

Agostino De Marco  
Domenico P. Coiro

**Elementi**  
**di**  
**Dinamica e simulazione di volo**

---

**Quaderno 16**

**Piccole perturbazioni del moto di un  
velivolo**

Ottobre 2019

ver. 2019.b

### Dichiarazione di Copyright

- Questo testo è fornito per uso personale degli studenti. Viene reso disponibile in forma preliminare, a supporto della preparazione dell'esame di *Dinamica e simulazione di volo*.
- Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.
- Non è consentito l'impiego di detto materiale a scopi commerciali se non previo accordo.
- È gradita la segnalazione di errori o refusi.

Copyright 2010–2017 Agostino De Marco e Domenico P. Coiro,  
Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Ingegneria Industriale

(Legge italiana sul Copyright 22.04.1941 n. 633)

## Piccole perturbazioni del moto di un velivolo

*Linearizza e non ti preoccupare!*  
– Detto ingegneristico napoletano

### Indice

---

16.1 Generalità . . . . .	3
16.2 Linearizzazione delle equazioni del moto . . . . .	5
16.3 Azioni aerodinamiche linearizzate . . . . .	20
16.4 Azioni propulsive linearizzate . . . . .	27
16.5 Separazione tra moto longitudinale e moto latero-direzionale . . . . .	30
16.6 Modi della risposta libera e stabilità . . . . .	36
16.7 Dinamica longitudinale . . . . .	46
16.8 Dinamica latero-direzionale . . . . .	93
16.9 Qualità di volo . . . . .	116

---

### 16.1 Generalità

Come si è visto, alla base dell'analisi e della simulazione del moto vario di un velivolo c'è il suo modello matematico che comprende anche l'insieme dei modelli dei sottosistemi che lo compongono. Anche se in prima istanza esso può essere considerato come un corpo rigido in moto in un riferimento inerziale, nella realtà dei fatti un velivolo non è a rigore un solido indeformabile né si può ignorare il fatto che esso contenga dei sottosistemi articolati e di una certa complessità come i propulsori e le superfici di governo. Per lo studio della dinamica del volo è da ritenersi accettabile l'ipotesi di corpo rigido. Tale ipotesi deve essere invece rimossa quando si affronta l'analisi degli effetti aeroelastici.

Inoltre le forze e i momenti esterni che agiscono sul veicolo sono delle funzioni non semplici della configurazione e del moto. Ciò è vero in particolare per le azioni aerodinamiche. In un dato istante esse possono essere calcolate se si conoscono i valori correnti

della velocità del vento relativo e degli angoli d'assetto, ma solo con una certa approssimazione. Il grado di dettaglio necessario a determinarne l'entità è il tema dominante di qualsiasi formulazione delle equazioni del moto, che sia essa destinata all'integrazione numerica nell'ambito di simulazioni non lineari o che sia piuttosto rivolta all'analisi di piccole perturbazioni di moti di regime stabilizzati.

Come si è visto, le equazioni complete del moto di un velivolo rigido in atmosfera, soggetto alle azioni aerodinamiche, propulsive e alla forza peso sono non lineari e accoppiate. Esse possono essere risolte solo numericamente e poco si prestano ad illustrare concettualmente la dipendenza delle caratteristiche di stabilità e controllabilità del velivolo dalle sue proprietà geometriche, inerziali e aerodinamiche.

Molto, tuttavia, può essere appreso analizzando le approssimazioni lineari delle equazioni complete. Queste forme approssimate furono studiate e usate con successo fin dai primi tentativi di formalizzazione del problema del moto di un velivolo [7].

Le soluzioni delle equazioni linearizzate, valide per piccole perturbazioni intorno a una data condizione di volo di riferimento, possono essere analizzate con strumenti matematici ben noti dalla Teoria dei sistemi dinamici. La particolare formulazione del problema lineare dipenderà dalla condizione di riferimento scelta. La forma più semplice e dalla quale già si comprendono i fenomeni principali legati alla stabilità dinamica del velivolo si ottiene riferendosi a una condizione di volo stazionario, ad ali livellate, lungo una traiettoria rettilinea, in ipotesi di Terra piatta. Questa condizione nominale non è altro che un moto longitudinal-simmetrico non accelerato, traslato, a velocità costante e rateo di salita costante (in particolare, nullo). Essa è una condizione di volo equilibrato che soddisfa le equazioni del moto complete e si presta particolarmente al procedimento di linearizzazione.

Il modello linearizzato fornisce delle chiavi di lettura e un insieme di informazioni quantitative di notevole importanza, consentendo l'analisi ingegneristica di un gran numero di casi applicativi. Esso è lo strumento con cui viene studiata la stabilità e la risposta a determinate azioni sui comandi di volo in tutti quei casi in cui sono ingegneristicamente accettabili le ipotesi di piccole perturbazioni.

Ovviamente ci sono situazioni in cui tale approccio presenta delle limitazioni e ciò si verifica per tutti quei moti caratterizzati da ampie variazioni delle variabili di stato o da assetti non piccoli e da effetti aerodinamici non lineari. Due esempi sono il volo in condizioni post-stallo o l'evoluzione di vite.

L'accuratezza con cui è possibile applicare la Teoria delle piccole perturbazioni al moto di un velivolo, e dunque la fortuna di tale metodo di analisi nel campo dell'ingegneria del volo, si dimostra comunque accettabile in un ampio spettro di situazioni possibili. Ciò è dovuto essenzialmente a due circostanze:

- (i) per una vasta gamma di condizioni di volo di importanza pratica le forze e i momenti aerodinamici conservano effettivamente una dipendenza lineare dalle variabili di stato e di comando,
- (ii) le normali situazioni di volo sono effettivamente dei moti perturbati di una certa ampiezza, non evidentemente infinitesima, che corrispondono tuttavia all'effetto combinato di piccole perturbazioni delle velocità lineari ed angolari del velivolo; infatti, delle perturbazioni relativamente piccole delle variabili di stato possono portare a condizioni di volo particolarmente 'violente' e ciò deve essere normalmente evitato.

## 16.2 Linearizzazione delle equazioni del moto

### 16.2.1 Equazioni non lineari del moto

Si considerino le equazioni complete del moto dell'aeromobile espresse nel sistema di assi velivolo. Per semplicità, si assuma un velivolo di forma simmetrica rispetto al piano longitudinale.

Le equazioni generali della traslazione del baricentro sono

$$\begin{cases} m(\dot{u} + qw - rv) = X_G + X_A + X_T \\ m(\dot{v} + ru - pw) = Y_G + Y_A + Y_T \\ m(\dot{w} + pv - qu) = Z_G + Z_A + Z_T \end{cases} \quad (16.1a)$$

Al sistema di equazioni (16.1a) si deve accoppiare il sistema di equazioni alla rotazione intorno al baricentro, che per un velivolo simmetrico può scriversi come

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{p} - I_{xz}(\dot{r} + pq) - (I_{yy} - I_{zz})qr = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_T \\ I_{yy}\dot{q} - I_{xz}(r^2 - p^2) - (I_{zz} - I_{xx})rp = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}(\dot{p} - qr) - (I_{xx} - I_{yy})pq = \mathcal{N}_A + \mathcal{N}_T \end{cases} \quad (16.1b)$$

Data la dipendenza dei secondi membri delle equazioni dinamiche (16.1a)-(16.1b) dall'orientamento e dalla posizione dell'aeromobile, è necessario chiudere il sistema delle equazioni del moto con delle equazioni cinematiche ausiliarie. Le equazioni cinematiche ausiliarie che forniscono la variazione dell'orientamento (*gimbal equations*) sono le seguenti

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ \dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) \frac{1}{\cos \theta} \end{cases} \quad (16.1c)$$

Per finire, tutte le altre equazioni su riportate devono essere messe a sistema con le equazioni differenziali della traiettoria del baricentro nel sistema di assi Terra:

$$\begin{cases} \dot{x}_{E,G} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \end{cases} = [T(\phi, \theta, \psi)]_{EB} \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} \quad (16.1d)$$

L'insieme delle (16.1) costituisce un sistema di 12 equazioni differenziali ordinarie nelle 12 incognite

$$[u, v, w, p, q, r, x_{E,G}, y_{E,G}, z_{E,G}, \phi, \theta, \psi]^T \triangleq \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{12}]^T \quad (16.2)$$

dove  $\mathbf{x}$  è il *vettore di stato* del velivolo. Concettualmente le componenti del vettore di stato vengono raccolte in due gruppi di variabili: le prime 6 sono le variabili di stato *dinamiche*

$$[u, v, w, p, q, r]^T \triangleq \mathbf{x}_d = [x_1, \dots, x_6]^T \quad (16.3)$$

mentre le rimanenti 6 sono le variabili di stato *cinematiche*

$$[x_{E,G}, y_{E,G}, z_{E,G}, \phi, \theta, \psi]^T \triangleq \mathbf{x}_k = [x_7, \dots, x_{12}]^T \quad (16.4)$$

Pertanto  $\mathbf{x}$  è un vettore colonna formalmente esprimibile come

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_d^T, \mathbf{x}_k^T]^T \quad (16.5)$$

Inoltre, i secondi membri delle (16.1b)-(16.1a) dipendono dal vettore  $\mathbf{u}$  delle *variabili di input* o *di ingresso*. Per un velivolo di configurazione architettonica tradizionale e per volo in aria calma il vettore degli ingressi è dato dalle note variabili di comando:

$$\mathbf{u} \triangleq [\delta_T, \delta_e, \delta_a, \delta_r]^T = [u_1, \dots, u_4]^T \quad (16.6)$$

dove  $\delta_T$  è la regolazione della spinta erogata (*thrust setting*) e  $\delta_e, \delta_a, \delta_r$  sono le deflessioni delle superfici di governo convenzionali.

Le equazioni dinamiche (16.1b)-(16.1a) possono essere poste in una forma simile alle (16.1d)-(16.1c), esplicitando a primo membro le derivate temporali delle variabili di stato dinamiche, ottenendo la seguente espressione formale:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}) \quad (16.7a)$$

dove la  $\mathbf{f}_d$  è una funzione a valori vettoriali che rappresenta i secondi membri delle sei equazioni scalari che discendono dalle leggi cardinali della Dinamica. Essa è accoppiata all'equazione

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_k) \quad (16.7b)$$

data dall'insieme delle (16.1d)-(16.1c), di cui  $\mathbf{f}_k$  rappresenta le dipendenze funzionali a secondo membro.

Conseguentemente, le (16.7) vengono scritte nella seguente forma compatta

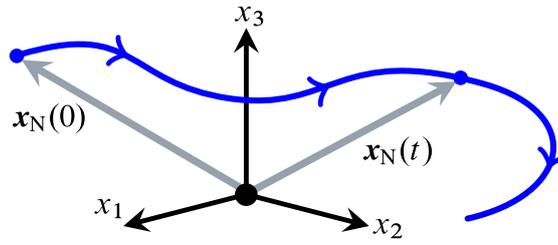
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{con} \quad \mathbf{f} = [\mathbf{f}_d^T, \mathbf{f}_k^T]^T \quad (16.8)$$

Si vuole pervenire ad una forma approssimata lineare del sistema di equazioni (16.1) — o, equivalentemente, del sistema di equazioni (16.7) o delle (16.8) — che sia valida nell'intorno di una soluzione di equilibrio opportunamente scelta.

## 16.2.2 Condizione nominale di funzionamento

Il processo di linearizzazione delle equazioni che descrivono l'evoluzione di un sistema fisico deve sempre partire da un'evoluzione *nominale*, cioè una determinata traiettoria  $\mathbf{x}_N(t)$  nello spazio degli stati. Si veda la figura 16.1 a fronte. Nel caso del volo atmosferico l'evoluzione nominale è una soluzione delle equazioni (16.8) per un dato valore iniziale  $\mathbf{x}_N(0)$  e per una data legge  $\mathbf{u}_N(t)$  dei comandi.

