

Corso di Calcolatori Elettronici I

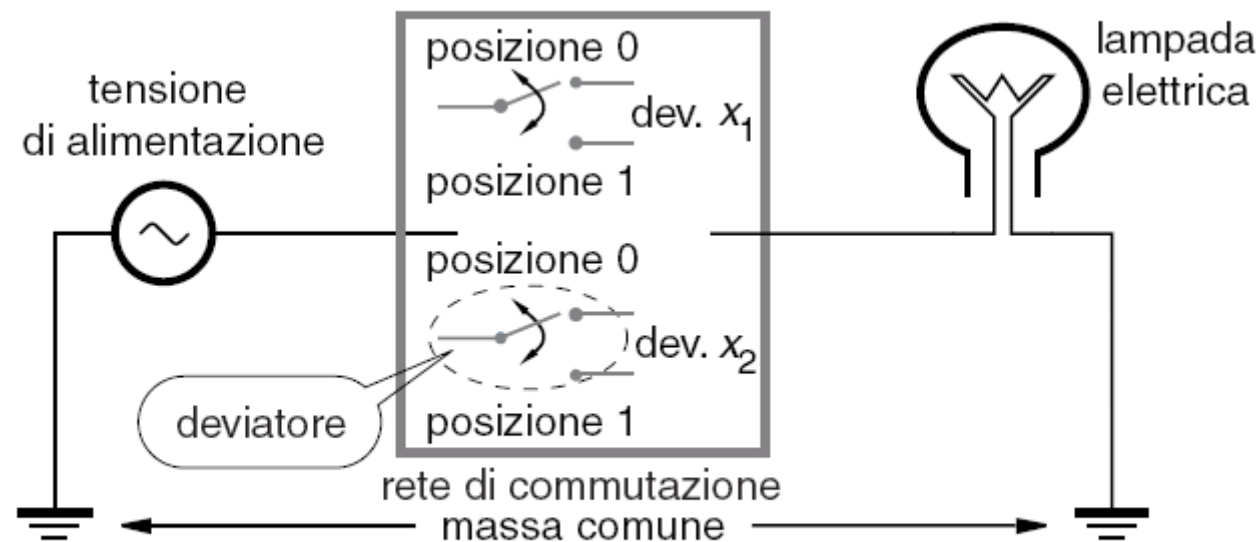
Reti logiche: introduzione

ing. Alessandro Cilaro

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Circuiti e porte logiche

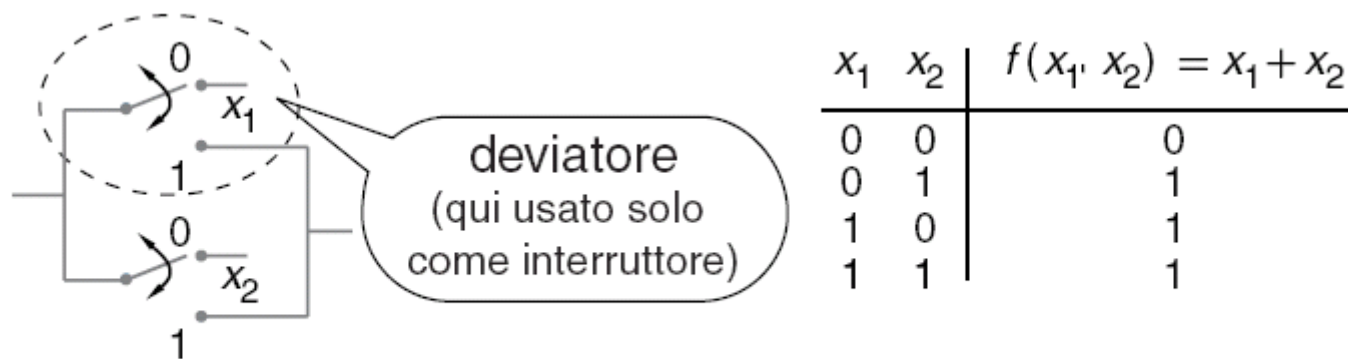
- Esempio di rete di commutazione:



(a) lampada elettrica controllata tramite due deviatori

Circuiti e porte logiche

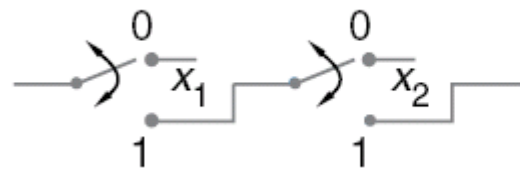
- Se i due deviatori sono collegati in parallelo, la lampada è *accesa* ($f=1$) se almeno uno dei due deviatori è collegato ($x_i=1$)



(b) deviatori collegati in parallelo (schema OR o somma logica)

Circuiti e porte logiche

- Se i due deviatori sono collegati in serie, la lampada è *accesa* ($f=1$) solo se entrambi i deviatori sono collegati ($x_1=1$ e $x_2=1$)

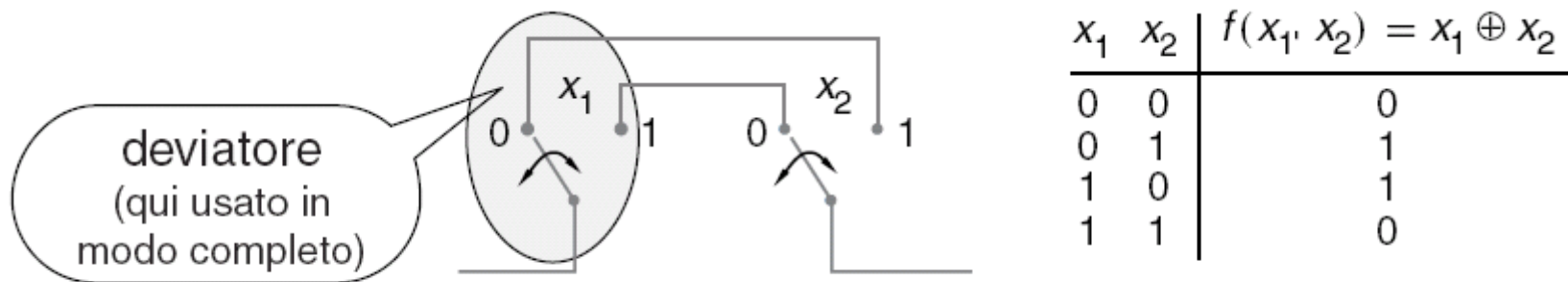


x_1	x_2	$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(c) deviatori collegati in serie (schema AND o prodotto logico)

