze tra

10 - 14: sostituiti con 10 (row-merging)

11 – 13 - 15: sostituiti con 11

8 – 16 (essendo 10≈14): sostituiti con 8

4 – 12 (essendo 8≈16): sostituiti con 4

5 – 7 (essendo 10 ≈14): sostituiti con 5

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	q_3/ u_1
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	q_7/ u_1
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_{12}/u_1	q_{13}/u_1
q_7	q_{14}/u_1	q_{15}/u_1
q_8	q_1/u_2	q_{14}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{12}	q_{16}/u_1	q_9/u_1
q_{13}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{14}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{15}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{16}	q_1/u_2	q_{10}/u_1

Paull-Unger: esempio

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	$q_3/\ u_1$
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	$q_7/\ u_1$
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_{12}/u_1	q_{13}/u_1
q_7	q_{14}/u_1	q_{15}/u_1
q_8	q_1/u_2	q_{14}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{12}	q_{16}/u_1	q_9/u_1
q_{13}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{14}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{15}	q_2/u_1	q_1/u_1
q_{16}	q_1/u_2	q_{10}/u_1

10 - 14: sostituiti con 10 (row-merging)
11 – 13 - 15: sostituiti con 11
8 – 16 (essendo 10≈14): sostituiti con 8
4 – 12 (essendo 8≈16): sostituiti con 4
5 – 7 (essendo 10 ≈14): sostituiti con 5

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	$q_3/\ u_1$
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	$q_5/\ u_1$
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_4/u_1	q_{11}/u_1
q_8	q_1/u_2	q_{10}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1

Paull-Unger: esempio

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	$q_3/\ u_1$
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	$q_5/\ u_1$
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_4/u_1	q_{11}/u_1
q_8	q_1/u_2	q_{10}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1

In questo caso, gli stati hanno tutti insiemi di uscite uguali, tranne 8, che quindi sicuramente è non-equivalente rispetto a tutti gli altri. Procediamo quindi con il metodo di Paull-Unger cercando equivalenze tra gli stati rimanenti: 1,2,3,4,5,6,9,10,11

Paull-Unger: esempio

	1	2	3	4	5	6	9	10
2	2-4 3-5							
3	2-6 3-5	4-6						
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9					
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11				
6	2-4 3-11	5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10			
9	1-2 3-9	1-4 5-9	1-6 5-9	1-8	1-10 9-11	1-4 9-11		
10	2-4 1-3	1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	1-11	1-4 1-9	
11	1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	2-8 1-9	2-10 1-11	2-4 1-11	1-2 1-9	2-4

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	q_3/ u_1
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	q_5/ u_1
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_4/u_1	q_{11}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1

Paull-Unger: esempio

Essendo 8 non equivalente con nessun altro stato, possono essere barrate tutte le caselle che contengono 8

2	2-4 3-5							
3	2-6 3-5	4-6						
4	~~2-8 3-9~~	~~4-8 5-9~~	~~6-8 5-9~~					
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	~~8-10 9-11~~				
6	2-4 3-11	5-11	4-6 5-11	~~4-8 9-11~~	4-10			
9	1-2 3-9	1-4 5-9	1-6 5-9	~~1-8~~	1-10 9-11	1-4 9-11		
10	2-4 1-3	1-5	4-6 1-5	~~4-8 1-9~~	4-10 1-11	1-11	1-4 1-9	
11	1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	~~2-8 1-9~~	2-10 1-11	2-4 1-11	1-2 1-9	2-4
	1	2	3	4	5	6	9	10

Paull-Unger: esempio

Si procede cercando ulteriori non-equivalenze

2	2-4 3-5							
3	2-6 3-5	4-6						
4	2-8 3-9	4-8 5-9	6-8 5-9					
5	2-10 3-11	4-10 5-11	6-10 5-11	8-10 9-11				
6	2-4 3-11	5-11	4-6 5-11	4-8 9-11	4-10			
9	1-2 3-9	1-4 5-9	1-6 5-9	1-8	1-10 9-11	1-4 9-11		
10	2-4 1-3	1-5	4-6 1-5	4-8 1-9	4-10 1-11	1-11	1-4 1-9	
11	1-3	2-4 1-5	2-6 1-5	2-8 1-9	2-10 1-11	2-4 1-11	1-2 1-9	2-4
	1	2	3	4	5	6	9	10

