

Agostino De Marco  
Domenico P. Coiro

**Elementi**  
**di**  
**Dinamica e simulazione di volo**

---

**Quaderno 1**  
**Terne di riferimento**

Marzo 2017  
ver. 2017.a

### Dichiarazione di Copyright

- Questo testo è fornito per uso personale degli studenti. Viene reso disponibile in forma preliminare, a supporto della preparazione dell'esame di *Dinamica e simulazione di volo*.
- Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.
- Non è consentito l'impiego di detto materiale a scopi commerciali se non previo accordo.
- È gradita la segnalazione di errori o refusi.

Copyright 2010–2017 Agostino De Marco e Domenico P. Coiro,  
Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Ingegneria Industriale

(Legge italiana sul Copyright 22.04.1941 n. 633)

## Terne di riferimento

*Jesce sole, jesce sole, nun te fa' cchiù suspirà!*

– Gatta Cenerentola

### Indice

---

<b>1.1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Riferimento Inerziale</b>	<b>4</b>
<b>1.3</b>	<b>Riferimento solidale alla Terra</b>	<b>5</b>
<b>1.4</b>	<b>Riferimento tangente alla superficie terrestre</b>	<b>6</b>
<b>1.5</b>	<b>Riferimento tangente lungo la verticale locale</b>	<b>12</b>
<b>1.6</b>	<b>Riferimento verticale locale</b>	<b>13</b>
<b>1.7</b>	<b>Assi vento</b>	<b>14</b>
<b>1.8</b>	<b>Assi aerodinamici</b>	<b>17</b>
<b>1.9</b>	<b>Assi velivolo</b>	<b>19</b>
<b>1.10</b>	<b>Assi centrali di inerzia</b>	<b>22</b>
<b>1.11</b>	<b>Assi di stabilità</b>	<b>23</b>
<b>1.12</b>	<b>Assi costruttivi</b>	<b>24</b>
<b>1.13</b>	<b>Comandi di volo ed assi superficie di governo</b>	<b>25</b>

---

### 1.1 Introduzione

Lo studio della Meccanica del volo si basa sulla risoluzione delle equazioni differenziali del moto di un aeromobile ricavate dalle *equazioni cardinali della Dinamica*. Le equazioni generali sono di natura vettoriale ed hanno una valenza che è indipendente dal sistema di riferimento prescelto per la rappresentazione del moto.

In prima approssimazione, l'analisi della dinamica delle varie fasi di volo viene effettuata trascurando gli *effetti aeroelastici*, cioè della deformazione strutturale istantanea del velivolo. Quando un aeroplano è considerato un solido indeformabile, il suo moto ha un numero di gradi di libertà pari a 6, corrispondenti ai gradi di libertà di un corpo rigido nello spazio.

Tipicamente le deflessioni delle superfici di governo dei velivoli convenzionali non danno luogo a significative variazioni della loro forma esterna. Pertanto, l'azione del pilota sui comandi durante l'evoluzione del mezzo aereo non comporta una significativa violazione dell'ipotesi di corpo rigido. D'altra parte, in alcune situazioni l'aeromobile è schematizzabile come un sistema di corpi rigidi meccanicamente vincolati. In pratica le superfici mobili sono dei corpi rigidi incernierati al corpo principale del velivolo. Esistono aeromobili dell'aviazione generale dotati di comandi reversibili, cioè che possono volare "a comandi liberi". Nelle fasi di volo a comandi liberi il pilota non agisce fisicamente sui comandi e le superfici di governo sono libere di ruotare sotto l'azione della corrente aerodinamica che le lambisce e delle forze d'inerzia legate al moto vario del velivolo. In queste situazioni le deflessioni delle superfici di governo variano nel tempo ed il loro moto di rotazione rigida intorno agli assi di cerniera solidali al velivolo rappresentano ulteriori incognite (gradi di libertà) da determinare.

Ciò che distingue il volo atmosferico dal moto degli altri veicoli (automobili, treni, navi) è la predominanza tra le azioni esterne delle azioni di natura aerodinamica. Un'altra peculiarità del mezzo aereo è data dalla varietà dei sistemi di propulsione che equipaggiano i velivoli moderni. Si conclude che la modellazione e lo studio della Meccanica del volo richiedono una visione multidisciplinare ed orientata all'ingegneria dei sistemi.

Come si avrà modo di approfondire nel capitolo dedicato alle equazioni del moto, lo studio del volo richiede l'introduzione di diversi sistemi di riferimento. In particolare, una conveniente rappresentazione delle azioni aerodinamiche e propulsive rende necessario proiettare le equazioni cardinali della Dinamica in un sistema di riferimento mobile, che insegue il velivolo, e non inerziale.

La scelta della più conveniente terna mobile di riferimento è legata alla particolare natura del problema da esaminare. In alcuni casi può essere opportuno riferirsi ad assi solidali al velivolo (*assi velivolo*) mentre in altri è preferibile assumere una terna di riferimento definita a partire dalla traiettoria di volo (*assi vento*) oppure sistemi particolari non solidali al velivolo e non connessi direttamente alla traiettoria quali ad esempio gli *assi aerodinamici*. Lo studio del moto dell'equilibratore, degli alettoni e del timone di direzione, quando gli organi di governo sono liberi di ruotare intorno ai corrispondenti assi di cerniera, comporta inoltre la necessità di introdurre terne solidali a tali superfici (*assi superficie di governo*).

A partire dai riferimenti via via introdotti in seguito verranno definite alcune grandezze cinematiche di importanza fondamentale.

## 1.2 Riferimento Inerziale (*Earth-Centered Inertial Frame, ECI*)

Il riferimento cosiddetto *inerziale* è il riferimento di cui si postula implicitamente o esplicitamente l'esistenza nella formulazione di qualsiasi problema di dinamica. Una terna di riferimento si definisce inerziale se essa non accelera rispetto alle stelle fisse.

La Terra è un corpo celeste caratterizzato da un moto complesso rispetto a qualsiasi riferimento inerziale. Il sistema solare stesso è in moto rispetto alle stelle fisse. La Terra è animata da un *moto di rivoluzione* intorno al sole. Il centro terrestre percorre una traiettoria ellittica intorno al sole (che ne occupa uno dei due fuochi) con un periodo pari ad un anno.

Il piano a cui la traiettoria di rivoluzione appartiene è detto *piano dell'eclittica*. Inoltre la Terra è animata da un *moto di rotazione* intorno al suo asse con periodo pari ad un giorno. Altri moti, molto più lenti (*precessione e nutazione*) contribuiscono ulteriormente alla complessità del moto terrestre.

Tuttavia nello studio di problemi di navigazione atmosferica, un riferimento avente origine nel centro della Terra ed avente orientamento invariabile rispetto alle stelle fisse può essere ragionevolmente assunto come riferimento inerziale. Ciò è ammissibile quando la durata dei fenomeni di interesse permette di ritenere che il centro della Terra possiede una velocità costante e di trascurare i moti su larga scala. Tale riferimento, anche noto con il nome di *Earth-Centered Inertial Frame* (ECI), viene chiamato  $\mathcal{T}_{\text{ECI}} = \{O, x, y, z\}_{\text{ECI}}$ . Esso ha l'asse  $z_{\text{ECI}}$  orientato nella direzione del polo nord ed è rappresentato nella figura 1.1.

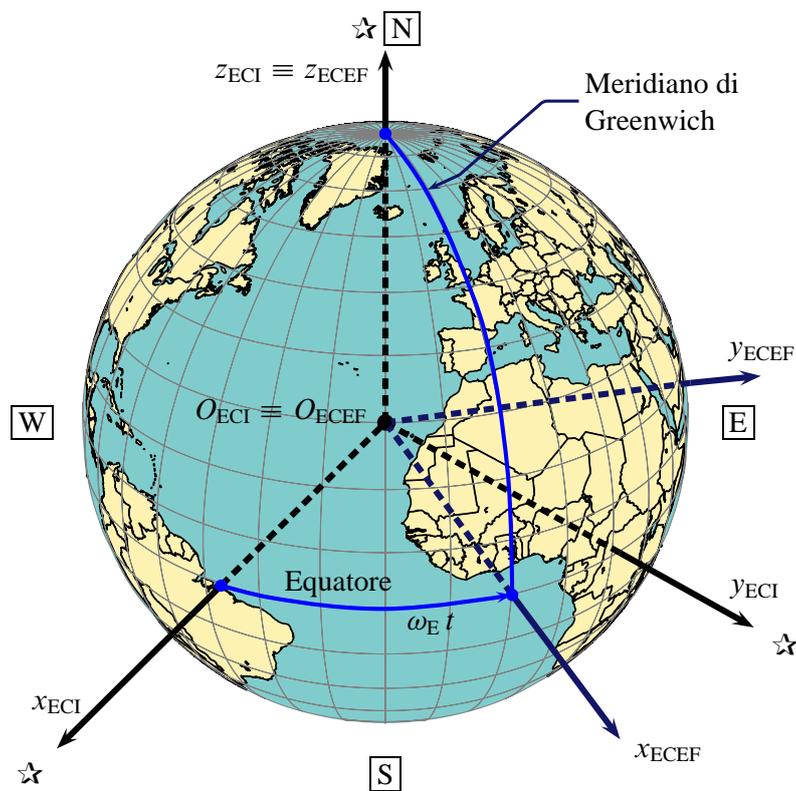
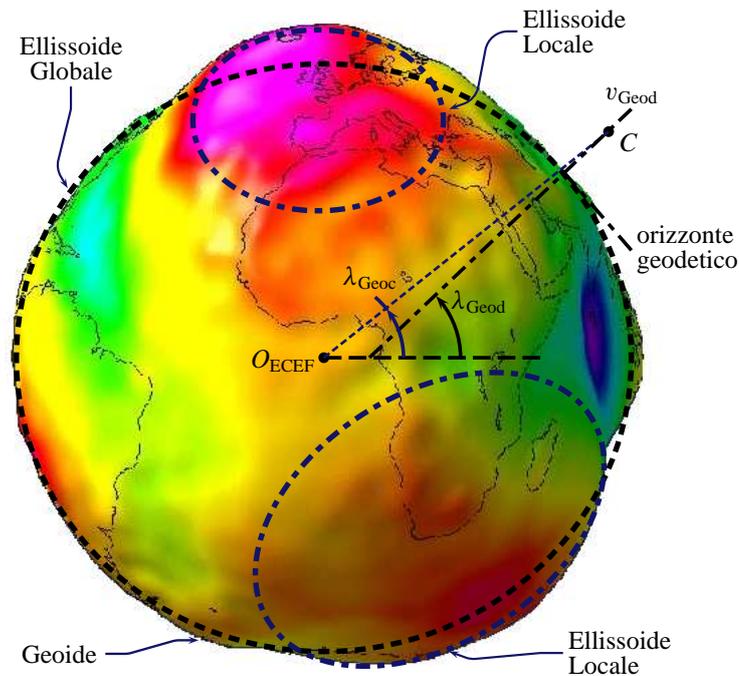


Figura 1.1 Riferimento inerziale  $\mathcal{T}_{\text{ECI}}$  e riferimento solidale alla Terra  $\mathcal{T}_{\text{ECEF}}$ .

### 1.3 Riferimento solidale alla Terra (*Earth-Centered Earth-Fixed Frame, ECEF*)

Con la terna  $\mathcal{T}_{\text{ECEF}} = \{O, x, y, z\}_{\text{ECEF}}$  si indica usualmente un sistema di riferimento avente la stessa origine della terna inerziale  $\mathcal{T}_{\text{ECI}}$  ma che sia, al contrario di quest'ultima, solidale alla Terra (*Earth-centered Earth-fixed*).

Nella pratica è sempre possibile trascurare i moti su larga scala dell'asse terrestre rispetto al piano dell'eclittica. Pertanto tale riferimento, anche noto come *Earth-Centered Rotating Frame* (ECR), ha l'asse  $z_{\text{ECEF}}$  diretto verso il nord e coincidente con l'asse  $z_{\text{ECI}}$  del riferimento inerziale. La terna  $\mathcal{T}_{\text{ECEF}}$  ruota intorno ad esso con velocità angolare  $\omega_E$  pari



**Figura 1.2** Geoide terrestre, ellissoide globale, ed ellissoidi locali. Nella rappresentazione tridimensionale i discostamenti dei punti del geoide dall'ellissoide globale sono amplificati di un fattore di ordine  $10^5$ .

alla velocità di rotazione terrestre (un quarto di grado al minuto, poco più di 4 millesimi di grado al secondo).

Il piano  $\{O, x, y\}_{ECEF}$  è un piano equatoriale e l'asse  $x_{ECEF}$  è diretto verso il punto della superficie terrestre a latitudine e longitudine nulle. Tale punto, assumendo la terna  $\mathcal{T}_{ECEF}$  sovrapposta alla terna  $\mathcal{T}_{ECI}$  all'istante zero, se  $\omega_E$  è espressa in rad/s, dopo  $t$  secondi avrà percorso un arco di circonferenza di lunghezza pari a  $\omega_E t$ . Anche questo sistema è rappresentato nella figura 1.1.

Nei simulatori di volo moderni lo stato del *sistema velivolo* è dato da un certo numero di variabili. In particolare, una parte del vettore di stato esprime la posizione del velivolo rispetto alla Terra ed è data dalla latitudine, longitudine ed altitudine, espresse in base alla definizione del riferimento  $\mathcal{T}_{ECEF}$ .

## 1.4 Riferimento tangente alla superficie terrestre (*Tangent Frame, T*)

La Terra è un corpo celeste di forma alquanto irregolare. Nella Geodesia moderna la effettiva superficie della Terra viene approssimata con una superficie immaginaria più regolare detta *geoide*. Il geoide è definito come il luogo dei punti a cui corrisponde un determinato livello di energia potenziale gravitazionale. Per convenzione, al geoide corrisponde un livello nullo di energia potenziale del campo gravitazionale terrestre. Inoltre si ritiene che questa superficie convenzionale corrisponda alla migliore approssimazione di ciò che viene detto *livello del mare medio* (*Mean Sea Level, MSL*). Il concetto di livello del mare medio è anch'esso una convenzione e, in base alla definizione di geoide, corrisponderebbe effettivamente al pelo libero dei mari e degli oceani se questi fossero tutti interconnessi at-

traverso un'ipotetica rete di canali sotterranei (principio dei vasi comunicanti, escludendo l'effetto delle maree).

Come si osserva dalla figura 1.2 a fronte, su larga scala il geoide viene modellato a sua volta attraverso una superficie media coincidente con un ellissoide, detto *ellissoide globale*. Su piccola scala, anche con un certo grado di rigore, il geoide è modellato attraverso un numero di ellissoidi, detti *ellissoidi locali*, che approssimano localmente delle porzioni di geoide. La figura 1.3 mostra il profilo topografico di una data regione del globo e la sua relazione con il geoide globale, con un modello locale di geoide e con un ellissoide di riferimento.

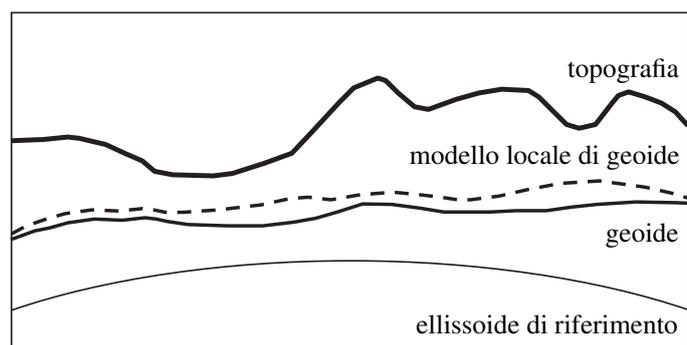
Ai fini dello sviluppo delle mappe geografiche e del rilievo topografico si utilizzano differenti ellissoidi di riferimento a seconda della zona geografica, come mostrato nella figura 1.4 nella pagina seguente, ottenendo una maggiore precisione del piano (immaginario) orizzontale. Tali convenzioni, pur se storicamente diverse da nazione a nazione, sono state unificate con l'avvento del moderno sistema WGS84 [32], che fornisce un modello della superficie terrestre adatto allo studio di problemi di navigazione inerziale. La figura 1.5 nella pagina successiva mostra i discostamenti (in metri) del geoide dall'ellissoide globale di riferimento definito dal sistema WGS84. Tali discostamenti sono noti anche come *elevazioni* del geoide e sono definite ufficialmente da un accurato *database* digitale pubblicamente disponibile.

Anche se le elevazioni locali del geoide non sono particolarmente grandi (non superiori ad un centinaio di metri), il concetto di 'livello medio del mare' è particolarmente importante nelle applicazioni aerospaziali. Esso è il riferimento rispetto al quale vanno calcolate le altitudini barometriche e le proprietà atmosferiche alle varie quote. Inoltre, è rispetto al livello medio del mare che vengono espressi i livelli del terreno.