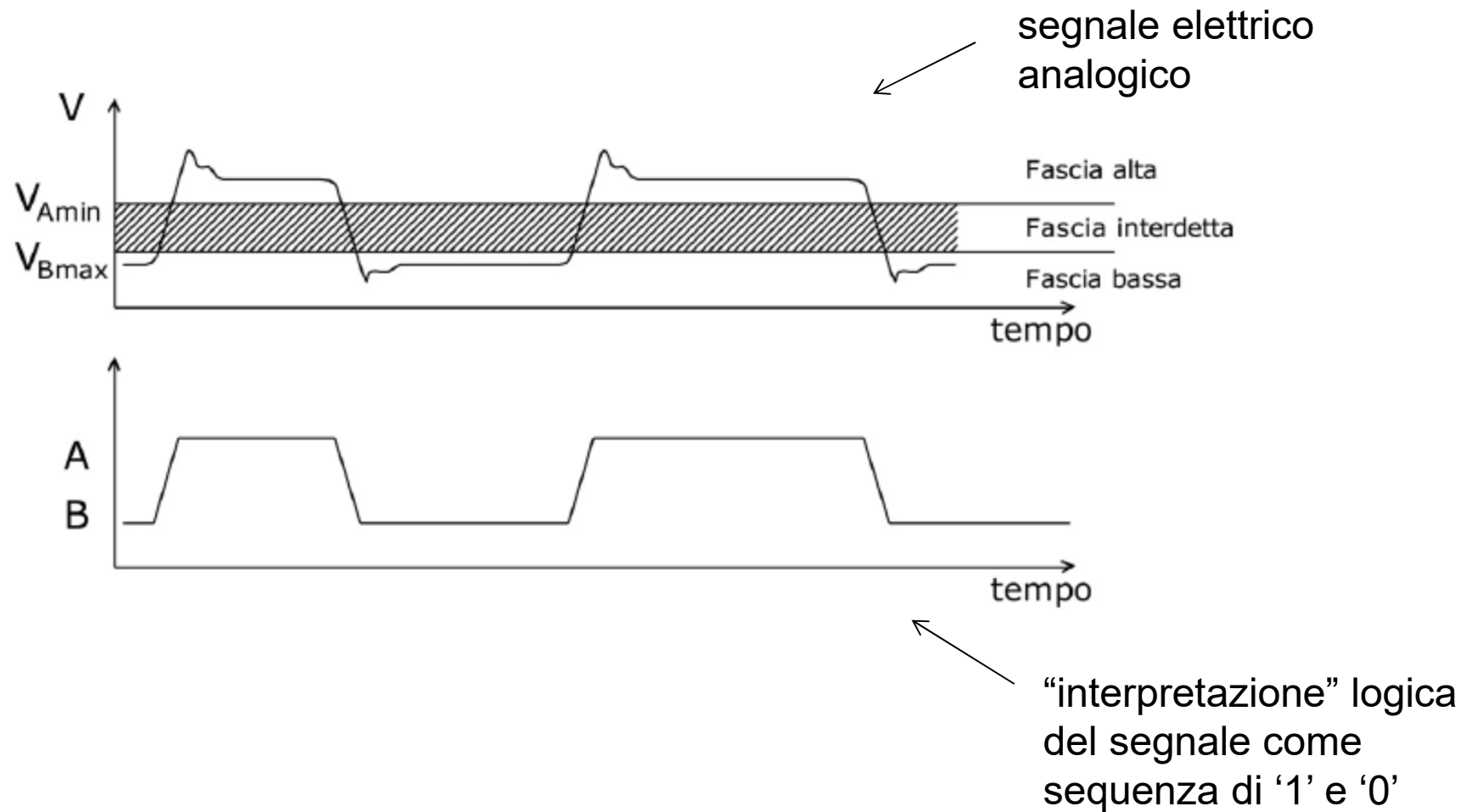
Circuiti e porte logiche

- Nella configurazione sottostante, la lampada è *accesa* ($f=1$) solo se i deviatori sono collegati in maniera differente ($x_1=1$ e $x_2=0$ oppure $x_1=0$ e $x_2=1$)



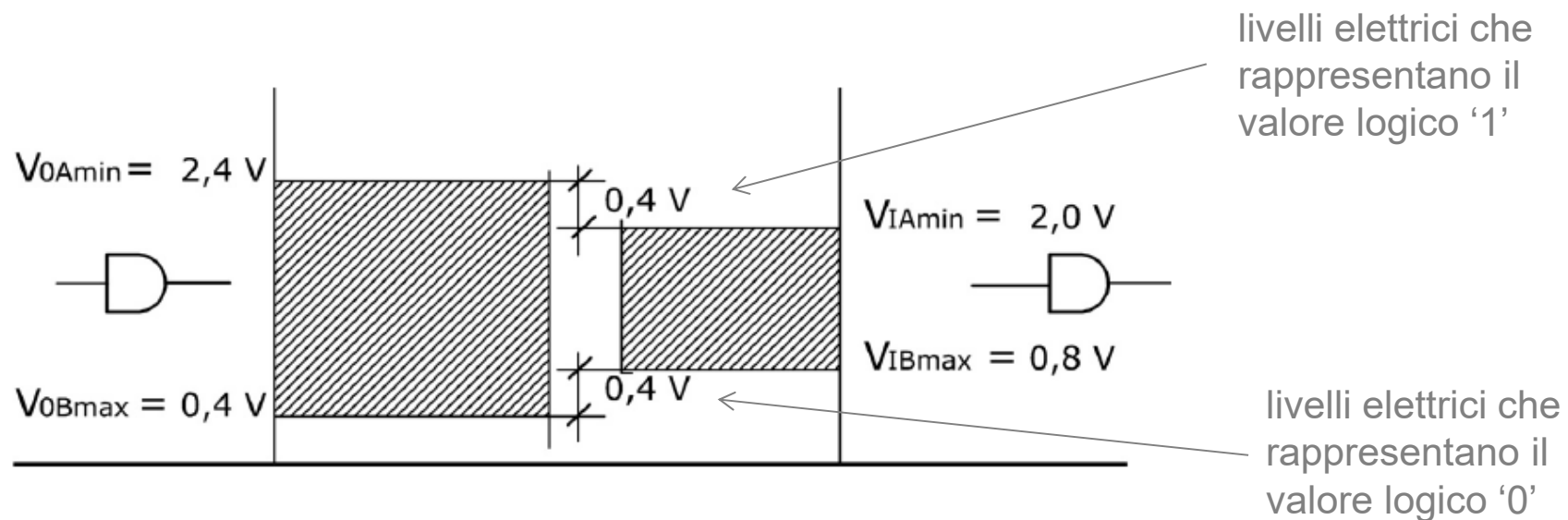
(d) schema di collegamento XOR (differenza simmetrica)