Paull-Unger: esempio

Si itera il procedimento fin quando non è possibile trovare ulteriori condizioni di non-equivalenza.
La situazione “stabile” così trovata corrisponde al fatto che la partizione degli stati così trovata è *chiusa*

2	X 2-4 3-5							
3	2-6 3-5	X 4-6						
4	X 2-8 3-9	X 4-8 5-9	X 6-8 5-9					
5	2-10 3-11	X 4-10 5-11	6-10 5-11	X 8-10 9-11				
6	X 2-4 3-11	5-11	X 4-6 5-11	X 4-8 9-11	X 4-10			
9	X 1-2 3-9	X 1-4 5-9	X 1-6 5-9	X 1-8	X 1-10 9-11	X 1-4 9-11		
10	X 2-4 1-3	1-5	X 4-6 1-5	X 4-8 1-9	X 4-10 1-11	1-11	X 1-4 1-9	
11	1-3	X 2-4 1-5	2-6 1-5	X 2-8 1-9	2-10 1-11	X 2-4 1-11	X 1-2 1-9	X 2-4
	1	2	3	4	5	6	9	10

Paull-Unger: esempio

	1	2	3	4	5	6	9	10
2	X 2-4 3-5							
3	2-6 3-5	X 4-6						
4	X 2-8 3-9	X 4-8 5-9	X 6-8 5-9					
5	2-10 3-11	X 4-10 5-11	6-10 5-11	X 8-10 9-11				
6	X 2-4 3-11	5-11	X 4-6 5-11	X 4-8 9-11	X 4-10			
9	X 1-2 3-9	X 1-4 5-9	X 1-6 5-9	X 1-8	X 1-10 9-11	X 1-4 9-11		
10	X 2-4 1-3	1-5	X 4-6 1-5	X 4-8 1-9	X 4-10 1-11	1-11	X 1-4 1-9	
11	1-3	X 2-4 1-5	2-6 1-5	X 2-8 1-9	2-10 1-11	X 2-4 1-11	X 1-2 1-9	X 2-4

Osservando la griglia, si nota che:
- gli stati 1,3,5,11 sono tra loro equivalenti
- 2,6,10 sono tra loro equivalenti
- 4 non è equivalente a nessun altro
- 9 non è equivalente a nessun altro

Paull-Unger: esempio

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	q_3/ u_1
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	q_5/ u_1
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_4/u_1	q_{11}/u_1
q_8	q_1/u_2	q_{10}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1

- gli stati 1,3,5,11 sono equivalenti
- 2,6,10 sono equivalenti
- 4 non è equivalente a nessun altro
- 9 non è equivalente a nessun altro
- 8 non è equivalente a nessun altro

Possiamo quindi creare i nuovi stati da usare nella macchina ridotta:

S_0 = (1,3,5,11)
S_1 = (2,6,10)
S_2 = (4)
S_3 = (9)
S_4 = (8)

Paull-Unger: esempio

	i_1	i_2
q_1	q_2/u_1	q_3/ u_1
q_2	q_4/u_1	q_5/u_1
q_3	q_6/u_1	q_5/ u_1
q_4	q_8/u_1	q_9/u_1
q_5	q_{10}/u_1	q_{11}/u_1
q_6	q_4/u_1	q_{11}/u_1
q_8	q_1/u_2	q_{10}/u_1
q_9	q_1/u_1	q_9/u_1
q_{10}	q_4/u_1	q_1/u_1
q_{11}	q_2/u_1	q_1/u_1

	i_1	i_2
S_0	S_1/u_1	S_0/ u_1
S_1	S_2/u_1	S_0/u_1
S_2	S_4/u_1	S_3/ u_1
S_3	S_0/u_1	S_3/u_1
S_4	S_0/u_2	S_1/u_1

$S_0 = (1,3,5,11)$ $S_1 = (2,6,10)$

$S_2 = (4)$ $S_3 = (9)$ $S_4 = (8)$

Minimizzazione per macchine incomplete

Materiale facoltativo

- Come osservato in precedenza, nel caso di macchine incomplete non è possibile ottenere una partizione degli stati
- I differenti insiemi di stati compatibili possono sovrapporsi