È di interesse pratico riferirsi a una traiettoria nominale corrispondente al volo equilibrato, nel quale vi è la stazionarietà delle variabili dinamiche. In volo equilibrato sono nulle le accelerazioni  $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \dot{p}, \dot{q}$  ed  $\dot{r}$  nelle (16.1b)-(16.1a), cioè è nulla la derivata  $\dot{\mathbf{x}}_d$  a primo membro della (16.7a).



**Figura 16.1** Traiettorie nello spazio degli stati.

Dunque all'equilibrio le variabili di stato dinamiche sono costanti e vengono dette

$$[u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0]^T \triangleq \mathbf{x}_{d0} \quad (16.9)$$

In particolare, si assume che alla costanza nel tempo di  $\mathbf{x}_d$  sia associata una legge di comando anch'essa costante  $\mathbf{u}_N(t) = \mathbf{u}_0$ . Ciò si verifica certamente per volo a quota costante.

Da qui in avanti si userà il pedice ( )<sub>0</sub> per indicare i valori assunti dalle diverse variabili nella condizione di volo equilibrato di riferimento.

Nella condizione di riferimento il sistema (16.1a) diviene dunque

$$\begin{cases} m(q_0 w_0 - r_0 v_0) = X_{G0} + X_{A0} + X_{T0} \\ m(r_0 u_0 - p_0 w_0) = Y_{G0} + Y_{A0} + Y_{T0} \\ m(p_0 v_0 - q_0 u_0) = Z_{G0} + Z_{A0} + Z_{T0} \end{cases} \quad (16.10a)$$

mentre il sistema (16.1b) si particolarizza in

$$\begin{cases} -I_{xz} p_0 q_0 - (I_{yy} - I_{zz}) q_0 r_0 = \mathcal{L}_{A0} + \mathcal{L}_{T0} \\ -I_{xz} (r_0^2 - p_0^2) - (I_{zz} - I_{xx}) r_0 p_0 = \mathcal{M}_{A0} + \mathcal{M}_{T0} \\ I_{xz} q_0 r_0 - (I_{xx} - I_{yy}) p_0 q_0 = \mathcal{N}_{A0} + \mathcal{N}_{T0} \end{cases} \quad (16.10b)$$

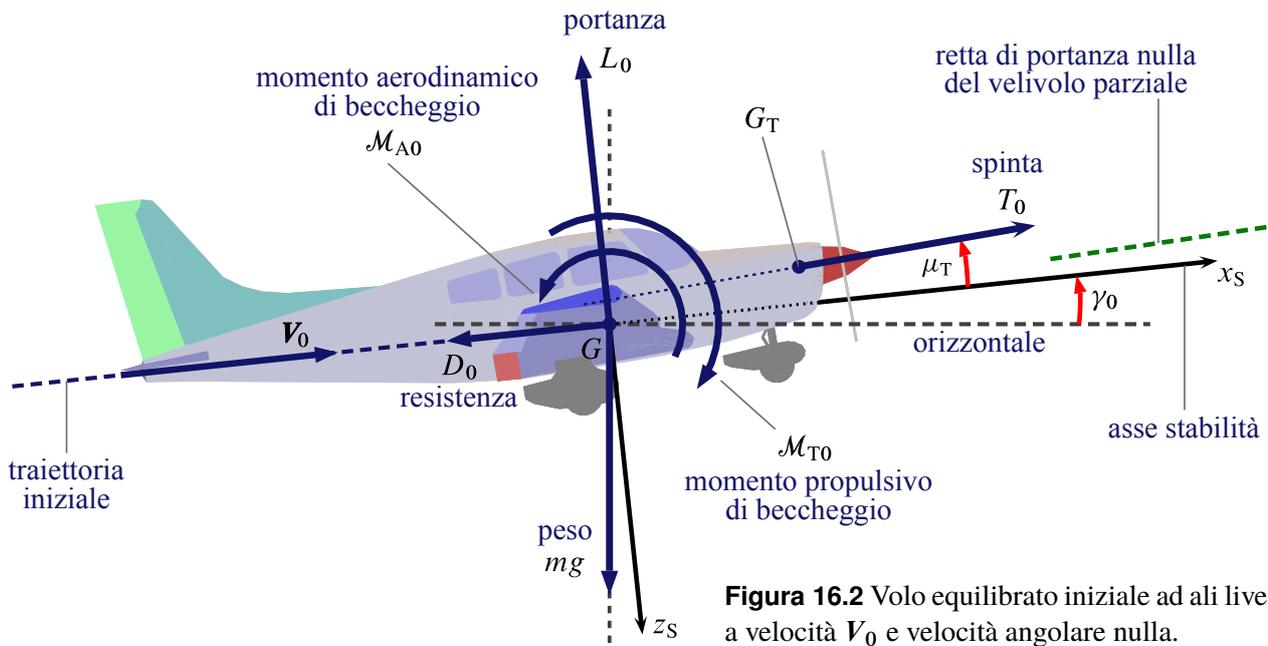
Dalla (16.1c) si deduce che i ratei di variazione degli angoli di Eulero in condizioni di volo equilibrato sono

$$\begin{cases} \dot{\phi}_0 = p_0 + (q_0 \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0) \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \\ \dot{\theta}_0 = q_0 \cos \phi_0 - r_0 \sin \phi_0 \\ \dot{\psi}_0 = (q_0 \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0) \frac{1}{\cos \theta_0} \end{cases} \quad (16.10c)$$

Infine, le equazioni della traiettoria del baricentro (16.1d), valutando la matrice di trasformazione  $[T(\phi, \theta, \psi)]_{EB}$  nelle condizioni di riferimento, diventano

$$\begin{cases} \dot{x}_{E,G0} = u_0 \cos \theta_0 + v_0 \sin \theta_0 \sin \phi_0 + w_0 \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \dot{y}_{E,G0} = v_0 \cos \phi_0 - w_0 \sin \phi_0 \\ \dot{z}_{E,G0} = -u_0 \sin \theta_0 + v_0 \cos \theta_0 \sin \phi_0 + w_0 \cos \theta_0 \cos \phi_0 \end{cases} \quad (16.10d)$$

È certamente possibile ricavare un sistema di equazioni linearizzate valido intorno a una  $\mathbf{x}_N(t)$  che generalmente soddisfa le (16.10). D'altra parte, per semplificare la formulazione del problema e l'analisi dei risultati è utile scegliere una soluzione nominale per cui si annullano molti dei termini presenti nelle equazioni di equilibrio.



**Figura 16.2** Volo equilibrato iniziale ad ali livellate, a velocità  $V_0$  e velocità angolare nulla.

Le (16.10) si semplificano notevolmente se si sceglie una condizione di riferimento di volo *traslato* in cui

$$p_0 = q_0 = r_0 = 0 \quad (16.11a)$$

La semplificazione è ancora maggiore per *volo simmetrico* in cui è anche

$$v_0 = 0 \quad (16.11b)$$

Il volo simmetrico a velocità angolare nulla avviene ad ali livellate, cioè con

$$\phi_0 = 0 \quad (16.11c)$$

Le (16.11a)-(16.11b)-(16.11c) corrispondenti al volo traslato, a velocità costante ed ali livellate sono illustrate dalla figura 16.2. Esse determinano l'annullarsi dei primi membri delle equazioni di equilibrio (16.10b)-(16.10a) e dei secondi membri delle equazioni cinematiche dell'orientamento (16.10c), introducendo così delle evidenti semplificazioni.

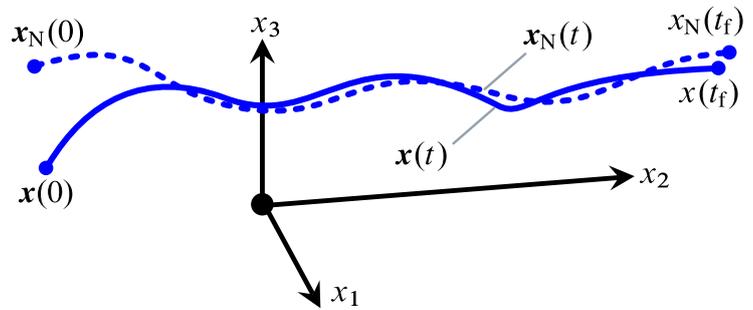
Per comodità si può assumere in tal caso un angolo di prua iniziale  $\psi_0 = 0$ , condizione che, affiancata alla (16.11c), lascia al solo angolo  $\theta_0$  la possibilità di essere non nullo.

L'inclinazione della fusoliera all'equilibrio dipende dalla velocità di volo  $|V_0|$  e dall'eventuale angolo di rampa  $\gamma_0$ . In particolare, come mostra la figura 16.2, se si scelgono come assi velivolo gli assi stabilità definiti nella condizione di equilibrio iniziale si ha un angolo d'attacco iniziale

$$\alpha_0 = 0 \quad (\text{in assi stabilità}) \quad (16.11d)$$

e conseguentemente  $\theta_0 = \gamma_0$ .

Come si vedrà più avanti, a partire dall'insieme di condizioni iniziali (16.11) si perviene a dei criteri di stabilità dinamica per i velivoli. Questi, nonostante le semplificazioni introdotte dalla particolare soluzione nominale, sono comunque validi in generale.



**Figura 16.3** Traiettoria nominale  $x_N(t)$  nello spazio degli stati e soluzione perturbata  $x(t)$  per un intervallo temporale  $[0, t_f]$ .

### 16.2.3 Piccole perturbazioni

Si vogliono studiare le storie  $x(t)$  corrispondenti a piccole perturbazioni dell'evoluzione nominale, in particolare dell'evoluzione di equilibrio

$$\mathbf{x}_N(t) = [\mathbf{x}_{d0}^T, \mathbf{x}_{k,N}(t)^T]^T \quad (16.12)$$

La generica evoluzione perturbata  $x(t)$  e l'evoluzione  $x_N(t)$  sono entrambe soluzioni delle equazioni del moto complete. Come si vede dalla figura 16.3, esse differiscono perché, ad esempio, i valori iniziali  $x(0)$  e  $x_N(0)$  sono diversi. Oppure, la  $x(t)$  potrebbe essere dovuta a una storia degli input  $u(t)$  perturbata rispetto all'insieme di regolazioni costanti di equilibrio  $u_0$ . Per esempio, la differenza tra  $x(t)$  e la (16.12) potrebbe essere eccitata da una legge di variazione temporale a gradino anche di una sola delle componenti di  $u$ , a partire dal corrispondente valore nominale. Si veda la figura 16.4 nella pagina successiva.

È possibile ricavare un'approssimazione lineare delle equazioni non lineari del moto valida *intorno alla soluzione nominale*. In tal caso la soluzione perturbata sarà la somma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_N(t) + \Delta\mathbf{x}(t) \quad (16.13)$$

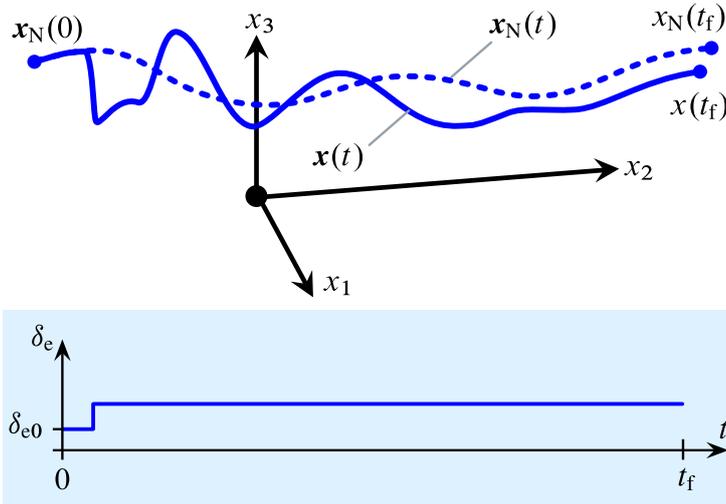
della soluzione di equilibrio (16.12) e di un vettore  $\Delta\mathbf{x}$  che ha per componenti le piccole perturbazioni delle variabili di stato rispetto ai valori nominali. Nota la  $x_N(t)$  nella (16.13), la perturbazione viene ricavata risolvendo le equazioni linearizzate nell'incognita vettore perturbazione  $\Delta\mathbf{x}(t)$ .

