Corso di Calcolatori Elettronici I

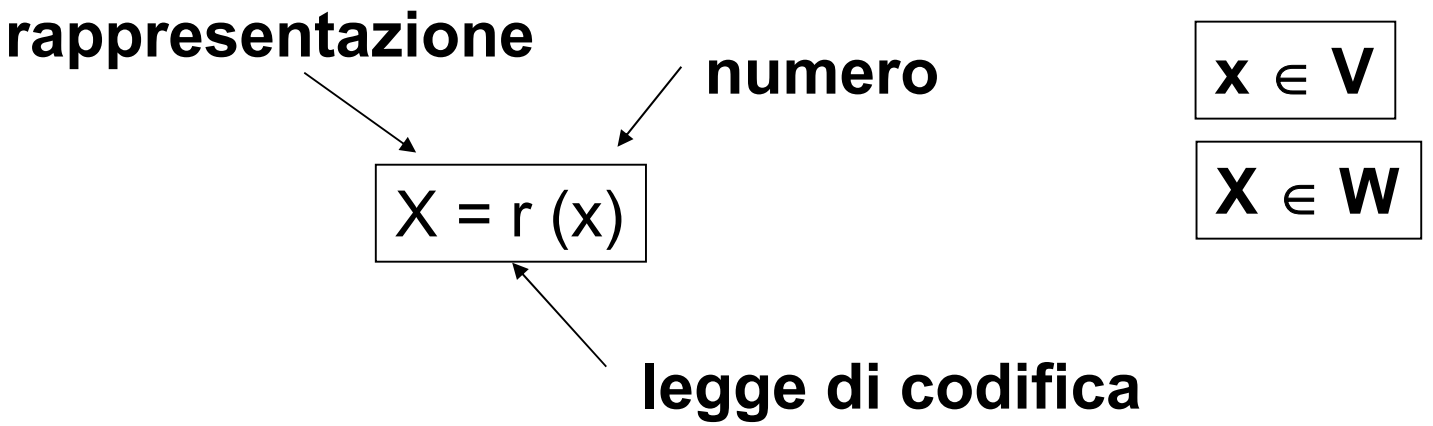
Rappresentazione dei numeri in un calcolatore

ing. Alessandro Cilardo

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Rappresentazione dei numeri

- Così come per qualsiasi altro tipo di dato, anche i numeri, per essere immagazzinati nella memoria di un calcolatore, devono essere codificati, cioè tradotti in sequenze di simboli
- Nei calcolatori si usano strategie di codifica binaria (k=2)
- L'alfabeto sorgente è costituito dall'insieme dei numeri che si vogliono rappresentare



Rappresentazione

- Bisogna tener conto dei seguenti fattori:
  - L'insieme V dei *numeri da rappresentare*
  - L'insieme W dei *numeri rappresentanti*
  - Tra i due insiemi si stabilisce una corrispondenza che trasforma un elemento x di V in uno X di W
  - Si dice allora che **X è la rappresentazione di x**
  - La decomposizione in cifre del numero X
  - La codifica in bit delle cifre

Strategie di codifica in macchina

- **Codifica binaria a lunghezza fissa**
- Il numero di bit varia a seconda della cardinalità dell'insieme dei numeri che si desidera rappresentare
  - Nella pratica, resta comunque pari ad un multiplo di 8 bit (tipicamente 8, 16, 32, 64 bit)
- L'associazione di un numero alla parola codice viene
  - Realizzata differentemente a seconda della tipologia di numeri che si desidera rappresentare
    - naturali, relativi, razionali, ecc …
  - Influenzata da aspetti che mirano a preservare la facile manipolazione delle rappresentazioni da parte del calcolatore
    - operazioni aritmetiche, confronti logici, ecc …
- **Le operazioni aritmetiche vengono eseguite sulle rappresentazioni binarie dei numeri**

Somme e Sottrazioni in aritmetica binaria

- Si effettuano secondo le regole del sistema decimale, ossia sommando (sottraendo) le cifre di pari peso
- Come nelle usuali operazioni su numeri decimali, si può avere un riporto sul bit di peso immediatamente superiore (**carry**), o un prestito dal bit di peso immediatamente superiore (**borrow**)
- Le somme (differenze) bit a bit sono definite come segue:

0+0=0	0-0=0
0+1=1	1-0=1
1+0=1	1-1=0
1+1=0 (carry=1)	0-1=1 (borrow=1)

- Ulteriore caso elementare:

1 + 1 + 1 = 1 (carry=1)

Moltiplicazione in aritmetica binaria

- La moltiplicazione bit a bit può essere definita come segue:

0x0=0
0x1=0
1x0=0
1x1=1

Rappresentazione di insiemi numerici infiniti

- Sia la dimensione che il numero dei registri in un calcolatore sono finiti
- La cardinalità degli insiemi numerici che occorre rappresentare è, invece, infinita
  - N = insieme dei numeri Naturali
  - Z = insieme dei numeri Relativi
  - Q = insieme dei numeri Razionali
  - R = insieme dei numeri Reali
- È inevitabile dunque che di un insieme di cardinalità infinita solo un sotto-insieme finito di elementi possa essere rappresentato