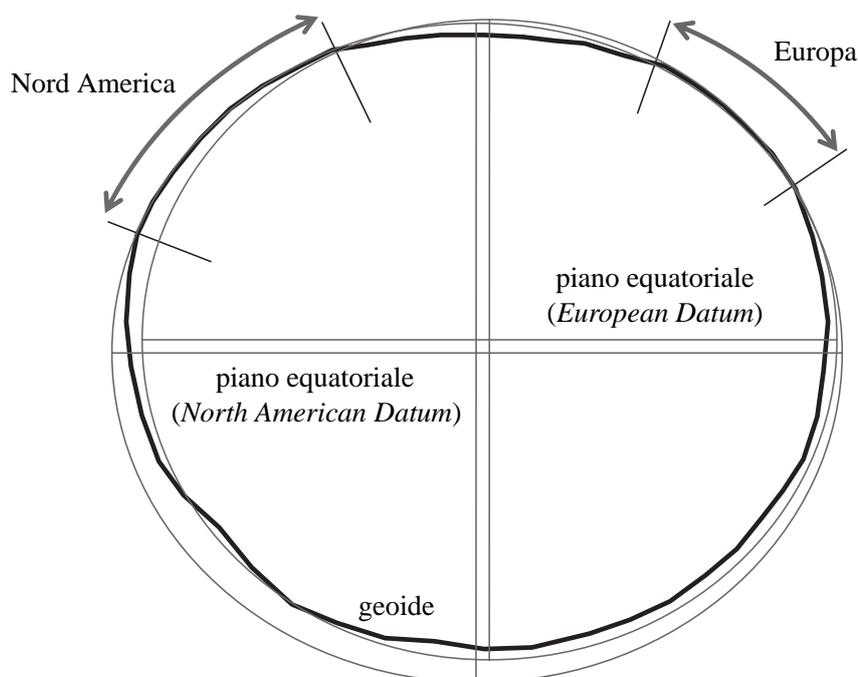
Una retta cosiddetta *geocentrica* è quella che unisce il centro terrestre con un qualsiasi punto d'interesse  $C$ , che sia esso posto sul suolo o ad una certa distanza da esso. La retta  $v_{\text{Geod}}$ , passante per  $C$  ed ortogonale all'ellissoide globale (o più precisamente all'ellissoide locale), è invece chiamata *normale locale geodetica*. Per un dato punto  $C$ , una retta geocentrica non è esattamente coincidente con la normale locale geodetica (figura 1.2 a fronte e figura 1.6 a pagina 9).

L'angolo formato tra la normale locale geodetica ed il piano equatoriale è detto *latitudine geodetica*  $\lambda_{\text{Geod}}$ , mentre l'angolo formato con il meridiano di Greenwich è chiamato *longitudine geodetica*  $\mu_{\text{Geod}}$ . Al contrario, quando le analoghe grandezze sono misurate a partire da una retta geocentrica, esse si dicono *latitudine e longitudine geocentriche*,  $\lambda_{\text{Geoc}}$  e  $\mu_{\text{Geoc}}$ . La normale locale geodetica permette anche di definire l'*altitudine geodetica*  $h_{\text{Geod}}$  del punto considerato, in contrapposizione alla *altitudine geocentrica*  $h_{\text{Geoc}}$ .

A rigore, la latitudine geodetica è generalmente maggiore della latitudine geocentrica



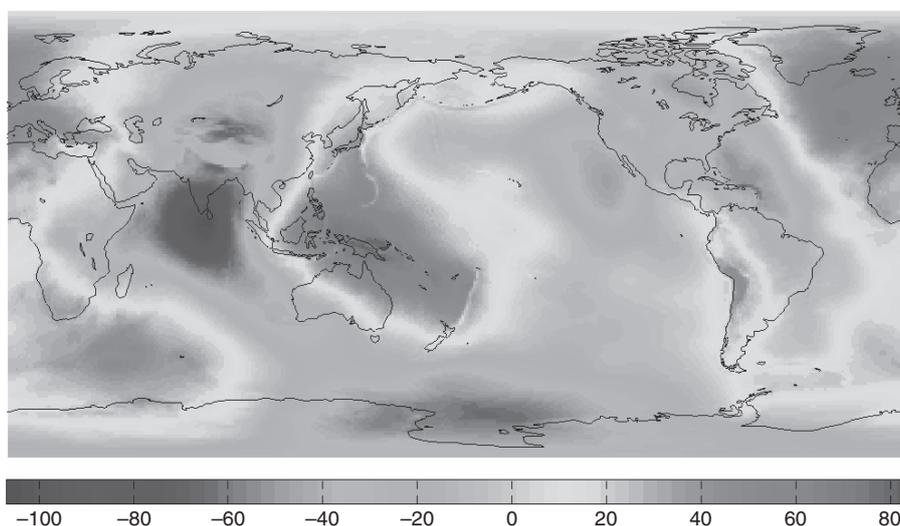
**Figura 1.3** Profilo topografico e geoide globale. Spesso il geoide è approssimato localmente da un modello locale di geoide oppure da un ellissoide locale di riferimento.



**Figura 1.4** Profilo del geoide globale ed ellipsoidi locali di riferimento.

e la differenza si accentua alle latitudini intermedie mentre è nulla ai poli ed all'equatore. L'altitudine geodetica del punto d'interesse è invece leggermente inferiore a quella geocentrica.

Le mappe geografiche sono disegnate sviluppando nel piano un modello locale di geoide terrestre oppure una sua approssimazione ellissoidale. La costruzione dei vari elementi topografici delle mappe tiene conto di opportuni riferimenti e convenzioni di proiezione che permettono di riportare sul piano del foglio le coordinate geodetiche anziché quelle geocentriche. Va osservato che la differenza tra un modello di Terra sferica e le varie rappresentazioni basate su un modello di geoide o di superficie ellissoidale sarebbe impercettibile per l'occhio umano. Dall'esame della figura 1.5 si può constatare come, su grande scala, cioè rispetto al raggio terrestre, le elevazioni del geoide siano effettivamente irrilevanti. Inoltre, le differenze tra l'ellissoide di riferimento del sistema WGS84 e quelli definiti in altri sistemi (che usano diverse definizioni del piano equatoriale, detto *datum*) potrebbero sembrare banali. Il vero motivo per cui risulta importante modellare accuratamente la superficie terrestre è che esistono significative implicazioni nel campo della



**Figura 1.5** Discostamenti (in metri) del geoide dall'ellissoide di riferimento definito dal sistema WGS84.

navigazione di precisione (e di conseguenza nel campo della produzione e gestione delle mappe digitali). Dato che il tracciamento del moto di un velivolo con i moderni strumenti di telerilevamento può arrivare ad un'accuratezza minore di un metro, un modello di riferimento della Terra da usare nella simulazione del volo deve essere almeno di un ordine di grandezza più accurato.

A titolo di esempio, si consideri un'applicazione tipica della simulazione del volo: l'addestramento ad una manovra di atterraggio su una delle piste di un determinato aeroporto. Tipicamente, il mondo virtuale gestibile con un simulatore di volo è descritto con un elevato grado di dettaglio, dalla precisa collocazione delle piste alla descrizione degli ostacoli presenti nell'area del sedime aeroportuale. Pertanto, è ragionevole attendersi che un aereo in volo simulato deve essere in grado di navigare lungo la propria rotta fino ad allinearsi con precisione alla pista di atterraggio e a compiere il *touch down* conservando un accettabile grado di realismo. Inoltre, le informazioni geografiche di dettaglio sulle sedi degli aeroporti consentono anche la simulazione di procedure di navigazione *point-to-point*. La figura 1.7 nella pagina successiva fornisce un esempio di rappresentazione delle piste di decollo e atterraggio dell'aeroporto di Manchester (corrispondente alla designazione GECT), in cui sono riportate anche le elevazioni di alcuni punti significativi. In particolare, nella figura 1.8 nella pagina seguente è riportato il profilo approssimativo in altezza della pista denominata 06L/24R.

In questo contesto si parla di sistema di riferimento *tangente*,  $\mathcal{T}_T = \{O, x, y, z\}_T$  intendendo quel sistema di coordinate avente origine in un punto prefissato della superficie terrestre ed il piano  $\{O, x, y\}_T$  tangente ad essa. La tangenza del piano  $\{O, x, y\}_T$  può essere intesa, con diversi gradi di approssimazione, rispetto all'ellissoide locale, all'ellissoide globale o alla sfera che lo approssima. In quest'ultimo caso, quello in cui si assume l'ipotesi di sfericità della Terra, il valore tipico del raggio medio è  $R_E \simeq 6371$  km.

Un riferimento tangente è in questo caso un riferimento solidale alla Terra con asse  $z_T$  rivolto per convenzione verso il suo centro, asse  $x_T$  verso nord ed asse  $y_T$  verso est. Tali orientamenti seguono la convenzione cosiddetta *North-East-Down* (NED) e sono osservabili nella figura 1.9.

Una terna del tipo  $\mathcal{T}_T$  risulta utile in tutte quelle situazioni in cui bisogna riferire la posizione e l'orientamento di un velivolo ad un punto prefissato della superficie terrestre. In altri contesti il riferimento tangente viene inteso in senso locale ed istantaneo, cioè con l'origine non necessariamente fissa sulla Terra ma in generale in moto sul suolo, con

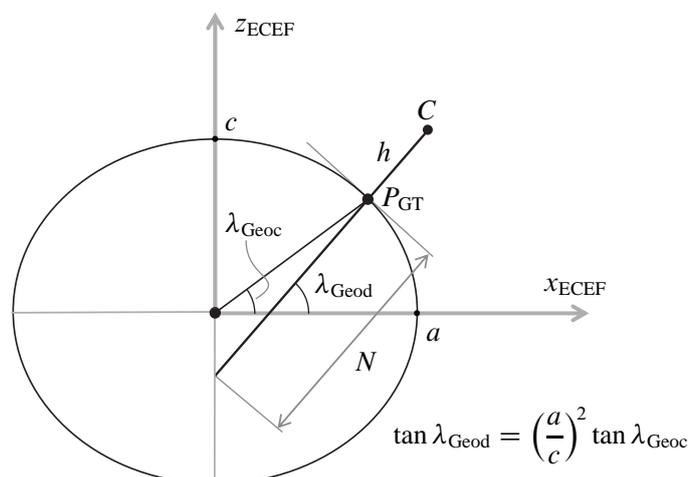
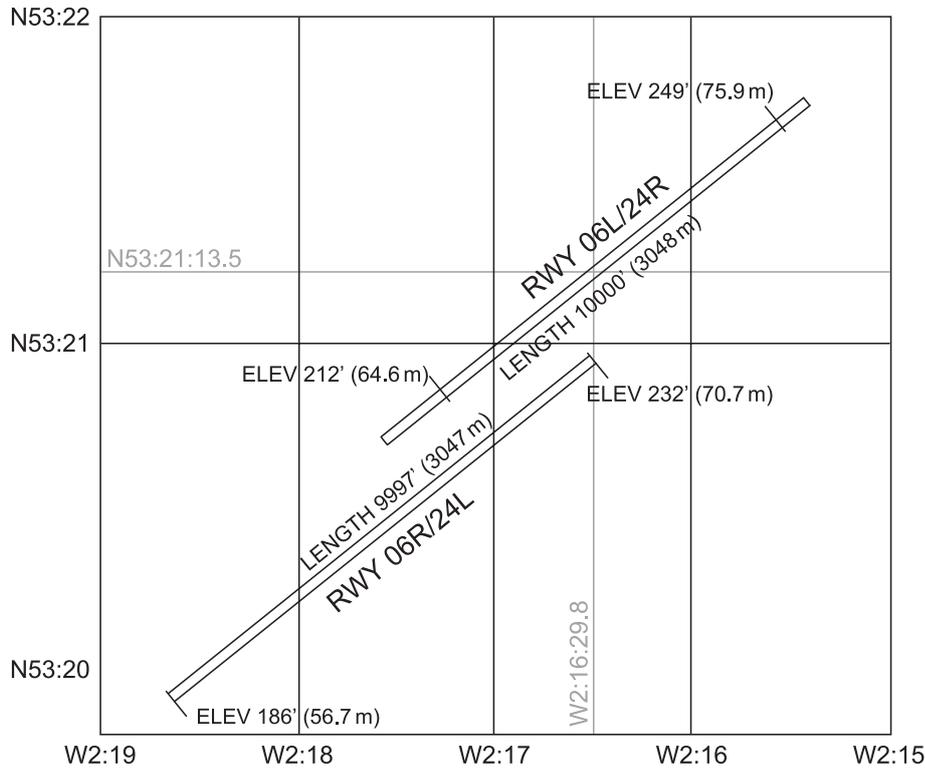
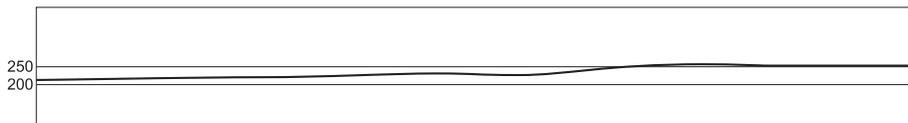


Figura 1.6 Latitudine geocentrica e geodetica.



**Figura 1.7** Collocazione delle piste dell'aeroporto di Manchester (sigla EGCC) ed elevazioni locali (riprodotta dal testo di Diston [8]). Elevazioni in piedi e in metri

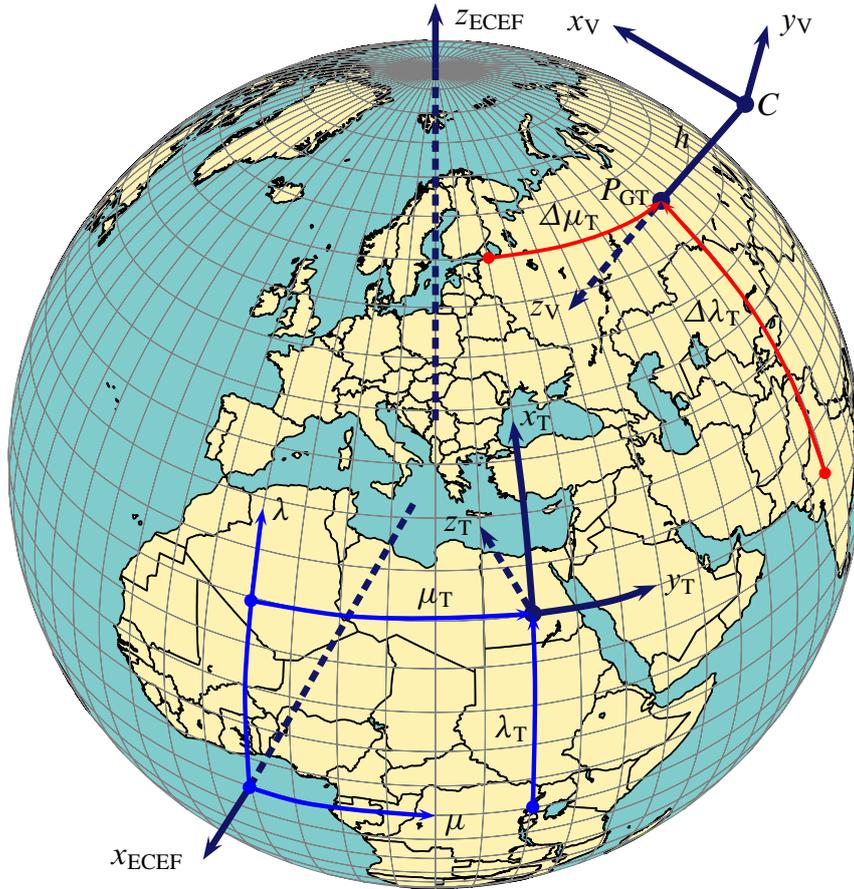


**Figura 1.8** Profilo approssimativo della pista 06L/24R dell'aeroporto di Manchester (riprodotta dal testo di Diston [8]). Elevazioni in piedi.

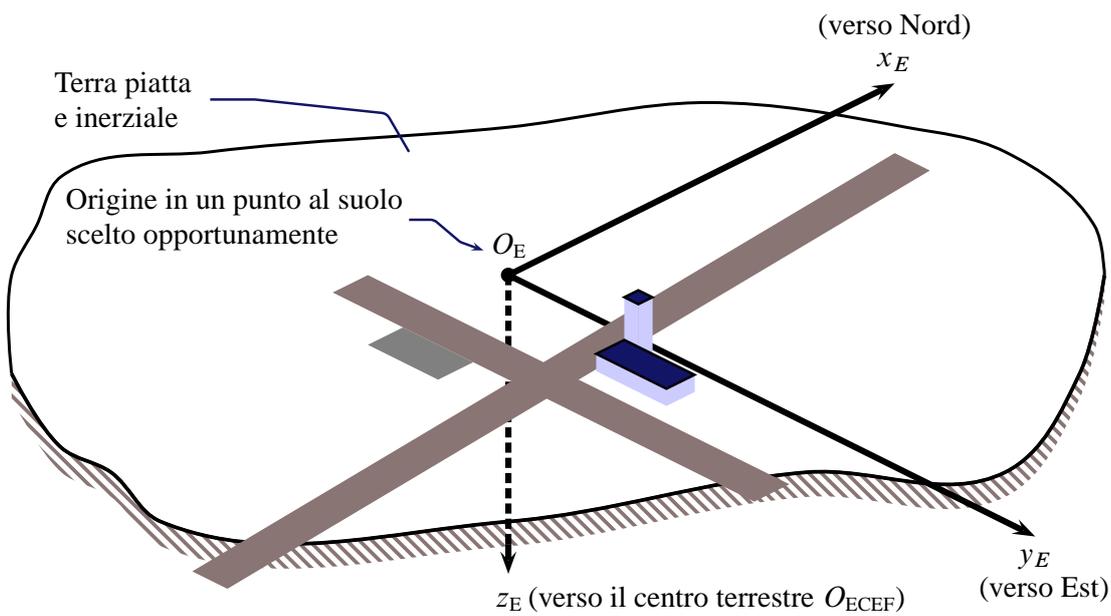
conseguente variazione della giacitura del piano orizzontale locale (*orizzonte*).

Come spesso accade nello studio dei problemi della Meccanica del volo atmosferico, quando occorre adottare un riferimento fisso è ragionevole assumere un dato riferimento tangente come sistema di riferimento inerziale, trascurando gli effetti della rotazione terrestre. Nelle stesse circostanze, per l'entità e la breve durata dei fenomeni da studiare, è anche possibile sostituire alla superficie terrestre una superficie piatta di estensione indefinita e coincidente con il piano  $\{O, x, y\}_T$ . Sono queste le assunzioni note come ipotesi di *Terra piatta ed inerziale (non-rotating, flat Earth)*. Quando non vi è possibilità di equivoco, si parla in queste ipotesi di *riferimento Terra (Earth Frame, E)*,  $\mathcal{T}_E = \{O, x, y, z\}_E$ , anziché di riferimento tangente.

