

Capitolo sesto

EVOLUZIONE IN UN PIANO VERTICALE

6.1. Generalità

E' di notevole interesse pratico lo studio dell'evoluzione in un piano verticale effettuata tenendo il piano di simmetria del velivolo costantemente nel piano della traiettoria. Tale moto, denominato longitudinal-simmetrico, è caratterizzato quindi da velocità di virata nulla e da angoli di sbandamento e di derapata entrambi nulli. Se d'altra parte la scelta degli assi terra viene effettuata in modo da far coincidere il piano $X_e Z_e$ col piano della traiettoria, risulta nullo anche l'angolo di virata. Ne consegue:

$$\delta = \nu = \beta = 0 \quad (1-VI)$$

Lo studio del moto viene qui condotto facendo riferimento alla terna aerodinamica che, nel caso particolare in esame, coincide con gli assi vento.

Le espressioni (73-II) delle componenti della velocità angolare del velivolo intorno al baricentro si semplificano, per le (1-VI), nelle:

$$p = 0 \quad q = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \quad r = 0 \quad (2-VI)$$

Esse, sostituite nelle equazioni del moto [(68-III) limitatamente agli equilibri alla rotazione e (69-III)] insieme alla (1-VI), forniscono il seguente sistema di tre equazioni differenziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{g} \dot{V} = -W \operatorname{sen} \gamma - D + T \cos (\alpha - \mu_T) \\ -\frac{W}{g} V \dot{\gamma} = W \cos \gamma - L - T \operatorname{sen} (\alpha - \mu_T) \\ (\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}) I_y = m_A + m_T \end{array} \right. \quad (3\text{-VI})$$

nelle incognite V , γ ed α funzioni della variabile indipendente tempo. La determinazione di tali funzioni consente di definire univocamente in ogni istante la posizione del velivolo ed il suo assetto in quanto il moto dell'aeromobile, considerato come corpo rigido e libero da vincoli, è caratterizzato nel caso in esame da tre gradi di libertà.

Sostituendo nelle (3-VI) le espressioni (7-IV), (9-IV), (11-IV) e (256-IV) delle azioni esterne e tenendo in conto la definizione (196-III) di densità relativa del velivolo si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \cos (\alpha - \mu_T) - \operatorname{sen} \gamma - \frac{\rho V^2}{2W/S} C_D \\ \frac{V \dot{\gamma}}{g} = \frac{T}{W} \operatorname{sen} (\alpha - \mu_T) - \cos \gamma + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L \\ (\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}) \frac{k_y^2}{V^2} = \frac{\bar{c}/b}{2\mu} (C_m + C_{mT}) \end{array} \right. \quad (4\text{-VI})$$

cui si può pervenire anche direttamente esprimendo le condizioni di equilibrio fra le forze agenti nel caso in esame (fig. 1-VI). Da notare inoltre che, per essere il piano di simmetria del velivolo verticale, l'angolo di beccheggio θ , definito in fig. 4-II, viene espresso dalla:

$$\theta + \mu_x = \alpha + \gamma \quad (5\text{-VI})$$

che, per le (2-VI), conduce anche alla:

$$q = \dot{\theta} \quad (6\text{-VI})$$

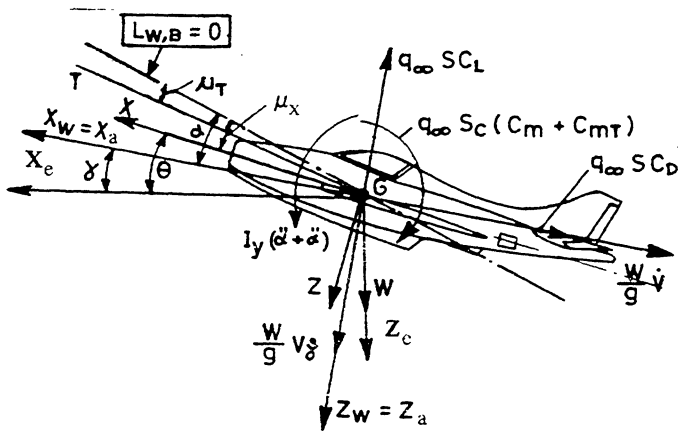


Fig. 1-VI

in accordo con la seconda delle (76-II) per $\Phi = 0$.

Le espressioni (5-I) dei fattori di carico relative al moto longitudinal-simmetrico risultano fornite (fig. 2-VI) dalle:

$$f_{xa} = - \left(\frac{\dot{V}}{g} + \text{sen } \gamma \right) \quad (7-VI)$$

$$f_{ya} = 0 \quad (8-VI)$$

$$f_{za} = \frac{V \dot{\gamma}}{g} + \text{cos } \gamma \quad (9-VI)$$

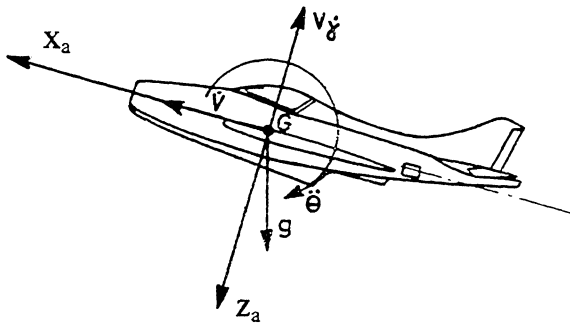


Fig. 2-VI

Esse, in virtù delle (4-VI), sono esplicitabili anche in termini di forze propulsive ed aerodinamiche:

$$f_{xa} = -\frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_D \quad (10-VI)$$

$$f_{za} = \frac{T}{W} \sin(\alpha - \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L \quad (11-VI)$$

L'accelerazione angolare:

$$\dot{q} = \ddot{\theta} = \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \quad (12-VI)$$

può, infine, essere espressa in funzione dei fattori di carico a mezzo delle relazioni sopra riportate (6.4.).

6.2. Moto longitudinal-simmetrico ad angolo di volta costante

Il moto longitudinal-simmetrico ad angolo di volta costante:

$$\dot{\gamma} = 0 \quad (13-VI)$$

è caratterizzato da due soli gradi di libertà; esso risulta quindi determinato a mezzo di un sistema di due equazioni differenziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) - \sin \gamma - \frac{\rho V^2}{2W/S} C_D \\ \ddot{\alpha} \frac{k_y^2}{V^2} = \frac{\bar{c}/b}{2\mu} (C_m + C_{mT}) \end{array} \right. \quad (14-VI)$$

nelle funzioni incognite $V(t)$ ed $\alpha(t)$.

La legge di variazione dell'angolo di barra:

$$\delta_e = \delta_e(t) \quad (15-VI)$$

che soddisfa la (13-VI) viene richiesta solamente per tenerne conto nella valutazione del coefficiente di resistenza. Date le modeste escursioni angolari della barra che caratterizzano l'evoluzione in esame, è sufficiente riferirsi al valore costante fornito dall'espressione approssimata:

$$\delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta_e}} (C_{m_0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_s}\delta_s + C_{mT}) \quad (16-VI)$$

che si ricava dalla seconda equazione del sistema (14-VI) per α costante. Con tale semplificazione lo studio del moto può essere agevolmente condotto accoppiando alla prima delle (14-VI) la:

$$\frac{T}{W} \operatorname{sen}(\alpha - \mu_T) - \cos \gamma + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L = 0 \quad (17-VI)$$

deducibile dalla seconda delle (4-VI) in virtù delle (13-VI). La (17-VI) consente di ricavare la legge di variazione del coefficiente di portanza del velivolo durante il moto. A tale scopo è da osservare che il termine $\operatorname{sen}(\alpha - \mu_T)$ che figura nell'equazione in esame è funzione del coefficiente di portanza secondo l'espressione approssimata (valida per le normali incidenze di volo - $\operatorname{sen} \alpha \cong \alpha$, $\cos \alpha \cong 1$):

$$\operatorname{sen}(\alpha - \mu_T) = \frac{C_L}{C_{La}} \cos \mu_T - \left(\frac{C_{L\delta_s}\delta_s + C_{L\delta_e}\delta_e}{C_{La}} \cos \mu_T + \operatorname{sen} \mu_T \right) \quad (18-VI)$$

ottenibile dalla (59-IV) ove si trascurino i termini in $\dot{\alpha}$. Sostituendo la (18-VI) nella (17-VI) si ricava:

$$C_L = \frac{\cos \gamma + \frac{T}{W} \left(\frac{C_{L\delta_s}\delta_s + C_{L\delta_e}\delta_e}{C_{La}} \cos \mu_T + \operatorname{sen} \mu_T \right)}{\frac{\rho V^2}{2W/S} + \frac{T}{W} \frac{\cos \mu_T}{C_{La}}} \quad (19-VI)$$

valida per μ_T qualsiasi. Per i velivoli di tipo convenzionale la cui sustentazione è ottenuta esclusivamente a mezzo della portanza, i valori di μ_T sono molto piccoli e la (19-VI) può essere ulteriormente semplificata. Il più delle volte l'angolo $\alpha - \mu_T$ è così piccolo da rendere trascurabile la

componente della spinta secondo l'asse Z_a ; in tali casi la (19-VI) si semplifica nella:

$$C_L = \frac{2W/S}{\rho V^2} \cos \gamma \quad (20-VI)$$

L'integrazione al passo della prima delle (14-VI) può essere agevolmente condotta applicando i metodi numerici illustrati in 5.3.; tuttavia nel caso in esame risulta più conveniente assumere come variabile indipendente, anziché il tempo, la quota di volo h in quanto ciò consente di assumere come funzione incognita V^2 in luogo di V . Infatti, sostituendo nella citata espressione la:

$$\dot{V} = \frac{\text{sen } \gamma}{2} \frac{d}{dh} (V^2) \quad (21-VI)$$

si ottiene:

$$\frac{\text{sen } \gamma}{2g} \frac{d}{dh} (V^2) = f(V^2) \quad (22-VI)$$

avendo posto:

$$f(V^2) = \frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) - \text{sen } \gamma - \frac{\rho V^2}{2W/S} C_D \quad (23-VI)$$