Overflow

- Gli operatori aritmetici, pur essendo talvolta chiusi rispetto all'intero insieme numerico su cui sono definiti, non lo sono rispetto ad un suo sottoinsieme di cardinalità finita
- Quando accade che, per effetto di operazioni, si tenta di rappresentare un numero non contenuto nel sottoinsieme si parla di *overflow*
- *Es.* sottoinsieme dei numeri naturali compresi tra 0 e 127 (rappresentabili con 7 bit):
  - La somma 100 +100 genera un overflow, essendo il numero 200 non rappresentabile nel sottoinsieme

Rappresentazione dei numeri naturali

- Rappresentare un sottoinsieme dei numeri naturali attraverso stringhe di bit di lunghezza costante n
  - Il numero degli elementi rappresentabili è pari a 2^n
  - Tipicamente, volendo rappresentare sempre anche lo zero, si rappresentano i numeri compresi tra 0 e $2^n - 1$
- L'associazione tra ogni numero e la propria rappresentazione avviene, nei casi pratici, nella maniera più intuitiva
  - Ad ogni numero si associa la stringa di bit che lo rappresenta nel sistema di numerazione binario posizionale
- L'overflow avviene quando si tenta di rappresentare un numero esterno all'intervallo $[0, 2^n - 1]$

Esempio

Rappresentazione dei numeri naturali su 4 bit

n=4

V = [0,15] ∩ N

Codifica: X=x

x	X_2
15	1111
14	1110
13	1101
12	1100
11	1011
10	1010
9	1001
8	1000
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000

Operazioni sui numeri naturali

•Per realizzare le operazioni, il calcolatore può lavorare direttamente sulle rappresentazioni

•La correttezza dei calcoli è garantita dalle leggi dell'aritmetica binaria posizionale (analoghe a quelle della classica aritmetica decimale)

•L'overflow può essere facilmente rilevato attraverso la valutazione del riporto (o del prestito) sull'ultima cifra

- Con questa rappresentazione, overflow = riporto uscente

(Questo non sarà necessariamente vero per altre rappresentazioni)

Esempi

6+ 8= ----- 14 →	0110+ 1000= ------ 1110	11 − 5 = ------ 6 → 1011− 0101= ------ 0110
14+ 3= ----- 17 →	1110 + 0011 = -------- 1 0001 overflow	9− 7= ------ 2 → 1001− 0111= -------- 0010

0101 ×
0011 =

0101
0101=
0000==
0000===

0001111

Rappresentazione dei numeri relativi

- Esistono diverse tecniche per rappresentare anche numeri negativi
- Segno e modulo
  - Corrispondente a quella comunemente utilizzata per i calcoli “a mano”
  - Poco utilizzata in macchina per le difficoltà di implementazione degli algoritmi, basati sul confronto dei valori assoluti degli operandi e gestione separata del segno
- Complementi
  - Complementi alla base
  - Complementi diminuiti
- Per eccessi

Rappresentazione in segno e modulo

- un singolo bit di X codifica il segno
  - Es. il più significativo, 0 se positivo, 1 se negativo
- i restanti n-1 bit di X rappresentano il modulo (numero naturale)
- La legge di codifica X=r(x) è: $X = |x| + 2^{n-1} * \text{sign}(x)$
  - sign(x) = 0 per $x \geq 0$, 1 per $x < 0$
- Si possono rappresentare i numeri relativi compresi nell'intervallo $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1} - 1]$
- I numeri relativi rappresentati sono 2^n-1
- Lo zero ha 2 rappresentazioni 0positivo e 0negativo

Rappresentazione in segno e modulo

- Esempi di numeri rappresentati in modulo e segno:

0	0	1	1	0	1	=	**13**	su 6 bit
1	0	1	1	0	1	=	**-13**	su 6 bit
		1	1	0	1	=	**-5**	su 4 bit
0	0	0	0	0	0	=	**+0**	su 6 bit
1	0	0	0	0	0	=	**-0**	su 6 bit
	0	1	0	0	0	=	**8**	su 5 bit
		1	0	0	0	=	**-0**	su 4 bit

Esempio

Rappresentazione in segno e modulo su 4 bit

n=4

$V = [-7,7] \cap Z$

Codifica:

$X=|x|+8 * sign(x)$

x	X_2	X_{10}
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000;1000	0;8
-1	1001	9
-2	1010	10
-3	1011	11
-4	1100	12
-5	1101	13
-6	1110	14
-7	1111	15

Operazioni in segno e modulo

•Diversamente dalla rappresentazione dei numeri naturali, questa volta non è possibile lavorare direttamente sulle rappresentazioni dei numeri per realizzare le operazioni aritmetiche

• È necessario lavorare separatamente sul segno e sul modulo

•Quando, ad esempio, si sommano due numeri di segno discorde, bisogna determinare quello con modulo maggiore e sottrarre ad esso il modulo dell'altro. Il segno del risultato sarà quello dell'addendo maggiore in modulo.