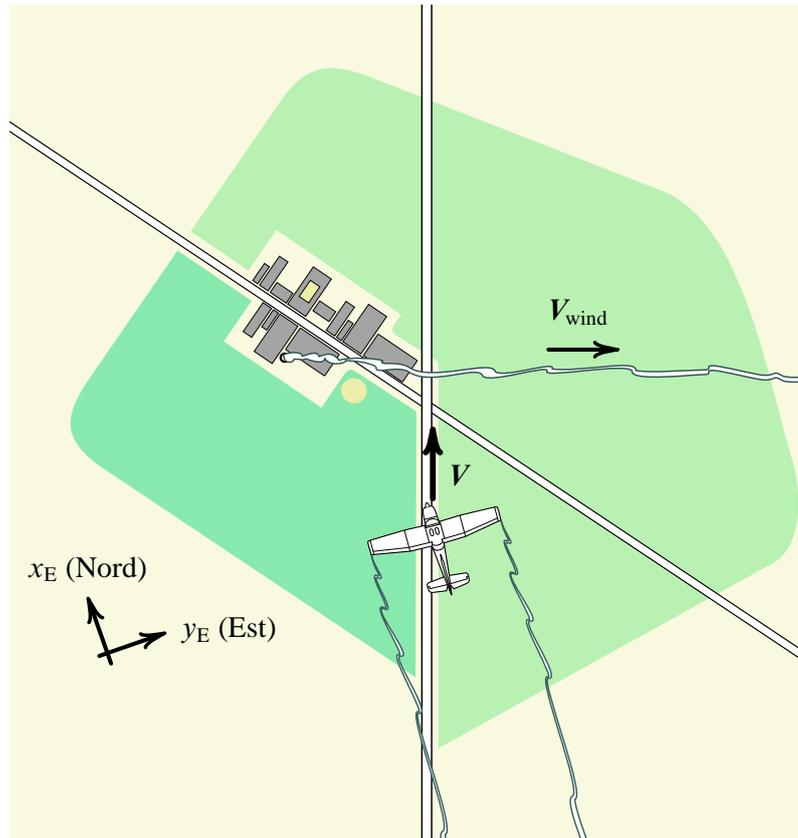
Tipici esempi in cui è ingegneristicamente accettabile l'ipotesi di Terra piatta ed inerziale sono dati da quei problemi in cui si analizzano delle traiettorie di volo in prossimità di un aeroporto. In tali circostanze i dati sulla posizione ed il moto sono spesso forniti in un riferimento tangente con origine posta tipicamente alla testa della pista dell'aerobase di riferimento. Per la brevità degli intervalli temporali considerati e per le basse velocità in gioco sarà senz'altro trascurabile l'effetto della rotazione terrestre intorno al riferimento inerziale  $\mathcal{T}_{ECI}$ .



**Figura 1.9** Terne di riferimento *Earth-Centered Earth-Fixed*,  $\mathcal{T}_{ECEF}$ , *Tangent*,  $\mathcal{T}_T$ , *Vehicle-Carried Vertical*,  $\mathcal{T}_V$ .



**Figura 1.10** Riferimento fisso  $\mathcal{T}_E \equiv \mathcal{T}_{LVLH}$  in ipotesi di Terra piatta ed inerziale.



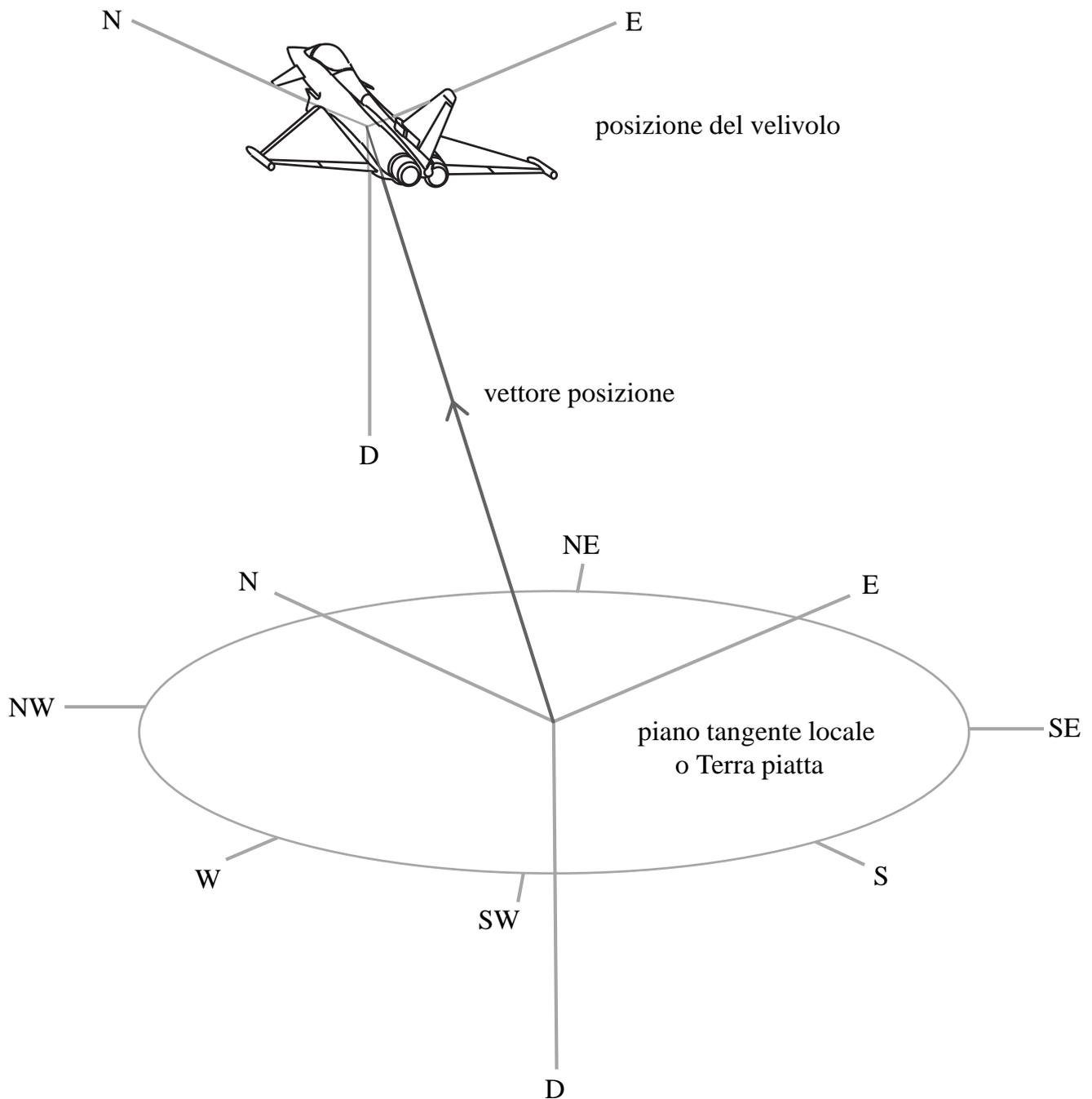
**Figura 1.11** Terna di riferimento  $\mathcal{T}_E$  e volo in prossimità del suolo. In generale, anche l'atmosfera è in moto rispetto alla Terra. Nell'illustrazione il velivolo trasla rispetto al suolo con velocità  $V$  e l'atmosfera trasla macroscopicamente con velocità  $V_{wind}$ .

## 1.5 Riferimento tangente lungo la verticale locale (*Local Vertical Local Horizontal Frame, LVLH*)

L'accezione di verticale locale che verrà adottata nel seguito è per semplicità quella di verticale geocentrica. Si assumerà valida l'approssimazione di Terra sferica, per la quale la verticale locale coincide con una *radiale* e gli angoli che questa forma con il piano equatoriale ed il piano meridiano di Greenwich corrispondono alla latitudine e alla longitudine geocentriche. Analogamente la distanza dal suolo del punto di interesse  $C$ , sede del centro di massa del velivolo, misurata lungo la verticale locale è da intendersi come altitudine *geocentrica*  $h$ .

Se si considera il moto di un velivolo in volo ad una certa altitudine (figura 1.9) il punto  $P_{GT}$  (*ground track*) della superficie terrestre intercettato dalla verticale locale è chiamato *traccia a terra* di  $C$ . Il sistema di riferimento tangente con origine in  $P_{GT}$  è la cosiddetta terna *tangente lungo la verticale locale*,  $\mathcal{T}_{LVLH}$  detta anche *Local Vertical Local Horizontal Frame* (LVLH).

La terna LVLH si muove con il velivolo mantenendo, istante per istante, la sua origine nel punto sulla Terra coincidente con la traccia a terra del baricentro. Nell'analisi di dati di volo il termine *ground track* si riferisce anche alla curva descritta su una mappa dal punto  $P_{GT}$  al variare del tempo.



**Figura 1.12** Posizione del velivolo rispetto alla Terra. Orientamento del riferimento Terra (una terna  $\mathcal{T}_T$ ) e della terna  $\mathcal{T}_V$  (quest'ultima solidale al velivolo) secondo la convenzione *North-East-Down*.

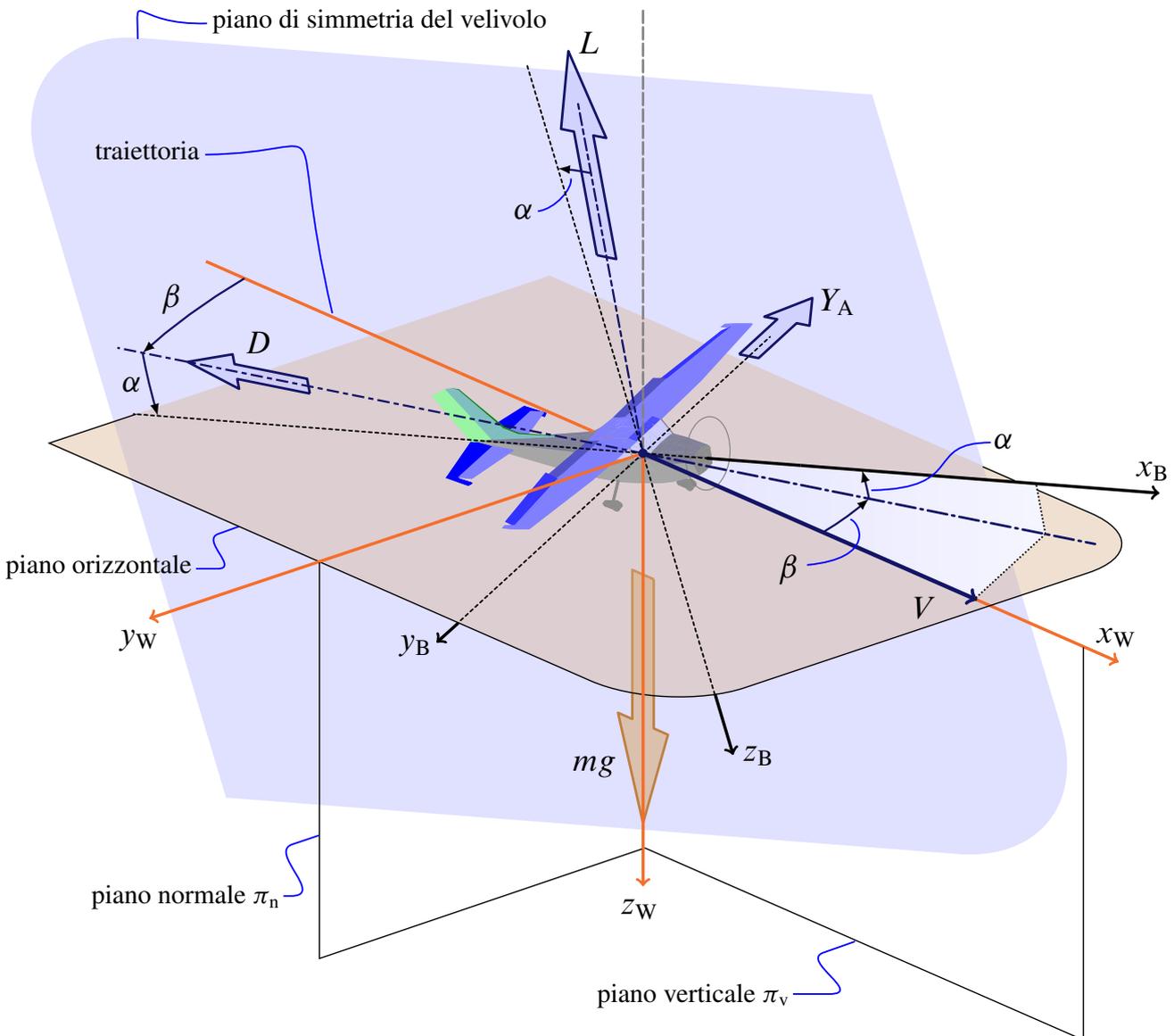
## 1.6 Riferimento verticale locale (*Vehicle Carried Vertical Frame, V, o North-East-Down, NED*)

La terna  $\mathcal{T}_V$  con origine nel centro di massa del velivolo ed avente assi paralleli a quelli della terna  $\mathcal{T}_{LV LH}$  è rappresentata nella figura 1.9 a pagina 11 e nella figura 1.12. Essa è detta terna di riferimento *verticale* o anche *Vehicle-Carried Vertical Frame*. Secondo la convenzione più diffusa questo riferimento viene chiamato anche *North-East-Down Frame (NED)*, inteso come quel sistema con origine in moto con il baricentro del velivolo ma

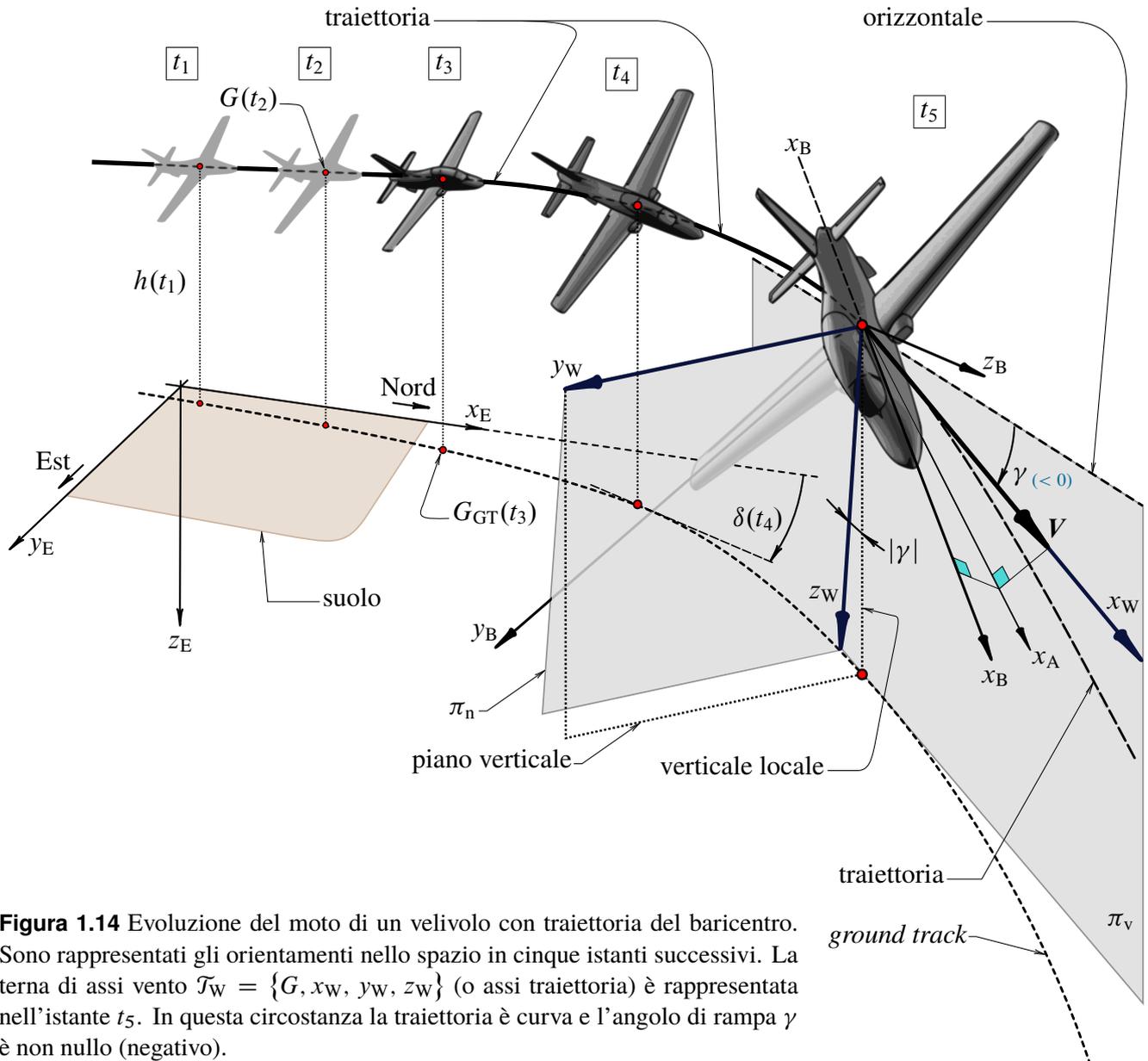
con assi costantemente orientati secondo le tre direzioni geografiche standard: Nord, Est e centro della Terra (*Down*).

## 1.7 Assi vento (*Wind Axes, W*)

La terna *assi vento*  $\mathcal{T}_W$  è una terna trirettangola levogira con origine nel baricentro del velivolo (punto  $G \equiv C$ ) ed avente l'asse vento longitudinale  $x_W$  diretto secondo la direzione della velocità  $V \equiv V_G$  del velivolo, con verso positivo nel senso del moto (figura 1.13). L'asse vento  $z_W$  è definito dall'intersezione del piano verticale  $\pi_v$  contenente  $V$  e  $G$  con il piano  $\pi_n$  normale alla traiettoria in  $G$ , con verso positivo verso il basso. L'asse trasversale  $y_W$  è tale da completare la terna  $\{G, x_W, y_W, z_W\}$ .