Entro un dislivello di quota:

$$\Delta h = h_{k+1} - h_k \quad (24-VI)$$

sufficientemente piccolo è lecito assumere T , ρ , α e C_D costanti e quindi considerare il secondo membro della (23-VI) come funzione della sola velocità di volo. Sotto tale ipotesi è possibile separare le variabili h e V^2 nella (22-VI):

$$\frac{d[f(V^2)]}{f(V^2)} = - \frac{C_D}{\mu \text{sen } \gamma} d \left(\frac{h}{b} \right) \quad (25-VI)$$

Quest'ultima, integrata fra le quote h_k ed h_{k+1} , porge:

$$\log f(V_{k+1}^2) = \log f(V_k^2) - \frac{C_D}{\mu \operatorname{sen} \gamma} \frac{\Delta h}{b} \quad (26-VI)$$

Posto:

$$\log K = \frac{C_D}{\mu \operatorname{sen} \gamma} \frac{\Delta h}{b} \quad (27-VI)$$

la (26-VI) fornisce:

$$f(V_{k+1}^2) = \frac{f(V_k^2)}{K} \quad (28-VI)$$

che, per la (23-VI), conduce alla:

$$V_{k+1}^2 = \frac{V_k^2}{K} + \frac{2 W/S}{\rho C_D} \left[\frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) - \operatorname{sen} \gamma \right] \left(1 - \frac{1}{K} \right) \quad (29-VI)$$

a mezzo della quale è possibile determinare la velocità alla fine dell'intervallo di quota (24-VI) entro cui è lecito supporre T , ρ , α e C_D costanti. Prefissato quindi un passo Δh sufficientemente piccolo (dell'ordine di qualche centinaio di metri) le relazioni (19-VI) e (29-VI), insieme alla (27-VI), consentono di determinare, per passi successivi, le caratteristiche del moto longitudinal-simmetrico corrispondente ad un prefissato valore dell'angolo di volta.

Tale determinazione assume particolare importanza nel caso di volo in discesa ($\gamma < 0$ $\Delta h < 0$) molto ripida. In tal caso l'evoluzione viene denominata affondata o picchiata e, se la traiettoria è verticale ($\gamma = -90^\circ$), picchiata in candela o semplicemente candela.

Durante l'affondata vengono raggiunti dal velivolo i più elevati valori della velocità equivalente e del numero di Mach; di qui la notevole importanza dello studio di tale evoluzione. Il valore della pendenza viene fissato dai regolamenti in relazione alla classe del velivolo.

La fig. 3-VI riporta i risultati del calcolo relativo ad un'affondata in candela eseguita da un velivolo a reazione le cui caratteristiche aerodinamiche e propulsive sono definite nelle figure 4-VI e 5-VI rispettivamente.

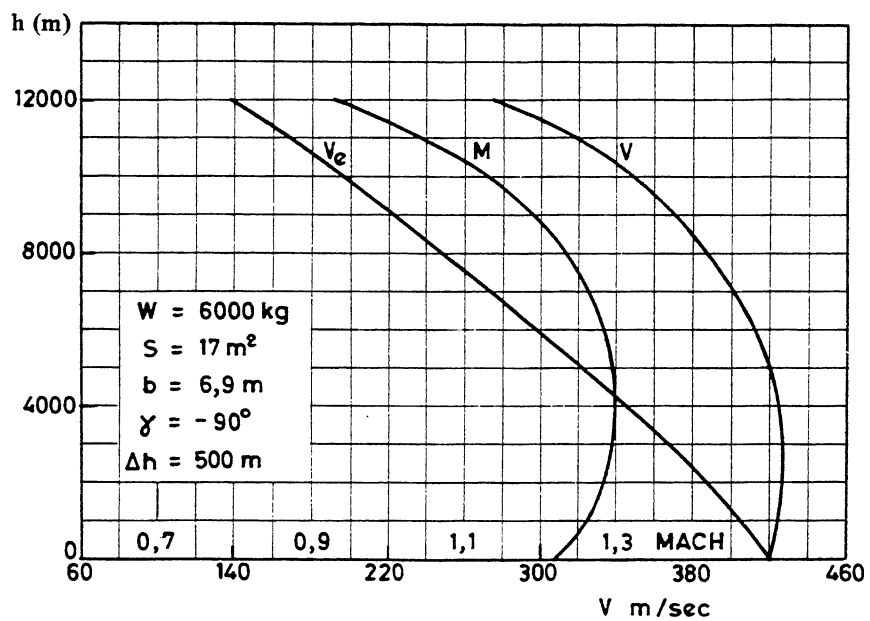


Fig. 3-VI

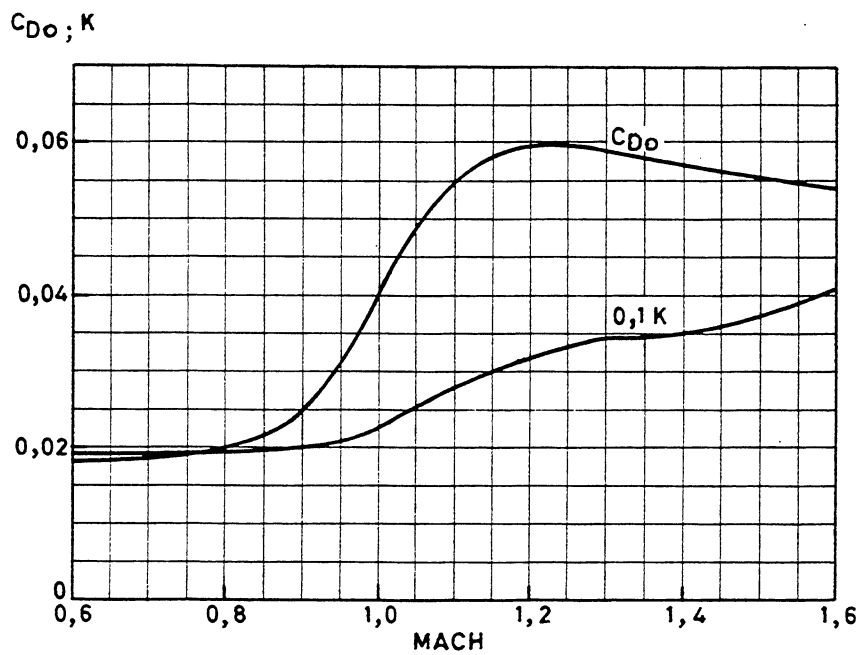


Fig. 4-VI

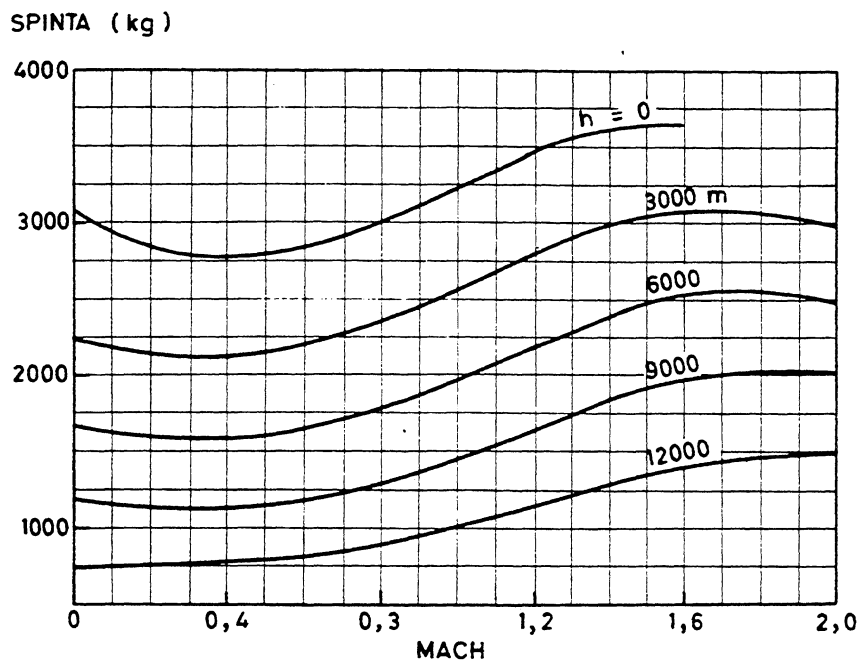


Fig. 5-VI

6.3. Moto longitudinal-simmetrico ad angolo di volta variabile

La traiettoria descritta dai velivoli per passare da una condizione di volo iniziale ad una finale caratterizzata da differenti valori dell'angolo di volta, viene denominata volta di raccordo.