  → non è detto che il numero di insiemi non possa essere superiore al numero di singoli stati
- Procediamo innanzitutto per ricerca degli insiemi compatibili massimi
- Risolviamo poi un problema di copertura minima con gli insiemi così individuati

Minimizzazione per macchine incomplete

Materiale facoltativo

- L'algoritmo procede creando tutti i possibili insiemi compatibili eventualmente scorporando un insieme in due separando SOLTANTO eventuali stati incompatibili
- Es:

  (1,2,3,4) → (1,2,3) (1,2,4) se $3 \not\approx 4$
- Essendo interessati ad insiemi massimi, elimineremo di volta in volta insiemi contenuti in altri

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_5	$-/-$	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	$-/-$	$q_5/-$	q_6/ u_4
q_7	$q_3/-$	q_7/u_4	$q_5/-$	$-/-$

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_5	$-/-$	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	$-/-$	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	q_7/u_4	$q_5/-$	$-/-$

Consideriamo inizialmente come famiglia di insiemi di compatibilità massimi quella costituita da un unico insieme che include tutti gli stati

i	Elemento in esame	Analisi uscite	Suddivisione elemento	Famiglia
Passo 1				$\boxed{(1,2,3,4,5,6,7)}$

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	$\boxed{q_2/u_2}$	$q_5/-$	$-/-$
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_5	$-/-$	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	$-/-$	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	$\boxed{q_7/u_4}$	$q_5/-$	$-/-$

Gli stati 2 e 7 sono sicuramente incompatibili poiché per i_2 producono uscite diverse (risp. u_2 e u_4)
Scorporiamo l'insieme iniziale

(1,2,3,4,5,6,7)

(1,**2**,3,4,5,6) (1,3,4,5,6,**7**)

i	Elemento in esame	Analisi uscite	Suddivisione elemento	Famiglia
Passo 1				(1,2,3,4,5,6,7)
2	(1,2,3,4,5,6,7)	$\boxed{u_2 \neq u_4 \rightarrow 2 \not\sim 7}$	(1,2,3,4,5,6)(1,3,4,5,6,7)	(1,2,3,4,5,6) (1,3,4,5,6,7)

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	$\boxed{q_4/u_2}$	$q_5/-$	$-/-$
q_5	$-/-$	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	$-/-$	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	$\boxed{q_7/u_4}$	$q_5/-$	$-/-$

Gli stati 4 e 7 sono sicuramente incompatibili poiché per i_2 producono uscite diverse (risp. u_2 e u_4). Scorporiamo l'unico dei due insiemi precedenti che contiene entrambi 4 e 7

$$(1,3,4,5,6,7) \to (1,3,5,6,\mathbf{7})\ (1,3,\mathbf{4},5,6)$$

i	Elemento in esame	Analisi uscite	Suddivisione elemento	Famiglia
Passo 1				(1,2,3,4,5,6,7)
2	(1,2,3,4,5,6,7)	$u_2 \neq u_4 \to 2 \not\sim 7$	(1,2,3,4,5,6)(1,3,4,5,6,7)	(1,2,3,4,5,6) $\boxed{(1,3,4,5,6,7)}$
2	(1,3,4,5,6,7)	$\boxed{u_2 \neq u_4 \to 4 \not\sim 7}$	(1,3,5,6,7) (1,3,4,5,6)	(1,2,3,4,5,6)(1,3,5,6,7)(1,3,4,5,6)

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	q_2/-	-/-	q_6/-
q_2	q_1/-	q_2/u_2	q_5/-	-/-
q_3	q_3/u_1	q_4/-	-/-	q_6/-
q_4	q_1/-	q_4/u_2	q_5/-	-/-
q_5	-/-	q_7/-	q_5/u_3	q_6/-
q_6	q_3/-	-/-	q_5/-	$q_6/\ u_4$
q_7	q_3/-	q_7/u_4	q_5/-	-/-

Osserviamo che tra i tre insiemi che abbiamo ottenuto è presente uno incluso in uno degli altri due. Essendo interessati ad insiemi massimi, possiamo eliminarlo