**Figura 1.13** Terna di assi vento  $\mathcal{T}_W = \{G, x_W, y_W, z_W\}$  (o assi traiettoria). In questa particolare circostanza la traiettoria del baricentro è orizzontale e l'orientamento del velivolo non è simmetrico rispetto al piano verticale  $x_W z_W$ .



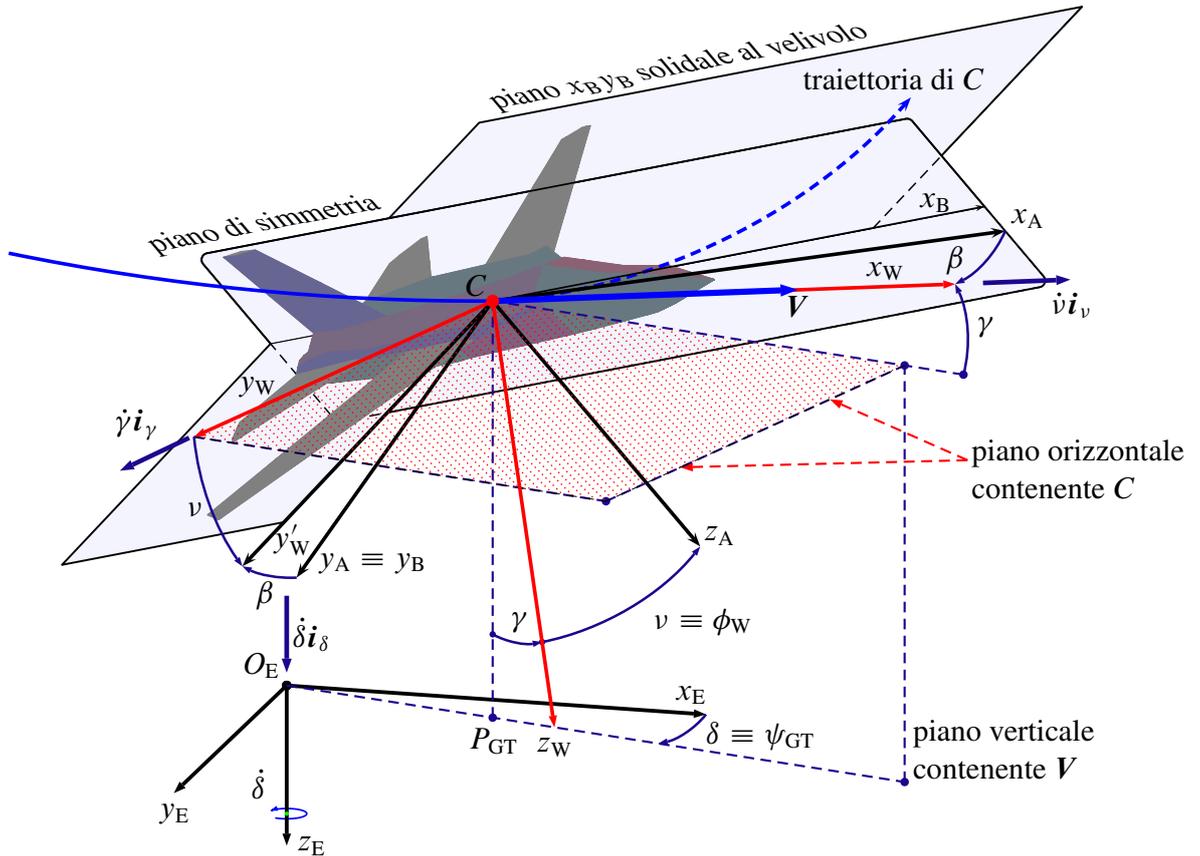
**Figura 1.14** Evoluzione del moto di un velivolo con traiettoria del baricentro. Sono rappresentati gli orientamenti nello spazio in cinque istanti successivi. La terna di assi vento  $\mathcal{T}_W = \{G, x_W, y_W, z_W\}$  (o assi traiettoria) è rappresentata nell'istante  $t_5$ . In questa circostanza la traiettoria è curva e l'angolo di rampa  $\gamma$  è non nullo (negativo).

Si noti che, secondo la definizione data sopra, l'asse vento trasversale  $y_W$  è sempre orizzontale. Esso è la normale al piano  $\{G, x_W, z_W\}$  che è, per definizione, costantemente verticale come si osserva dalle figure 1.13, 1.14 e 1.15.

Nella figura 1.13, è rappresentato il caso particolare in cui la traiettoria del baricentro è orizzontale. Si osserva che, anche per un orientamento del velivolo non simmetrico rispetto al piano verticale  $x_W z_W$ , in questa circostanza gli assi vento presentano un asse  $z_W$  verticale (allineato con la forza peso  $m\mathbf{g}$ ).

Nella figura 1.14, è rappresentata un'evoluzione in cui la traiettoria del baricentro si incurva e allo stesso tempo l'orientamento del velivolo è non simmetrico rispetto al piano verticale  $\pi_v$ . L'asse vento  $x_W$ , per definizione tangente alla traiettoria, è non orizzontale e l'asse  $z_W$  è non verticale. Naturalmente — come da definizione — anche in questo caso, in cui il piano  $\pi_n$  non è verticale, l'asse vento  $y_W$  è orizzontale.

Tale particolarità evidenzia un'importante differenza tra la definizione data in questa sede e la definizione di assi vento che si ritrova in diversi libri di testo americani e anglosassoni. Secondo questi ultimi [17, 9, 60] l'asse longitudinale coincide con  $x_W$ ; il



**Figura 1.15** Terna di assi vento  $\mathcal{T}_W = \{G, x_W, y_W, z_W\}$  (o assi traiettoria). Nel disegno è rappresentata anche la terna di assi vento americani  $\mathcal{T}_{W'} = \{G, x_W, y'_W, z'_W\}$  con  $z'_W \equiv z_A$ .

terzo asse — che chiameremo  $z'_W$  e più avanti identificheremo con l'asse aerodinamico  $z_A$  — non coincide con  $z_W$  ma è quell'asse passante per  $G$ , ortogonale a  $V$ , che giace nel piano di simmetria del velivolo; infine l'asse trasversale — che chiameremo  $y'_W$ , come nella figura 1.15 — viene ricavato di conseguenza e risulta normale al piano  $\{G, x_W, z'_W\}$ . L'asse trasversale degli assi vento americani è in generale non orizzontale, seguendo l'orientamento del piano di simmetria, così come l'asse normale  $z'_W$  non apparterebbe costantemente ad un piano verticale. Al contrario, secondo la definizione da noi introdotta ed adottata in seguito, gli assi vento costituiscono una terna mobile con origine in  $G$  e con orientamento ricostruibile esclusivamente in base alla sua traiettoria, indipendentemente dall'orientamento del velivolo nello spazio.

La posizione angolare del sistema di assi vento  $\{G, x_W, y_W, z_W\}$  rispetto agli assi Terra  $\{O_E, x_E, y_E, z_E\}$  viene determinata attraverso la conoscenza di due angoli,  $\delta$  e  $\gamma$ , denominati rispettivamente *angolo di virata* e *angolo di volta*. Il primo, detto anche *ground track heading*  $\psi_{GT}$ , viene definito come quell'angolo che il piano  $\{G, x_W, z_W\}$  forma, al generico istante  $t$ , con il piano verticale di riferimento  $\{O_E, x_E, z_E\}$ . Il secondo, invece, rappresenta l'angolo che l'asse longitudinale  $x_W$  forma con il piano orizzontale  $\{O_E, x_E, y_E\}$ . I versi positivi sono quelli corrispondenti alla virata a destra ed al volo in salita (figura 1.15).

Le velocità angolari  $\dot{\delta}$  e  $\dot{\gamma}$  vengono denominate *velocità di virata* e *velocità di volta*, rispettivamente. Il vettore *velocità angolare istantanea degli assi vento* rispetto al riferimento inerziale prende il nome di *evoluzione*, viene indicato con  $\boldsymbol{\Omega}_W \equiv \mathbf{E}$  ed è dato dalla risultante della velocità di virata e di quella di volta. Si noti che  $\mathbf{E}$  è un'entità vettoriale

assoluta, ovvero indipendente dalla terna di coordinate in cui si sceglie eventualmente di esprimerne le componenti scalari. Inoltre ogni espressione di tale vettore in termini di altre grandezze vettoriali è anch'essa assoluta.

Detti  $\mathbf{i}_W$ ,  $\mathbf{j}_W$  e  $\mathbf{k}_W$  i versori degli assi vento, dalla figura 1.15 si deduce che

$$\mathbf{E} = -\dot{\delta} \sin \gamma \mathbf{i}_W + \dot{\gamma} \mathbf{j}_W + \dot{\delta} \cos \gamma \mathbf{k}_W \quad (1.1)$$

e, per essere  $\mathbf{i}_\delta$  e  $\mathbf{i}_\gamma$  fra di loro ortogonali, se ne ottiene il modulo come

$$E = \sqrt{\dot{\delta}^2 + \dot{\gamma}^2} \quad (1.2)$$

La conoscenza delle leggi di variazione della velocità lineare, della velocità di virata e della velocità di volta,  $V(t)$ ,  $\dot{\delta}(t)$ ,  $\dot{\gamma}(t)$ , unitamente ai valori iniziali ( $t = 0$ ) delle coordinate e degli angoli,  $x_{E,G}(0)$ ,  $y_{E,G}(0)$ ,  $z_{E,G}(0)$ ,  $\delta(0)$ ,  $\gamma(0)$ , consente di ricavare ad ogni istante  $t$  le grandezze

$$\delta(t) = \delta(0) + \int_0^t \dot{\delta}(\tau) d\tau \quad \gamma(t) = \gamma(0) + \int_0^t \dot{\gamma}(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

e quindi le componenti di  $V$  sugli assi Terra

$$V_{x_E}(t) = V \cos \gamma \cos \delta, \quad V_{y_E}(t) = V \cos \gamma \sin \delta, \quad V_{z_E}(t) = -V \sin \gamma \quad (1.4)$$

occorrenti per il calcolo delle coordinate

$$x_{E,G}(t) = x_{E,G}(0) + \int_0^t V_{x_E}(\tau) d\tau \quad (1.5a)$$

$$y_{E,G}(t) = y_{E,G}(0) + \int_0^t V_{y_E}(\tau) d\tau \quad (1.5b)$$

$$z_{E,G}(t) = z_{E,G}(0) + \int_0^t V_{z_E}(\tau) d\tau \quad (1.5c)$$

che definiscono la traiettoria del baricentro del velivolo nel riferimento Terra.

## 1.8 Assi aerodinamici (*Aerodynamic Axes, A*)

Come evidenziato nel paragrafo precedente, la definizione di assi vento che adotteremo è basata sulla sola traiettoria del centro di massa del velivolo, come se questo fosse un punto materiale. In tal senso la terna  $\mathcal{T}_W$  si potrebbe chiamare anche terna degli “assi traiettoria”. Quando poi si guarda al velivolo come ad un corpo rigido in moto nello spazio, caratterizzato quindi da sei gradi di libertà, la sua posizione nello spazio, oltre che dalle tre coordinate istantanee del baricentro, è determinata da altri tre parametri. Noti gli

assi vento in un determinato istante, i tre parametri mancanti possono essere quelli che definiscono l'orientamento di una terna di assi solidali al velivolo rispetto alla terna  $\mathcal{T}_W$ .

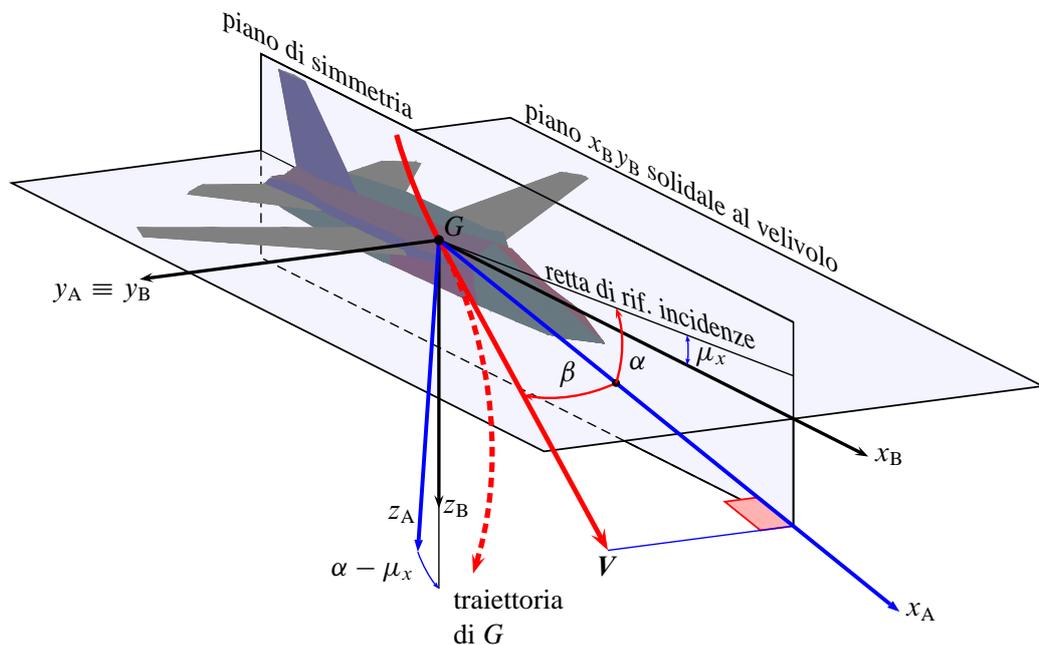


Figura 1.16 Assi aerodinamici ed assi velivolo.

Per passare dagli assi vento a degli assi solidali al velivolo è opportuno introdurre un sistema di riferimento intermedio che, peraltro, viene utilizzato per decomporre la forza risultante aerodinamica nelle sue componenti: resistenza, forza laterale e portanza. Questo sistema è denominato  $\mathcal{T}_A$  o terna degli *assi aerodinamici* ed è rappresentato sia nella figura 1.15 che nella figura 1.16. Esso corrisponde ad una terna trirettangola levogira con origine nel baricentro del velivolo  $G$ , il cui asse longitudinale  $x_A$  è la proiezione ortogonale della velocità  $V$  sul piano di simmetria del velivolo, con verso positivo nel senso del moto. L'asse aerodinamico  $z_A$  è normale ad  $x_A$ , è contenuto nel piano di simmetria del velivolo ed è diretto positivamente nel senso testa-piedi del pilota. L'asse trasversale  $y_A$  è normale ai precedenti ed il senso positivo è verso la destra del pilota.

Ne consegue che — per essere  $x_A$  definito come la proiezione di  $x_W$  sul piano di simmetria  $\{G, x_A, z_A\}$  del velivolo — l'asse  $z_A$ , oltre ad essere normale ad  $x_A$ , risulta normale anche ad  $x_W$  (ovvero a  $V$ ). Ciò significa che  $z_A$  è contenuto nel piano normale alla traiettoria e passante per  $G$ , ovvero un piano contenente l'asse vento  $z_W$  (figura 1.15). L'angolo  $\nu$  compreso fra  $z_A$  e  $z_W$  viene detto *angolo di sbandamento*. Esso, come si è detto, viene misurato nel piano normale alla traiettoria e viene assunto positivo se la semiala destra risulta più bassa della sinistra. Con tale convenzione lo sbandamento (spesso detto anche  $\phi_W$ ) risulta positivo se tale è la velocità di virata (virata a destra).

L'angolo  $\beta$  compreso tra gli assi longitudinali aerodinamico  $x_A$  e vento  $x_W$  viene denominato *angolo di derapata* ed è assunto positivo se, come indicato dalla figura 1.15, il vento relativo  $-V$  batte sul lato destro del pilota.

Da quanto esposto risulta che per passare dal sistema degli assi vento  $\{G, x_W, y_W, z_W\}$  agli assi aerodinamici  $\{G, x_A, y_A, z_A\}$  occorre effettuare due rotazioni consecutive con velocità angolari, rispettivamente,  $\dot{\nu} \mathbf{i}_W$  attorno ad  $x_W$  e  $-\dot{\beta} \mathbf{k}_A$  attorno a  $z_A$ . Ne consegue che il vettore *velocità angolare istantanea della terna aerodinamica*, che si indicherà con

$\Omega_A$ , può essere espresso a partire dal vettore evoluzione tramite la seguente relazione:

$$\Omega_A = E + \dot{\nu} i_W - \dot{\beta} k_A \quad (1.6)$$

Da quanto esposto in questo paragrafo e da quanto precisato al precedente, è da notare che gli assi vento della letteratura americana (*wind axes*) corrispondono alla terna trirettangola levogira  $\{G, x_W, y'_W, z_A\}$ .

## 1.9 Assi velivolo (Body Axes, B)

La terna di *assi velivolo*  $\mathcal{T}_B$  (*Body Axes*) è una terna trirettangola levogira *solidale al velivolo*, con origine nel baricentro. L'asse longitudinale  $x_B$  è contenuto nel piano di simmetria del velivolo ed è orientato positivamente verso la prua. L'asse velivolo  $z_B$  è normale ad  $x_B$ , è contenuto nel piano di simmetria ed è diretto positivamente nel senso testa-piedi del pilota. L'asse trasversale  $y_B$  completa la terna levogira e risulta quindi orientato positivamente verso la destra del pilota. Gli assi velivolo sono rappresentati nella figura 1.17.