La manovra relativa prende il nome di ripresa o richiamata nel caso in cui l'angolo di volta finale è maggiore di quello iniziale. La manovra del pilota è quella di tirare a sé la barra (manovra a cabrare) in modo da ridurre la portanza del piano orizzontale di coda. Si ottiene così un momento baricentrico cabrante che produce una rotazione del velivolo in senso tale da provocare un aumento di incidenza della velatura principale e quindi un incremento di portanza atto ad incurvare la traiettoria in senso tale da incrementare l'angolo di volta. La manovra descritta è caratterizzata da valori positivi del fattore di carico normale

(9-VI) se la ripresa è effettuata, come di consueto, sul ventre del velivolo. Per i velivoli acrobatici la manovra può essere eseguita sul dorso del velivolo; l'azione del pilota è quella di spingere in avanti la barra (manovra a picchiare) e l'evoluzione risulta caratterizzata da valori negativi del fattore di carico normale. Se l'angolo di volta finale è minore di quello iniziale, la manovra prende il nome di imbarcata e viene ottenuta azionando la barra a picchiare; essa è quindi caratterizzata da valori del fattore di carico normale inferiori all'unità.

Sotto determinate condizioni (velocità iniziale sufficientemente elevata ed escursione angolare della barra sufficientemente ampia), insistendo il pilota nella manovra a cabrare, il velivolo descrive una traiettoria curva compiendo un'intera rotazione in modo da ritrovarsi dopo un giro completo al valore iniziale dell'angolo di volta. Questa figura acrobatica dicesi gran volta dritta ed ha luogo a coefficienti di portanza e quindi (11-VI) a fattori di carico normali positivi. Sotto le medesime condizioni iniziali, insistendo il pilota nella manovra a picchiare, il velivolo esegue un'altra figura acrobatica denominata gran volta rovescia; essa ha luogo a coefficienti di portanza e valori del fattore di carico normali negativi o prevalentemente tali.

In ogni caso la traiettoria descritta dal velivolo e le grandezze ad essa relative si determinano integrando il sistema delle tre equazioni differenziali (4-VI) per assegnate condizioni iniziali e data legge di manovra. Quest'ultima esplicita l'azione esercitata dal pilota sia sulla superficie di governo longitudinale attraverso la legge della barra (15-VI) che sul gruppo moto-propulsore tramite la legge di variazione della spinta:

$$T = T(t) \quad (30-VI)$$

o dei parametri (regime del motore, passo dell'elica) che la definiscono.

La legge della barra viene assegnata quando si desidera studiare le evoluzioni che il velivolo è in grado di compiere in relazione ad una determinata manovra del pilota (corrispondente, ad esempio, alla massima escursione angolare dell'equilibratore o al massimo sforzo di barra). Alle volte interessa invece studiare la fase di transizione da una condizione di volo ad un'altra conseguente a sostanziali modifiche della configurazione del velivolo. Tale è ad esempio il caso dello studio del decollo e della successiva fase di conversione alla configurazione di volo a sosten-

tazione aerodinamica di un VTOL a spinta inclinabile. In tal caso, oltre alle (15-VI) e (20-VI) occorre definire anche la legge:

$$\mu_T = \mu_T(t) \quad (31-VI)$$

relativa all'inclinazione della spinta.

Quando invece interessa conoscere le possibilità evolutive dei velivoli in relazione alla sopportazione fisiologica del pilota o ai carichi agenti sulle strutture viene assegnata, in luogo della (15-VI), la legge della sopportazione:

$$f_{za} = f_{za}(t) \quad (32-VI)$$

così come si fa ricorso alla legge della sustentazione:

$$C_L = C_L(t) \quad (33-VI)$$

per lo studio della manovrabilità longitudinale del velivolo a coefficiente di portanza costante e, in particolare, al coefficiente di portanza massima. Talvolta, infine, vengono assegnate leggi miste come accade, ad esempio, quando si desidera esaminare le estreme possibilità di manovra di un velivolo:

$$\begin{aligned} f_{za} = n & \quad \text{per} \quad C_L \leq C_{L_{max}} \\ C_L = C_{L_{max}} & \quad \text{per} \quad f_{za} \leq n \end{aligned} \quad (34-VI)$$

prescindendo dall'entità delle escursioni angolari della barra e degli sforzi di pilotaggio occorrenti.

6.3.1. Integrazione delle equazioni del moto longitudinale-simmetrico per assegnata legge della barra

Risulta conveniente assumere come funzioni incognite le seguenti:

$$V(t) \quad \alpha(t) \quad \theta(t) \quad (35-VI)$$

le cui ultime due sono legate all'angolo di volta γ tramite la relazione (5-VI). Le relazioni (30-IV), (59-IV) e (94-IV), in virtù della (6-VI), forniscono le seguenti espressioni dei coefficienti aerodinamici che figurano nelle equazioni del moto (4-VI):

$$C_D = C_{D_0} + K(C_{L_a}\alpha + C_{L_{\delta_s}}\delta_s + C_{L_{\delta_e}}\delta_e)^m \quad (36-VI)$$

$$C_L = C_{L_a}\alpha + C_{L_{\delta_s}}\delta_s + C_{L_{\delta_e}}\delta_e + (C_{L_a}\dot{\alpha} + C_{L_q}\dot{\theta}) \frac{\bar{c}}{2V} \quad (37-VI)$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_a}\alpha + C_{m_{\delta_s}}\delta_s + C_{m_{\delta_e}}\delta_e + (C_{m_a}\dot{\alpha} + C_{m_q}\dot{\theta} + C_{m_{\delta_e}}\dot{\delta_e}) \frac{\bar{c}}{2V} \quad (38-VI)$$

nella prima delle quali sono stati trascurati i termini relativi alle derivate dinamiche. Sostituendo tali relazioni nel sistema (4-VI) ed esplicitando quindi \dot{V} , $\dot{\alpha}$ e $\dot{\theta}$ si perviene, in virtù anche delle (5-VI) e (196-III), alle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) - \sin(\theta + \mu_X - \alpha) - \frac{\rho V^2}{2W/S} \left[C_{D_0} + K(C_{L_a}\alpha + C_{L_{\delta_s}}\delta_s + C_{L_{\delta_e}}\delta_e)^m \right] \\ \frac{\dot{\alpha}}{g} = \frac{\dot{\theta} \left(1 - \frac{\bar{c}/b}{4\mu} C_{L_q} \right) \frac{V}{g} - \frac{T}{W} \sin(\alpha - \mu_T) + \cos(\theta + \mu_X - \alpha) + \frac{\rho V^2}{2W/S} (C_{L_a}\alpha + C_{L_{\delta_s}}\delta_s + C_{L_{\delta_e}}\delta_e)}{1 + \frac{\bar{c}/b}{4\mu} C_{L_a}} \\ \frac{\dot{\theta}}{g} \frac{k_y^2}{V^2} = \frac{\bar{c}/b}{2\mu} \left[C_{m_T} + C_{m_0} + C_{m_a}\alpha + C_{m_{\delta_s}}\delta_s + C_{m_{\delta_e}}\delta_e + (C_{m_a}\dot{\alpha} + C_{m_q}\dot{\theta} + C_{m_{\delta_e}}\dot{\delta_e}) \frac{\bar{c}}{2V} \right] \end{array} \right. \quad (39-VI)$$

nell'ultima delle quali compare il coefficiente di momento baricentrico dovuto alle azioni propulsive, anch'esso esplicitabile in funzione di V ed α in relazione al tipo di propulsione impiegato ed alle caratteristiche dell'impianto [relazioni (311-IV) e (335-IV) per quanto concerne gli effetti diretti per velivoli ad elica ed a getto rispettivamente].

Per assegnata legge della barra il sistema (39-VI) costituisce un legame funzionale fra le variabili del moto esprimibile a mezzo delle:

$$\begin{cases} \dot{V} = f_1(V, \alpha, \theta) \\ \dot{\alpha} = f_2(V, \alpha, \theta, \dot{\theta}) \\ \ddot{\theta} = f_3(V, \alpha, \dot{\alpha}, \dot{\theta}) \end{cases} \quad (40-VI)$$

Esso viene integrato al passo avvalendosi dei metodi esposti in 5.3. ed illustrati in 5.4.2. Noti i valori dei parametri del moto e relative derivate al tempo t :

$$V_k \quad \alpha_k \quad \theta_k \quad \dot{V}_k \quad \dot{\alpha}_k \quad \dot{\theta}_k \quad \ddot{\theta}_k \quad (41-VI)$$

si procede alla determinazione di V α θ e $\dot{\theta}$ al tempo $t + \Delta t$:

$$\begin{cases} V_{k+1} = V_k + \dot{V} \Delta t \\ \alpha_{k+1} = \alpha_k + \dot{\alpha} \Delta t \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \dot{\theta} \Delta t \\ \dot{\theta}_{k+1} = \dot{\theta}_k + \ddot{\theta} \Delta t \end{cases} \quad (42-VI)$$

valutando i gradienti \dot{V} , $\dot{\alpha}$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ a mezzo di formule approssimate dipendenti dal particolare metodo adottato; i valori di \dot{V}_{k+1} , $\dot{\alpha}_{k+1}$ e $\ddot{\theta}_{k+1}$ relativi al tempo $t + \Delta t$ vengono infine ottenuti risolvendo le equazioni del moto considerate come equazioni algebriche simultanee al passo $k + 1$:

$$\begin{cases} \dot{V}_{k+1} = f_1(V_{k+1}, \alpha_{k+1}, \theta_{k+1}) \\ \dot{\alpha}_{k+1} = f_2(V_{k+1}, \alpha_{k+1}, \theta_{k+1}, \dot{\theta}_{k+1}) \\ \ddot{\theta}_{k+1} = f_3(V_{k+1}, \alpha_{k+1}, \dot{\alpha}_{k+1}, \dot{\theta}_{k+1}) \end{cases} \quad (43-VI)$$