Segnali elettrici e valori logici



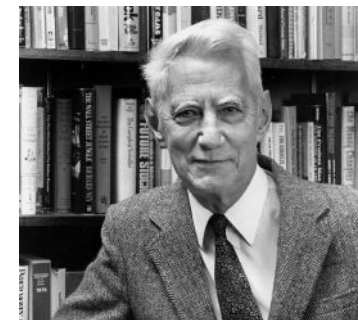
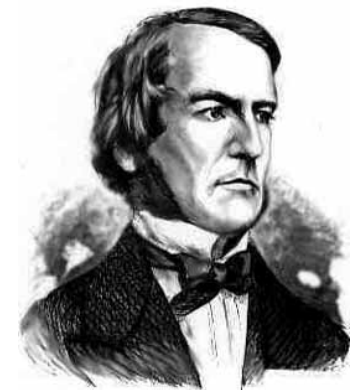
Esempio: porte logiche TTL

- Esempio:
- soglie e margine di rumore per la tecnologia TTL



Da Boole a Shannon

- Ci serve un *sistema formale* per descrivere e manipolare segnali logici
- L'algebra di Boole fu introdotta nel 1854 come strumento per la soluzione matematica di problemi di logica
- George Boole (1815-1864)
 - *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities (1854)*
- Il suo uso per descrivere reti binarie di commutazione si deve a Claude Shannon
 - *A symbolic analysis of relay and switching circuits (1938)*



Algebra di Boole

- L'Algebra di Boole può essere vista come un'algebra astratta definita su un *supporto* $K = \{0, 1\}$ e tre operazioni
 - AND ($\cdot$): $K \times K \rightarrow K$
 - OR ($+$): $K \times K \rightarrow K$
 - NOT ($\neg$): $K \rightarrow K$

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	NOT x
0	1
1	0

Algebra di Boole: postulati (1)

• Un'Algebra di Boole può essere definita in qualsiasi struttura goda dei seguenti postulati:

- Proprietà commutativa:

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad x + y = y + x$$

- Proprietà associativa:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

- per la proprietà associativa posso definire AND e OR a più di 2 operandi. Ad esempio: $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

- Proprietà di idempotenza:

$$x \cdot x = x$$

$$x + x = x$$

- Proprietà di assorbimento:

$$x \cdot (x + y) = x$$

$$x + (x \cdot y) = x$$

Algebra di Boole: proprietà (2)

- Proprietà distributiva

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

- Proprietà di convoluzione

$$\neg (\neg x) = x$$

- Proprietà del minimo e del massimo:

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x + 1 = 1$$

AdB: riepilogo dei postulati

Commutativa	P1	$a+b=b+a$	P'1	$a \cdot b=b \cdot a$
Associativa	P2	$(a+b)+c =a+(b+c)$	P'2	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
Idempotenza	P3	$(a+a)=a$	P'3	$(a \cdot a)=a$
Assorbimento	P4	$a+(a \cdot b)=a$	P'4	$a \cdot (a+b)=a$
Distributiva	P5	$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$	P'5	$a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$
Min e max	P6	$a \bullet 0=0$	P'6	$a+1=1$
Complemento	P7	$a \cdot (\bar{a})=0$	P'7	$a+(\bar{a})=1$