Come suggerisce la (16.13), allo scopo di linearizzare le equazioni del moto si suppone che le variabili fondamentali possano essere espresse come somma del loro valore di equilibrio e di una perturbazione incognita, ovvero

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta u, & v &= v_0 + \Delta v, & w &= w_0 + \Delta w \\ p &= p_0 + \Delta p, & q &= q_0 + \Delta q, & r &= r_0 + \Delta r \end{aligned} \quad (16.14)$$

Nel seguito si adopererà un *cambio di notazione*. Nel contesto della trattazione delle equazioni linearizzate è abitudine diffusa nei testi di Dinamica del volo indicare con lettere *minuscole* le *perturbazioni* delle grandezze di stato (cioè delle incognite) — ad esempio  $u$  al posto di  $\Delta u$ ,  $v$  al posto di  $\Delta v$  e così via. Noi adotteremo anche qui la stessa convenzione. I valori *totali* delle variabili si denoteranno invece con lettera *maiuscola* — ad esempio si dirà  $U$  anziché  $u$ ,  $V$  anziché  $v$  e così via. In particolare, i valori delle variabili in condizioni di equilibrio saranno indicati con  $U_0$  anziché con  $u_0$ ,  $V_0$  anziché con  $v_0$  e così via. Analogamente si farà per i valori iniziali  $\Phi_0, \Theta_0, \Psi_0$ , e  $\dot{\Phi}_0, \dot{\Theta}_0, \dot{\Psi}_0$ .





**Figura 16.4** Soluzione perturbata  $x(t)$  in un intervallo temporale  $[0, t_f]$  dovuta a una legge a gradino di una delle variabili di input.

Ciò che interessa nello studio delle equazioni linearizzate sono gli andamenti nel tempo (*time histories*) delle perturbazioni delle variabili fondamentali, piuttosto che dei valori totali

$$\begin{aligned} U &= U_0 + u, & V &= V_0 + v, & W &= W_0 + w \\ P &= P_0 + p, & Q &= Q_0 + q, & R &= R_0 + r \end{aligned} \quad (16.15a)$$

$$\begin{aligned} X_{E,G} &= X_{E,G0} + x_{E,G}, & Y_{E,G} &= Y_{E,G0} + y_{E,G}, & Z_{E,G} &= Z_{E,G0} + z_{E,G} \\ \Phi &= \Phi_0 + \phi, & \Theta &= \Theta_0 + \theta, & \Psi &= \Psi_0 + \psi \end{aligned} \quad (16.15b)$$

Al cambio di notazione faranno eccezione alcune variabili il cui simbolo non si presta convenientemente a ridefinizioni simili alle (16.15). Tra le variabili del moto vi sono il numero di Mach, l'angolo d'attacco e l'angolo di derapata i cui valori totali nel moto perturbato continueranno a essere indicati come

$$M_0 + \Delta M, \quad \alpha_0 + \Delta \alpha, \quad \beta_0 + \Delta \beta \quad (16.16)$$

D'altra parte, per non appesantire le notazioni, da qui in avanti denoteremo le regolazioni di equilibrio delle superfici di governo e della manetta con

$$[\delta_{a0}, \delta_{e0}, \delta_{r0}, \delta_{T0}]^T \triangleq \mathbf{u}_0 \quad (16.17)$$

indicando con

$$[\delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_T]^T \triangleq \Delta \mathbf{u} \quad (16.18)$$

le loro piccole perturbazioni (anziché con  $\Delta \delta_a$ ,  $\Delta \delta_e$ , eccetera). I valori istantanei totali saranno dunque le componenti del vettore

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}(t) \triangleq [\delta_{a0} + \delta_a(t), \delta_{e0} + \delta_e(t), \delta_{r0} + \delta_r(t), \delta_{T0} + \delta_T(t)]^T \quad (16.19)$$

Analogamente, la pressione dinamica di volo nella condizione di riferimento verrà chiamata  $\bar{q}_0$  e il suo valore istantaneo nel moto perturbato  $\bar{q}_0 + \Delta \bar{q}$ .

Secondo il cambio di notazione introdotto le equazioni del moto ricavate fin qui vanno riformulate utilizzando, laddove è possibile, le lettere maiuscole per i valori totali e le lettere minuscole per le perturbazioni.

## 16.2.4 Equazioni linearizzate

### Equazioni dinamiche

Sostituendo le (16.15) nelle equazioni complete (16.1a), ricordando che per definizione di condizioni iniziali stazionarie si ha

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{dV_0}{dt} = \frac{dW_0}{dt} = 0 \quad (16.20)$$

e tenendo conto delle equazioni all'equilibrio (16.10a) si ottengono le seguenti *equazioni alla traslazione linearizzate*

$$\begin{cases} m(\dot{u} + W_0 q + Q_0 w - R_0 v - V_0 r) = \Delta X_G + \Delta X_A + \Delta X_T \\ m(\dot{v} + U_0 r + R_0 u - P_0 w - W_0 p) = \Delta Y_G + \Delta Y_A + \Delta Y_T \\ m(\dot{w} + V_0 p + P_0 v - Q_0 u - U_0 q) = \Delta Z_G + \Delta Z_A + \Delta Z_T \end{cases} \quad (16.21)$$

nelle incognite costituite dalle perturbazioni  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  delle variabili di stato dinamiche.

Le tre equazioni precedenti sono ricavabili attraverso semplici passaggi. A titolo di esempio si consideri la terza delle (16.1a), cioè l'equazione della dinamica traslatoria lungo l'asse  $z_B$

$$m \left[ (0 + \dot{w}) + (P_0 + p)(V_0 + v) - (Q_0 + q)(U_0 + u) \right] = (Z_{G0} + \Delta Z_G) + (Z_{A0} + \Delta Z_A) + (Z_{T0} + \Delta Z_T) \quad (16.22)$$

Nell'ultima equazione si riconoscono a primo e a secondo membro i termini della terza delle equazioni di equilibrio (16.10a)

$$m(P_0 V_0 - Q_0 U_0) = Z_{G0} + Z_{A0} + Z_{T0} \quad (16.23)$$

Sottraendo la (16.23) alla (16.22) si ottiene

$$m \left[ \dot{w} + P_0 v + p V_0 + p v - Q_0 u - q U_0 - q u \right] = \Delta Z_G + \Delta Z_A + \Delta Z_T \quad (16.24)$$

Nella parentesi a primo membro delle (16.24) possono trascurarsi i termini più piccoli  $pv$  e  $qu$ , ottenendo così la terza delle (16.21). Con passaggi analoghi ai precedenti si ottengono anche la prima e la seconda delle equazioni linearizzate della dinamica traslazionale.

Si osservi che a secondo membro delle (16.21) compaiono le variazioni delle componenti di forza gravitazionale, aerodinamica e propulsiva rispetto ai valori di equilibrio. Esse variano nel tempo per effetto del moto perturbato. Ad esempio i termini di natura aerodinamica sono da intendersi come

$$\Delta X_A = X_A - X_{A0}, \quad \Delta Y_A = Y_A - Y_{A0}, \quad \Delta Z_A = Z_A - Z_{A0} \quad (16.25a)$$

Analogamente si intenderanno le perturbazioni delle altre componenti di forza

$$\Delta X_T = X_T - X_{T0}, \quad \Delta Y_T = Y_T - Y_{T0}, \quad \Delta Z_T = Z_T - Z_{T0} \quad (16.25b)$$

$$\Delta X_G = X_G - X_{G0}, \quad \Delta Y_G = Y_G - Y_{G0}, \quad \Delta Z_G = Z_G - Z_{G0} \quad (16.25c)$$

Il medesimo procedimento che ha permesso di ricavare le (16.21), applicato stavolta alle (16.1b), porta alle seguenti *equazioni alla rotazione linearizzate*

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} - I_{xz}(P_0 q + Q_0 p) - (I_{yy} - I_{zz})(Q_0 r + R_0 q) = \Delta \mathcal{L}_A + \Delta \mathcal{L}_T \\ I_{yy} \dot{q} - 2I_{xz}(R_0 r - P_0 p) - (I_{zz} - I_{xx})(R_0 p + P_0 r) = \Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_T \\ I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} - I_{xz}(Q_0 r + R_0 q) - (I_{xx} - I_{yy})(P_0 q + Q_0 p) = \Delta \mathcal{N}_A + \Delta \mathcal{N}_T \end{cases} \quad (16.26)$$

Le variazioni delle azioni aerodinamiche, propulsive e gravitazionali

$$\Delta X_A, \Delta X_T, \Delta X_G, \Delta Y_A, \Delta Y_T, \Delta Y_G, \Delta Z_A, \Delta Z_T, \Delta Z_G,$$

$$\Delta \mathcal{L}_A, \Delta \mathcal{L}_T, \Delta \mathcal{M}_A, \Delta \mathcal{M}_T, \Delta \mathcal{N}_A, \Delta \mathcal{N}_T,$$

sono esprimibili, in ipotesi di piccole perturbazioni, come combinazioni lineari dei parametri del moto e di comando. Se le espressioni linearizzate delle azioni esterne intorno alla condizione di volo equilibrato vengono sostituite nelle equazioni (16.21)-(16.26) si ottiene il sistema completo delle equazioni dinamiche linearizzate. Tale sistema verrà esplicitato più avanti in questo capitolo.

### Perturbazioni delle componenti del peso

A questo punto è interessante cominciare a ricavare le azioni gravitazionali perturbate. A tale scopo, senza perdere di generalità è possibile semplificare le equazioni della traiettoria del baricentro e dell'orientamento assumendo un valore iniziale nullo dell'angolo di rotta,  $\Psi_0 = 0$ .

Nelle espressioni in cui compaiono i valori istantanei degli angoli di Eulero  $\Phi_0 + \phi$ ,  $\Theta_0 + \theta$  e  $\psi$ , anch'essi nella forma di piccole perturbazioni sovrapposte ai valori di equilibrio, è possibile ritenere valide le tipiche approssimazioni delle funzioni trigonometriche

$$\begin{aligned} \cos(\Phi_0 + \phi) &\simeq \cos \Phi_0 - \phi \sin \Phi_0 \\ &\dots \\ \sin(\Theta_0 + \theta) &\simeq \sin \Theta_0 + \theta \cos \Theta_0 \\ &\text{eccetera} \end{aligned} \quad (16.27)$$

potendo porre  $\cos \phi \simeq 1$ ,  $\sin \phi \simeq \phi$ ,  $\cos \theta \simeq 1$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$ .

Ne consegue che, esplicitando la matrice di trasformazione  $[T]_{BE}$  nel prodotto  $[T]_{BE}\{W\}_E$ , si ottengono le *perturbazioni delle componenti del peso in assi velivolo*

$$\begin{cases} \Delta X_G = -mg(\cos \Theta_0) \theta \\ \Delta Y_G = +mg[-(\sin \Theta_0 \sin \Phi_0) \theta + (\cos \Theta_0 \cos \Phi_0) \phi] \\ \Delta Z_G = +mg[-(\sin \Theta_0 \cos \Phi_0) \theta - (\cos \Theta_0 \sin \Phi_0) \phi] \end{cases} \quad (16.28)$$

dalle quali si riconosce il contributo delle sole perturbazioni dell'angolo di elevazione e dell'angolo di inclinazione laterale.