Così, ad esempio, il metodo di Eulero assume:

$$\dot{V} = \dot{V}_k \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_k \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_k \quad \ddot{\theta} = \ddot{\theta}_k \quad (44-VI)$$

mentre l'adozione di una formula Runge-Kutta del quarto ordine con-

duce alle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = (\dot{V}^I + 2\dot{V}^{II} + 2\dot{V}^{III} + \dot{V}^{IV})/6 \\ \dot{\alpha} = (\dot{\alpha}^I + 2\dot{\alpha}^{II} + 2\dot{\alpha}^{III} + \dot{\alpha}^{IV})/6 \\ \dot{\theta} = (\dot{\theta}^I + 2\dot{\theta}^{II} + 2\dot{\theta}^{III} + \dot{\theta}^{IV})/6 \\ \ddot{\theta} = (\ddot{\theta}^I + 2\ddot{\theta}^{II} + 2\ddot{\theta}^{III} + \ddot{\theta}^{IV})/6 \end{array} \right. \quad (45-VI)$$

in cui figurano valori dei parametri di volo relativi a varie approssimazioni da calcolare a mezzo delle:

$$\begin{array}{l} V^I = V_k \quad \dot{V}^I = \dot{V}_k \quad \alpha^I = \alpha_k \quad \dot{\alpha}^I = \dot{\alpha}_k \\ \theta^I = \theta_k \quad \dot{\theta}^I = \dot{\theta}_k \quad \ddot{\theta}^I = \ddot{\theta}_k \end{array} \quad (46-VI)$$

$$\begin{array}{l} V^{II} = V_k + \dot{V}^I \Delta t / 2 \quad \alpha^{II} = \alpha_k + \dot{\alpha}^I \Delta t / 2 \\ \theta^{II} = \theta_k + \dot{\theta}^I \Delta t / 2 \quad \dot{\theta}^{II} = \dot{\theta}_k + \ddot{\theta}^I \Delta t / 2 \end{array} \quad (47-VI)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}^{II} = f_1(V^{II}, \alpha^{II}, \theta^{II}) \\ \dot{\alpha}^{II} = f_2(V^{II}, \alpha^{II}, \theta^{II}, \dot{\theta}^{II}) \\ \ddot{\theta}^{II} = f_3(V^{II}, \alpha^{II}, \dot{\alpha}^{II}, \dot{\theta}^{II}) \end{array} \right. \quad (48-VI)$$

$$\begin{array}{l} V^{III} = V_k + \dot{V}^{II} \Delta t / 2 \quad \alpha^{III} = \alpha_k + \dot{\alpha}^{II} \Delta t / 2 \\ \theta^{III} = \theta_k + \dot{\theta}^{II} \Delta t / 2 \quad \dot{\theta}^{III} = \dot{\theta}_k + \ddot{\theta}^{II} \Delta t / 2 \end{array} \quad (49-VI)$$

$$\begin{cases} \dot{V}^{\text{III}} = f_1(V^{\text{III}}, \alpha^{\text{III}}, \theta^{\text{III}}) \\ \dot{\alpha}^{\text{III}} = f_2(V^{\text{III}}, \alpha^{\text{III}}, \theta^{\text{III}}, \dot{\theta}^{\text{III}}) \\ \ddot{\theta}^{\text{III}} = f_3(V^{\text{III}}, \alpha^{\text{III}}, \dot{\alpha}^{\text{III}}, \dot{\theta}^{\text{III}}) \end{cases} \quad (50\text{-VI})$$

$$\begin{aligned} V^{\text{IV}} &= V_k + \dot{V}^{\text{III}} \Delta t & \alpha^{\text{IV}} &= \alpha_k + \dot{\alpha}^{\text{III}} \Delta t \\ \theta^{\text{IV}} &= \theta_k + \dot{\theta}^{\text{III}} \Delta t & \dot{\theta}^{\text{IV}} &= \dot{\theta}_k + \ddot{\theta}^{\text{III}} \Delta t \end{aligned} \quad (51\text{-VI})$$

$$\begin{cases} \dot{V}^{\text{IV}} = f_1(V^{\text{IV}}, \alpha^{\text{IV}}, \theta^{\text{IV}}) \\ \dot{\alpha}^{\text{IV}} = f_2(V^{\text{IV}}, \alpha^{\text{IV}}, \theta^{\text{IV}}, \dot{\theta}^{\text{IV}}) \\ \ddot{\theta}^{\text{IV}} = f_3(V^{\text{IV}}, \alpha^{\text{IV}}, \dot{\alpha}^{\text{IV}}, \dot{\theta}^{\text{IV}}) \end{cases} \quad (52\text{-VI})$$

La conoscenza dei valori medi di V , α e θ relativi a ciascun passo Δt consente infine di determinare la traiettoria del velivolo attraverso il calcolo delle componenti dello spostamento del suo baricentro sugli assi terra:

$$\begin{aligned} \Delta x_e &= V \cos(\theta + \mu_x - \alpha) \Delta t \\ \Delta z_e &= -V \sin(\theta + \mu_x - \alpha) \Delta t \end{aligned} \quad (53\text{-VI})$$

la seconda delle quali permette inoltre di tener conto delle variazioni della densità dell'aria durante l'evoluzione.

Il procedimento di integrazione al passo del sistema (39-VI) è stato applicato, a titolo di esempio, allo studio del moto di richiamata del velivolo preso in esame in 6.2. e caratterizzato dai seguenti parametri aerodinamici:

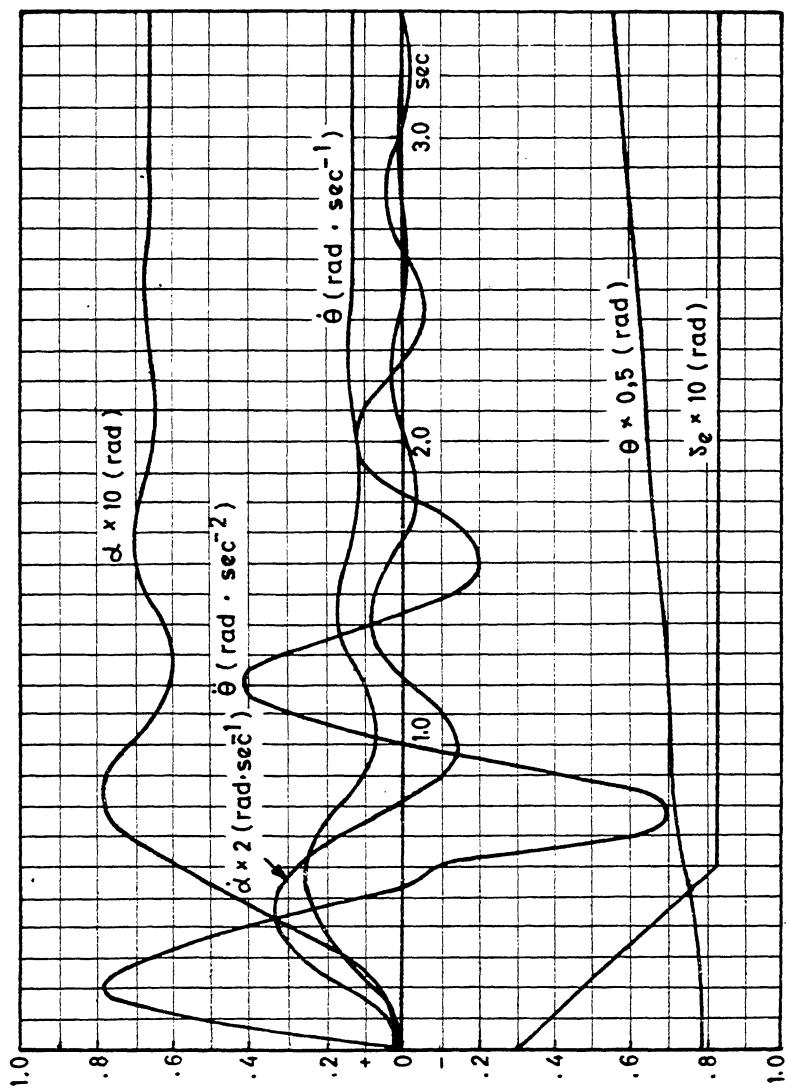


Fig. 6-VI

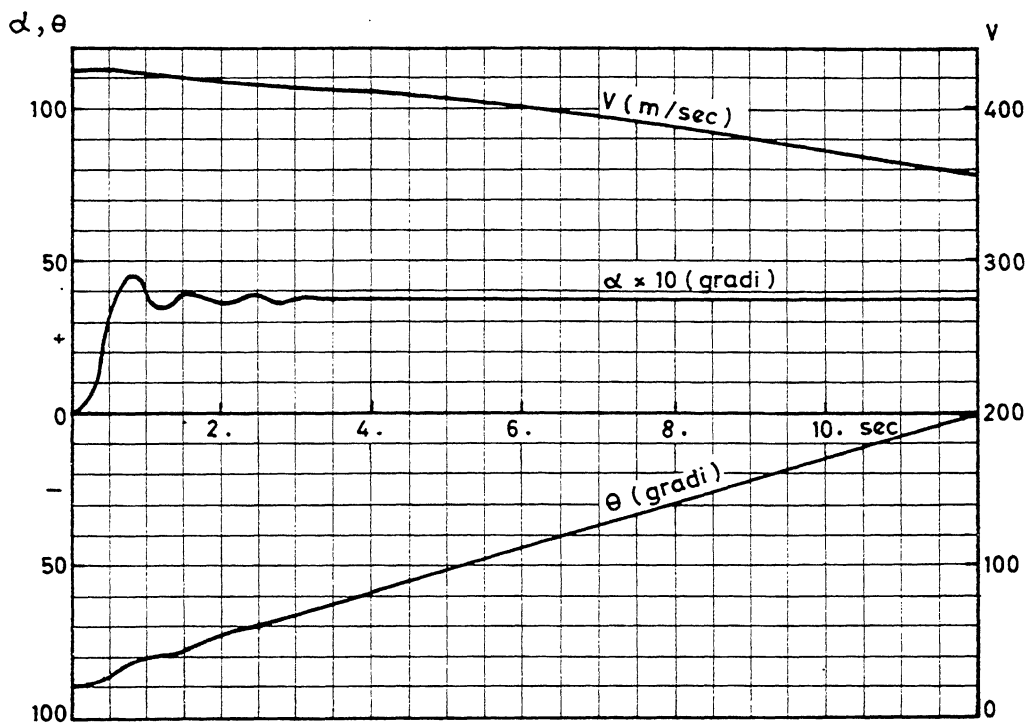


Fig. 7-VI

$$\begin{array}{lll}
 C_{L\dot{\alpha}} = 4,18 \text{ rad}^{-1} & C_{L\delta_e} = 0,287 \text{ rad}^{-1} & C_{L\dot{\alpha}} = 2,27 \\
 C_{Lq} = 4,72 & C_{m_0} = -0,015 & C_{m\alpha} = -0,375 \text{ rad}^{-1} \\
 C_{m\delta_e} = -0,507 \text{ rad}^{-1} & C_{m\dot{\alpha}} = -4,00 & C_{mq} = -8,34
 \end{array}$$

La legge di manovra ipotizzata è definita in fig. 6-VI con inizio alla quota di 4.000 metri nelle condizioni di volo pre-manovra relative all'affondata in candela esaminata in 6.2.

I risultati del calcolo sono riportati nelle figure 6-VI e 7-VI la prima delle quali si riferisce in particolare alla fase iniziale del moto caratterizzato da accelerazione angolare $\dot{\theta}$ diversa da zero. La figura 8-VI riporta

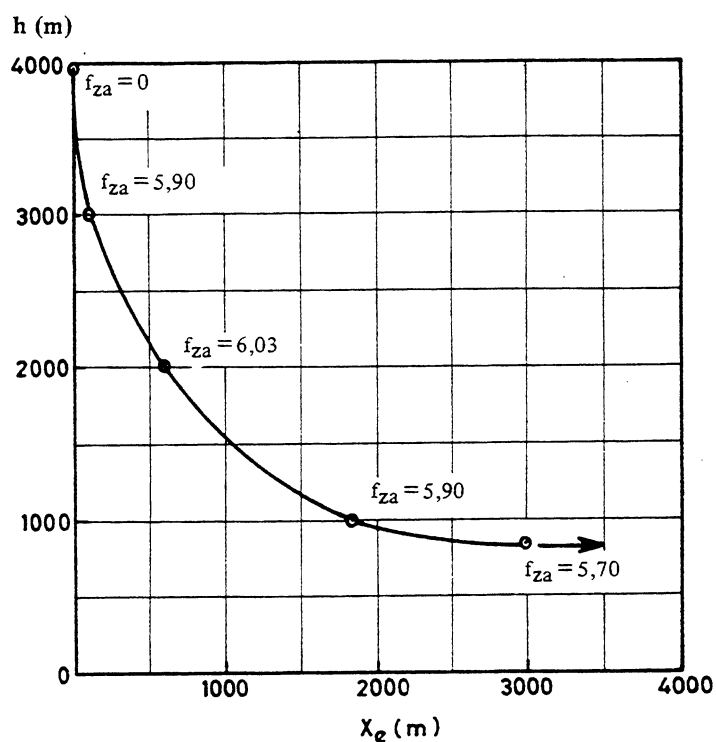


Fig. 8-VI

infine la traiettoria descritta dal velivolo parametrata in termini di fattore di carico normale (9-VI).

6.3.2. Integrazione delle equazioni del moto longitudinal-simmetrico per assegnata legge della sustentazione

Il procedimento di calcolo precedentemente illustrato si semplifica notevolmente se viene assegnata la legge della sopportazione (32-VI) o quella della sustentazione (33-VI) in luogo di quella della barra (15-VI). In entrambi i casi infatti occorre risolvere un sistema di due sole equazioni differenziali nelle due funzioni incognite: velocità di volo ed angolo di

volta. In particolare, per assegnata legge della sustentazione, ci si avvale delle prime due delle (3-VI) che, in relazione ai modesti valori delle incidenze normali di volo, possono con buona approssimazione scriversi nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} (\cos \mu_T - \alpha \sin \mu_T) - \sin \gamma - \frac{\rho V^2}{2W/S} C_D \\ \frac{V\dot{\gamma}}{g} = \frac{T}{W} (\alpha \cos \mu_T - \sin \mu_T) - \cos \gamma + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L \end{array} \right. \quad (54-VI)$$

con C_D esprimibile a mezzo della (30-IV) ed α calcolabile tramite la:

$$\alpha = \frac{C_L - (C_{L\delta_s} \delta_s + C_{L\delta_e} \delta_e)}{C_{L\alpha}} \quad (55-VI)$$

dedotta dalla (59-IV) trascurando i termini dinamici.

Il sistema di equazioni differenziali cui si perviene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \left[\cos \mu_T + \frac{C_L - (C_{L\delta_s} \delta_s + C_{L\delta_e} \delta_e)}{C_{L\alpha}} \sin \mu_T \right] + \\ \quad - \sin \gamma \frac{\rho V^2}{2W/S} (C_{D_0} + KC_L^m) \\ \frac{V\dot{\gamma}}{g} = \frac{T}{W} \left[\frac{C_L - (C_{L\delta_s} \delta_s + C_{L\delta_e} \delta_e)}{C_{L\alpha}} \cos \mu_T - \sin \mu_T \right] + \\ \quad - \cos \gamma + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L \end{array} \right. \quad (56-VI)$$

esplicita, per assegnata legge della sustentazione (33-VI), \dot{V} e $\dot{\gamma}$ in funzione di V e γ :

$$\begin{cases} \dot{V} = \varphi_1(V, \gamma) \\ \dot{\gamma} = \varphi_2(V, \gamma) \end{cases} \quad (57-VI)$$

La sua integrazione numerica comporta l'impiego delle metodologie di calcolo illustrate in 6.3.1.

6.3.3. Integrazione delle equazioni del moto longitudinal-simmetrico per assegnata legge della sopportazione

In questo caso risulta conveniente far riferimento al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \left[\cos \mu_T + \frac{C_L - (C_{L\delta_s} \delta_s + C_{L\delta_e} \delta_e)}{C_{L\alpha}} \sin \mu_T \right] + \\ \quad - \sin \gamma - \frac{\rho V^2}{2W/S} (C_{D_0} + KC_L^m) \\ \frac{V\dot{\gamma}}{g} = f_{za} - \cos \gamma \\ C_L = \frac{f_{za} + \frac{T}{W} \left[\frac{C_{L\delta_s} \delta_s + C_{L\delta_e} \delta_e}{C_{L\alpha}} \cos \mu_T + \sin \mu_T \right]}{\frac{\rho V^2}{2W/S} + \frac{T}{W} \frac{\cos \mu_T}{C_{L\alpha}}} \end{cases} \quad (58-VI)$$

dedotto dal sistema (56-VI) sostituendo alla seconda equazione la (9-VI) ed introducendo una terza relazione – ricavabile dalla (11-VI) – che esprime il coefficiente di portanza in funzione del fattore di carico e della pressione dinamica di volo.

Sostituendo la terza delle (58-VI) nella prima si perviene ad un sistema di due equazioni differenziali che, per assegnata legge della sopportazione (32-VI), fornisce \dot{V} e $\dot{\gamma}$ in funzione di V e γ :

$$\begin{cases} \dot{V} = \varphi_1(V, \gamma) \\ \dot{\gamma} = \varphi_3(V, \gamma) \end{cases} \quad (59-VI)$$

6.4. Moto di beccheggio

Lo studio del moto longitudinal-simmetrico dei velivoli conseguente ad una brusca manovra dell'equilibratore evidenzia due distinte fasi dell'evoluzione aventi caratteristiche generali ben definite. La prima, denominata moto di beccheggio, è generalmente di breve durata ed è caratterizzata da forti variazioni dell'accelerazione angolare e dell'angolo di incidenza mentre l'angolo di volta varia lentamente e la velocità rimane praticamente costante. La seconda fase, nota col nome di moto di regime, è caratterizzata da accelerazione angolare nulla o quasi e da modeste variazioni dell'angolo di incidenza.