Legge di dualità

- Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale
- In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

Teoremi di De Morgan

- Utili quando sia necessario realizzare una funzione contenente OR avendo a disposizione solo AND e viceversa
 - (in entrambi i casi avendo sempre a disposizione anche la NOT)

$$\neg (x \cdot y) = (\neg x) + (\neg y)$$

$$\neg (x + y) = (\neg x) \cdot (\neg y)$$

AdB: altre proprietà utili

- 0 ed 1 sono l'uno il complemento dell'altro

$$\neg 0 = 1$$

$$\neg 1 = 0$$

- *Convoluzione*: negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso

$$\neg(\neg a) = a$$

- 0 è l'elemento neutro della somma

$$a + 0 = a$$

- 1 è l'elemento neutro del prodotto

$$a \cdot 1 = a$$

- Assorbimento del complemento

$$a + (\neg a)b = a + b$$

Assorbimento del complemento

- Esempio di dimostrazione

$$a + (\neg a)b = a + b$$

- Per la dimostrazione usare la proprietà distributiva ed infine il complemento

$$\begin{aligned} a + (\neg a)b &= aa + ab + (\neg a)a + (\neg a)b = \\ [a + (\neg a)] (a+b) &= a+b \end{aligned}$$

Algebre di Boole

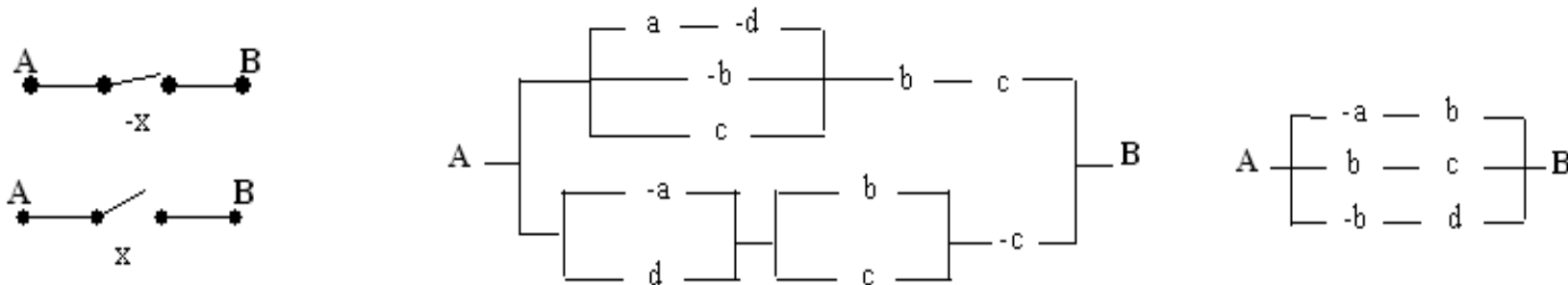
- La definizione di AdB non specifica quale sia K e come siano definite le operazioni “+”, “.” e “ $\neg$ ”
 - Specifica soltanto un insieme di proprietà che devono essere soddisfatte da tali operazioni
- Sono così possibili diversi modelli di algebra di Boole , uno dei quali è quello introdotto all’inizio
- Altri possibili modelli di algebra di Boole:
 - l’algebra dei circuiti
 - l’algebra della logica delle proposizioni
 - l’algebra degli insiemi