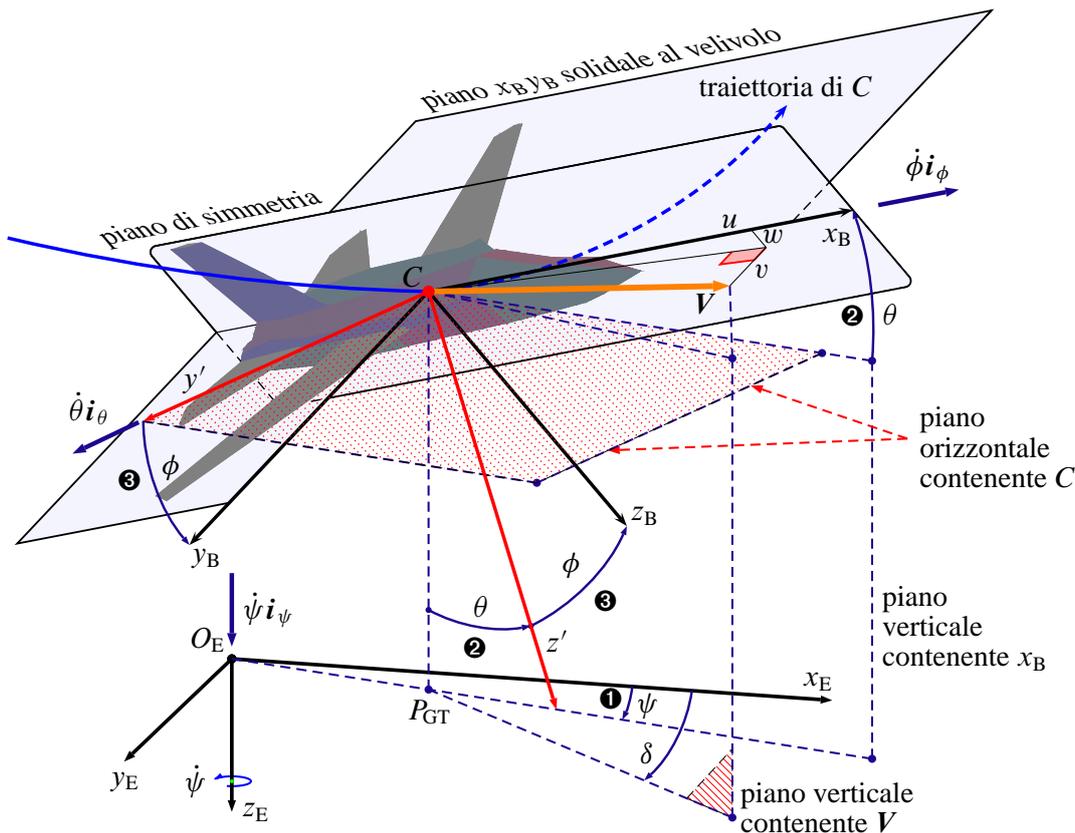
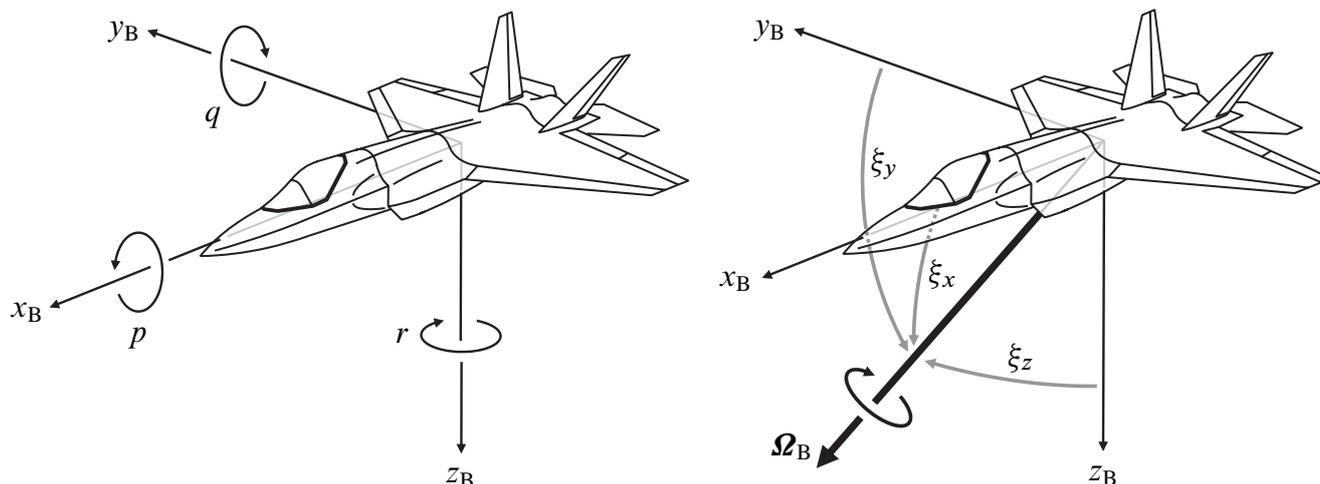


Figura 1.17 Assi velivolo ed angoli di Eulero.

Le due terne di assi velivolo ed assi aerodinamici, per avere gli assi  $x_B$  e  $z_B$  e gli assi  $x_A$  e  $z_A$  contenuti nello stesso piano, hanno l'asse trasversale in comune,  $y_B \equiv y_A$ . Conseguentemente il passaggio dalla terna aerodinamica  $\mathcal{T}_A$  a quella di assi velivolo  $\mathcal{T}_B$  viene ottenuto effettuando una rotazione intorno ad  $y_A$  pari ad  $\alpha_B = \alpha - \mu_x$ . L'angolo d'attacco  $\alpha$  definisce la posizione angolare dell'asse aerodinamico longitudinale  $x_A$  rispetto ad un



**Figura 1.18** Vettore velocità angolare istantanea  $\Omega_B$  e sue componenti nel riferimento degli assi velivolo. La retta individuata dagli angoli  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  e  $\xi_z$  all'istante generico  $t$  rappresenta l'asse mobile intorno a cui il velivolo compie una rotazione rigida istantanea di entità  $\Omega_B dt$ .

asse di riferimento solidale al velivolo e contenuto nel piano di simmetria. La variabile aerodinamica  $\alpha$  viene assunta positiva se, al generico istante, l'asse  $x_A$  è in posizione picchiata rispetto alla retta di riferimento delle incidenze.

Quando si parla di azioni aerodinamiche nel piano di simmetria del velivolo come la portanza e la resistenza è bene fissare opportunamente la direzione di riferimento rispetto alla quale si esprimono gli angoli d'attacco. Tipicamente la retta di riferimento delle incidenze è la direzione della corda di radice dell'ala oppure la retta di portanza nulla del velivolo parziale (configurazione ala-fusoliera, *wing-body zero-lift line*). La posizione angolare dell'asse velivolo longitudinale  $x_B$  rispetto ad una tale retta di riferimento è definita dall'angolo  $\mu_x$ , positivo se, come illustrato nella figura 1.16, l'asse  $x_B$  è in posizione picchiata.

Da quanto precedentemente esposto risulta che il vettore velocità angolare istantanea  $\Omega_B$  della terna di assi velivolo è direttamente ricavabile componendo quello della terna di assi aerodinamici con  $\dot{\alpha} \mathbf{j}_B$ , ovvero

$$\Omega_B = \Omega_A + \dot{\alpha} \mathbf{j}_B \quad (1.7)$$

Tenendo conto delle (1.6) e (1.1) si può esprimere  $\Omega_B$  in termini del vettore evoluzione  $E$  e del vettore *aggiustamento*

$$A = \dot{v} \mathbf{i}_W + \dot{\alpha} \mathbf{j}_B - \dot{\beta} \mathbf{k}_A \quad (1.8)$$

come

$$\Omega_B = E + A \quad (1.9)$$

Dall'esame della (1.9) si osserva che, fin quando si considera la sola traiettoria del velivolo, considerandolo di fatto un punto materiale, il moto è determinato dal solo vettore evoluzione; se interessa anche il moto del velivolo come corpo rigido, allora oltre all'evoluzione, legata alla sola traiettoria del centro di massa, è necessario considerare anche il vettore aggiustamento istantaneo  $A$ , cioè l'effettivo orientamento del velivolo nello spazio, in generale diverso da quello della terna  $\mathcal{T}_W$ .

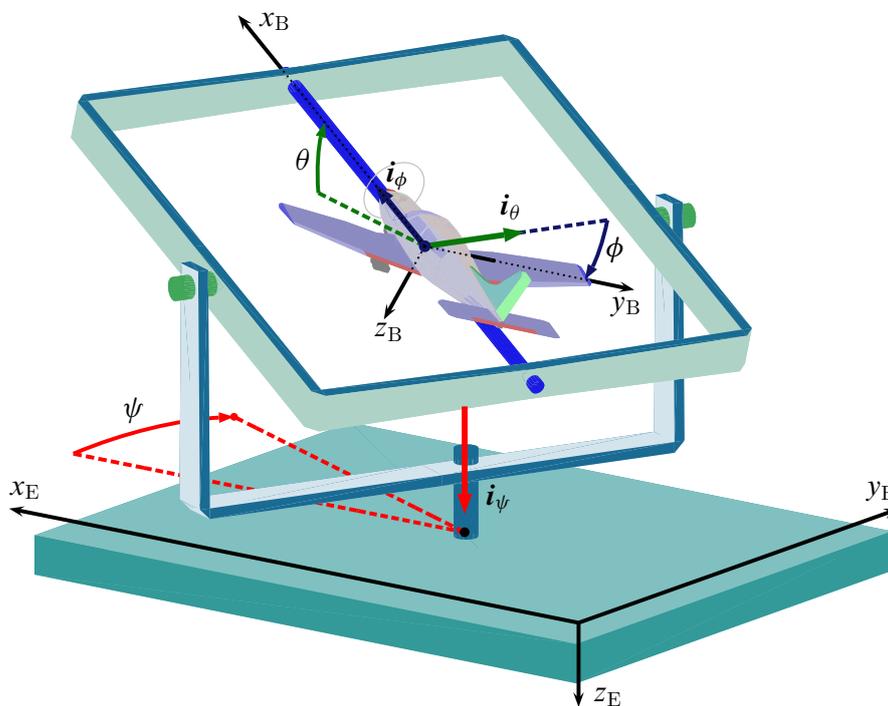
D'altra parte, la relazione (1.7) esprime il fatto che delle tre componenti della velocità angolare del velivolo sugli stessi assi velivolo, indicate in letteratura con la terna  $(p, q, r)$ , ovvero

$$\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{i}_B = \Omega_{B,x_B} \equiv p, \quad \boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{j}_B = \Omega_{B,y_B} \equiv q, \quad \boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{k}_B = \Omega_{B,z_B} \equiv r \quad (1.10)$$

la prima e la terza coincidono con le componenti secondo gli stessi assi della velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}_A$  della terna aerodinamica; la seconda componente,  $q$ , differisce dalla  $\Omega_{A,y_B}$  di una quantità pari ad  $\dot{\alpha}$ . In altri termini, si ha:

$$p = \Omega_{A,x_B}, \quad q = \Omega_{A,y_B} + \dot{\alpha}, \quad r = \Omega_{A,z_B} \quad (1.11)$$

Come si è detto precedentemente l'orientamento della terna aerodinamica rispetto agli assi Terra risulta definito dagli angoli  $\delta \equiv \psi_{GT}$ ,  $\gamma$ ,  $\nu \equiv \phi_W$ , e  $\beta$  mentre quello degli assi velivolo rispetto alla terna aerodinamica richiede la conoscenza dell'angolo di incidenza  $\alpha$ . Spesso riesce più conveniente riferire l'orientamento degli assi velivolo direttamente agli assi Terra attraverso tre angoli  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , definiti nella figura 1.17, mentre la direzione della velocità rispetto al velivolo risulta poi espressa dall'angolo d'attacco  $\alpha$  e di derapata  $\beta$ . Nella figura 1.19 è riportata una efficace interpretazione del significato di questi tre angoli mediante l'uso di uno snodo cardanico. L'orientamento del velivolo rispetto allo spazio fisso, indipendentemente dalla traiettoria del suo baricentro, resta definito istante per istante dalla terna di angoli  $(\phi, \theta, \psi)$ .



**Figura 1.19** Angoli di Euler dell'orientamento di un velivolo. Interpretazione che utilizza lo snodo cardanico (*gimbal*).

L'angolo di *azimuth*, o angolo di *rotta* (*heading*),  $\psi$  è l'angolo compreso fra il piano verticale contenente l'asse velivolo longitudinale  $x_B$  ed il piano di riferimento verticale  $\{O_E, x_E, z_E\}$ . L'angolo di *elevazione* (*elevation*)  $\theta$  viene definito come l'angolo che l'asse velivolo longitudinale  $x_B$  forma con il piano orizzontale  $\{O_E, x_E, y_E\}$ . Infine, l'angolo di

*inclinazione laterale (bank o roll)  $\phi$*  è l'angolo di cui risulta ruotato intorno ad  $x_B$  l'asse velivolo  $y_B$  a partire dalla posizione orizzontale (ali livellate). Tali angoli rappresentano gli *angoli di Eulero* del velivolo ed i loro versi positivi sono quelli indicati nella figura 1.17.

Per definizione, gli intervalli di variazione degli angoli di Eulero del velivolo sono i seguenti:

$$\begin{aligned} -\pi < \phi \leq \pi & & -180^\circ < \phi_{\text{deg}} \leq 180^\circ \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} & & -90^\circ < \theta_{\text{deg}} < 90^\circ \\ 0 \leq \psi < 2\pi & & 0^\circ \leq \psi_{\text{deg}} < 360^\circ \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dall'esame della figura 1.17, e come viene spiegato più in dettaglio nel capitolo successivo dedicato alla formulazione dell'orientamento, si deduce che per passare dagli assi Terra  $\{G, x_E, y_E, z_E\}$  alla terna ausiliaria  $\{G, x_B, y', z'\}$  basta compiere due rotazioni consecutive, la prima di un angolo  $\psi$  intorno a  $z_E$ , la seconda di un angolo  $\theta$  intorno a  $y'$ . Infine per giungere alla terna di assi velivolo occorre una rotazione della terna ausiliaria intorno ad  $x_B$  di un angolo  $\phi$ . Ne consegue che, potendo comporre i vettori  $\dot{\psi}i_\psi$ ,  $\dot{\theta}i_\theta$  e  $\dot{\phi}i_\phi$  per ottenere  $\Omega_B$ , in termini delle componenti scalari nella terna di assi velivolo si ottiene

$$\begin{aligned} \Omega_B &= \dot{\psi}i_\psi + \dot{\theta}i_\theta + \dot{\phi}i_\phi \\ &= (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta) i_B \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) j_B \\ &\quad + (\dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) k_B \end{aligned} \quad (1.13)$$

La determinazione della traiettoria del baricentro del velivolo tramite le (1.5a)-(1.5b)-(1.5c) comporta la necessità di esplicitare le componenti della velocità  $V$  sugli assi Terra in funzione di  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ .

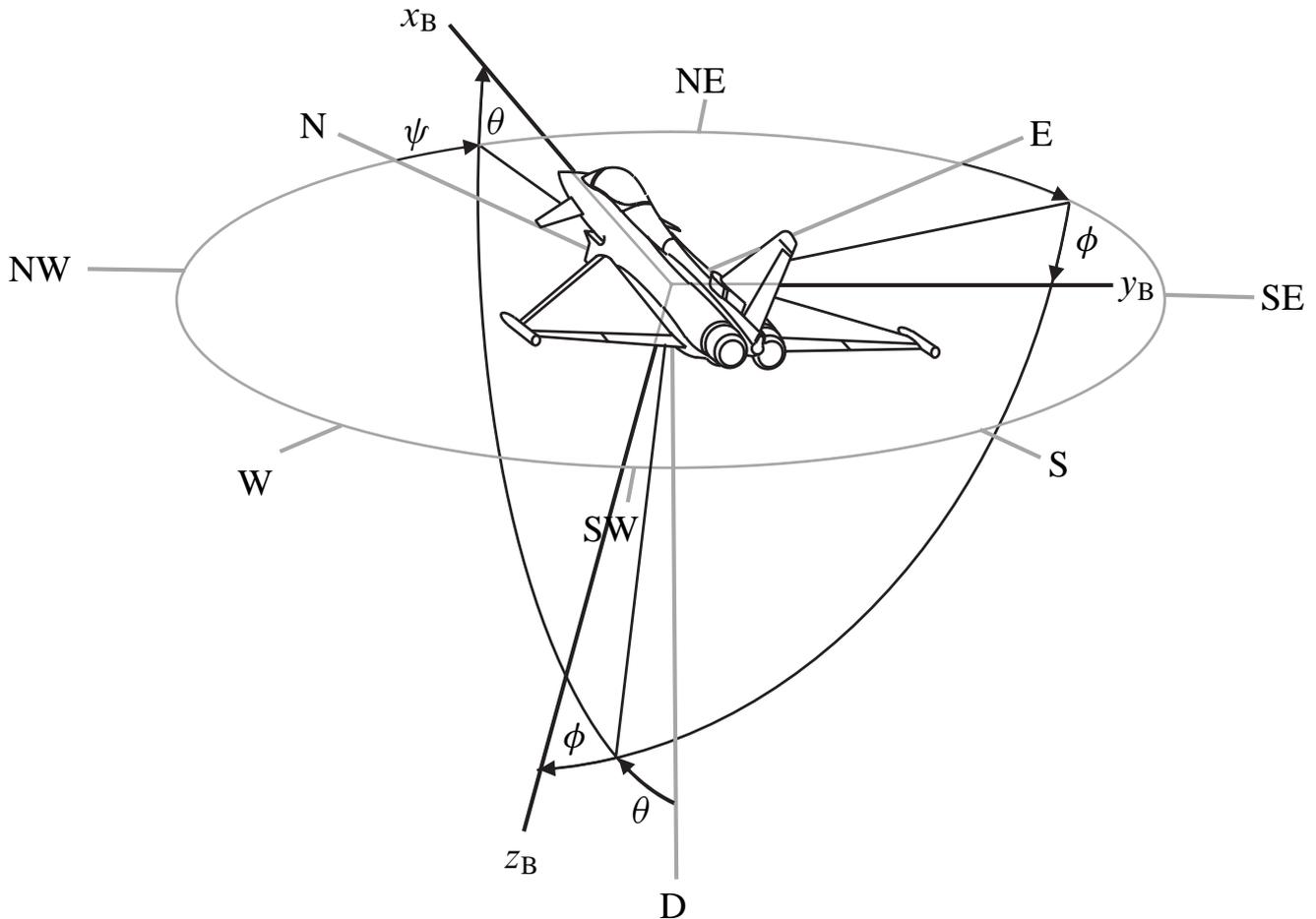
La terna di assi velivolo risulta completamente determinata quando, assegnando un particolare valore all'angolo  $\mu_x$ , viene stabilita la posizione dell'asse longitudinale rispetto alla prescelta direzione di riferimento delle incidenze. Fra le infinite possibili terne assi velivolo risultano particolarmente interessanti, per le semplificazioni che esse consentono, le terne degli *assi centrali di inerzia* e degli *assi stabilità*.