•Tale caratteristica, insieme con il problema della doppia rappresentazione dello zero, rende i calcoli difficilmente implementabili attraverso un circuito

• per questo motivo non è molto utilizzata nella pratica.

Rappresentazione in complementi alla base

- Una seconda tecnica per la rappresentazione dei numeri relativi consiste nell'associare a ciascun numero il suo **resto modulo $M=2^n$**, definito come:

$$|x|_M = x - [x/M] * M$$

dove […] denota la *funzione intero* (vedi lucido successivo)

- Questo tipo di codifica, su n bit, è equivalente ad associare:
  - il numero stesso (cioè X=x), ai numeri positivi compresi tra 0 e $2^{n-1} - 1$;
  - il numero $X = 2^n - |x|$, ai numeri negativi compresi tra -2^{n-1} e -1;
- I numeri rappresentati sono quelli compresi nell'intervallo

$$[-2^{n-1}; 2^{n-1} - 1]$$

Funzione intero

- Detto r un numero reale, si definisce intero di r il massimo intero y ≤ r

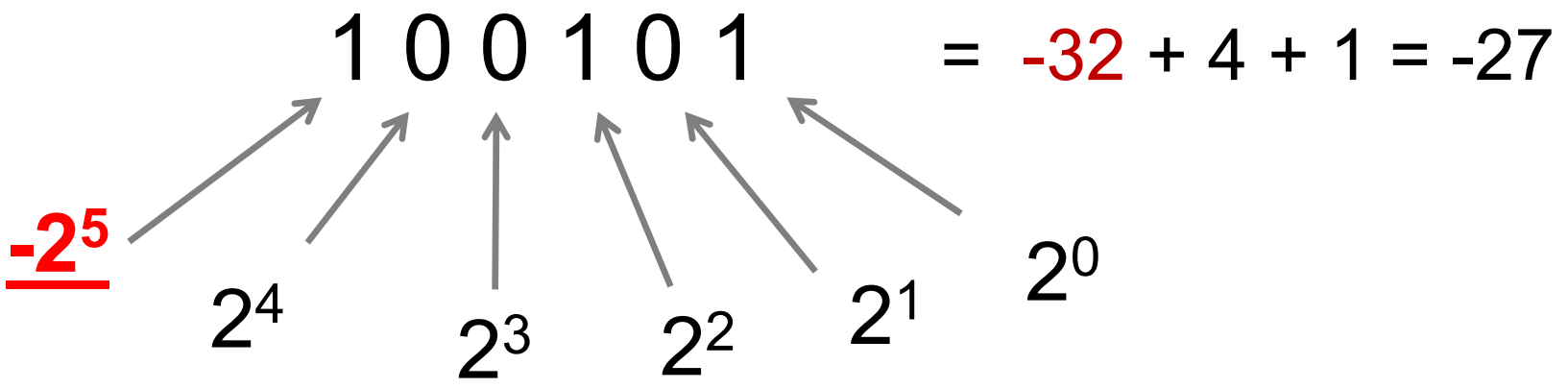
$$y = [\, r \,]$$

– confronto tra funzione intero [ ] e *ceiling* ⌈ ⌉

r	7.9	7	-7	-7.9
[r]	7	7	-7	-8
⌈r⌉	8	7	-7	-7

Interpretazione alternativa

- Un modo più semplice per comprendere la rappresentazione in complementi è interpretarla come normale rappresentazione posizionale pesata, in cui però il peso più significativo (quello più a sinistra) è negativo:
- Esempio su 6 bit:



Intervallo di rappresentazione

- Su *n* bit, il numero più grande rappresentabile è quello che contiene tutte le potenze positive e non contiene quella negativa:
- esempio su 8 bit: $(0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)_2 =$

  $= 0*(-2^7) +2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0 = 2^7-1 = +127$
- Il numero più piccolo rappresentabile è quello che contiene solo la potenza negativa e non contiene nessuna di quelle positive:
- esempio su 8 bit: $(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)_2 = 1*(-2^7) = -128$
- In generale, su *n* bit l'intervallo di rappresentazione è

$$[-2^{n-1},\quad 2^{n-1}-1]$$

Esempio su 4 bit

Rappresentazione in complementi alla base su 4 bit

(Le 4 cifre hanno pesi rispettivamente pari a $-2^3,\ 2^2,\ 2^1,\ 2^0$)

n=4

$V = [-8,7] \cap Z$

Codifica:

Per $0 \le x \le 7$: $X = x$

Per $-8 \le x \le -1$: $X = 2^n - |x|$

x	X_2	X_{10}
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000	0
-1	1111	15
-2	1110	14
-3	1101	13
-4	1100	12
-5	1011	11
-6	1010	10
-7	1001	9
-8	1000	8