L'Algebra dei circuiti

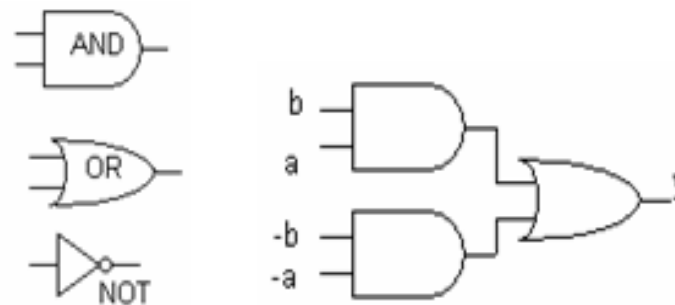
- I circuiti logici sono circuiti elettronici nei quali una grandezza elettrica ai morsetti di ingresso e di uscita può assumere solo due valori, convenzionalmente rappresentati con i due elementi dell'algebra di Boole 0 ed 1.
- In elettronica digitale si studia come realizzare circuiti elettronici per il quale il legame tra ingressi ed uscite corrisponde a quello delle operazioni fondamentali AND, OR e NOT dell'algebra di Boole
 - PORTE LOGICHE
- Nelle reti logiche *unilaterali*, le uscite della rete corrispondono a valori di grandezze elettriche misurate in opportuni punti del circuito; il flusso dell'elaborazione procede fisicamente in un'unica direzione, dai segnali di ingresso verso i segnali di uscita
 - Es. la d.d.p. misurata rispetto a massa
- Nelle reti logiche *bilaterali*, invece, l'uscita della rete è determinata dalla presenza o dall'assenza di "contatto" tra due punti della rete.