In una condizione di riferimento di volo traslato, simmetrico e ad ali livellate valgono le (16.11a)-(16.11b)-(16.11c). Pertanto le (16.28) diventano

$$\begin{cases} \Delta X_G = -mg \cos \Theta_0 \theta \\ \Delta Y_G = mg \cos \Theta_0 \phi \\ \Delta Z_G = -mg \sin \Theta_0 \theta \end{cases} \quad (16.29)$$

### Equazioni cinematiche dell'orientamento

Passiamo ora alla linearizzazione delle equazioni cinematiche ausiliarie (16.1c) e (16.1d). La linearizzazione delle equazioni di trasformazione dell'orientamento risulta agevole se le (16.1c) si scrivono nella forma matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\Theta_0 + \theta) \\ 0 & \cos(\Phi_0 + \phi) & \cos(\Theta_0 + \theta) \sin(\Phi_0 + \phi) \\ 0 & -\sin(\Phi_0 + \phi) & \cos(\Theta_0 + \theta) \cos(\Phi_0 + \phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_0 + \dot{\phi} \\ \dot{\Theta}_0 + \dot{\theta} \\ \dot{\Psi}_0 + \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 + p \\ Q_0 + q \\ R_0 + r \end{Bmatrix} \quad (16.30)$$

dove si riconosce la matrice  $[G]$  a primo membro espressa in termini delle perturbazioni degli angoli di Eulero. Si consideri ad esempio la prima delle (16.30)

$$(\dot{\Phi}_0 + \dot{\phi}) - (\dot{\Psi}_0 + \dot{\psi}) \sin(\Theta_0 + \theta) = P_0 + p$$

Se si operano i prodotti e si applicano le approssimazioni trigonometriche (16.27), trascurando i termini di ordine superiore e tenendo conto delle identità (16.10c) valide in condizioni di equilibrio — opportunamente riscritte con la nuova convenzione sulla capitalizzazione dei simboli —, si ottiene

$$-\dot{\psi} \sin \Theta_0 + \dot{\phi} = p + \dot{\Psi}_0 (\cos \Theta_0) \theta$$

Questo modo di procedere, esteso alle altre due equazioni, permette di ricavare [58] un'approssimazione delle (16.30) che può essere scritta in forma matriciale come segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_{\Theta_0} \\ 0 & C_{\Phi_0} & C_{\Theta_0} S_{\Phi_0} \\ 0 & -S_{\Phi_0} & C_{\Theta_0} C_{\Phi_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\Psi}_0 C_{\Theta_0} S_{\Phi_0} + \dot{\Theta}_0 C_{\Phi_0} & \dot{\Psi}_0 S_{\Theta_0} C_{\Phi_0} & 0 \\ -\dot{\Psi}_0 C_{\Theta_0} C_{\Phi_0} + \dot{\Theta}_0 S_{\Phi_0} & \dot{\Psi}_0 S_{\Theta_0} S_{\Phi_0} & 0 \\ 0 & \dot{\Psi}_0 C_{\Theta_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (16.31)$$

La (16.31) può scriversi in maniera compatta come

$$[E]\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad \text{con } \{x\} = \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} \quad \text{ed } \{u\} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (16.32)$$

essendo  $[B] = [I]$  (matrice identica),  $[E]$  ed  $[A]$  le matrici che contengono i termini

linearizzati. Moltiplicando la (16.31) per  $[E]^{-1}$  si ottiene dopo alcuni passaggi

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} (Q_0 C_{\phi_0} - R_0 S_{\phi_0}) \frac{S_{\theta_0}}{C_{\theta_0}} & (Q_0 S_{\phi_0} + R_0 C_{\phi_0}) \frac{1}{C_{\theta_0}^2} & 0 \\ -(Q_0 S_{\phi_0} + R_0 C_{\phi_0}) & 0 & 0 \\ (Q_0 C_{\phi_0} - R_0 S_{\phi_0}) \frac{1}{C_{\theta_0}} & (Q_0 S_{\phi_0} + R_0 C_{\phi_0}) \frac{S_{\theta_0}}{C_{\theta_0}^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_{\phi_0} S_{\theta_0}}{C_{\theta_0}} & \frac{C_{\phi_0} S_{\theta_0}}{C_{\theta_0}} \\ 0 & C_{\phi_0} & -S_{\phi_0} \\ 0 & \frac{S_{\phi_0}}{C_{\theta_0}} & \frac{C_{\phi_0}}{C_{\theta_0}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16.33)$$

La precedente è un'equazione matriciale del tipo:  $\{\dot{x}\} = [\mathcal{A}]\{x\} + [\mathcal{B}]\{u\}$ , in cui gli elementi delle matrici  $[\mathcal{A}]$  e  $[\mathcal{B}]$  non dipendono dalle derivate  $\dot{\psi}_0$  e  $\dot{\theta}_0$  poiché nei passaggi si è tenuto conto delle (16.10c). La (16.33) esprime la dipendenza lineare delle derivate temporali  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$  dalle piccole variazioni degli angoli di Eulero del velivolo  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  e dalle perturbazioni  $p$ ,  $q$  ed  $r$  delle componenti di velocità angolare.

In una condizione di riferimento di volo traslato, simmetrico e ad ali livellate valgono le (16.11a)-(16.11b)-(16.11c). Pertanto le (16.33) si semplificano e diventano

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{S_{\theta_0}}{C_{\theta_0}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_{\theta_0}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (16.34)$$

Quando le condizioni nominali sono quelle della figura 16.2 a pagina 8 la prima delle (16.34) suggerisce che per piccole perturbazioni

$$\dot{\phi} = p + \tan \theta_0 r, \quad \dot{\theta} = q, \quad \dot{\psi} = r / \cos \theta_0 \quad (16.35)$$

Queste espressioni evidenziano un *disaccoppiamento cinematico* tra le perturbazioni rotazionali del moto longitudinale e quelle del moto latero-direzionale. Infatti, una  $q$  non nulla determina una variazione della sola derivata temporale  $\dot{\theta}$ ; derivata che non è influenzata dalle eventuali componenti  $p$  ed  $r$  non nulle. I moti di rotazione intorno agli assi di rollio e imbardata sono, invece, sempre accoppiati tra loro come si vede dalla dipendenza di  $\dot{\phi}$  sia da  $p$  che da  $r$ .

Le osservazioni precedenti discendono dalla particolare condizione iniziale di volo traslato con ali livellate e non valgono per moti nominali a velocità angolare non nulla — ad esempio la virata o la richiamata stabilizzate. Tuttavia, la semplificazione delle equazioni linearizzate è necessaria per comprendere gli aspetti basilari della dinamica del velivolo.

Le (16.35) possono essere ulteriormente semplificate riferendosi a un volo con traiettoria orizzontale. In particolare, per assi velivolo coincidenti con gli assi stabilità della condizione iniziale e per volo a quota costante si ha

$$W_0 = \Theta_0 = \Gamma_0 = 0 \quad (16.36)$$

e le equazioni cinematiche linearizzate delle perturbazioni di orientamento si riducono alle semplici, intuitive espressioni

$$\dot{\phi} = p, \quad \dot{\theta} = q, \quad \dot{\psi} = r \quad (16.37)$$

Le (16.37) collegano direttamente la variazione temporale di ciascuno dei tre angoli di Eulero a una sola componente della velocità angolare, che è quella intuitivamente collegata ad esso — cioè  $p$  a  $\dot{\phi}$ ,  $q$  a  $\dot{\theta}$  ed  $r$  a  $\dot{\psi}$ . Ciò vale solo per piccole perturbazioni e per la particolare condizione nominale scelta.

Analoghe osservazioni valgono nell'analisi delle equazioni linearizzate della navigazione presentate nel prossimo paragrafo.

### Equazioni cinematiche della navigazione

Le equazioni della traiettoria del baricentro vengono linearizzate seguendo un procedimento simile a quello utilizzato per le *linearized gimbal equations* (16.33), (16.34) e (16.37).

Partendo dalle definizioni (16.15b) si scrivono le seguenti espressioni delle derivate temporali delle coordinate istantanee del centro di massa del velivolo nel riferimento fisso:

$$\dot{X}_{E,G} = \dot{X}_{E,G0} + \dot{x}_{E,G}, \quad \dot{Y}_{E,G} = \dot{Y}_{E,G0} + \dot{y}_{E,G}, \quad \dot{Z}_{E,G} = \dot{Z}_{E,G0} + \dot{z}_{E,G} \quad (16.38)$$

Queste possono essere sostituite nelle equazioni della navigazione (16.1d) dalle quali, successivamente, si possono eliminare i termini che soddisfano le equazioni (16.10d) valide per la soluzione nominale.

Ad esempio, si prenda la prima delle (16.1d)

$$\dot{X}_{E,G} = U C_{\theta} C_{\psi} + V (S_{\phi} S_{\theta} C_{\psi} - C_{\phi} S_{\psi}) + W (C_{\phi} S_{\theta} C_{\psi} + S_{\phi} S_{\psi}) \quad (16.39)$$

nella quale sono stati esplicitati gli elementi della matrice  $[T(\Phi, \Theta, \Psi)]_{EB}$ . Sostituendo le (16.15b) e le (16.38) nella (16.39), applicando le approssimazioni (16.27) e tenendo conto della prima delle (16.10d)

$$\dot{X}_{E,G0} = U_0 C_{\theta_0} + V_0 S_{\theta_0} S_{\phi_0} + W_0 S_{\theta_0} C_{\phi_0} \quad (16.40)$$

dopo alcuni passaggi si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_{E,G} = & u C_{\theta_0} + v S_{\phi_0} S_{\theta_0} + w C_{\phi_0} S_{\theta_0} + \phi (V_0 C_{\phi_0} S_{\theta_0} - W_0 S_{\phi_0} S_{\theta_0}) \\ & - \theta (U_0 S_{\theta_0} - V_0 S_{\phi_0} C_{\theta_0} - W_0 C_{\phi_0} C_{\theta_0}) - \psi (V_0 C_{\phi_0} - W_0 S_{\phi_0}) \end{aligned} \quad (16.41)$$

Procedendo analogamente nella linearizzazione delle rimanenti due equazioni del sistema

(16.1d) si ottiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{E,G} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{\theta_0} & S_{\theta_0} S_{\phi_0} & S_{\theta_0} C_{\phi_0} \\ 0 & C_{\phi_0} & -S_{\phi_0} \\ -S_{\theta_0} & C_{\theta_0} S_{\phi_0} & C_{\theta_0} C_{\phi_0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (V_0 S_{\theta_0} C_{\phi_0} & -(U_0 S_{\theta_0} & -(V_0 C_{\phi_0} \\ -W_0 S_{\theta_0} S_{\phi_0}) & -V_0 C_{\theta_0} S_{\phi_0} & -W_0 S_{\phi_0}) \\ -(V_0 S_{\phi_0} & 0 & (U_0 C_{\theta_0} \\ +W_0 C_{\phi_0}) & & +V_0 S_{\theta_0} S_{\phi_0} \\ - (V_0 C_{\theta_0} C_{\phi_0} & -(U_0 C_{\theta_0} & 0 \\ -W_0 C_{\theta_0} S_{\phi_0}) & +V_0 C_{\theta_0} S_{\phi_0} & +W_0 S_{\theta_0} C_{\phi_0}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.42)$$

L'equazione matriciale (16.42) esprime la dipendenza linearizzata delle derivate  $\dot{x}_{E,G0}$ ,  $\dot{y}_{E,G0}$  e  $\dot{z}_{E,G0}$  delle piccole perturbazioni della traiettoria del baricentro dalle perturbazioni delle componenti di velocità in assi velivolo  $u$ ,  $v$  e  $w$  e dalle perturbazioni degli angoli di Eulero  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ .

In una condizione di riferimento di volo traslato, simmetrico e ad ali livellate valgono le (16.11a)-(16.11b)-(16.11c). Inoltre nelle (16.38), per  $\Psi_0 = 0$ , le componenti iniziali di velocità del baricentro rispetto agli assi Terra sono

$$\dot{X}_{E,G0} = |V_0| C_{\theta_0} \quad , \quad \dot{Y}_{E,G0} = 0 \quad , \quad \dot{Z}_{E,G0} = |V_0| S_{\theta_0} \quad (16.43)$$

Per questa condizione nominale le (16.42) si semplificano e diventano

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_{E,G} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{\theta_0} & 0 & S_{\theta_0} \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_{\theta_0} & 0 & C_{\theta_0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & (-U_0 S_{\theta_0} + W_0 C_{\theta_0}) & 0 \\ -W_0 & 0 & (U_0 C_{\theta_0} + W_0 S_{\theta_0}) \\ 0 & -(U_0 C_{\theta_0} + W_0 S_{\theta_0}) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.44)$$

In particolare, se per le (16.44) gli assi velivolo coincidono con gli assi stabilità del volo a quota costante ( $W_0 = \theta_0 = \Gamma_0 = 0$ ), le equazioni cinematiche linearizzate delle perturbazioni di traiettoria del baricentro si riducono alle semplici, intuitive espressioni

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{E,G} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_0 \\ 0 & -U_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \quad (16.45)$$

Sostituendo le (16.45) e le (16.43) nelle (16.38) si ottengono le semplici equazioni

$$\dot{X}_{E,G} = U_0 + u, \quad \dot{Y}_{E,G} = v + U_0 \psi, \quad \dot{Z}_{E,G} = w - U_0 \theta \quad (16.46)$$

Le (16.46) sono le *linearized navigation equations* formulate in assi stabilità, per un volo iniziale traslato, ad ali livellate e quota costante. Anche in questo caso si evidenzia il disaccoppiamento cinematico tra il moto longitudinale e quello latero-direzionale. Infatti, in assenza di perturbazioni delle variabili asimmetriche ( $v = \psi = 0$ ) si ha un *cross-range*  $Y_{E,G}$  costante. D'altra parte la deviazione laterale della traiettoria del baricentro non dipende dalle eventuali perturbazioni non nulle delle variabili simmetriche  $u, w$  e  $\theta$ .

★   ★   ★

A questo punto si hanno a disposizione 12 equazioni differenziali linearizzate che descrivono il moto perturbato del velivolo a partire da una condizione di equilibrio stabilizzata. Le prime 6 equazioni date dalle (16.21) e (16.26) permettono di integrare le perturbazioni delle variabili dinamiche, note le storie delle perturbazioni delle variabili di input. Le rimanenti 6 equazioni ausiliarie date dalle (16.33) e (16.42) permettono di integrare le perturbazioni dell'orientamento e della traiettoria del velivolo nel riferimento fisso.

Come si è visto, il sistema completo di equazioni linearizzate risulta notevolmente semplificato se la soluzione nominale corrisponde al volo traslato, a velocità costante, ad ali livellate e a quota costante, e per assi velivolo coincidenti con gli assi stabilità della condizione iniziale. Chiameremo queste condizioni semplificative *condizioni di trim ad ali livellate*.

Restano da specificare le espressioni delle perturbazioni delle azioni aerodinamiche e propulsive. Quelle corrispondenti all'azione del peso sono date dalle (16.28).

### 16.2.5 Equazioni della dinamica per condizioni di trim ad ali livellate

È istruttivo osservare che le equazioni cardinali delle forze e dei momenti (16.1a) e (16.1b) che reggono il moto vario del velivolo possono essere linearizzate utilizzando direttamente la loro forma vettoriale.

Ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_G &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{v} & \boldsymbol{\Omega}_B &= \boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_0 + \Delta \mathbf{F} & \mathcal{M} &= \mathcal{M}_0 + \Delta \mathcal{M} \end{aligned} \quad (16.47)$$

con evidente significato dei simboli, e sostituendo le (16.47) nelle equazioni generali del moto, si ottiene

$$m \left( \{\dot{v}_G\}_B + [\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0]_B \{v\}_B + [\tilde{\boldsymbol{\omega}}]_B \{V_0\}_B \right) = \{\Delta F\}_B \quad (16.48)$$

$$[I]_B \{\dot{\omega}\} + [\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_0]_B \left( [I]_B \{\omega\}_B \right) + [\tilde{\boldsymbol{\omega}}]_B \left( [I]_B \{\Omega_0\}_B \right) = \{\Delta \mathcal{M}\}_B \quad (16.49)$$

dove si riconoscono gli operatori tilde che esprimono il prodotto vettoriale con componenti nel sistema di assi velivolo.

Le (16.48)-(16.49) sono ricavabili trascurando dei termini del secondo ordine come  $(m\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v})$  ed  $[\tilde{\boldsymbol{\omega}}]_B([I]_B\{\omega\})$  e tenendo conto del fatto che nelle condizioni iniziali si

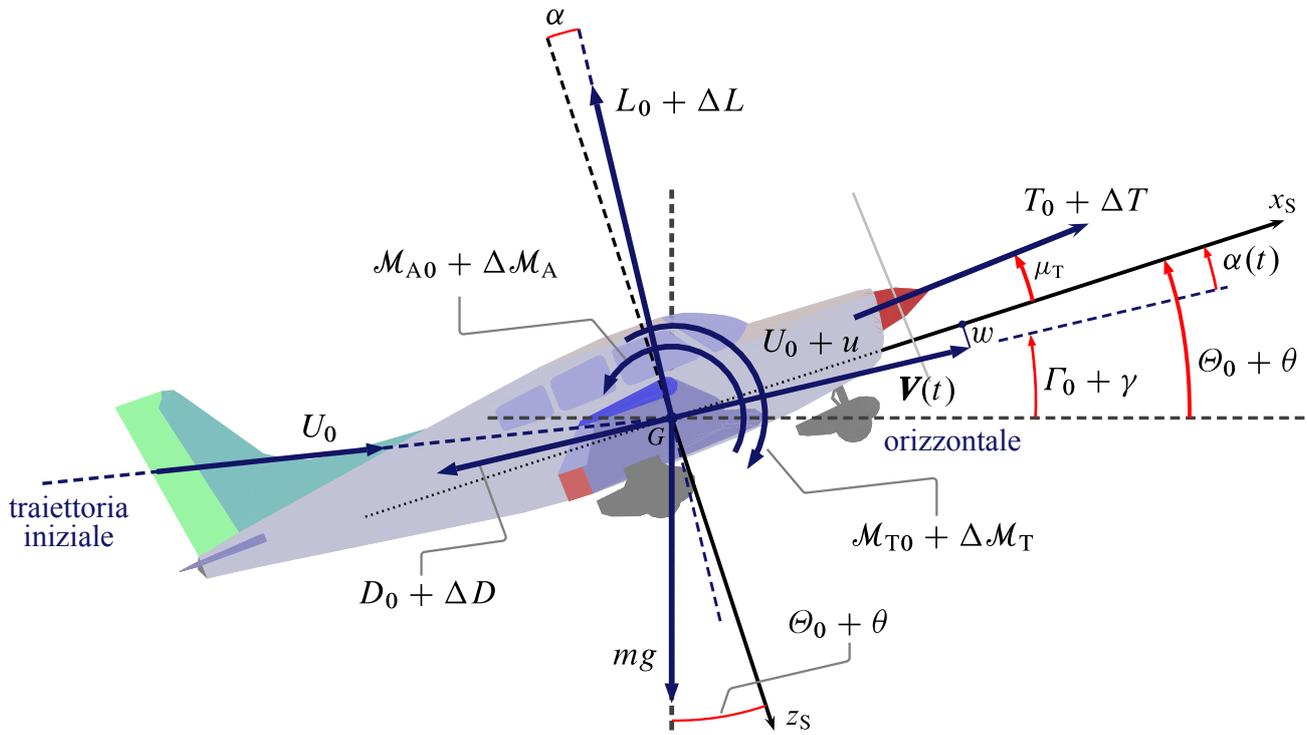


Figura 16.5 Moto longitudinale perturbato.

verificano le identità di equilibrio

$$m [\tilde{\Omega}_0]_B \{V_0\}_B = \{F_0\}_B \quad (16.50)$$

$$[\tilde{\Omega}_0]_B ([I]_B \{\Omega_0\}_B) = \{M_0\}_B \quad (16.51)$$

Le equazioni precedenti si semplificano per volo inizialmente traslato ( $\Omega_0 = 0$  cioè  $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$ ), ad ali livellate ( $\Phi_0 = 0$ ) e simmetrico ( $V_0 \cdot j_B \equiv V_0 = 0$ , cioè  $\beta_0 = 0$ ). Come visto in precedenza, questa condizione può essere caratterizzata in generale da un angolo di rampa non nullo,  $\Gamma_0 \neq 0$ . Inoltre, se gli assi velivolo sono coincidenti con quelli costruttivi si ha un angolo d'assetto  $\Theta_0$  dipendente dalla velocità di volo  $|V_0|$  e dalla quota. In generale si ha  $\Theta_0 \neq \Gamma_0$  e la loro differenza  $\alpha_{B0}$  è l'angolo d'attacco necessario al volo equilibrato.

Per comodità ci si può riferire al caso particolare di volo con traiettoria del baricentro orizzontale, in cui si ha  $\Gamma_0 = 0$ . In tal caso, se si assumono degli assi velivolo coincidenti con gli assi stabilità della condizione equilibrata si ha che l'angolo d'attacco iniziale è nullo per definizione,  $\alpha_0 = 0$ , oltre che  $\Gamma_0 = \Theta_0 = 0$ .

Per le condizioni di trim fissate le equazioni linearizzate (16.48)-(16.49) si riducono alle seguenti

$$\{\dot{v}_G\} + [\tilde{\omega}]_B \{V_0\}_B = \frac{1}{m} \{\Delta F\}_B \quad (16.52)$$

$$[I]_B \{\dot{\omega}\} = \{\Delta \mathcal{M}\}_B \quad (16.53)$$

Si noti come le (16.52) e (16.53) rappresentino delle particolarizzazioni delle (16.21) e (16.26), rispettivamente. Queste ultime sono chiaramente da utilizzarsi per lo studio delle piccole perturbazioni di moti equilibrati ma su traiettoria iniziale non rettilinea come, ad esempio, una richiamata o una virata stabilizzate.