Lo studio del moto di beccheggio può perciò esser condotto ponendo nelle (39-VI):

$$\dot{V} = 0 \quad (60-VI)$$

ed integrando quindi un sistema di due equazioni differenziali in luogo di tre. Analogamente il moto di regime può essere studiato introducendo nelle (39-VI) le semplificazioni derivanti dalle condizioni:

$$\ddot{\theta} = \dot{\alpha} = 0 \quad (61-VI)$$

A queste due fasi corrispondono condizioni di carico ben definite, denominate complementari e fondamentali rispettivamente.

La definizione delle condizioni di carico complementari richiede la conoscenza della legge di variazione, nel tempo, dell'accelerazione angolare cui è sottoposto il velivolo; da essa si può, tra l'altro, dedurre la legge di variazione del carico aerodinamico sul piano orizzontale di coda dovuto alla manovra del pilota, detto appunto, carico di manovra.

E' quindi di particolare interesse ricercare l'espressione dell'accelerazione angolare in funzione dei fattori di carico nel moto di beccheggio. A tale scopo, sostituendo nella seconda delle (2-VI) i valori di $\dot{\gamma}$ ed $\dot{\alpha}$ ottenuti dalle (9-VI) e (11-VI) rispettivamente e tenendo inoltre presente l'ipotesi espressa dalla (60-VI), si ottiene:

$$q = \frac{g}{V} (f_{za} - \cos \gamma) + \frac{f_{za}}{\frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_{La}} \quad (62-VI)$$

avendo trascurato la variazione della spinta propulsiva. Derivando ulteriormente la (62-VI) rispetto al tempo si perviene alla:

$$\dot{q} = \frac{g}{V} (\dot{f}_{za} + \dot{\gamma} \operatorname{sen} \gamma) + \frac{\left[\frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_{La} \right] \ddot{f}_{za} + \frac{T}{W} \operatorname{sen}(\alpha - \mu_T) \dot{\alpha} \dot{f}_{za}}{\left[\frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_{La} \right]^2} \quad (63-VI)$$

che, per le (7-VI), (9-VI) ed (11-VI), fornisce la ricercata espressione dell'accelerazione angolare del moto di beccheggio:

$$\dot{q} = - \left(\frac{g}{V} \right)^2 (f_{za} - \cos \gamma) f_{xa} + \left\{ \frac{g}{V} + \frac{\frac{T}{W} \operatorname{sen}(\alpha - \mu_T) \dot{f}_{za}}{\left[\frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) + \frac{q_\infty}{W/S} C_{La} \right]^3} \right\} \dot{f}_{za} + \frac{1}{\frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_T) + \frac{q_\infty}{W/S} C_{La}} \ddot{f}_{za} \quad (64-VI)$$

Normalmente l'angolo $(\alpha - \mu_T)$ è molto piccolo, inoltre i valori del fattore di carico tangenziale sono relativamente bassi mentre il rapporto $(g/V)^2$ tende rapidamente a zero al crescere della velocità di volo; conseguentemente l'espressione approssimata dell'accelerazione angolare nel moto di beccheggio:

$$\dot{q} \cong \frac{g}{V} \dot{f}_{za} + \frac{1}{\frac{T}{W} + \frac{q_\infty}{W/S} C_{La}} \ddot{f}_{za} \quad (65-VI)$$

fornisce valori molto prossimi a quelli calcolati tramite la (64-VI).

6.4.1. Moto di beccheggio prodotto dalla manovra cabra-picchia

Durante le evoluzioni caratterizzate da valori estremi del fattore di carico normale in presenza di forti accelerazioni angolari di beccheggio si possono verificare condizioni di carico particolarmente critiche sulle strutture dei velivoli, principalmente sul piano orizzontale di coda e sulla fusoliera. E' quindi di enorme interesse pratico lo studio del moto dei velivoli sotto l'azione di manovre dell'equilibratore tali da portare il velivolo a raggiungere siffatte condizioni di volo. Esse vengono raggiunte in tempi generalmente modesti, per tale motivo risulta lecito considerare l'evoluzione come un moto di beccheggio ed assumere quindi valida la ipotesi espressa dalla (60-VI).

Le condizioni di carico più gravose si verificano per effetto di una brusca manovra a cabrare seguita da brusca manovra a picchiare. Durante tale manovra viene ipotizzata la massima rapidità del movimento sia a cabrare che a picchiare della barra:

$$\dot{\delta}_e = (\dot{\delta}_e)_{\max} \quad (66-VI)$$

compatibilmente con l'elasticità e l'inerzia della trasmissione di comando. La manovra della barra a cabrare sarebbe tale, per rapidità ed ampiezza, da portare successivamente il velivolo al superamento del massimo fattore di carico normale se non venisse seguita da una tempestiva e brusca contromanovra a picchiare. Viene ipotizzato che il tempo t_1 intercorso fra gli inizi della manovra e della contromanovra sia tale da portare il velivolo a raggiungere ma non a superare il massimo fattore di carico normale consentito. Si ammette cioè la possibilità di errore da parte del pilota purché l'azione correttiva venga eseguita giusto in tempo per portare il velivolo al contorno dell'involuppo delle condizioni di volo consentite. Per tale motivo la manovra descritta viene anche denominata manovra pentita.

L'esecuzione angolare della barra è limitata dal valore massimo:

$$\delta_e = (\delta_e)_{\max} \quad (67-VI)$$

definito, in relazione alla pressione dinamica di volo, dal fondo corsa a cabrare della trasmissione di comando o dal massimo sforzo musco-

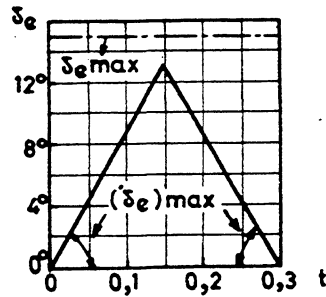


Fig. 9-VI

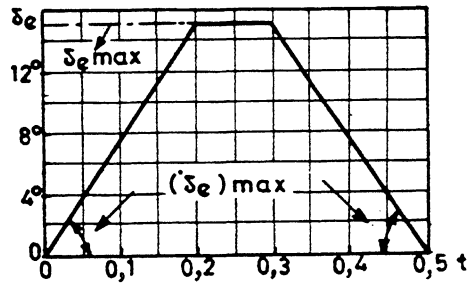


Fig. 10-VI

lare esercitabile dal pilota. Ne consegue che la legge della barra risulta essere di tipo triangolare (fig. 9-VI) o trapezoidale (fig. 10-VI) a seconda che, durante il tempo t_1 , l'ampiezza della manovra a cabrare risulti contenuta o meno entro il limite espresso dalla (67-VI).

In relazione al loro rilevante interesse pratico sono state condotte numerose indagini teoriche e sperimentali che hanno consentito di pervenire ad una migliore conoscenza delle leggi di variazione del fattore di carico normale e dell'accelerazione angolare dovute alla manovra descritta. Poiché il valore limite (67-VI) dell'angolo dell'equilibratore viene raggiunto piuttosto raramente, la legge di manovra presa a base di questi studi è quella di tipo triangolare riportata in fig. 9-VI.

La risposta del velivolo in termini di incremento del fattore di carico normale:

$$\Delta f_{za} = f_{za} - f_{zao} \quad (68-VI)$$

è costituita da una funzione (fig. 11-VI), caratterizzata da un massimo in corrispondenza di un tempo t_2 sensibilmente maggiore di t_1 e da un flesso nel ramo ascendente nell'intorno di t_1 . Essa è esprimibile analiticamente a mezzo di una relazione del tipo:

$$\Delta f_{za} = K_a t^{K_b} e^{-K_c t} \quad (69-VI)$$

con K_a dipendente dal valore estremo $(\Delta f_{za})_{\max}$ dell'incremento del fattore di carico normale e con K_b e K_c funzioni del tempo t_2 necessario per

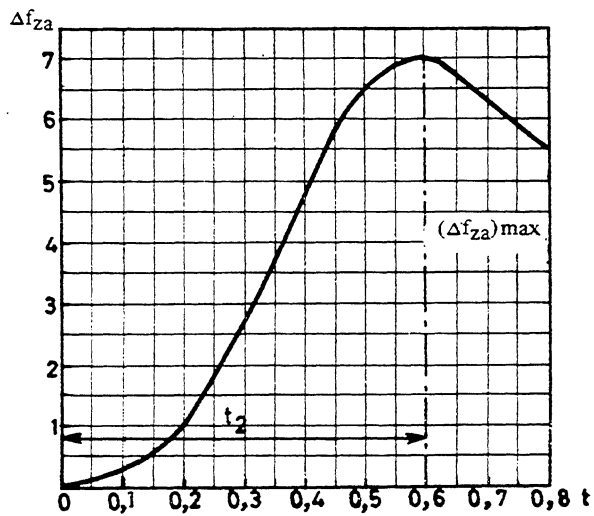


Fig. 11-VI

raggiungere detto valore estremo.