## 1.10 Assi centrali di inerzia

La terna di assi centrali di inerzia di un velivolo rigido è una particolare terna di assi velivolo. Essa si indica con  $\mathcal{T}_{CI} = \{G, \xi, \eta, \zeta\}$  ed è tale che, per definizione e non per particolari proprietà di simmetria dell'aeromobile, i prodotti d'inerzia  $I_{\xi\eta}$ ,  $I_{\xi\zeta}$  ed  $I_{\eta\zeta}$  sono nulli. Per sottolineare il fatto che si parla di assi centrali d'inerzia, spesso i momenti principali d'inerzia  $I_{\xi\xi}$ ,  $I_{\eta\eta}$  ed  $I_{\zeta\zeta}$  vengono anche indicati come  $A$ ,  $B$  e  $C$ , rispettivamente.

Quando il velivolo è simmetrico rispetto ad un piano longitudinale anche il piano  $\{G, \xi, \zeta\}$  è di simmetria e, rispetto alla retta di riferimento delle incidenze, la terna è definita dalla condizione

$$\mu_x \equiv \mu_\xi \quad (1.14)$$



**Figura 1.20** Orientamento del velivolo e significato degli angoli di Eulero rispetto alla usuale simbologia degli indicatori di bordo (*Horizontal Situation Indicator, HSI*).

## 1.11 Assi di stabilità

La terna di assi stabilità  $\mathcal{T}_S$  viene introdotta per lo studio delle equazioni del moto linearizzate. Essa è una particolare terna di assi velivolo, quindi solidale ad esso durante le sue evoluzioni, il cui orientamento viene però fissato in base ad una particolare condizione di volo equilibrato.

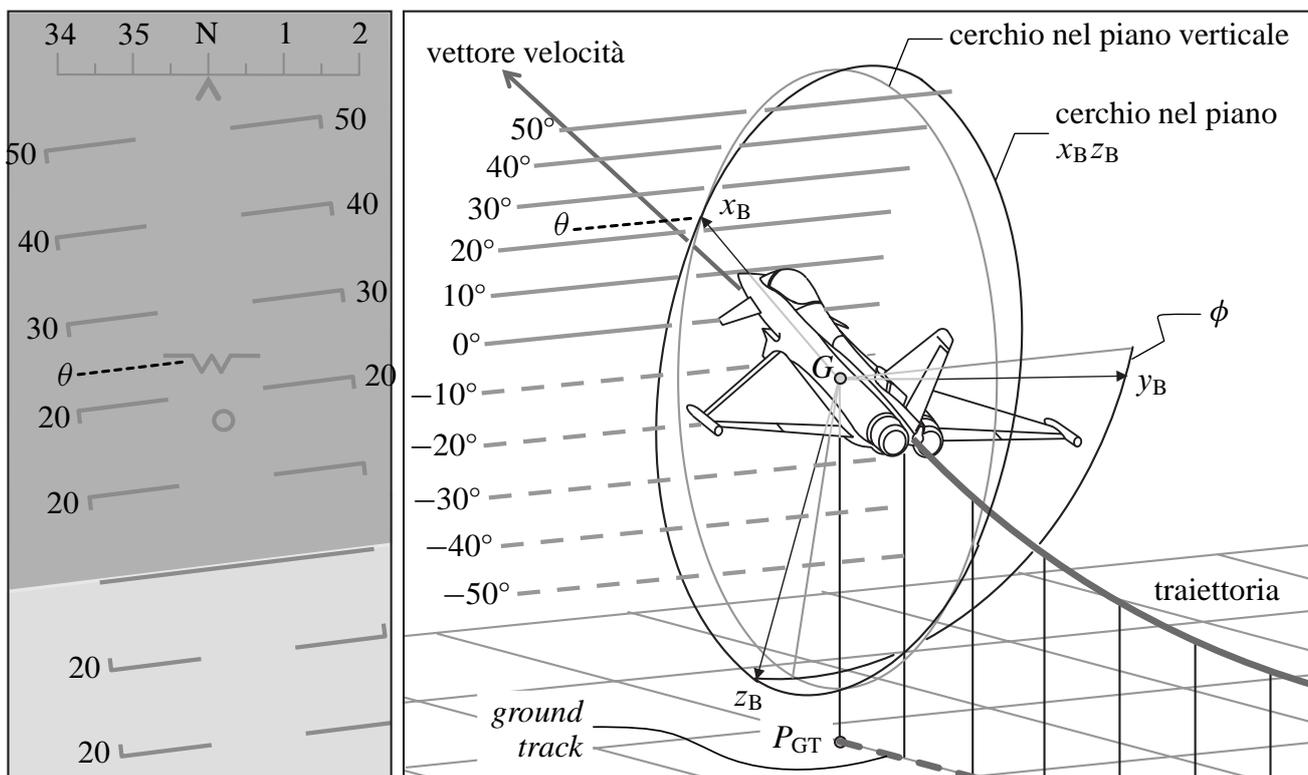
Si pensi ad una condizione stabilizzata iniziale, della quale si intendono studiare le eventuali perturbazioni nel tempo. Tipicamente questa condizione di riferimento è quella di volo rettilineo ed a velocità costante sulla traiettoria. Per un velivolo simmetrico l'asse di stabilità longitudinale  $x_S$  sarà nel piano di simmetria ed allineato alla traiettoria iniziale di volo. Esso corrisponderà alla condizione

$$\mu_x \equiv \alpha_0 \quad (1.15)$$

dove  $\alpha_0$  è l'angolo d'attacco mantenuto dal velivolo nella condizione di riferimento.

I tre assi di stabilità  $x_S$ ,  $y_S$ ,  $z_S$  sono dunque definiti con riferimento ad una situazione di volo iniziale e nell'evoluzione successiva subiranno eventualmente delle variazioni di orientamento rispetto ad una terna fissa essendo essi solidali all'aeromobile.

Secondo la definizione (1.15) si avrà che l'angolo d'attacco di equilibrio, se riferito all'asse di stabilità  $x_S$ , sarà nullo. Come si vedrà più avanti tale terna introduce delle semplificazioni nelle espressioni delle componenti delle forze e dei momenti aerodinamici



**Figura 1.21** Traiettoria e *ground track*. Interpretazione dell'angolo di elevazione  $\theta$  e di inclinazione laterale  $\phi$  attraverso gli indicatori tipici di un *Head-Up-Display*.

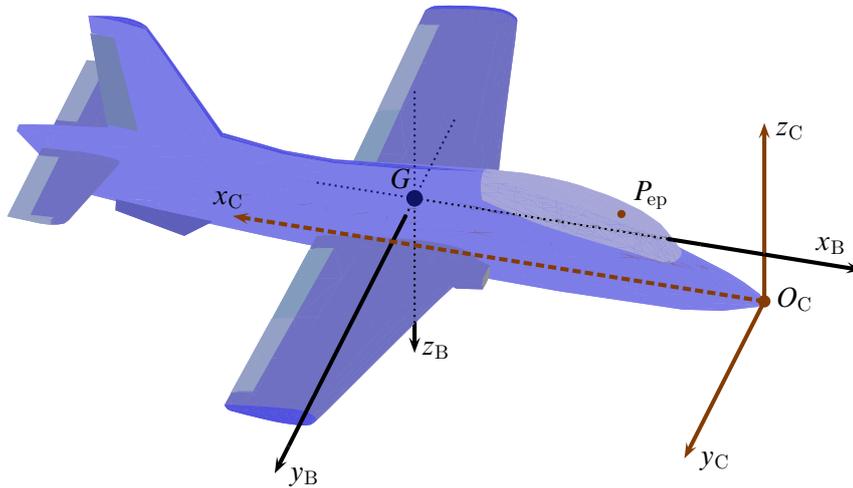
e trova un diffuso impiego in quasi tutti quei problemi di Dinamica del volo per la risoluzione dei quali risulta lecito linearizzare le equazioni del moto. In particolare, nei problemi di stabilità dinamica l'analisi delle piccole perturbazioni e della stabilità del moto equilibrato su traiettoria rettilinea risulta svincolata dall'angolo d'assetto iniziale e da essi la terna di assi stabilità trae la sua denominazione.

## 1.12 Assi costruttivi

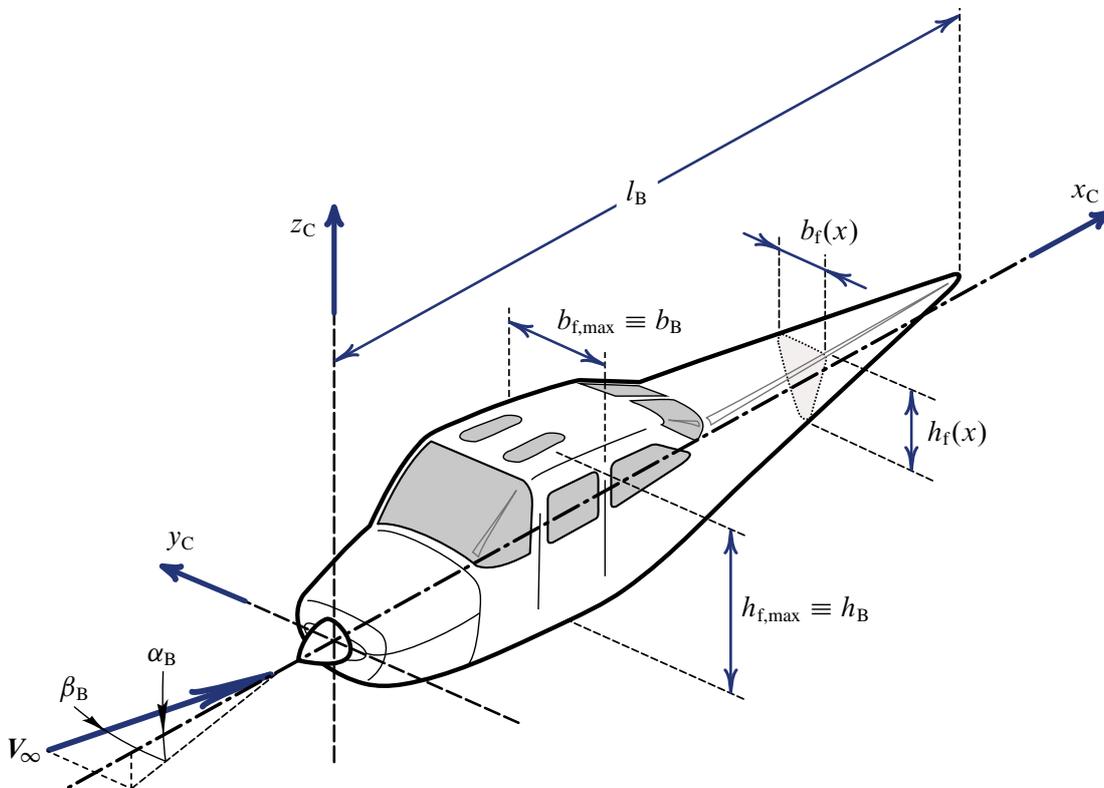
Nella figura 1.22 è rappresentata, insieme alla terna degli assi velivolo, un sistema di riferimento detto terna degli *assi costruttivi*,  $\mathcal{T}_C$ . In genere i progettisti fissano il riferimento costruttivo  $\{O_C, x_C, y_C, z_C\}$ , con origine nei pressi dell'estremità anteriore della fusoliera ed assi orientati come nella figura: asse  $x_C$  verso poppa, asse  $y_C$  verso l'ala destra, asse  $z_C$  nel verso piedi-testa del pilota. La retta di riferimento longitudinale  $x_C$  è anche detta *linea di galleggiamento*, prendendo in prestito una terminologia navale (*waterline*). Se la fusoliera fosse posta in acqua come corpo galleggiante, la linea di galleggiamento si otterrebbe intersecando il piano del pelo libero del liquido con il piano di simmetria del corpo.

Nella figura 1.23 è rappresentata la fusoliera di un tipico velivolo dell'aviazione generale. Rispetto al riferimento costruttivo se ne definiscono i parametri fondamentali: la lunghezza  $l_B$ , la massima larghezza di sezione  $b_B$  e la massima altezza di sezione  $h_B$ .

Una tipica combinazione ala-fusoliera è schematizzata nelle figure 1.24 e 1.25. La posizione dell'ala rispetto alla fusoliera è definita dalla distanza  $l_1$  dalla prua del punto  $A^*$  (bordo d'attacco della effettiva corda di radice  $c_r^*$ ), dalla sua coordinata  $z_0$  (positiva se al di



**Figura 1.22** Assi velivolo ed assi costruttivi. Il punto  $P_{ep}$  è detto *pilot eye-point* ed indica la posizione della testa del pilota nel riferimento costruttivo.



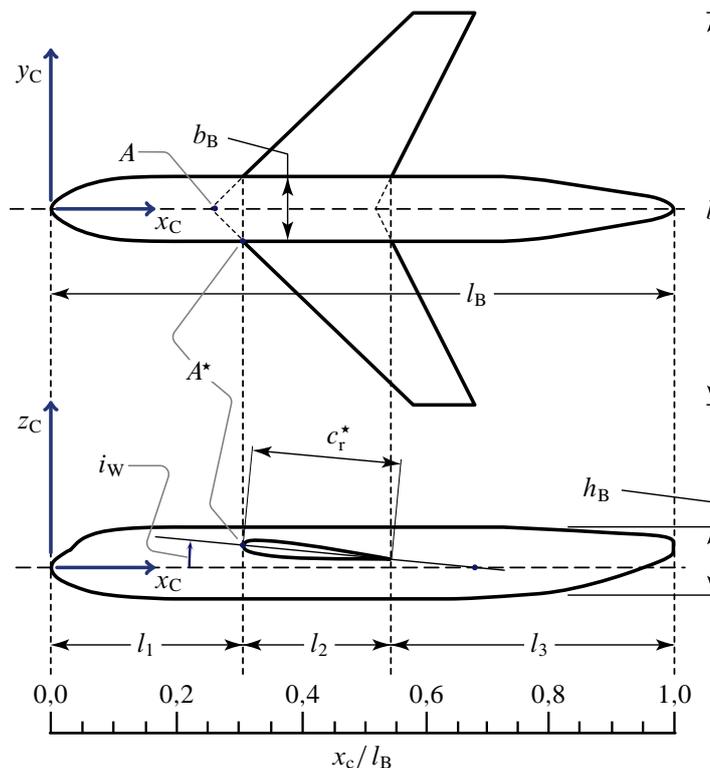
**Figura 1.23** Parametri geometrici di una fusoliera.

sopra, negativa se al di sotto del piano di galleggiamento  $x_c y_c$ ) e l'angolo di calettamento  $i_w$ .

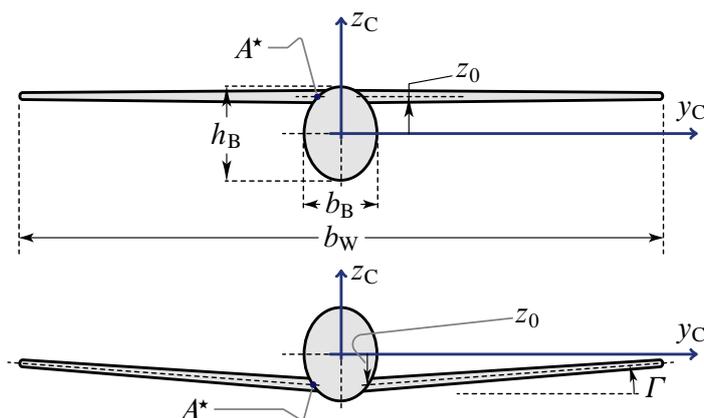
Nella pratica l'asse longitudinale  $x_c$  è quello che fornisce la direzione dell'asse velivolo  $x_B$ . Quest'ultimo è parallelo all'asse costruttivo ma ha origine nel baricentro e verso opposto.

## 1.13 Comandi di volo ed assi superficie di governo

I comandi di volo costituiscono una parte degli impianti di bordo essenziale per la controllabilità e manovrabilità della macchina aerea. A seconda della categoria del velivolo,



**Figura 1.24** Definizioni relative alla configurazione ala-fusoliera (vista dall'alto e vista laterale).



**Figura 1.25** Definizioni relative alla configurazione ala-fusoliera (vista frontale).

delle sue dimensioni e velocità sono possibili diverse tecniche per asservire il movimento delle superfici aerodinamiche di controllo ai comandi del pilota.

In una discussione generale della dinamica del volo dei velivoli è opportuno riferirsi ad un aeromobile generico di architettura convenzionale e dotato di comandi di volo di tipo tradizionale. La figura 1.26 a fronte mostra un velivolo di architettura tradizionale, sia per quanto riguarda la superficie portante principale (nel caso particolare, una combinazione ala-fusoliera “ad ala alta”, con flap ed alettoni) sia per quanto riguarda gli impennaggi di coda e le relative superfici di governo.

Gli *alettoni* (*aileroni*), la cui deflessione positiva è mostrata sia nella figura 1.26 che nella figura 1.28 a pagina 28, sono le superfici di governo associate al comando laterale, cioè quelle che conferiscono all'aeroplano un moto di rotazione intorno all'asse longitudinale  $x_B$ . In altri termini, l'azionamento degli alettoni determina un moto di rollio.