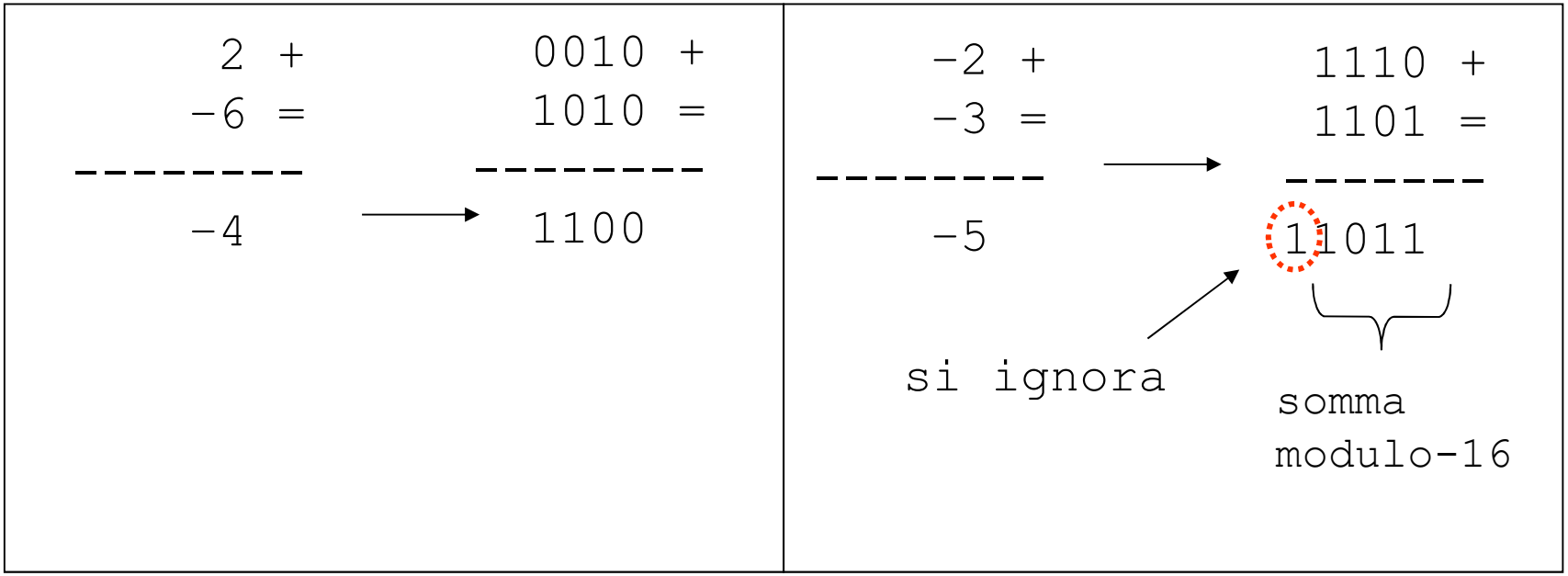
Complementi alla base: proprietà

- Questa rappresentazione ha il fondamentale vantaggio di permettere, nell'ambito di operazioni aritmetiche, di lavorare direttamente sulle rappresentazioni.
- La regola sulla quale questa affermazione si basa è la seguente:

  la rappresentazione della somma (algebrica) di x ed y si ottiene come somma (modulo-M) delle rappresentazioni di x e y; analoghe sono le proprietà della differenza e del prodotto.

- Questo tipo di codifica conserva, inoltre, la proprietà delle rappresentazioni di avere il primo bit 1 se (e solo se) il corrispondente numero è negativo (bit di segno)

Esempi di addizioni in complementi alla base



È possibile effettuare la somma direttamente tra le rappresentazioni modulo-M: il risultato ottenuto in questo modo, è proprio la rappresentazione (modulo-M) del risultato corretto

→ è possibile usare per i numeri in complementi **gli stessi circuiti** usati per sommare i numeri binari senza segno

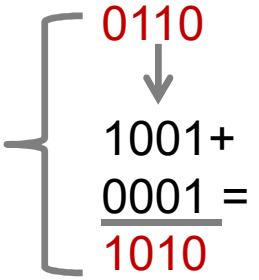
Complementi alla base: la complementazione

- In complementi alla base, a partire dalla rappresentazione di un numero, è anche particolarmente semplice ottenere la rappresentazione del suo opposto
- È infatti sufficiente:
  - *complementare tutti i bit*
  - *sommare al nuovo numero così ottenuto il valore* 1

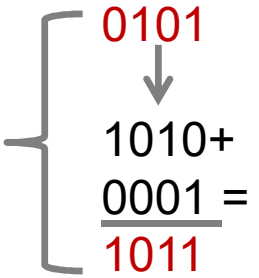
- vedi esempi nel lucido successivo

Esempi di complementazione su 4 bit

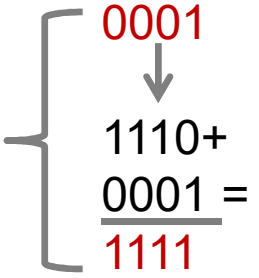
- La rappresentazione di 6_{10} su 4 bit è 0110_2.
- Complementando tutti i bit e sommando 0001 si ottiene: 1010_2.
- 1010_2 è la rappresentazione di –6 in complementi alla base.