Algebra dei circuiti: reti bilaterali

- reti bilaterali

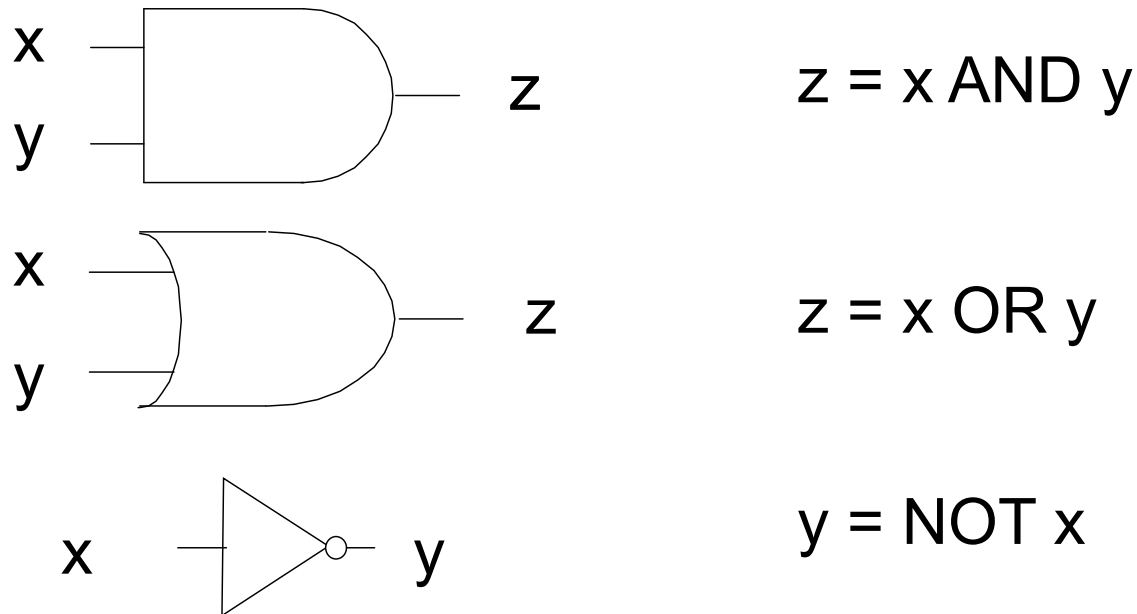


- ◆ reti unilaterali



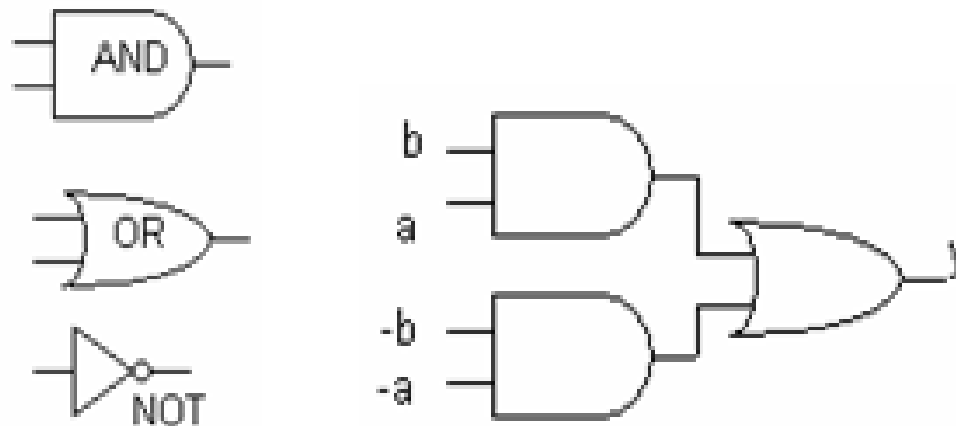
Porte logiche o *gate*

Circuiti elettronici che realizzano le operazioni fondamentali



Algebra dei circuiti: reti unilaterali

*Rete unilaterale: il flusso di informazione
procede in un unico senso
(ingresso $\rightarrow$ uscita)*



Variabili e funzioni booleane

- Elementi del sostegno dell'algebra $K \rightarrow$ **valori booleani**
- Variabili che possono assumere valori booleani $\rightarrow$ **variabili booleane**
- Funzioni di variabili booleane in $K \rightarrow$ **funzioni booleane**

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- ◆ Le variabili possono essere a loro volta funzioni booleane
- ◆ Un insieme F di funzioni sul sostegno di un'algebra si dice **funzionalmente completo** se *qualsiasi* funzione dell'algebra può essere ottenuta come composizione di funzioni appartenenti ad F

Tabelle di verità

- Se l'algebra è finita, qualsiasi funzione può in linea di principio essere rappresentata mediante una tabella, definita ***tabella di verità***

Esempio di tabella di verità

#	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	x_2x_3	$\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_2x_3 = f_1$
0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
2	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

Tabella di verità dell'espressione logica $\bar{x}_1\bar{x}_2 + x_2x_3 = f_1$.

Tabelle di verità

- Funzione algebrica

- Funzione definita in maniera tabellare per cui alla variabile dipendente sono associate tutte le possibili combinazioni delle n variabili indipendenti

righe della tabella di verità: $N=2^n$

*numero delle
ripetizioni di 2 valori
su n posti*

Numero di differenti modi di
riempire le righe della tabella: $M=2^N=2^{2^n}$

*numero delle
ripetizioni di 2 valori
su N posti*

ove:

- n =numero delle variabili indipendenti
- N =numero totale di punti della funzione
- M =numero totale delle funzioni di n variabili

Esempio: Funzioni di due variabili

$n = 2 \rightarrow N = 2^2 = 4$ righe nella tabella di verità

$M = 2^4 = 16$ differenti modi di riempire la tabella di verità

Ovvero, esistono 16 diverse funzioni booleane di due variabili:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
												0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Funzioni di due variabili

f	algebraica	nome	<u>simb-</u>	f	algebraica	nome	<u>simb-</u>
f_0	0	contraddizione		f_8	$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$	NOR	$x \downarrow y$
f_1	$x \cdot y$	congiunzione-AND	$x \cdot y$	f_9	$\bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y$	equivalenza	$x \equiv y^1$
f_2	$x \cdot \bar{y}$	and-not-y		f_{10}	$\bar{y}$	<u>nony</u>	$\bar{y}$
f_3	x	x		f_{11}	$x + \bar{y}$	implicazione	$y \rightarrow x$
f_4	$\bar{x} \cdot y$	and-not-x		f_{12}	$\bar{x}$	<u>nonx</u>	$\bar{x}$
f_5	y	y		f_{13}	$\bar{x} + y$	implicazione	$x \rightarrow y$
f_6	$\bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$	<u>oresclusivo</u>	$x \oplus y$	f_{14}	$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$	<u>nand</u>	$x \uparrow y$
f_7	$x + y$	disgiunzione-OR	$x + y$	f_{15}	1	tautologia	