Il comando *longitudinale* consente invece al pilota di conferire al velivolo un moto di

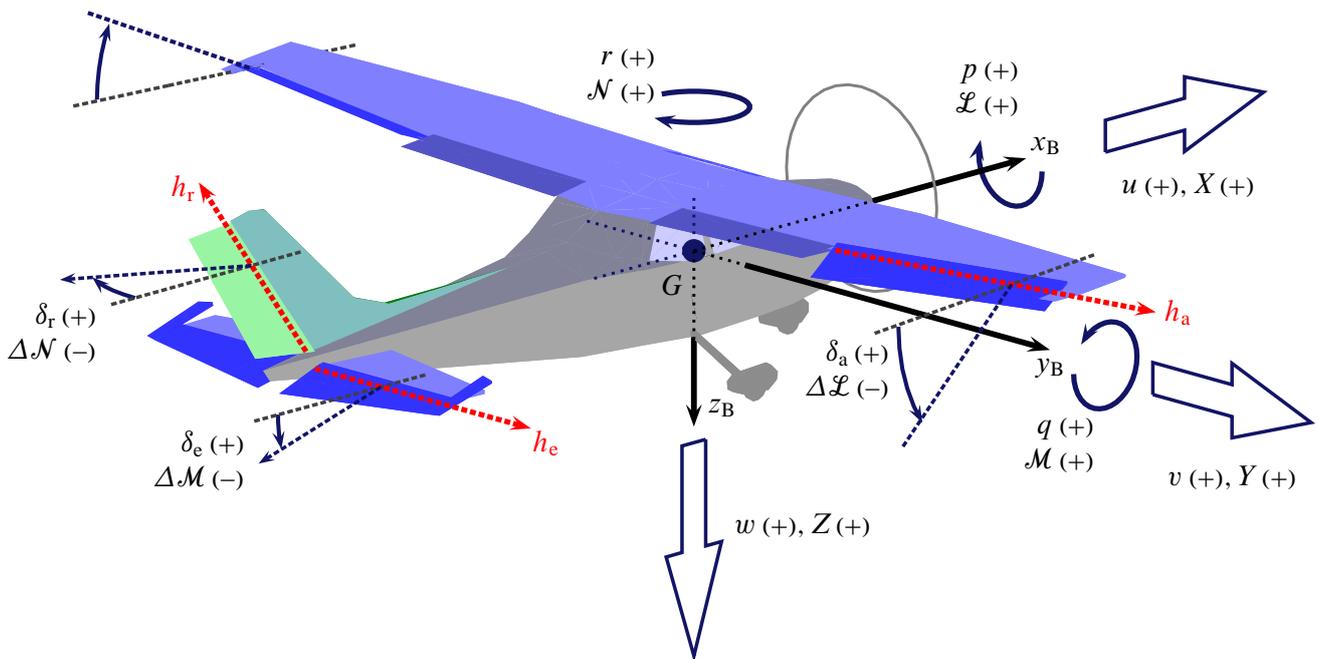


Figura 1.26 Sistema di assi velivolo e convenzioni sui segni.

rotazione intorno all'asse trasversale  $y_B$ , ovvero un moto di beccheggio. La figura 1.27 mostra due tipi molto comuni di superfici di comando longitudinale. Nella figura 1.27a si ha un impennaggio orizzontale di coda costituito da una parte fissa, solidale alla fusoliera, detta *stabilizzatore (stabilizer)* e da una parte mobile che rappresenta la superficie di governo vera e propria, detta *elevatore (elevator)*. La figura 1.27b mostra invece un impennaggio orizzontale *tutto mobile*, incernierato ad un asse solidale alla fusoliera e detto *stabilizzatore (stabilator)*.

Il comando *direzionale* consente al pilota di produrre rotazioni intorno all'asse velivolo  $z_B$ , cioè moti di imbardata. Il comando direzionale è associato al *timone (rudder)*, anch'esso riportato nei disegni della figura 1.27.

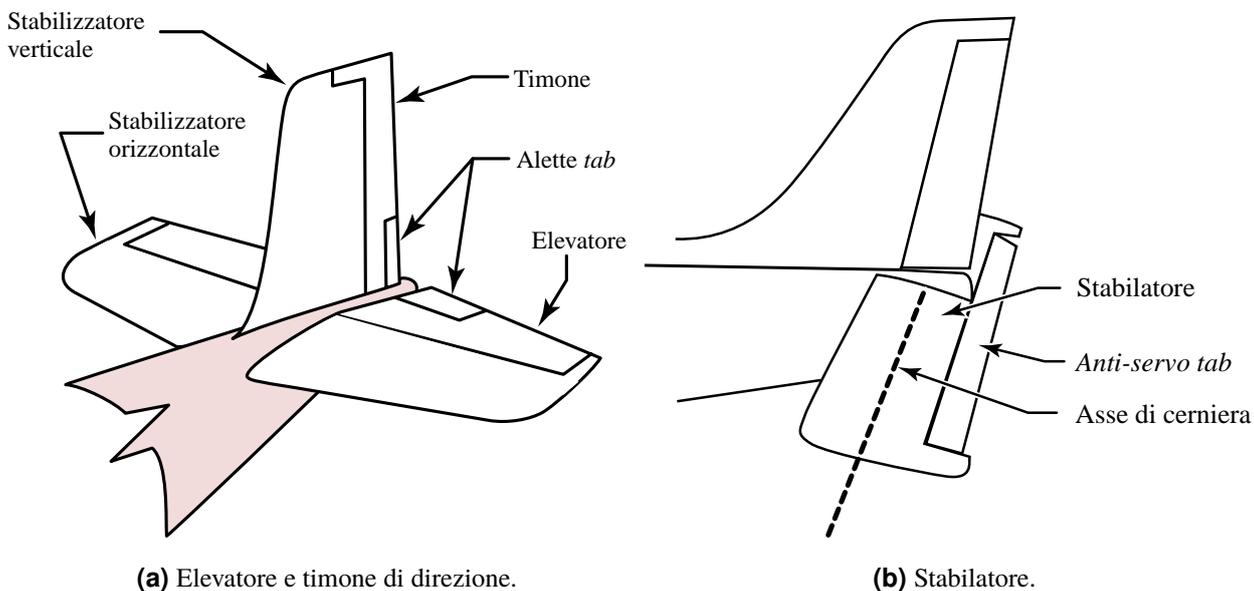
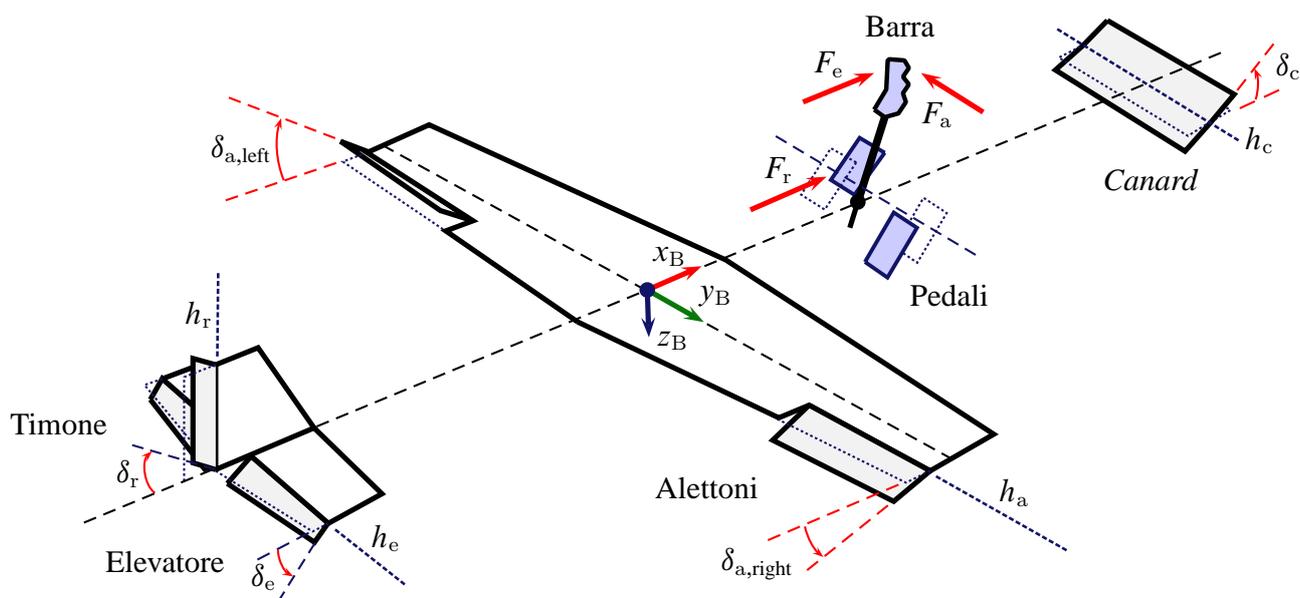


Figura 1.27 Tipici elementi funzionali degli impennaggi di coda tradizionali.



**Figura 1.28** Forze positive applicate dal pilota secondo la convenzione europea e relazione con le convenzioni sui segni delle deflessioni delle superfici di governo.

Gli alettoni, l'elevatore ed il timone di direzione sono anche detti comandi di volo *primari*. In un velivolo di configurazione tradizionale sono presenti due alettoni montati sul bordo d'uscita delle estremità alari, un elevatore montato sull'impennaggio di coda orizzontale, un timone di direzione montato sull'impennaggio di coda verticale. Ciascuna di queste superfici di governo produce variazioni di momento di rollio, beccheggio ed imbardata, rispettivamente, attraverso una variazione locale della curvatura di una superficie portante.

Il comando longitudinale realizza una deflessione  $\delta_e$  dell'equilibratore di segno positivo, per convenzione, se il bordo d'uscita della superficie mobile si sposta verso il basso. Il criterio che definisce una deflessione  $\delta_e$  positiva è legato alla convenzione europea sui segni positivi degli sforzi di pilotaggio. A tal proposito si esamini ancora la figura 1.26 nonché la figura 1.28. La forza  $F_e$  che il pilota deve applicare al comando longitudinale per muovere in avanti la barra o il volantino è per convenzione positiva. Dunque, si stabilisce che *un incremento positivo della forza applicata dal pilota al comando longitudinale corrisponde ad una deflessione positiva dell'equilibratore*. Una deflessione positiva  $\delta_e$  può essere anche visualizzata immaginando il segno della variazione di momento aerodinamico che ne consegue. Infatti, quando il bordo d'uscita della superficie mobile si deflette verso il basso, alla risultante delle forze esterne agenti sul velivolo si sommerà un contributo del tipo  $\Delta \mathbf{F}_H$  localizzato in coda. L'orientamento di questa forza è tale da produrre una variazione  $\Delta \mathcal{M}$  di momento di beccheggio tipicamente *negativa* (figura 1.26).

La deflessione positiva  $\delta_a$  dell'alettone destro è anch'essa mostrata nelle figure 1.26 e 1.28. Ad essa corrisponde tipicamente una deflessione verso il basso del bordo d'uscita dell'alettone destro ed una deflessione combinata verso l'alto di quello dell'alettone sinistro. Un tale meccanismo produce un'asimmetria del carico alare ed un corrispondente momento di rollio non nullo. Come per la convenzione sul segno della deflessione dell'equilibratore, qui una deflessione  $\delta_a$  positiva dà luogo ad un incremento negativo di momento di rollio  $\Delta \mathcal{L}$ , cioè tendente a far sollevare l'ala destra. Si noti che tale convenzione *non* coincide con quella adottata in letteratura americana dove il segno di

$\delta_a$  è positivo per una deflessione verso l'alto dell'alettone destro. È spesso importante considerare che per  $\delta_a$  si intende talvolta la media tra i valori assoluti delle deflessioni angolari dei due alettoni, destro e sinistro, con segno positivo se il destro si abbassa. Questo fatto è un esempio di quanto sia importante verificare con attenzione le convenzioni e le grandezze di riferimento utilizzate nel calcolo dei coefficienti aerodinamici, specialmente nelle applicazioni che fanno uso di dati ottenuti da diverse fonti.

La convenzione sul segno positivo della deflessione  $\delta_r$  del comando direzionale è mostrata nella figura 1.26. Ad una deflessione  $\delta_r$  positiva verso sinistra del bordo d'uscita del timone corrisponderà un momento di imbardata negativo che tenderà a spostare il muso della fusoliera a sinistra. Tale incremento di momento di imbardata è realizzato attraverso la produzione di una forza laterale  $(\Delta Y)_V$  positiva ed applicata in coda. Il vettore variazione di forza laterale  $(\Delta Y)_V \mathbf{j}_B$ , dove il pedice  $(\cdot)_V$  sta per *vertical tail*, ha un forte braccio rispetto al baricentro avendo come punto di applicazione il centro aerodinamico dell'impennaggio verticale.

Per quanto riguarda l'azionamento delle superfici di governo, i dettagli costruttivi delle linee di comando dipendono dal particolare velivolo in esame. Un esempio di velivolo di architettura tradizionale comandato dal pilota attraverso una barra ed una pedaliera è riportato nella figura 1.29 nella pagina seguente. Le soluzioni più comuni per alianti e piccoli velivoli dell'aviazione generale sono basate solo su collegamenti meccanici ottenuti con cavi o aste: il pilota, agendo sui comandi presenti in cabina (sulla barra o sul volantino e sulla pedaliera) trasmette un movimento ad un cinematismo che arriva fino alla superficie di governo. Normalmente la forza che il pilota deve applicare è funzione, oltre che delle dimensioni e altre caratteristiche del velivolo, della velocità di volo e dell'angolo di deflessione della superficie aerodinamica.

Quando gli sforzi richiesti per il pilotaggio risultano eccessivi rispetto alle normali capacità di un pilota umano i dispositivi puramente meccanici non sono sufficienti al governo dell'aeromobile. Si ricorre pertanto ad un potenziamento dei comandi, tipicamente attraverso l'aggiunta di dispositivi di tipo idraulico. Una conseguenza dell'introduzione dei servomeccanismi idraulici nei comandi di volo è la possibilità di utilizzare tecnologie di controllo attivo per la riduzione dei carichi di volo, la guida automatica, la stabilizzazione e la protezione da manovre fuori dall'involuppo di volo. Tecnologie più recenti si basano sulla trasmissione dalla cabina di un segnale elettrico, che viene opportunamente elaborato da un sistema di calcolatori e tradotto nell'*attuazione* della superficie di governo (*fly-by-wire*).

Si osservi che oltre ai sistemi tradizionali di comando dati dagli alettoni, dall'elevatore e dal timone di direzione esistono anche altri dispositivi fisici di diversa tipologia per il controllo di forze e momenti esterni agenti su un aereo in volo. Tra questi dispositivi si possono annoverare, ad esempio, gli *spoilers* e gli *speed breakers*, disposti tipicamente sulle ali o sulla fusoliera. Esistono poi dei dispositivi di comando speciali perché legati a configurazioni particolari come, ad esempio, i sistemi di orientamento della spinta dei propulsori per velivoli a decollo ed atterraggio verticale. Esistono anche velivoli che possiedono superfici di governo montate su impennaggi di coda a "V" oppure, ancora, delle alette mobili dette *canard*, montate nella parte anteriore della fusoliera. Per le configurazioni non tradizionali la costruzione di un modello matematico dei comandi di volo richiede un trattamento particolare. In tutti i casi si perviene comunque alla definizione della *efficacia* di un comando, cioè al rapporto tra l'incremento di forza o di

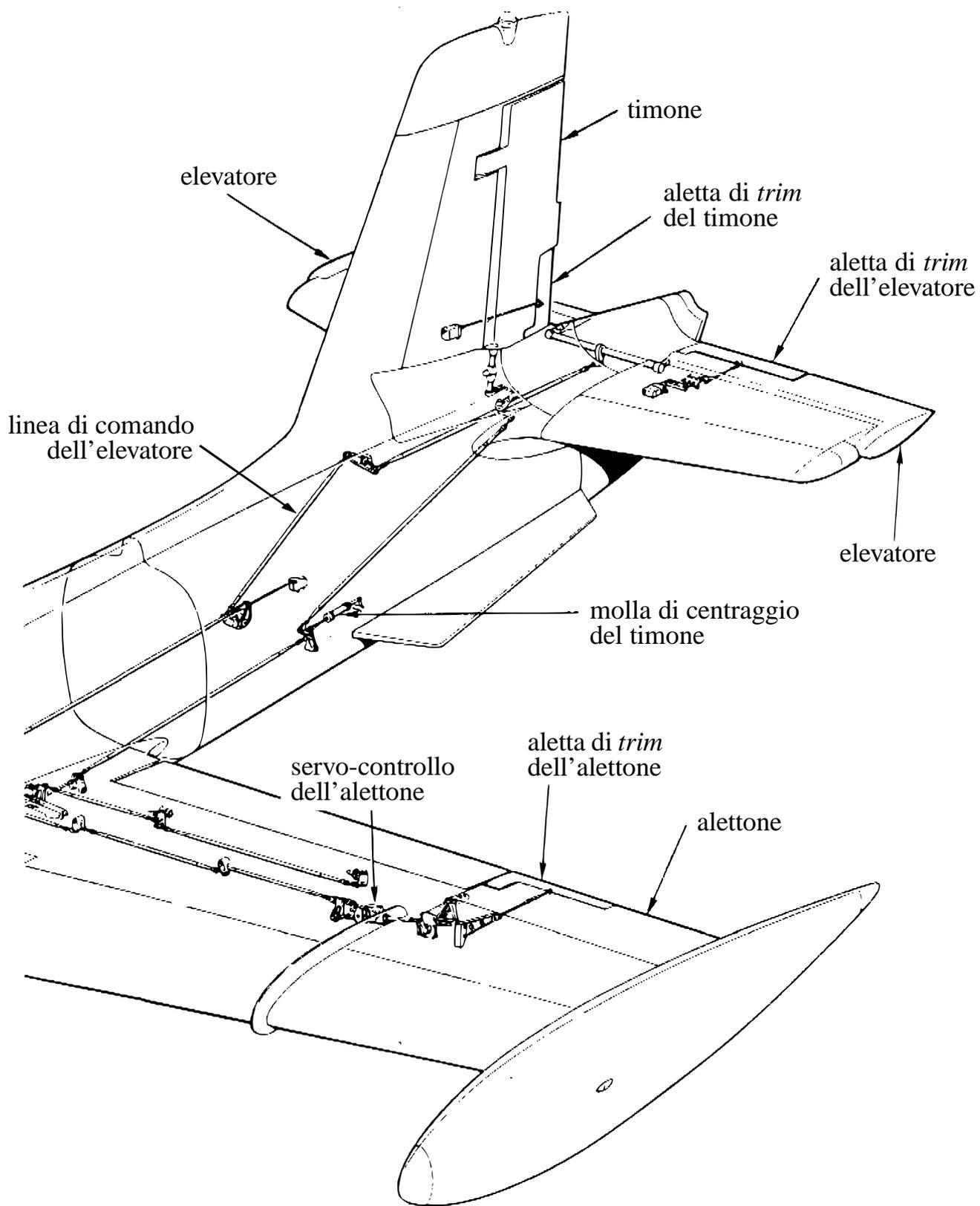
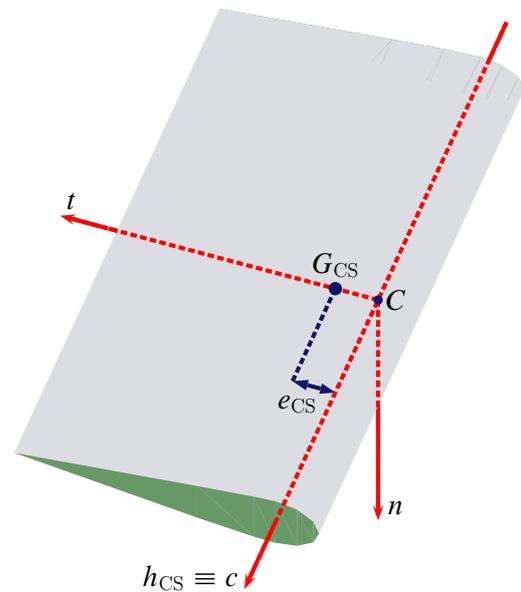


Figura 1.29 Linee di comando di un velivolo.