- La rappresentazione di 5_{10} su 4 bit è 0101_2.
- Complementando tutti i bit e sommando 0001 si ottiene: 1011_2.
- 1011_2 è la rappresentazione di –5 in complementi alla base.



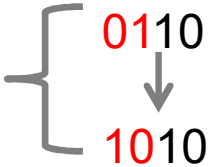
- La rappresentazione di 1_{10} su 4 bit è 0001_2.
- Complementando tutti i bit e sommando 0001 si ottiene: 1111_2.
- 1111_2 è la rappresentazione di –1 in complementi alla base.



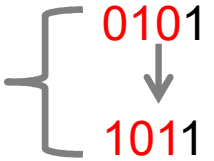
Complementi alla base: la complementazione

- Una regola equivalente per ottenere l'opposto di un numero che è possibile usare in alternativa alla precedente è la seguente
- È sufficiente *complementare tutti i bit a partire da sinistra, tranne l'uno che si incontra più a destra e gli eventuali zero successivi*

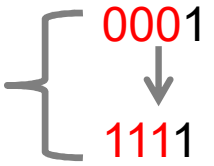
- Calcoliamo di nuovo -6_{10} su 4 bit partendo da 0110_2.
- Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi (visualizzati in nero) si ottiene: 1010_2.



- Calcoliamo di nuovo -5_{10} su 4 bit partendo da 0101_2.
- Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi (visualizzati in nero) si ottiene: 1011_2.



- Calcoliamo di nuovo -1_{10} su 4 bit partendo da 0001_2.
- Complementando tutti i bit tranne l'uno più a destra e gli zero successivi (visualizzati in nero) si ottiene: 1111_2.



Complementi alla base: la complementazione

- La facilità con cui è possibile ottenere il complemento consente di realizzare le sottrazioni attraverso la composizione di una complementazione (nel senso sopra detto) ed un'addizione
- Nell'aritmetica in complementi alla base, di conseguenza, l'addizionatore e il complementatore rappresentano i componenti fondamentali per la realizzazione di tutte le operazioni
- Esempio: rappresentare su 4 bit il risultato della sottrazione 7 – 4

  7 → 0111 su 4 bit

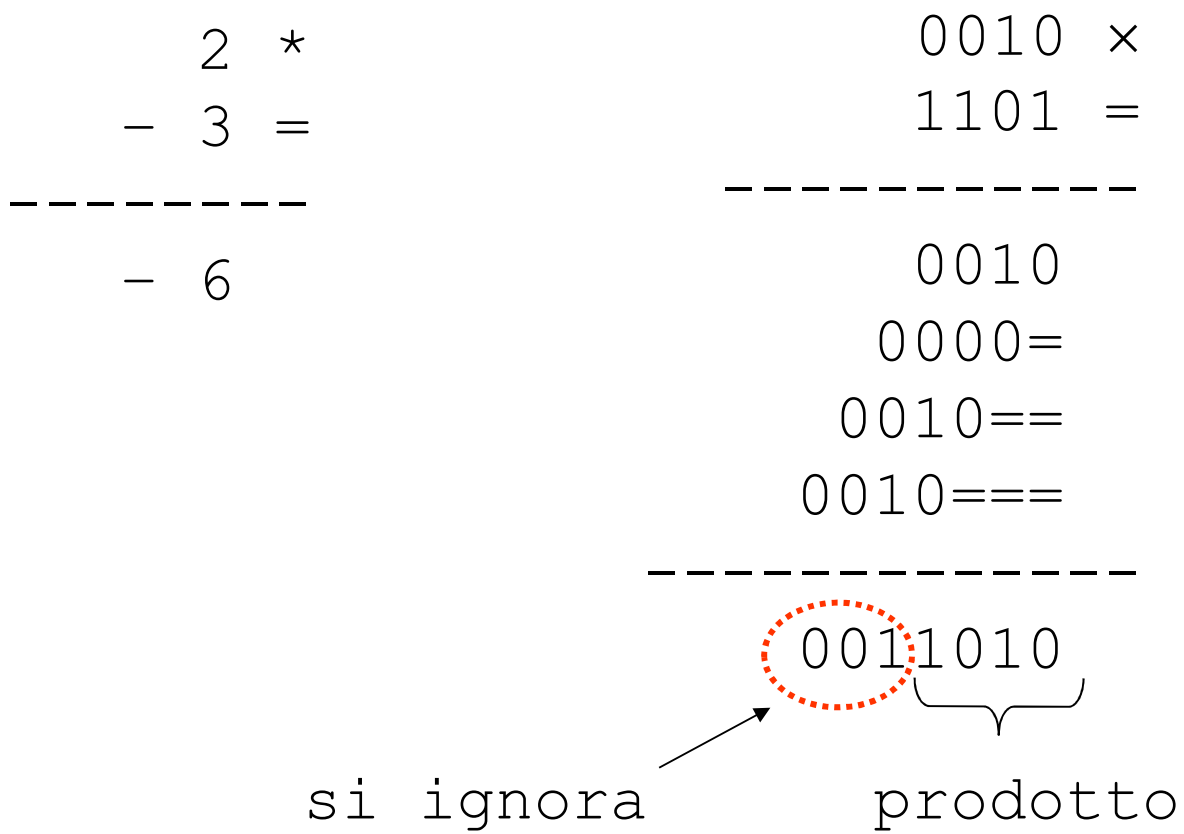
  4 → 0100 su 4 bit
- rappresentiamo -4 come descritto prima: -4 → 1100
- sommiamo 7 e (-4) con l'usuale procedimento di somma

```
0111+
1100 =
1 0011
```