Derivando infatti la (69-VI) rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{\Delta f_{za}} = \Delta f_{za} \left(\frac{K_b}{t} - K_c \right) \quad (70-VI)$$

che, per essere:

$$(\dot{\Delta f_{za}})_{t=t_2} = 0 \quad (71-VI)$$

porge:

$$t_2 = K_b / K_c \quad (72-VI)$$

Inoltre, essendo:

$$(\Delta f_{za})_{t=t_2} = (\Delta f_{za})_{max} \quad (73-VI)$$

la (69-VI) può essere espressa nella forma più significativa:

$$\frac{\Delta f_{za}}{(\Delta f_{za})_{\max}} = \left(\frac{t}{t_2}\right)^{K_b} e^{K_b(1-t/t_2)} \quad (74-VI)$$

dalla quale, a mezzo di successive derivazioni rispetto al tempo, si deducono le:

$$\frac{\dot{\Delta f}_{za}}{(\Delta f_{za})_{\max}} = \frac{\Delta f_{za}}{(\Delta f_{za})_{\max}} \frac{K_b}{t_2} \left(\frac{t_2}{t} - 1\right) \quad (75-VI)$$

$$\frac{\ddot{\Delta f}_{za}}{(\Delta f_{za})_{\max}} = \frac{\Delta f_{za}}{(\Delta f_{za})_{\max}} \left(\frac{K_b}{t_2}\right)^2 \left[\left(\frac{t_2}{t}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{K_b}\right) - 2\frac{t_2}{t} + 1 \right] \quad (76-VI)$$

Sostituendo queste ultime nella (60-VI) si perviene alla seguente espressione per l'accelerazione angolare:

$$\frac{\dot{q}}{(\Delta f_{za})_{\max}} = \frac{g}{V t_2} K_\gamma + \frac{1}{\left(\frac{T}{W} + \frac{q_\infty}{W/S} C_{L_a}\right) t_2^2} K_a \quad (77-VI)$$

dove le costanti K_γ e K_a risultano essere funzioni di K_b e t/t_2 secondo le:

$$K_\gamma = K_b \left(\frac{1}{t/t_2} - 1\right) \left(\frac{t}{t_2}\right)^{K_b} e^{K_b(1-t/t_2)} \quad (78-VI)$$

$$K_a = K_b^2 \left[\frac{1 - 1/K_b}{(t/t_2)^2} - \frac{2}{t/t_2} + 1 \right] \left(\frac{t}{t_2}\right)^{K_b} e^{K_b(1-t/t_2)} \quad (79-VI)$$

Da calcoli eseguiti su diversi tipi di velivoli assumendo una legge di manovra triangolare è risultato che il tempo t_2 - necessario per raggiungere il massimo incremento del fattore di carico normale - varia pressoché linear-

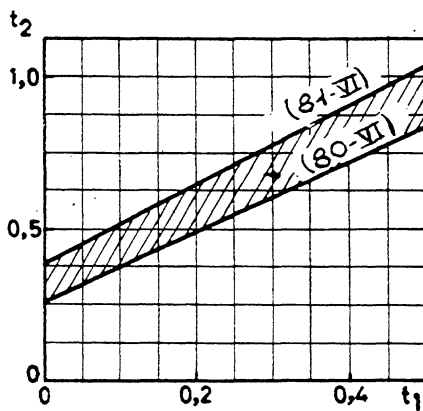


Fig. 12-VI

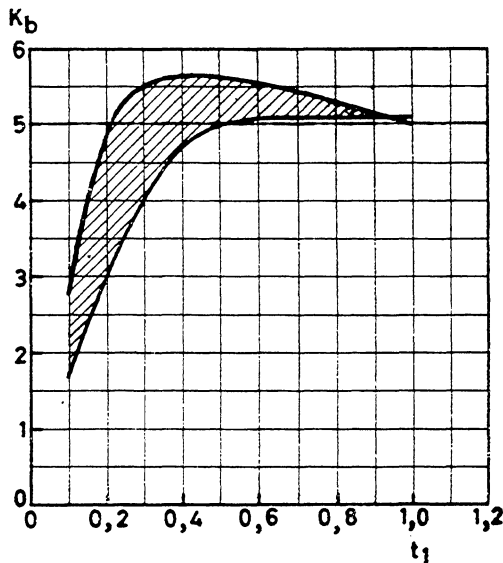


Fig. 13-VI

mente col tempo t_1 — necessario per raggiungere la massima escursione angolare dell'equilibratore — secondo la:

$$t_2 = 0,25 + 1,15 t_1 \quad (80\text{-VI})$$

per velivoli caratterizzati da elevato margine di stabilità statica longitudinale, poco caricati ed in volo ad elevate pressioni dinamiche e:

$$t_2 = 0,38 + 1,30 t_1 \quad (81\text{-VI})$$

per velivoli aventi basso margine di stabilità statica longitudinale, molto caricati ed in volo a basse pressioni dinamiche (fig. 12-VI). Tutti i casi di pratico interesse risultano compresi entro il campo definito dalle (80-VI) ed (81-VI).

Circa i valori del coefficiente K_b , detto dagli americani fattore di forma, è risultato, da prove di volo eseguite su un gran numero di velivoli, la sua dipendenza da t_1 , dal carico alare, dal margine di stabilità stati-

ca longitudinale e dalla pressione dinamica di volo. La legge di dipendenza è sintetizzata nel diagramma di fig. 13-VI nel quale sono riportate le due curve relative ai due casi limiti cui si riferiscono le (80-VI) ed (81-VI) rispettivamente. Da questo diagramma risulta che, per valori di t_1 , non ec-

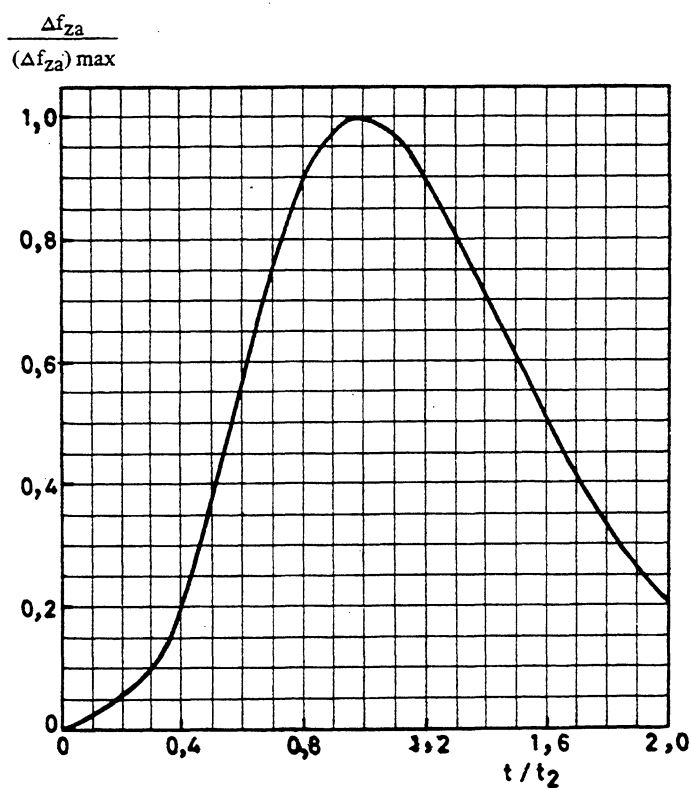


Fig. 14-VI

cessivamente piccoli, il fattore di forma è molto prossimo al valore medio di cinque. Per tale ragione è stato proposto di assumere:

$$K_b = 5 \quad (82-VI)$$

Conseguentemente i coefficienti K_γ e K_a che figurano nell'espressione (77-VI) dell'accelerazione angolare, così come l'espressione (74-VI) della legge di variazione dell'incremento di fattore di carico normale, risultano funzioni univoche di t/t_2 indipendenti dalle particolari caratteristiche del velivolo in esame.