**Figura 1.30** Generica terna  $\mathcal{T}_{CS} = \{C, c, t, n\}$  degli assi superficie di governo. Essa si specializza, ad esempio nel caso dell'equilibratore, nella terna  $\mathcal{T}_{CS,e} = \{C_e, h_e, t_e, n_e\}$  e l'eccentricità diviene  $e_{CS} \equiv e_e$ .

momento aerodinamici provocati da una deflessione della superficie di governo e l'entità della deflessione stessa.

La generica terna mobile  $\mathcal{T}_{CS}$  (dove CS sta per *Control Surface*) alla quale verrà riferito lo studio del moto di ciascuna superficie di governo è rappresentata nella figura 1.30. Essa è costituita da un sistema di assi levogiro  $\{C, c, t, n\}$ . L'origine  $C$  è nel punto di intersezione tra l'asse di cerniera  $h_{CS} \equiv c$  ed il piano ad esso normale contenente il baricentro  $G_{CS}$  della superficie di governo. I versori che definiscono direzioni e versi degli assi di tale terna sono:

$\mathbf{i}_c$ , versore avente la direzione dell'asse di cerniera, diretto positivamente verso l'estremità esterna della superficie di governo;

$\mathbf{i}_t$ , versore definito dalla normale all'asse di cerniera condotta dal baricentro della superficie di governo, orientata positivamente verso il bordo d'uscita;

$\mathbf{i}_n$ , versore normale ai precedenti ed avente verso tale da costituire con  $\mathbf{i}_c$  ed  $\mathbf{i}_t$  una terna levogira.

È opportuno sottolineare che l'asse definito dal versore  $\mathbf{i}_t$  è un asse baricentrico. Inoltre il piano  $\{C, c, t\}$  è, il più delle volte, un piano di simmetria o può essere, con sufficiente approssimazione, riguardato come tale. Si ha quindi che le coordinate di  $G_{CS}$  in tale terna sono  $(0, e_{CS}, 0)$  ed infine che valgono le relazioni

$$I_{ct} = I_{cn} = I_{tn} = 0 \quad (1.16)$$

L'annullarsi di tali prodotti d'inerzia concorre a semplificare sensibilmente le equazioni di equilibrio delle superfici di governo.

La generica terna rappresentata nella figura 1.30 si specializza, ad esempio per l'elevatore, nella terna  $\mathcal{T}_{CS,e} = \{C_e, h_e, t_e, n_e\}$ . Analogamente si avranno le terne  $\mathcal{T}_{CS,a} = \{C_a, h_a, t_a, n_a\}$  e  $\mathcal{T}_{CS,r} = \{C_r, h_r, t_r, n_r\}$  per l'alettone destro e per il timone di direzione. Gli assi di cerniera e le origini delle diverse terne sono rappresentate nella figura 1.31.

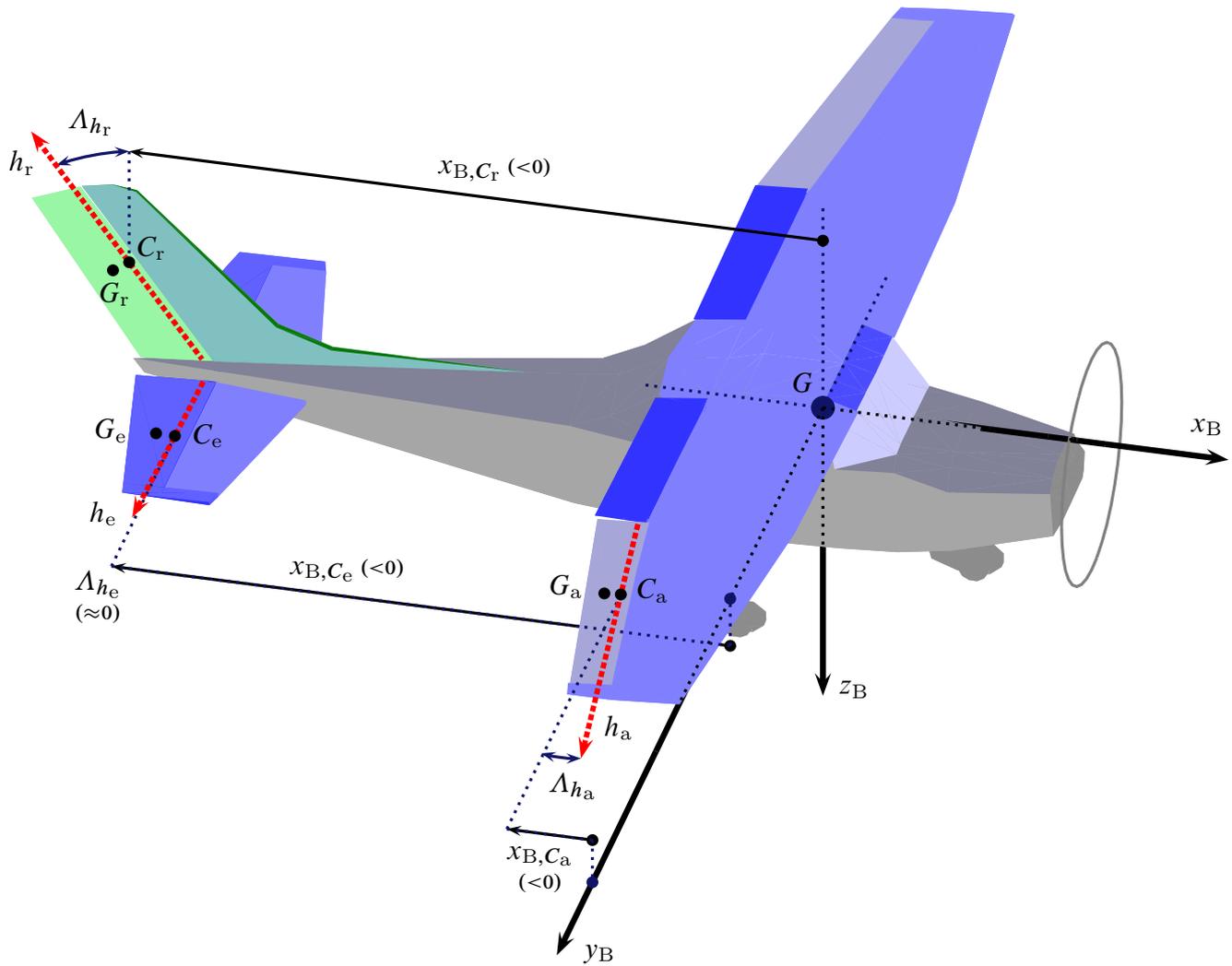


Figura 1.31 Assi di cerniera e loro orientamento rispetto agli assi velivolo.

# Bibliografia

- [1] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Hodges & Smith, 1853.
- [2] O. Rodrigues, “Des lois géométriques qui régissent les déplacements d’un système solide dans l’espace, et de la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1840.
- [3] E. Salamin, “Application of Quaternions to Computation with Rotations”, Working paper, Stanford AI Lab, 1979.
- [4] A. P. Yefremov, “Quaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories”, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, vol. 1, 2004.
- [5] Schwab A. L., “Quaternions, Finite Rotations and Euler Parameters”, Course notes on Applied Multibody Dynamics, Delft University of Technology, Laboratory for Engineering Mechanics, 2003.  
<http://tam.cornell.edu/~als93/quaternion.pdf>.
- [6] AIAA/ANSI, *Recommended Practice for Atmospheric and Space Flight Vehicle Coordinate Systems*. R-004-1992, 1992.
- [7] G. H. Bryan, *Stability in Aviation: An Introduction to Dynamical Stability as Applied to the Motions of Aeroplanes*. Macmillan and Co., Limited, London, 1911.
- [8] D. J. Diston, *Computational Modelling of the Aircraft and the Environment. Volume 1, Platform Kinematics and Synthetic Environment*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [9] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [10] W. F. Phillips, “Phugoid Approximation for Conventional Airplanes”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, January-February 2000.
- [11] W. F. Phillips, “Improved Closed-Form Approximation for Dutch-Roll”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, May-June 2000.
- [12] R. Stengel, *Flight Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2004.
- [13] M. R. Napolitano, *Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation*. John Wiley, 2012.

- [14] D. K. Schmidt, *Modern Flight Dynamics*. McGraw-Hill, 2010.
- [15] B. Stevens, F. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [16] D. Stinton, *The Anatomy of the Airplane* (2nd edition). American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [17] B. Etkin, *Dynamics of Flight, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [18] M. Calcara, *Elementi di dinamica del velivolo*. Edizioni CUEN, Napoli, 1988.
- [19] L. V. Schmidt, *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. AIAA Education Series, 1998.
- [20] W. J. Duncan, *Control and Stability of Aircraft*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [21] R. Jategaonkar, *Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology*. Progress in Astronautics and Aeronautics Series, 2006.
- [22] C. D. Perkins, R. E. Hage, *Aircraft Performance, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [23] J. R. Wright, J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [24] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*. Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- [25] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*. Springer, Heidelberg, 2009.
- [26] P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. Second Edition. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2007.
- [27] J. D. Mattingly, *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2006.
- [28] K. Hünecke, *Jet Engines. Fundamentals of Theory, Design and Operation*. Motorbooks International, 1997.
- [29] A. Linke-Diesinger, *Systems of Commercial Turbofan Engines*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [30] F. R. Garza, E. A. Morelli, "A Collection of Nonlinear Aircraft Simulations with MATLAB". NASA-TM-2003-212145, January 2003.
- [31] Voce WGS84 su *Wikipedia*:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/World\\_Geodetic\\_System](http://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System)

- [32] Anonimo, *Department of Defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems*. NIMA TR8350.2, Third Edition, Amendment 2. National Imagery and Mapping Agency, US Department of Defense, 2004.
- [33] J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. DARcorporation, 2001.
- [34] H. T. Schlichting, E. A. Truckenbrodt, *Aerodynamics of the Aeroplane*. McGraw Hill Higher Education, 2nd edition, 1979.
- [35] M. M. Munk, “The aerodynamic forces on airship hulls”. NACA-TR-184, 1924.
- [36] A. Silverstein, S. Katzoff, “Aerodynamic characteristics of horizontal tail surfaces”. NACA-TR-688, 1940.
- [37] R. I. Sears, “Wind-tunnel data on the aerodynamic characteristics of airplane control surfaces”. NACA-WR-L-663, 1943.
- [38] E. Garner, “Wind-tunnel investigation of control-surface characteristics XX: plain and balanced flaps on an NACA 0009 rectangular semispan tail surface”. NACA-WR-L-186, 1944.
- [39] J. D. Brewer, M. J. Queijo, “Wind-tunnel investigation of the effect of tab balance on tab and control-surface characteristics”. NACA-TN-1403, 1947.
- [40] S. M. Crandall, H. E. Murray, “Analysis of available data on the effects of tabs on control-surface hinge moments”. NACA-TN-1049, 1946.
- [41] B. W. McCormick, *Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics*. John Wiley & Sons, 1979.
- [42] B. N. Pamadi, *Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, 1998.
- [43] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics. Modelling and Simulation with Matlab and Simulink*. Birkhäuser, Berlin, 2007.
- [44] D. Howe, *Aircraft Loading and Structural Layout*. AIAA Education Series, 2004.
- [45] P. Morelli, *Static Stability and Control of Sailplanes*. Levrotto & Bella, Torino, 1976.
- [46] L. Prandtl, O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. Dover, 1957.
- [47] R. K. Heffley, W. F. Jewell, “Aircraft Handling Qualities Data”. NASA-CR-2144, December 1972.
- [48] H. P. Stough III, J. M. Patton Jr, S. M. SliWa, “Flight Investigation of the Effect of Tail Configuration on Stall, Spin, and Recovery Characteristics of a Low-Wing General Aviation Research Airplane”. NASA-TP-1987-2644, February 1987.

- [49] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 3rd edition, New York, 2001.
- [50] J. J. Bertin, *Aerodynamics for Engineers*. Prentice-Hall, 4th edition, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [51] J. Katz, A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, England, U.K., 2001.
- [52] D. E. Hoak, *et al.*, “The USAF Stability and Control Datcom”. Air Force Wright Aeronautical Laboratories, TR-83-3048, 1960 (Revised 1978).
- [53] R. T. Jones, “A Note on the Stability and Control of Tailless Airplanes”. NACA Report 837, 1941.
- [54] D. P. Coiro, F. Nicolosi, A. De Marco, N. Genito, S. Figliolia, “Design of a Low Cost Easy-to-Fly STOL Ultralight Aircraft in Composite Material”. *Acta Polytechnica*, Vol. 45 no. 4, 2005, pp. 73-80; ISSN 1210-2709.
- [55] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Flight Tests, Performances and Flight Certification of a Twin-Engine Light Aircraft”. *Journal of Aircraft*, Vol 48, No. 1, January-February 2011.
- [56] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Parameter Estimation and Flying Qualities of a Twin-Engine CS23/FAR23 Certified Light Aircraft”. AIAA-2010-7947, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Toronto, 2010.
- [57] B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, Dover Publications, 2005.
- [58] L. Mangiacasale, *Flight Mechanics of a  $\mu$ -Airplane*, Edizioni Libreria CLUP, Milano, 1998.
- [59] G. Mengali, *Elementi di Dinamica del Volo con Matlab*, Edizioni ETS, Pisa, 2001.
- [60] R. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1989.
- [61] Y. Li, M. Nahon, “Modeling and simulations of airship dynamics”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 30, No. 6, November-December 2007.
- [62] Y. Fan, F. H. Lutze, E. M. Cliff, “Time-Optimal Lateral Maneuvers of an Aircraft”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 18, No. 5, September-October 1995.
- [63] J. N. Nielsen, *Missile Aerodynamics*, AIAA, Cambridge, MA, 1988.
- [64] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean’s Vehicles*, Wiley, New York, 1998.
- [65] J. N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- [66] E. L. Duke, R. F. Antoniewicz, K. D. Krambeer, “Derivation and Definition of a Linear Aircraft Model”. Technical Report NASA Reference Publication RP-1207, Research Engineering, NASA Ames Research Center and NASA Dryden Flight Research Facility, 1988.

- [67] G. A. Stagg, *An Unsteady Aerodynamic Model for Use in the High Angle of Attack Regime*. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1998.
- [68] Y. Fan, *Identification of an Unsteady Aerodynamic Model up to High Angle of Attack Regime*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [69] *MATLAB Users' Guide*. The Mathworks, 2003 ed edizioni successive.  
<http://www.mathworks.com/>  
<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.html>
- [70] V. Comincioli, *Analisi numerica: metodi, modelli, applicazioni*. McGraw-Hill, 1990, seconda edizione 1995.
- [71] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, seventh edition, 1993.
- [72] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.
- [73] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [74] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, 1988.
- [75] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.
- [76] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, 1994.
- [77] R. D. Finck, "USAF Stability and Control Datcom". AFWAL-TR-83-3048, October 1960, Revised 1978.
- [78] S. R. Vukelich, J. E. Williams, "The USAF Stability and Control Digital Datcom". AFFDL-TR-79-3032, Volume I, April 1979, Updated by Public Domain Aeronautical Software 1999.
- [79] W. B. Blake, "Prediction of Fighter Aircraft Dynamic Derivatives Using Digital Datcom". AIAA-85-4070, AIAA Applied Aerodynamics Conference, Colorado Springs, Colorado, 1985.
- [80] Autori Vari, Distribuzione ufficiale di Digital Datcom, sito internet:  
<http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/Digital-Datcom-Package.zip>
- [81] B. Galbraith, "Digital Datcom+", Holy Cows, Inc., sito internet: <http://www.holycows.net/datcom/>