La (16.52) scritta per esteso diventa il sistema di equazioni

$$\begin{cases} m(\dot{u} + W_0 q) = -mgC_{\theta_0} \theta + \Delta X_A + \Delta X_T \\ m(\dot{v} + U_0 r - W_0 p) = mgC_{\theta_0} \phi + \Delta Y_A + \Delta Y_T \\ m(\dot{w} - U_0 q) = -mgS_{\theta_0} \theta + \Delta Z_A + \Delta Z_T \end{cases} \quad (16.54)$$

avendo tenuto conto delle (16.29). Si lascia al lettore l'esercizio di verificare che nel caso di volo equilibrato simmetrico a velocità angolare  $Q_0$  le equazioni linearizzate precedenti si estendono come segue:

$$\begin{cases} m(\dot{u} + W_0 q + \underline{Q_0 w}) = -mgC_{\theta_0} \theta + \Delta X_A + \Delta X_T \\ m(\dot{v} + U_0 r - W_0 p) = mgC_{\theta_0} \phi + \Delta Y_A + \Delta Y_T \\ m(\dot{w} - \underline{Q_0 u} - U_0 q) = -mgS_{\theta_0} \theta + \Delta Z_A + \Delta Z_T \end{cases} \quad (16.55)$$

Analogamente, l'equazione alla rotazione (16.53) diventa il sistema di equazioni

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} = \Delta \mathcal{L}_A + \Delta \mathcal{L}_T \\ I_{yy} \dot{q} = \Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_T \\ I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} = \Delta \mathcal{N}_A + \Delta \mathcal{N}_T \end{cases} \quad (16.56)$$

che per volo equilibrato a velocità angolare  $Q_0$  si estendono come segue:

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} - \underline{I_{xz} Q_0 p} - \underline{(I_{yy} - I_{zz}) Q_0 r} = \Delta \mathcal{L}_A + \Delta \mathcal{L}_T \\ I_{yy} \dot{q} = \Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_T \\ I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + \underline{I_{xz} Q_0 r} - \underline{(I_{xx} - I_{yy}) Q_0 p} = \Delta \mathcal{N}_A + \Delta \mathcal{N}_T \end{cases} \quad (16.57)$$

I termini sottolineati a primo membro delle equazioni (16.55) e (16.57) evidenziano l'importanza nella risposta dinamica del velivolo dell'eventuale velocità angolare di beccheggio iniziale non nulla. L'influenza di  $Q_0$  è particolarmente significativa nell'equazione alla rotazione intorno all'asse di imbardata. Infatti, il termine  $(I_{xx} - I_{yy})$  nella terza delle (16.57) ha un valore tipicamente molto maggiore dei termini  $I_{xz}$  e  $(I_{yy} - I_{zz})$  che compaiono nell'equazione della dinamica del rollio.

Quando la soluzione nominale è un volo iniziale che avviene ad elevato fattore di carico, come per esempio una virata stabilizzata a forte angolo di *bank*, le componenti di velocità angolare  $Q_0$  ed  $R_0$  hanno valori piuttosto elevati e comparabili e i termini di accoppiamento sottolineati nelle equazioni precedenti hanno un impatto determinante sulla dinamica del velivolo.

Quando, invece, il moto iniziale è traslato, simmetrico e ad ali livellate i termini di accoppiamento sono certamente nulli ( $Q_0 = 0$ ) e il moto perturbato da disturbi simmetrici determina la risposta perturbata rappresentata nella figura 16.5 nella pagina precedente.

## 16.3 Azioni aerodinamiche linearizzate

Si deve osservare che è soprattutto l'ingrediente aerodinamico che distingue la particolare formulazione qui trattata della teoria delle piccole perturbazioni da quelle applicabili in altre branche della Meccanica.

Pertanto è necessario analizzare il ruolo delle diverse grandezze aerodinamiche nella formulazione linearizzata (16.54)-(16.56). In queste equazioni, affinché la linearizzazione sia completa, anche i secondi membri

$$\begin{aligned}\{\Delta F\}_B &= \{\Delta F_A\}_B + \{\Delta F_T\}_B + \{\Delta F_G\}_B \\ \{\Delta \mathcal{M}\}_B &= \{\Delta \mathcal{M}_A\}_B + \{\Delta \mathcal{M}_T\}_B\end{aligned}\quad (16.58)$$

devono essere espressi come funzioni lineari delle variabili fondamentali. Per quanto riguarda l'azione della forza peso rappresentata dalla matrice colonna  $\{\Delta F_G\}_B$ , la linearizzazione è stata già operata quando si sono ricavate le formule (16.28) o (16.29), lineari nelle piccole perturbazioni di angoli di Eulero  $\theta$  e  $\phi$ . Restano da linearizzare i termini rimanenti delle (16.58).

In particolare, rimandando l'analisi dei contributi propulsivi  $\{\Delta F_T\}_B$  e  $\{\Delta \mathcal{M}_T\}_B$  ad un paragrafo successivo, prendiamo qui in esame le espressioni linearizzate degli elementi delle matrici colonna  $\{\Delta F_A\}_B$  e  $\{\Delta \mathcal{M}_A\}_B$ , cioè delle perturbazioni

$$\Delta X_A, \Delta Y_A, \Delta Z_A, \Delta \mathcal{L}_A, \Delta \mathcal{M}_A, \Delta \mathcal{N}_A \quad (16.59)$$

dell'azione aerodinamica in assi velivolo. Per semplicità si farà riferimento alle condizioni di trim per volo traslato ad ali livellate e a quota costante.

Come è noto, per modellazione aerodinamica si intende lo sviluppo di modelli matematici che descrivono le forze e i momenti aerodinamici agenti sull'aeromobile. Siccome le condizioni del flusso intorno al velivolo completo sono generalmente piuttosto complesse, ogni tentativo di descrivere matematicamente i fenomeni aerodinamici deve tradursi in compromesso. L'esperienza ha mostrato che è effettivamente possibile formulare un *modello aerodinamico lineare* ingegneristicamente valido di un velivolo, per il quale ciascuna componente di forza o di momento viene espressa secondo una formula lineare nei parametri del moto e nei parametri di controllo. I coefficienti di tali combinazioni lineari prendono il nome di *derivate di stabilità* e *derivate di controllo*. La loro interpretazione fisica è nota dall'Aerodinamica degli aeromobili e i loro valori sono ricavabili: (a) con formule semiempiriche (ad esempio gli USAF DATCOM [52]), (b) tramite sperimentazioni in galleria del vento su riproduzioni in scala ridotta del velivolo o (c) con prove di volo al vero sul velivolo reale.

Un semplice modello linearizzato, sebbene costituisca un modello approssimato, è in grado di rappresentare le caratteristiche aerodinamiche dell'aeromobile in esame con un buon grado di accuratezza. Va comunque osservato che un modello lineare è valido solo per una determinata configurazione e nell'intorno di una determinata velocità e quota di volo. Tipicamente per un dato velivolo sono richiesti diversi modelli linearizzati per un numero sufficiente di punti all'interno dell'involucro di volo. Ciò permette di ottenere una "fotografia" accettabile delle sue proprietà statiche e dinamiche.

### 16.3.1 Formula di Taylor

Si ricordi che una funzione  $f$  di più variabili — si pensi alle componenti  $X_A, Y_A, Z_A, \mathcal{L}_A, \mathcal{M}_A, \mathcal{N}_A$  o anche al generico coefficiente aerodinamico del velivolo completo — può essere approssimata mediante la formula di Taylor nell'intorno di un insieme di valori di riferimento delle variabili indipendenti.

Per esempio, se  $x_1$  ed  $x_2$  sono due variabili indipendenti, una funzione  $f(x_1, x_2)$ , continua in un intorno del punto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  insieme alle sue derivate parziali fino a quelle di ordine  $n$ , può essere espressa dalla seguente formula di Taylor

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2) = & f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=\bar{x}_1 \\ x_2=\bar{x}_2}} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=\bar{x}_1 \\ x_2=\bar{x}_2}} \Delta x_2 \\
 & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{\substack{x_1=\bar{x}_1 \\ x_2=\bar{x}_2}} \Delta x_1^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\substack{x_1=\bar{x}_1 \\ x_2=\bar{x}_2}} \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{\substack{x_1=\bar{x}_1 \\ x_2=\bar{x}_2}} \Delta x_2^2 \\
 & + \dots + R_n \quad (16.60)
 \end{aligned}$$

dove il termine  $R_n$  rappresenta la parte rimanente della formula di espansione. La (16.60) può essere interpretata, una volta fissato il punto di riferimento  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , come una funzione degli incrementi  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$ , ed essere espressa come

$$\begin{aligned}
 f(\Delta x_1, \Delta x_2) = & f_0 + f_{x_1} \Delta x_1 + f_{x_2} \Delta x_2 \\
 & + \frac{1}{2} \left( f_{x_1 x_1} \Delta x_1^2 + 2f_{x_1 x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + f_{x_2 x_2} \Delta x_2^2 \right) + \dots + R_n \quad (16.61)
 \end{aligned}$$

Nella (16.61) si conviene di indicare con  $f_0, f_{x_1}, \dots, f_{x_2 x_2}$ , e così via, i valori che la funzione e le sue derivate successive assumono quando sono valutate nel punto di riferimento. Questi valori sono i coefficienti delle combinazioni lineari a secondo membro della (16.60) e della (16.61). La differenza  $f(\Delta x_1, \Delta x_2) - f_0$  tra il valore della funzione ed il valore di riferimento è ovviamente la perturbazione  $\Delta f$ .

La *linearizzazione di  $f$  intorno alla condizione di riferimento  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$*  si ottiene dalla (16.61) trascurando le derivate parziali seconde e tutte quelle di ordine superiore. Si dirà che la  $f$  è espressa tramite la forma lineare della formula di Taylor.

È bene qui osservare che la linearizzazione è particolarmente favorita da circostanze di fatto dell'Aerodinamica dei corpi non tozzi che hanno un impatto determinante nella pratica ingegneristica. Come è noto le sperimentazioni in galleria mostrano che alcuni coefficienti aerodinamici, come ad esempio quello di portanza o quello di momento di beccheggio, tanto di profili alari quanto di ali finite che di velivoli completi, presentano variazioni lineari con l'angolo d'attacco per intervalli di incidenze di notevole estensione. Ciò significa che la formula di linearizzazione del tipo

$$f(\Delta x_1, \Delta x_2) \simeq f_0 + f_{x_1} \Delta x_1 + f_{x_2} \Delta x_2 \quad (16.62)$$

non solo è valida localmente intorno ad  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  ma esprime con ottima approssimazione la stessa  $f$  in un ampio intervallo di variazione delle variabili indipendenti. Ad esempio, si pensi al coefficiente di portanza  $C_L$  di un velivolo. Esso viene solitamente espresso

come

$$C_L = C_0 + C_1 \alpha \quad (16.63)$$

dove  $C_1$  è il ben noto gradiente della retta di portanza  $C_{L\alpha}$  e  $C_0$  è il coefficiente di portanza ad incidenza nulla  $C_{L_0}$  (non nullo se l'angolo d'attacco  $\alpha$  non è riferito alla direzione di portanza nulla del velivolo). La (16.63) è una particolarizzazione della (16.62) per  $x_1 \equiv \alpha$  ed avendo considerata fissa l'altra variabile indipendente.

Una formula di linearizzazione come la (16.62) si estende evidentemente a funzioni di più di due variabili. Ancora con riferimento al coefficiente di portanza di un velivolo, assumendo l'angolo d'attacco calcolato rispetto all'asse stabilità della condizione iniziale, il  $C_L$  può essere dato più in generale da una dipendenza lineare del tipo

$$C_L = f(\alpha, \Delta M, \delta_e, \delta_s) = C_0 + C_1 \alpha + C_2 \Delta M + C_3 \delta_e + C_4 \delta_s \quad (16.64)$$

in cui compaiono, oltre alla variazione  $\alpha$  dell'angolo d'attacco, la variazione del numero di Mach  $\Delta M$  e gli incrementi di deflessione  $\delta_e$  e  $\delta_s$  rispetto ai valori di riferimento  $\alpha_0$  (nullo in assi stabilità oppure pari a  $\alpha_{w0}$  se riferito ad esempio alla corda di radice dell'ala),  $M_0$ ,  $\delta_{e0}$  e  $\delta_{s0}$ . Nella (16.64) sarà

$$C_0 = C_L \Big|_{\substack{\alpha_0, M_0 \\ \delta_{e0}, \delta_{s0}}}, \quad C_1 = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \Big|_{\substack{\alpha_0, M_0 \\ \delta_{e0}, \delta_{s0}}} \quad (16.65)$$

$$C_2 = \frac{\partial C_L}{\partial M} \Big|_{\substack{\alpha_0, M_0 \\ \delta_{e0}, \delta_{s0}}}, \quad C_3 = \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \Big|_{\substack{\alpha_0, M_0 \\ \delta_{e0}, \delta_{s0}}}, \quad C_4 = \frac{\partial C_L}{\partial \delta_s} \Big|_{\substack{\alpha_0, M_0 \\ \delta_{e0}, \delta_{s0}}}$$

Le costanti della combinazione lineare (16.64) sono dunque interpretabili come derivate parziali della grandezza  $f$  d'interesse rispetto alle singole variabili da cui essa dipende.