Le figure (14-VI) e (15-VI) definiscono, nell'ipotesi di validità della (82-VI), la funzione $\Delta f_{za}/(\Delta f_{za})_{max}$ e le funzioni K_γ e K_a rispettivamente. Per quanto concerne infine il tempo t_1 necessario per portare la barra alla massima escursione, esso varia entro limiti molto ristretti compresi

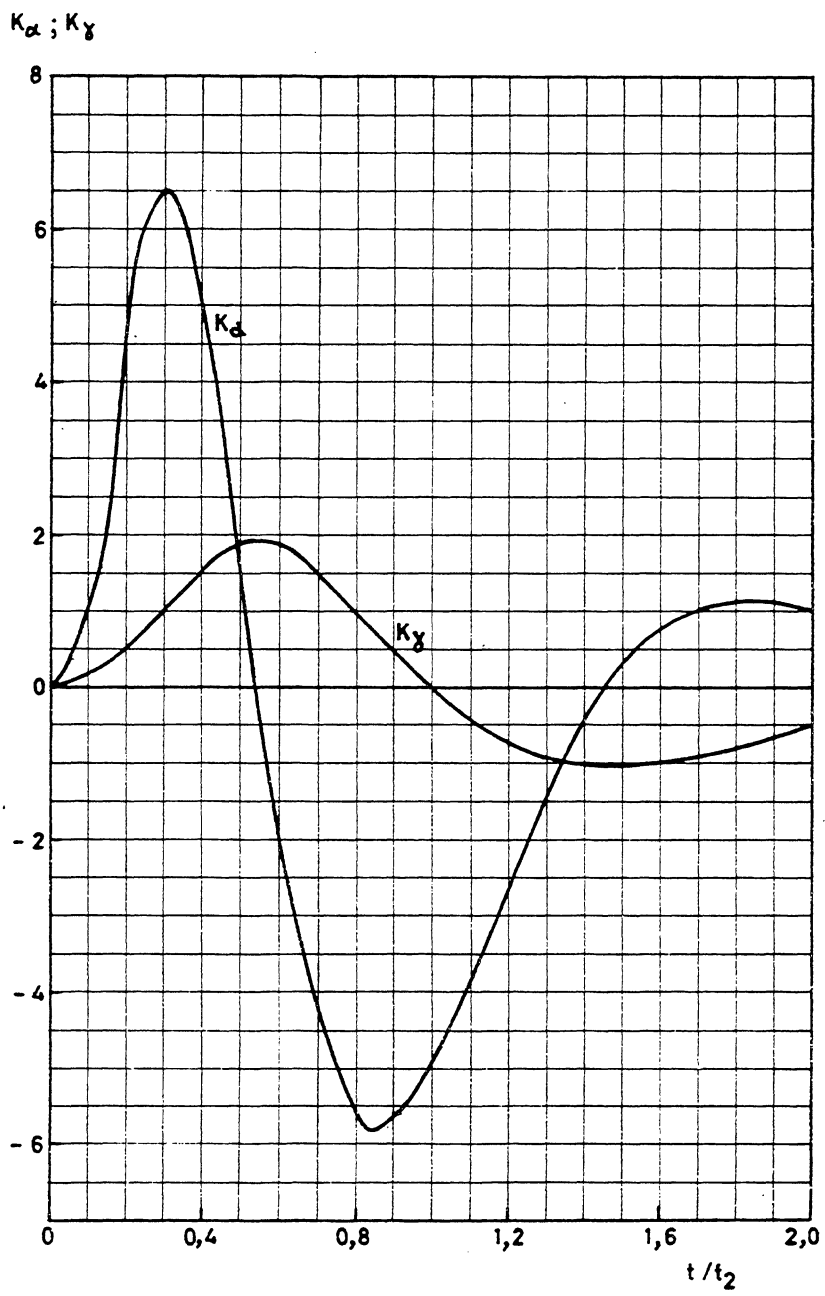


Fig. 15-VI

fra due decimi di secondo per velivoli con peso inferiore a 5000 Kg. e quattro decimi di secondo per velivoli il cui peso supera i 45.000 Kg.

Le relazioni (77-VI), (80-VI) ed (81-VI), insieme ai grafici di fig. 14-VI e 15-VI, consentono di valutare le leggi di variazione col tempo del fattore di carico normale e dell'accelerazione angolare nella manovra in esame.

E' interessante notare che il diagramma di K_a presenta due estremi: uno positivo (6,5) e l'altro negativo (- 5,8) per valori di t/t_2 pari rispettivamente a 0,30 e 0,85 mentre K_γ raggiunge due valori estremi (1,95 e - 1,05) in corrispondenza di valori nulli di K_a .

Poiché nella (77-VI) il coefficiente di K_γ è notevolmente inferiore a quello di K_a , la legge di variazione dell'accelerazione angolare dipende prevalentemente da quella della funzione K_a . Si può quindi concludere che nella manovra in esame, l'accelerazione angolare presenta un massimo positivo poco dopo l'inizio della manovra ($t/t_2 \cong 0,3$) quando il fattore di carico normale è poco diverso da quello iniziale (fig. 14-VI) seguito da un massimo negativo che ha luogo quando ($t/t_2 \cong 0,85$) il fattore di carico normale ha quasi raggiunto il suo valore estremo (fig. 14-VI).

Da quanto esposto risulta inoltre che i valori estremi dell'accelerazione angolare - cui corrispondono i valori massimi del carico di manovra a cabrare ed a picchiare - possono, in prima approssimazione, esser calcolati rispettivamente con le:

$$(\dot{q})_{\max} = \left[\frac{0,95g}{Vt_2} + \frac{6,5}{\left(\frac{T}{W} + \frac{q_\infty}{W/S} C_{L_a} \right) t_2^2} \right] (\Delta f_{za})_{\max} \quad (83-VI)$$

$$(\dot{q})_{\min} = \left[\frac{0,80g}{Vt_2} - \frac{5,8}{\left(\frac{T}{W} + \frac{q_\infty}{W/S} C_{L_a} \right) t_2^2} \right] (\Delta f_{za})_{\max} \quad (84-VI)$$

essendo 0,95 e 0,80 i valori di K_γ corrispondenti ai valori estremi di K_a (fig. 15-VI).

Per lo stesso velivolo cui si riferiscono gli esempi dei paragrafi 6.2. e 6.3.1. sono state calcolate, con l'ausilio dei grafici di figg. 14-VI e 15-VI e della relazione (77-VI), le leggi di variazione del fattore di carico nor-

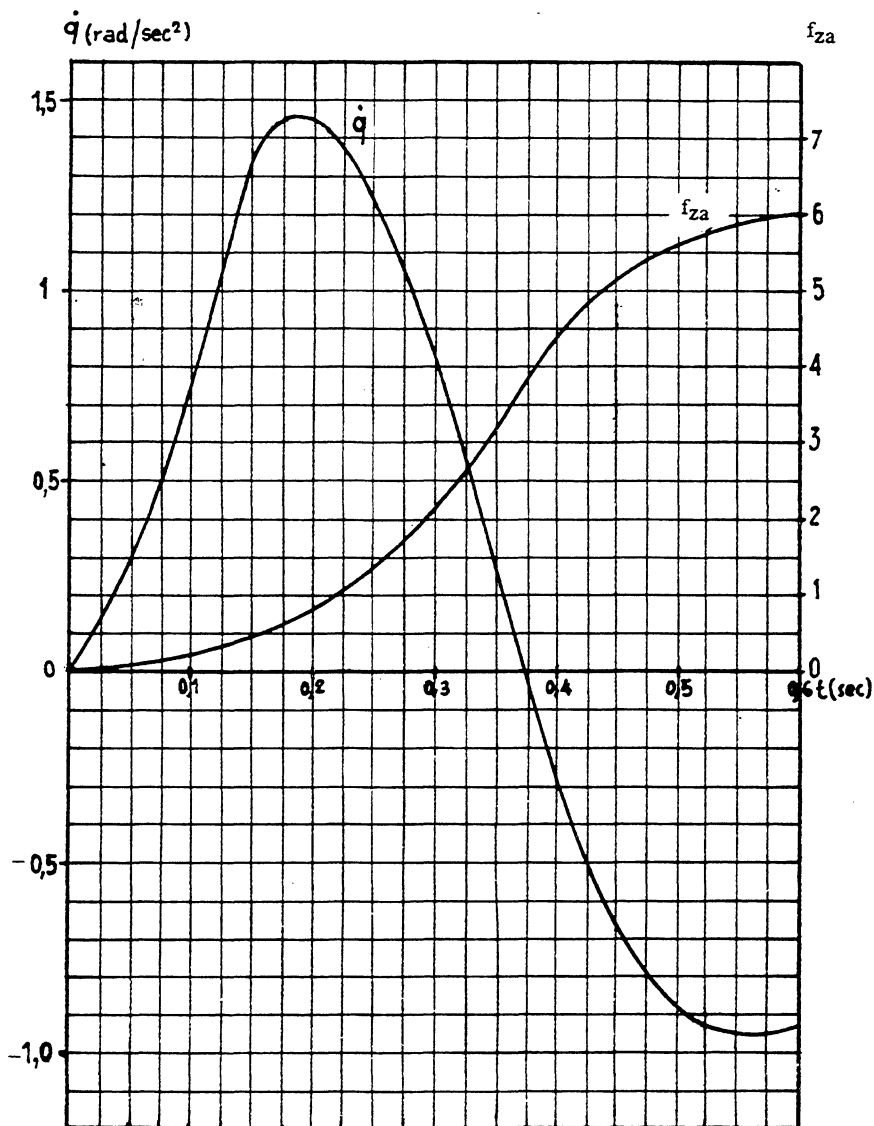


Fig. 16-VI

male e della accelerazione angolare (fig. 16-VI) dovute ad una brusca manovra cabra-picchiata tale da portare il velivolo entro 0,6 secondi al fattore di carico normale uguale a 6 a partire dalle condizioni di affondata in can-

dela a quota 4000 m. (fig. 3-VI). Dal diagramma di fig. 16-VI risultano i seguenti valori estremi dell'accelerazione di beccheggio:

$$(\dot{q})_{\max} = 1,45 \text{ rad.sec}^{-2}$$

$$(\dot{q})_{\min} = -0,95 \text{ rad.sec}^{-2}$$

poco diversi da quelli:

$$(\dot{q})_{\max} = 1,43 \text{ rad.sec}^{-2}$$

$$(\dot{q})_{\min} = -0,89 \text{ rad.sec}^{-2}$$

calcolati con le (83-VI) ed (84-VI).