Rimangono i due insiemi (1,2,3,4,5,6) e (1,3,5,6,7)

i	Elemento in esame	Analisi uscite	Suddivisione elemento	Famiglia
Passo 1				(1,2,3,4,5,6,7)
2	(1,2,3,4,5,6,7)	$u_2 \neq u_4 \rightarrow 2 \not\sim 7$	(1,2,3,4,5,6)(1,3,4,5,6,7)	(1,2,3,4,5,6) (1,3,4,5,6,7)
2	(1,3,4,5,6,7)	$u_2 \neq u_4 \rightarrow 4 \not\sim 7$	(1,3,5,6,7) (1,3,4,5,6)	(1,2,3,4,5,6)(1,3,5,6,7)(1,3,4,5,6)
Passo 2			$\boxed{(1,3,4,5,6) \subset (1,2,3,4,5,6)}$	(1,2,3,4,5,6) (1,3,5,6,7)

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	-/-	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	-/-
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	-/-	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	-/-
q_5	-/-	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	-/-	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	q_7/u_4	$q_5/-$	-/-

A questo punto, dobbiamo cominciare a verificare la proprietà di chiusura sulla famiglia di insiemi correntemente definita.

Per ciascuno insieme della famiglia, e per ciascuno degli ingessi dobbiamo verificare che l'insieme degli stati successivi sia incluso in un unico insieme della famiglia

i	Stati seguenti	Stati incompatibili	Suddivisione elemento	Famiglia
Passo 3				(1,2,3,4,5,6) (1,3,5,6,7)
1	(1,2,3,4,5,6)→(1,1,3,1,-,3)	nessuna		
1	(1,3,5,6,7)→(1,3,-,3,3)	nessuna		

Partiamo dall'ingresso i_1

Applicando l'ingresso i_1 gli stati (1,2,3,4,5,6) generano rispettivamente gli stati (1,1,3,1,-,3). Questi sono TUTTI inclusi in un unico insieme tra quelli correntemente definiti

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_5	$-/-$	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	$-/-$	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	q_7/u_4	$q_5/-$	$-/-$

Applicando l'ingresso i_2 all'insieme (1,2,3,4,5,6) otteniamo l'insieme di stati prossimi (2,2,4,4,7,-). Questi NON appartengono tutti ad uno stesso insieme della famiglia. In particolare, 7 è incompatibile con 2 e 4. Dato che è lo stato 5 a generare 7, scorporiamo 5 insieme a tutti gli stati non incompatibili con esso (ovvero soltanto 6)

i	Stati seguenti	Stati incompatibili	Suddivisione elemento	Famiglia
Passo 3				(1,2,3,4,5,6) (1,3,5,6,7)
1	(1,2,3,4,5,6)→(1,1,3,1,-,3)	nessuna		
1	(1,3,5,6,7)→(1,3,-,3,3)	nessuna		
2	(1,2,3,4,5,6)→(2,2,4,4,7,-)	$2 \not\sim 7 \rightarrow 1,2 \not\sim 5$ $4 \not\sim 7 \rightarrow 3,4 \not\sim 5$	(1,2,3,4,6) (5,6)	

Consideriamo l'ingresso i_2

Esempio

Materiale facoltativo

i	Stati seguenti	Stati incompatibili	Suddivisione elemento	Famiglia
Passo 3				(1,2,3,4,5,6) (1,3,5,6,7)
1	(1,2,3,4,5,6)→(1,1,3,1,-,3)	nessuna		
1	(1,3,5,6,7)→(1,3,-,3,3)	nessuna		
2	(1,2,3,4,5,6)→(2,2,4,4,7,-)	$2 \not\sim 7 \to 1,2 \not\sim 5$ $4 \not\sim 7 \to 3,4 \not\sim 5$	(1,2,3,4,6) (5,6)	
Passo2	$(5,6) \subset (1,3,5,6,7)$			(1,2,3,4,6) (1,3,5,6,7)
Passo 3				
3	(1,2,3,4,6)→ (-,5,-,5,5)	nessuna		
4	(1,2,3,4,6)→ (6,-,6,-,6)	nessuna		
2	(1,3,5,6,7)→(2,4,7,-,7)	$2 \not\sim 7 \to 5,7 \not\sim 1$ $4 \not\sim 7 \to 5,7 \not\sim 3$	(5,6,7) (1,3,6)	
Passo2	$(1,3,6) \subset (1,2,3,4,6)$			(1,2,3,4,6) (5,6,7)
Passo 3				
3	(5,6,7)→(5,5,5)	nessuna		
4	(5,6,7)→(6,6,-)	nessuna		
3	**(1,2,3,4,6)→ (-,5,-,5,-)**	nessuna		
4	**(1,2,3,4,6)→ (6,-,6,-,6)**	nessuna		

Riconosciamo delle inclusioni in altri sottoinsiemi della famiglia (ovviamente non consideriamo quello che abbiamo diviso!)