ignorato

- Il risultato è 0011, che rappresenta proprio il valore 3=7-4

Complementi alla base: esempio di moltiplicazione



Estensione del segno

- Problema:
  - Sia dato un intero N, rappresentato in complemento mediante n bit
  - Rappresentare N usando n+q bit (q>0)
- Soluzione:
  - Fare q copie di MSB

- Dimostrazione (banale per N positivo)
  - Sia N<0 (N=1bb…b , dove b è una cifra binaria)
  - Per induzione: Sia N_q la stringa con estensione di q bit
    - q=1: Poiché $-2^{n-1}=-2^n+2^{n-1}$, allora $V(N)=V(N_1)$.
    - q>1: estendere di un bit la stringa ottenuta da N con estensione di q-1 bit → $V(N_q)=V(N_{q-1})$
- Esempio

  -2 = $(110)_2$ su 3 bit diventa $(111110)_2$ su 6 bit

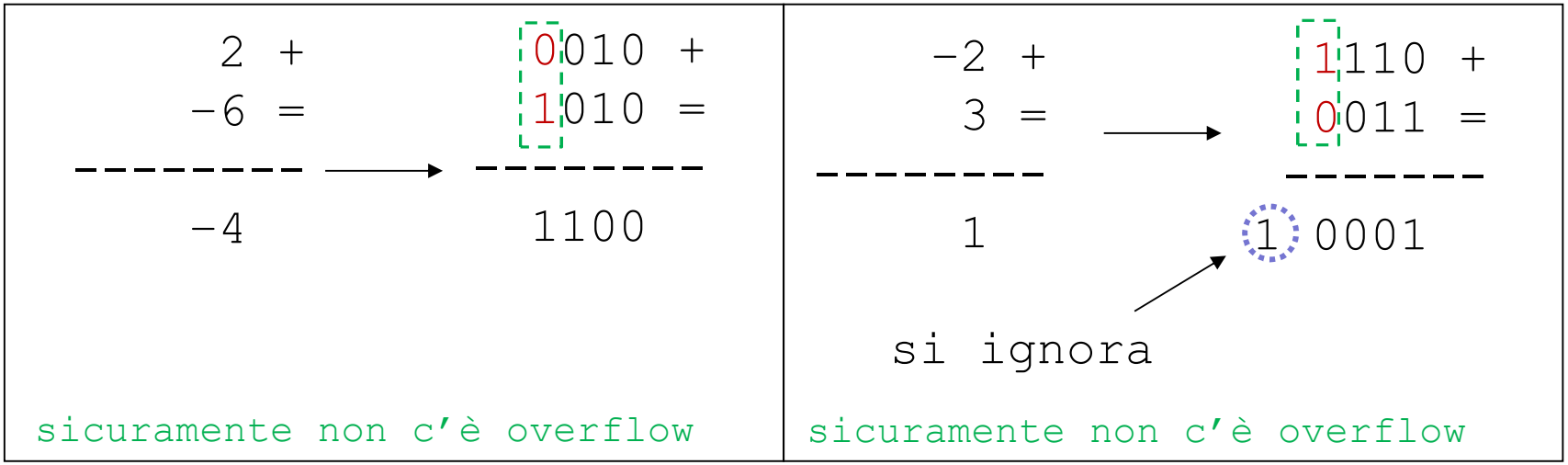
Estensione del segno

- Regola generale
  - ad un numero positivo (avente quindi 0 nel bit più significativo) è possibile aggiungere ulteriori 0 a sinistra senza cambiarne il valore
  - ad un numero negativo (avente quindi 1 nel bit più significativo) è possibile aggiungere ulteriori 1 a sinistra senza cambiarne il valore
  - aggiungendo 0 alla sinistra di numeri negativi oppure 1 alla sinistra di numeri positivi se ne cambia invece il valore (sicuramente cambia il segno!)

0101	= **5**	su 4 bit	
00101	= **5**	su 5 bit	
000101	= **5**	su 6 bit	
0000101	= **5**	su 7 bit	
....	.....		
1101	= **-3**	su 4 bit	
11101	= **-3**	su 5 bit	
111101	= **-3**	su 6 bit	
1111101	= **-3**	su 7 bit	
....	.....		