### 16.3.2 Forze e momenti aerodinamici linearizzati

Applichiamo ora la formula di Taylor lineare alle componenti  $X_A, Y_A, Z_A, \mathcal{L}_A, \mathcal{M}_A, \mathcal{N}_A$ . Detta  $f_A$  una qualsiasi fra queste, secondo una formulazione introdotta originariamente da Bryan [7] e utilizzata da molti testi di Dinamica del volo [12, 17, 19, 60], si può porre formalmente

$$\begin{aligned} \Delta f_A = & C_1 u + C_2 \dot{u} + C_3 v + C_4 \dot{v} + C_5 w + C_6 \dot{w} \\ & + C_7 p + C_8 \dot{p} + C_9 q + C_{10} \dot{q} + C_{11} r + C_{12} \dot{r} \\ & + C_{13} z_E \\ & + C_{14} \delta_a + C_{15} \dot{\delta}_a + C_{16} \delta_e + C_{17} \dot{\delta}_e + C_{18} \delta_r + C_{19} \dot{\delta}_r \\ & + C_{20} \delta_T + C_{21} \dot{\delta}_T \end{aligned} \quad (16.66)$$

Questa formula esprime in generale la perturbazione di forza aerodinamica o di momento aerodinamico come combinazione lineare: (a) delle perturbazioni delle variabili dinamiche e delle loro derivate temporali, (b) della perturbazione della quota (una variabile

cinematica) nonché ( $c$ ) delle perturbazioni delle variabili di controllo e delle loro derivate temporali.

Nella combinazione lineare (16.66) compare per semplicità il solo effetto della variazione di quota  $z_E$  e non anche delle variazioni di posizione ( $x_E, y_E$ ). La dipendenza da  $\delta_T$  e  $\dot{\delta}_T$  è annoverata per completezza e rappresenta gli eventuali effetti aerodinamici diretti e indiretti dovuti alla variazione delle condizioni di funzionamento del sistema propulsivo.

La (16.66) è formalmente esprimibile come prodotto del vettore gradiente  $\nabla f_A$  della funzione

$$f_A(U, \dot{U}, V, \dot{V}, W, \dot{W}, P, \dot{P}, Q, \dot{Q}, R, \dot{R}, Z_E, \delta_{a0} + \delta_a, \dot{\delta}_a, \delta_{e0} + \delta_e, \dot{\delta}_e, \delta_{r0} + \delta_r, \dot{\delta}_r, \delta_{T0} + \delta_T, \dot{\delta}_T)$$

calcolato nelle condizioni di riferimento, per il vettore delle perturbazioni

$$\left[ u, \dot{u}, v, \dot{v}, w, \dot{w}, p, \dot{p}, q, \dot{q}, r, \dot{r}, z_E, \delta_a, \dot{\delta}_a, \delta_e, \dot{\delta}_e, \delta_r, \dot{\delta}_r, \delta_T, \dot{\delta}_T \right]^T$$

In generale le funzioni vettoriali  $\Delta F_A$  e  $\Delta \mathcal{M}_A$  sono esprimibili in assi stabilità come prodotti delle matrici jacobiane

$$\frac{\partial(X_A, Y_A, Z_A)}{\partial(U, \dot{U}, V, \dot{V}, \dots, \delta_r, \dot{\delta}_r, \delta_T, \dot{\delta}_T)} \quad e \quad \frac{\partial(\mathcal{L}_A, \mathcal{M}_A, \mathcal{N}_A)}{\partial(U, \dot{U}, V, \dot{V}, \dots, \delta_r, \dot{\delta}_r, \delta_T, \dot{\delta}_T)} \quad (16.67)$$

per il vettore delle perturbazioni. Si osserva anche che le derivate parziali che definiscono gli elementi delle matrici (16.67)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U} &= \frac{\partial}{\partial u}, & \frac{\partial}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial v}, & \frac{\partial}{\partial W} &= \frac{\partial}{\partial w}, \\ \frac{\partial}{\partial P} &= \frac{\partial}{\partial p}, & \frac{\partial}{\partial Q} &= \frac{\partial}{\partial q}, & \frac{\partial}{\partial R} &= \frac{\partial}{\partial r}, & \dots \end{aligned} \quad (16.68)$$

sono effettuate rispetto alle variabili totali ma non sono altro che le derivate rispetto alle variabili perturbate  $u, v, w, p$ , eccetera.

A tal proposito è utile osservare che, in assi stabilità, per piccole perturbazioni si ha

$$|V| = \left[ (U_0 + u)^2 + v^2 + w^2 \right]^{1/2} \approx U_0 + u \quad (16.69a)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w}{U} \approx \frac{w}{U_0} \quad (16.69b)$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v}{U} \approx \frac{v}{U_0} \quad (16.69c)$$

pertanto le derivate parziali nelle (16.67) possono intendersi come

$$\left. \frac{\partial f_A}{\partial u} \right|_0 = \frac{1}{U_0} \left. \frac{\partial f_A}{\partial (u/U_0)} \right|_0 = \frac{1}{U_0} \frac{U_0}{a_0} \left. \frac{\partial f_A}{\partial (M_0 + u/a_0)} \right|_0 = \frac{1}{U_0} M_0 \left. \frac{\partial f_A}{\partial M} \right|_0 \quad (16.70a)$$

$$\left. \frac{\partial f_A}{\partial v} \right|_0 = \left. \frac{\partial f_A}{\partial (U_0 \beta)} \right|_0 = \frac{1}{U_0} \left. \frac{\partial f_A}{\partial \beta} \right|_0 \quad (16.70b)$$

$$\left. \frac{\partial f_A}{\partial w} \right|_0 = \left. \frac{\partial f_A}{\partial(U_0 \alpha)} \right|_0 = \frac{1}{U_0} \left. \frac{\partial f_A}{\partial \alpha} \right|_0 \quad (16.70c)$$

avendo tenuto conto delle (16.69) per le quali  $M = |V|/a \approx (U_0 + u)/a_0$  e  $\Delta M = u/a_0$ .

Fortunatamente molti degli elementi delle due matrici jacobiane sono trascurabili e molti dei coefficienti nelle formule lineari (16.66) sono nulli. Questa circostanza fu ipotizzata per la prima volta dal matematico inglese Bryan [7] già all'epoca dei primi voli dei fratelli Wright. Ad esempio, dalle formule su riportate è evidente che contributi come

$$\left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial v} \right|_0 v = \left. \frac{\partial(\bar{q}_0 S \bar{c} C_{\mathcal{M}})}{\partial(U_0 \beta)} \right|_0 U_0 \Delta \beta = \bar{q}_0 S \bar{c} C_{\mathcal{M}_\beta} \Delta \beta \quad \text{con } C_{\mathcal{M}_\beta} \triangleq \left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial \beta} \right|_0$$

oppure

$$\left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial p} \right|_0 p = \left. \frac{\partial(\bar{q}_0 S \bar{c} C_{\mathcal{M}})}{\partial\left(\frac{pb}{2U_0}\right)} \right|_0 \frac{pb}{2U_0} = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c} b}{2U_0} C_{\mathcal{M}_p} p \quad \text{con } C_{\mathcal{M}_p} \triangleq \left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial\left(\frac{pb}{2U_0}\right)} \right|_0$$

non sono significativi per un velivolo completo rispetto a termini come

$$\left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial w} \right|_0 w = \left. \frac{\partial(\bar{q}_0 S \bar{c} C_{\mathcal{M}})}{\partial(U_0 \alpha)} \right|_0 U_0 \Delta \alpha = \bar{q}_0 S \bar{c} C_{\mathcal{M}_\alpha} \Delta \alpha \quad \text{con } C_{\mathcal{M}_\alpha} \triangleq \left. \frac{\partial C_{\mathcal{M}}}{\partial \alpha} \right|_0$$

Le espressioni delle derivate dimensionali qui riportate

$$\frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial v} \propto C_{\mathcal{M}_\beta}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial p} \propto C_{\mathcal{M}_p}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial w} \propto C_{\mathcal{M}_\alpha}$$

**Tabella 16.1** Prospetto delle derivate di stabilità dimensionali nelle espressioni delle forze e dei momenti aerodinamici (16.59). Le derivate meno significative sono considerate nulle con buona approssimazione e si perviene al disaccoppiamento delle equazioni del moto linearizzate. Per le derivate rispetto a  $\dot{w}$  si vedano anche le equazioni (16.71c), (16.71e) e (16.82).

$\frac{\partial \rightarrow}{\partial(\downarrow)}$	$X_A$	$Y_A$	$Z_A$	$\mathcal{L}_A$	$\mathcal{M}_A$	$\mathcal{N}_A$
$u$	■	0	■	0	■	0
$v$	0	●	0	●	0	●
$w$	■	0	■	0	■	0
$\dot{w}$	$\approx 0$	0	■	0	■	0
$p$	0	$\approx 0$	0	●	0	●
$q$	$\approx 0$	0	■	0	■	0
$r$	0	●	0	●	0	●
$\delta_a$	0	$\approx 0$	0	●	0	●
$\delta_e$	$\approx 0$	0	■	0	■	0
$\delta_r$	0	●	0	●	0	●

mostrano che esse sono proporzionali a delle derivate di coefficienti aerodinamici del velivolo. Pertanto, a quei coefficienti che notoriamente sono trascurati nelle analisi aerodinamiche — perché rigorosamente nulli o poco significativi ( $C_{M_\beta} \approx 0$ ,  $C_{M_p} \approx 0$ ) rispetto ad altri ( $C_{M_\alpha}$ ) — corrispondono elementi nulli ( $\partial \mathcal{M}_A / \partial V = \partial \mathcal{M}_A / \partial P$ ) delle matrici jacobiane (16.67).

Queste considerazioni permettono di interpretare il prospetto riportato nella tabella 16.1 a fronte. Essa riassume un insieme di ipotesi di lavoro che storicamente hanno preso il nome di *ipotesi di Bryan*:

- Le forze e i momenti aerodinamici sul velivolo dipendono da variabili che ne caratterizzano il moto rispetto all'aria circostante — cioè gli angoli aerodinamici  $\alpha$  e  $\beta$ , la velocità  $V$  e le velocità angolari  $p$ ,  $q$  ed  $r$  — e dalle loro derivate temporali. La stabilità e la risposta ai comandi di volo possono essere convenientemente analizzate attraverso modelli aerodinamici quasi-stazionari, in cui forze e coppie risultanti dipendono dai valori istantanei di tali variabili — cioè dall'atto di moto istantaneo del campo fluido intorno al velivolo nell'istante corrente e non dalla 'storia passata del moto'.
- Nel modello quasi-stazionario l'unico effetto aerodinamico instazionario non trascurabile è collegato alla variazione temporale istantanea  $\dot{\alpha}$  dell'angolo d'attacco. Il generico contributo instazionario ai coefficienti di forza e momento è semplicemente modellato come termine lineare in (cioè proporzionale ad)  $\dot{\alpha} \simeq \dot{w} / U_0$ .
- In condizioni di volo simmetrico le forze e i momenti aerodinamici nel piano longitudinale non dipendono dalle perturbazioni delle variabili di stato e di comando latero-direzionali. Analogamente, la forza laterale e i momenti di rollio e imbardata non dipendono dalle perturbazioni di variabili simmetriche.
- La variazione della resistenza aerodinamica con la (perturbazione di) velocità di beccheggio  $q$  è trascurabile. Analogamente, sono trascurabili le derivate  $\partial X_A / \partial \dot{\alpha}$ ,  $\partial X_A / \partial \delta_e$ ,  $\partial X_A / \partial \delta_r$ ,  $\partial Y_A / \partial p$  e  $\partial Y_A / \partial \delta_a$ .