Iteriamo in maniera simile con gli altri ingressi ed i nuovi insiemi

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_5	$-/-$	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	$-/-$	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	q_7/u_4	$q_5/-$	$-/-$

Trovati gli insiemi, è possibile costruire le nuove funzioni uscita e stato prossimo

i	Stato seguente	Incluso in	uscita
1	(1,2,3,4,6)→(1,1,3,1,3)	(1,2,3,4,6)	1
2	(1,2,3,4,6)→(2,2,4,4,-)	(1,2,3,4,6)	2
3	(1,2,3,4,6)→ (-,5,-,5,5)	(5,6,7)	-
4	(1,2,3,4,6)→ (6,-,6,-,6)	(5,6,7) e (1,2,3,4,6)	4
1	(5,6,7)→(-,3,3)	(1,2,3,4,6)	-
2	(5,6,7)→(7,-,7)	(5,6,7)	4
3	(5,6,7)→(5,5,5)	(5,6,7)	3
4	(5,6,7)→(6,6,-)	(5,6,7) e (1,2,3,4,6)	4

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	$-/-$	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	$-/-$
q_5	$-/-$	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	$-/-$	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	q_7/u_4	$q_5/-$	$-/-$

Trovati gli insiemi, è possibile costruire le nuove funzioni uscita e stato prossimo

In alcuni casi, la scelta NON è univoca !!

i	Stato seguente	Incluso in	uscita
1	(1,2,3,4,6)→(1,1,3,1,3)	(1,2,3,4,6)	1
2	(1,2,3,4,6)→(2,2,4,4,-)	(1,2,3,4,6)	2
3	(1,2,3,4,6)→ (-,5,-,5,5)	(5,6,7)	-
4	(1,2,3,4,6)→ (6,-,6,-,6)	(5,6,7) e (1,2,3,4,6)	4
1	(5,6,7)→(-,3,3)	(1,2,3,4,6)	-
2	(5,6,7)→(7,-,7)	(5,6,7)	4
3	(5,6,7)→(5,5,5)	(5,6,7)	3
4	(5,6,7)→(6,6,-)	(5,6,7) e (1,2,3,4,6)	4

Esempio

Materiale facoltativo

i	Stato seguente	Incluso in	uscita
1	(1,2,3,4,6)→(1,1,3,1,3)	(1,2,3,4,6)	1
2	(1,2,3,4,6)→(2,2,4,4,-)	(1,2,3,4,6)	2
3	(1,2,3,4,6)→ (-,5,-,5,5)	(5,6,7)	-
4	(1,2,3,4,6)→ (6,-,6,-,6)	(5,6,7) e (1,2,3,4,6)	4
1	(5,6,7)→(-,3,3)	(1,2,3,4,6)	-
2	(5,6,7)→(7,-,7)	(5,6,7)	4
3	(5,6,7)→(5,5,5)	(5,6,7)	3
4	(5,6,7)→(6,6,-)	(5,6,7) e (1,2,3,4,6)	4

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	$q_2/-$	-/-	$q_6/-$
q_2	$q_1/-$	q_2/u_2	$q_5/-$	-/-
q_3	q_3/u_1	$q_4/-$	-/-	$q_6/-$
q_4	$q_1/-$	q_4/u_2	$q_5/-$	-/-
q_5	-/-	$q_7/-$	q_5/u_3	$q_6/-$
q_6	$q_3/-$	-/-	$q_5/-$	$q_6/\ u_4$
q_7	$q_3/-$	q_7/u_4	$q_5/-$	-/-

(1,2,3,4,6) → S_1

(5,6,7) → S_2

	i_1	i_2	i_3	i_4
S_1	S_1/u_1	S_1/u_2	$S_2/-$	S_1 o S_2 $/u_4$
S_2	$S_1/-$	S_2/u_4	S_2/u_3	S_1 o S_2 $/u_4$