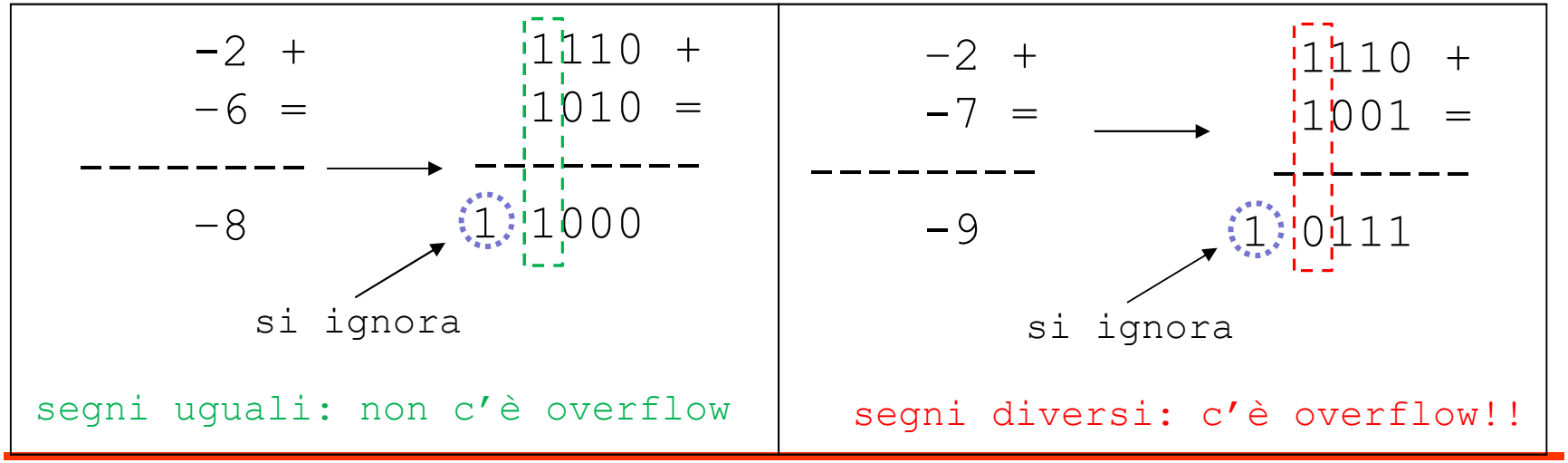
Overflow

- La somma tra due numeri in complementi discordi (di segno diverso) non genera mai overflow
  - la somma avrà sempre un modulo *non maggiore* del modulo più grande dei due operandi. Esempio: 2+(-6) = -4
  - questa situazione è riconosciuta immediatamente dal fatto che i bit più a sinistra dei due operandi sono diversi

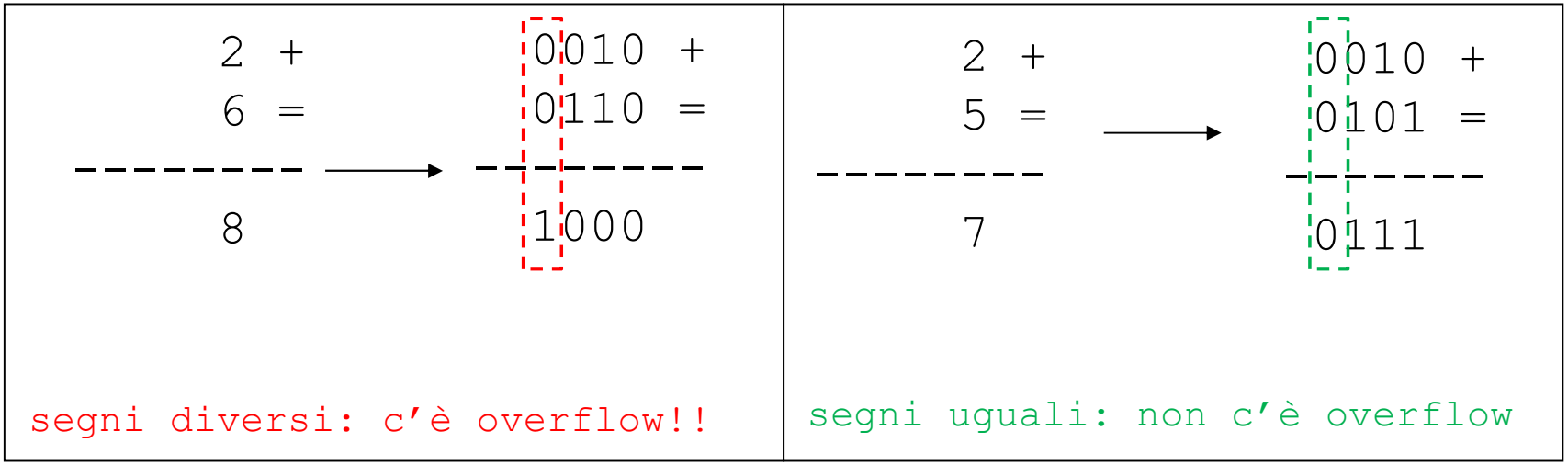


Overflow

- La somma tra due numeri in complementi concordi (dello stesso segno) può generare overflow
  - la somma può avere un modulo maggiore di quello dei due operandi ed eccedere l'intervallo di rappresentazione
  - questa situazione è segnalata dal fatto che i bit più a sinistra dei due operandi sono uguali (stesso segno), ma il bit più a sinistra della somma risulta diverso