Esempio

Materiale facoltativo

	i_1	i_2	i_3	i_4
q_1	q_1/u_1	q_2/-	-/-	q_6/-
q_2	q_1/-	q_2/u_2	q_5/-	-/-
q_3	q_3/u_1	q_4/-	-/-	q_6/-
q_4	q_1/-	q_4/u_2	q_5/-	-/-
q_5	-/-	q_7/-	q_5/u_3	q_6/-
q_6	q_3/-	-/-	q_5/-	q_6/ u_4
q_7	q_3/-	q_7/u_4	q_5/-	-/-

(1,2,3,4,6) → S_1

(5,6,7) → S_2

Apparentemente controintuitivo

	i_1	i_2	i_3	i_4
S_1	S_1/u_1	S_1/u_2	S_2/-	S_1 o S_2 /u_4
S_2	S_1/-	S_2/u_4	S_2/u_3	S_1 o S_2 /u_4

Cosa succede applicando le sequenze di ingressi i_4, i_2, i_1 partendo dallo stato q_1 per ciascuna delle quattro possibili scelte?

Non sembra che sia indifferente scegliere S1 o S2 come stato prossimo per la coppia S_1/i_4 !

In realtà, questa sequenza corrisponde ad una condizione di **don't care**

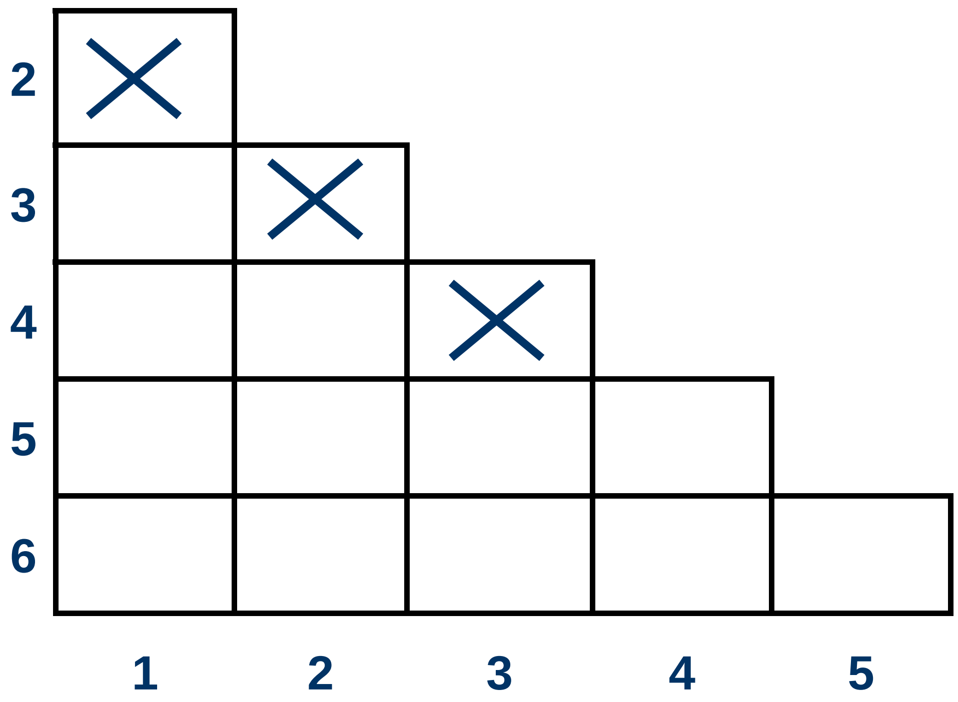
Metodo di Paull Unger per macchine incomplete

Materiale facoltativo

- Il metodo di Paull Unger può ancora essere applicato
- converge ad uno schema nel quale è possibile identificare tutte le coppie di stati compatibili
- Costruire la famiglia di insiemi di compatibilità massimi è tuttavia meno ovvio che nel caso di macchine complete

Paull Unger: esempio

Materiale facoltativo



Partiamo dal confrontare lo stato 5 con tutti i successivi, poi 4 con tutti i successivi, etc:

(5,6)

4≈6, 4 ≈5 => (4,5,6)

3 ≈6 => (3,6)

3≈5 => (3,5) → (3,5,6)

….

….

(2,4,5,6) (1,3,5,6) (1,4,5,6)