Overflow: altri esempi



Complementi diminuiti

- La rappresentazione in complementi diminuiti costituisce un'ulteriore alternativa per la codifica dei numeri relativi
- Concettualmente è analoga alla rappresentazione in complementi alla base
- La differenza rispetto ad essa è che la legge di codifica dei numeri negativi è leggermente differente:
  - $X=2^n - |x|$; (complementi alla base)
  - $X=2^n - 1 - |x|$; (complementi diminuiti)
- I numeri rappresentabili, se si utilizzano n bit, sono quelli compresi nell'intervallo $[-(2^{n-1} - 1), 2^{n-1} - 1]$.
- I numeri rappresentabili sono $2^n - 1$
- lo zero ha una doppia rappresentazione

Esempio

Rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit

n=4

$V = [-7,7] \cap Z$

Codifica:

Per $0 \le x \le 7$: $X = x$

per $-7 \le x \le -1$: $X = 2^n - 1 - |x|$

x	X_2	X_{10}
7	0111	7
6	0110	6
5	0101	5
4	0100	4
3	0011	3
2	0010	2
1	0001	1
0	0000;1111	0;15
-1	1110	14
-2	1101	13
-3	1100	12
-4	1011	11
-5	1010	10
-6	1001	9
-7	1000	8

Complementi diminuiti: perché?

- Maggiore semplicità con cui è possibile calcolare la rappresentazione dell'opposto di un numero, a partire dalla rappresentazione del numero stesso: basta semplicemente complementare tutti i bit della rappresentazione indistintamente
- Esempi:
  - la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di 4 è 0100;
    - complementando tutti i bit si ottiene 1011;
    - 1011 è la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di –4
  - la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di –6 è 1001;
    - complementando tutti i bit si ottiene 0110;
    - 0110 è la rappresentazione in complementi diminuiti su 4 bit di 6

Aritmetica in complementi diminuiti

- Componenti necessari:
  - Ancora l'addizionatore modulo-2^n (e non 2^n-1)
    - L'addizionatore modulo-2^n è più semplice da realizzare
  - Un complementatore
- Il risultato però deve essere opportunamente "corretto" per renderlo compatibile con l'aritmetica in modulo 2^n-1
- In particolare deve essere aggiunta un'unità al risultato nei seguenti casi:
  - se entrambi gli addendi sono negativi
  - se un addendo è positivo, l'altro negativo e la somma è positiva
- Nei casi suddetti l'aritmetica degli interi positivi (applicata alle rappresentazioni) genera un riporto
  - Il riporto in questa rappresentazione non è ignorato, a differenza della rappresentazione in complementi
  - piuttosto, viene interpretato come la necessità di effettuare la correzione

Esempi di somme in complementi diminuiti

− 2 +		1101 +	
− 3 =		1100 =	Somma di due numeri negativi.
-----	→	-------	Si è generato riporto →
− 5		(1) 1001 +	Necessita della correzione.
		1 =	

		1010	← rappresentazione corretta
5 +		0101 +	
− 2 =		1101 =	Somma di un numero positivo e un numero negativo.
-----	→	-------	Il risultato è positivo.
3		(1) 0010 +	Si è generato riporto →
		1 =	Necessita della correzione.

		0011	← rappresentazione corretta
3 +		0011 +	Somma di un numero positivo e un numero negativo.
− 4 =		1011 =	Il risultato è negativo.
-----	→	------	Non si è generato riporto →
− 1		1110	Non necessita di alcuna correzione.

Rappresentazione eccesso-k

- La rappresentazione in eccesso-k costituisce un metodo diverso da quello dei resti in modulo per ricondurre i numeri negativi a positivi
- In particolare, tutti i numeri sono traslati “verso l’alto” di k, che viene scelto maggiore o uguale al numero più piccolo da rappresentare

$$X = x + k$$

Rappresentazione eccesso-k: proprietà

- Analogamente al caso dei complementi diminuiti, la somma va corretta aggiungendo o sottraendo la costante k, e quindi in maniera sufficientemente semplice
- Moltiplicazioni e divisioni risultano invece più complesse
- Il vantaggio di tale codifica è che viene conservata la proprietà della disuguaglianza sulle rappresentazioni:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow X_1 > X_2$$

- Questa rappresentazione, perciò, è utilizzata soltanto laddove siano richieste fondamentalmente somme algebriche e confronti logici fra gli operandi
- Tipicamente si utilizza per rappresentare gli esponenti nella rappresentazione in virgola mobile (prossima lezione)

Esempio

Rappresentazione in eccesso-8 su 4 bit

n=4

$V = [-8,7] \cap Z$

Codifica:

$X = x + k$

x	X_2	X_{10}
7	1111	15
6	1110	14
5	1101	13
4	1100	12
3	1011	11
2	1010	10
1	1001	9
0	1000	8
-1	0111	7
-2	0110	6
-3	0101	5
-4	0100	4
-5	0011	3
-6	0010	2
-7	0001	1
-8	0000	0