In altri termini, nell'analisi delle piccole perturbazioni del moto di un velivolo è possibile trascurare le derivate di grandezze *simmetriche* come  $X_A$ ,  $Z_A$  ed  $\mathcal{M}_A$  rispetto a variabili *non simmetriche* come  $v \simeq U_0 \beta$ ,  $p$  ed  $r$ . Analogamente, è possibile trascurare le derivate di grandezze *non simmetriche* come  $Y_A$ ,  $\mathcal{L}_A$  (con buona approssimazione) ed  $\mathcal{N}_A$  rispetto a variabili *simmetriche* come  $u$  (o anche  $M$ ),  $w$  (o anche  $\alpha$ ), e  $q$ . Inoltre, l'esperienza ha confermato che è lecito trascurare alcune derivate di componenti simmetriche [non simmetriche] rispetto a variabili simmetriche [non simmetriche] (si veda la tabella 16.1).

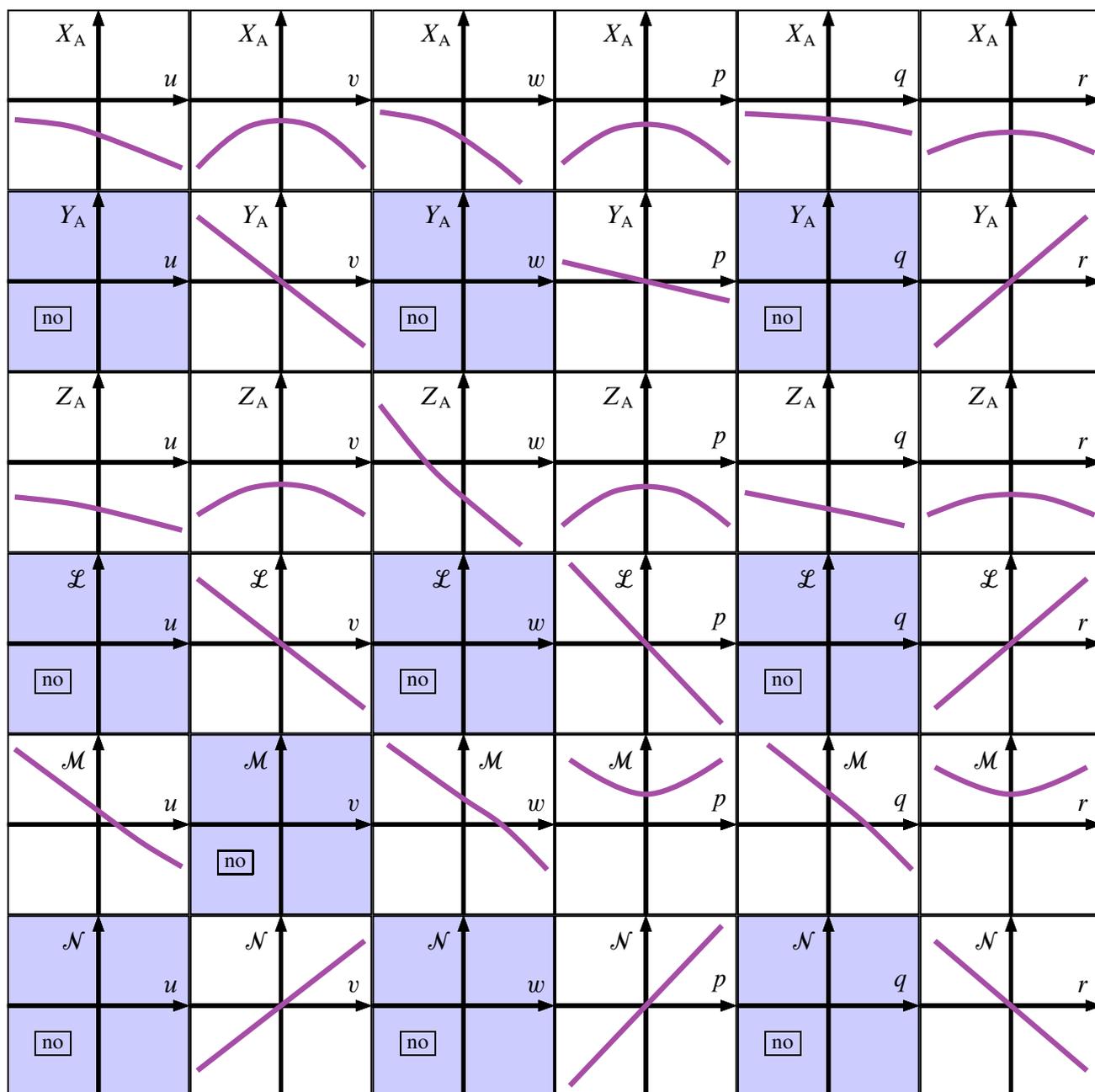
La figura 16.6 nella pagina successiva mostra un andamento qualitativo delle derivate di stabilità con le perturbazioni delle variabili dinamiche.

Quanto su discusso permette di particularizzare la (16.66) nelle seguenti espressioni:

$$\Delta X_A = \left. \frac{\partial X_A}{\partial u} \right|_0 u + \left. \frac{\partial X_A}{\partial w} \right|_0 w + \left. \frac{\partial X_A}{\partial \delta_e} \right|_0 \delta_e \quad (16.71a)$$

$$\Delta Y_A = \left. \frac{\partial Y_A}{\partial v} \right|_0 v + \left. \frac{\partial Y_A}{\partial p} \right|_0 p + \left. \frac{\partial Y_A}{\partial r} \right|_0 r + \left. \frac{\partial Y_A}{\partial \delta_a} \right|_0 \delta_a + \left. \frac{\partial Y_A}{\partial \delta_r} \right|_0 \delta_r \quad (16.71b)$$

$$\Delta Z_A = \left. \frac{\partial Z_A}{\partial u} \right|_0 u + \left. \frac{\partial Z_A}{\partial w} \right|_0 w + \left. \frac{\partial Z_A}{\partial \dot{w}} \right|_0 \dot{w} + \left. \frac{\partial Z_A}{\partial q} \right|_0 q + \left. \frac{\partial Z_A}{\partial \delta_e} \right|_0 \delta_e \quad (16.71c)$$



**Figura 16.6** Andamenti qualitativi delle componenti di forza e momento aerodinamico in assi stabilità. Le derivate di stabilità dimensionali sono date dalle tangenti alle rispettive curve in corrispondenza del valore nullo della variabile di perturbazione, punto in cui le curve intersecano l'asse delle ordinate.

$$\Delta \mathcal{L}_A = \left. \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial v} \right|_0 v + \left. \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial p} \right|_0 p + \left. \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial r} \right|_0 r + \left. \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \delta_a} \right|_0 \delta_a + \left. \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \delta_r} \right|_0 \delta_r \quad (16.71d)$$

$$\Delta \mathcal{M}_A = \left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial u} \right|_0 u + \left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial w} \right|_0 w + \left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial \dot{w}} \right|_0 \dot{w} + \left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial q} \right|_0 q + \left. \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial \delta_e} \right|_0 \delta_e \quad (16.71e)$$

$$\Delta \mathcal{N}_A = \left. \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial v} \right|_0 v + \left. \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial p} \right|_0 p + \left. \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial r} \right|_0 r + \left. \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial \delta_a} \right|_0 \delta_a + \left. \frac{\partial \mathcal{N}_A}{\partial \delta_r} \right|_0 \delta_r \quad (16.71f)$$

dove si è anche trascurata l'influenza delle variazioni di spinta sulle azioni aerodinamiche, cioè dei termini lineari in  $\delta_T$  e  $\dot{\delta}_T$ .

Le costanti  $C_i$  che compaiono nelle (16.66) sono state rinominate nelle (16.71) dandone un'interpretazione in forma di derivate parziali valutate in corrispondenza della soluzione nominale. Ad esempio, per  $f_A = X_A$  si è posto  $C_1 = \partial X_A / \partial u|_0$ ,  $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ ,  $C_5 = \partial X_A / \partial w|_0$  e così via. Oppure, per  $f_A = \mathcal{M}_A$  si è posto  $C_6 = \partial \mathcal{M}_A / \partial \dot{w}|_0$ . Tuttavia si deve osservare che in quest'ultimo caso è bene interpretare la  $C_6$  semplicemente come costante di una combinazione lineare di perturbazioni. Infatti, l'interpretazione rigorosa come derivata parziale viene a cadere non essendo ammissibile la derivata

$$\left. \frac{\partial f_A}{\partial \dot{w}} \right|_0 = \left. \frac{\partial f_A}{\partial \dot{w}} \right|_{u, v, w, \dots = \text{cost}}$$

in cui la  $\dot{w}$  dovrebbe variare mantenendo  $w$  costante.

## 16.4 Azioni propulsive linearizzate

Oltre alle componenti di forza e momento di natura aerodinamica è possibile formulare espressioni linearizzate dei termini propulsivi  $\{\Delta F_T\}_B$  e  $\{\Delta \mathcal{M}_T\}_B$  nelle (16.58). In altre parole, si possono esprimere le perturbazioni

$$\Delta X_T, \Delta Y_T, \Delta Z_T, \Delta \mathcal{L}_T, \Delta \mathcal{M}_T, \Delta \mathcal{N}_T \quad (16.72)$$

come funzioni lineari delle perturbazioni delle variabili di stato e di comando.

Com'è noto, le azioni propulsive dipendono principalmente dalla spinta  $T$ . In particolare, nelle condizioni iniziali si ha

$$T_0 = \delta_{T0} T_{\max}(z_0), \quad X_{T0} = T_0 \cos \mu_T, \quad Z_{T0} = -T_0 \sin \mu_T, \quad \mathcal{M}_{T0} = T_0 e_T \quad (16.73)$$

dove

- $T_{\max}(z_0)$  è la spinta massima disponibile alla quota nominale,
- $\delta_{T0}$  è la regolazione iniziale del *grado di ammissione* o *manetta* — detta anche *regolazione equivalente* della spinta, variabile tra 0 e 1,
- $\mu_T$  è un angolo costante (per velivoli non dotati di spinta orientabile) per fissata condizione di volo iniziale (in assi stabilità) e solitamente è piccolo,
- $e_T$  è la distanza dell'asse di spinta dal baricentro.

Inoltre, per un moto longitudinal-simmetrico si ha  $\mathcal{L}_{T0} = \mathcal{N}_{T0} = 0$ .

### 16.4.1 Espressione convenzionale della spinta

La spinta dei motori aeronautici viene modellata in generale con la seguente espressione convenzionale:

$$T = C_T \left( |V|, \delta_{T0} + \delta_T \right) \frac{1}{2} \rho |V|^2 S \quad (16.74)$$

(si veda, ad esempio, il testo di Stengel [12]). Il *coefficiente di spinta*  $C_T = T / (\bar{q}S)$  è una funzione del modulo della velocità di volo  $|V|$  e del grado di ammissione istantaneo  $\delta_{T0} + \delta_T$ .

Va ricordato che l'aria costituisce il fluido di lavoro principale nei motori dei comuni velivoli atmosferici. Ciò giustifica la (16.74) in cui la spinta è proporzionale alla pressione dinamica di volo, che a sua volta è proporzionale al flusso di massa dei motori ad aria. L'espressione convenzionale (16.74) fornisce il modulo della spinta in una forma simile a quelle comunemente utilizzate per le forze aerodinamiche, cioè come prodotto della pressione dinamica di volo per la superficie di riferimento e del coefficiente di forza  $C_T$ .

La relazione (16.74) interessa in questo contesto al fine di ricavare un'espressione della variazione  $\Delta T$  per piccole variazioni  $\Delta \bar{q}$  della pressione dinamica di volo — cioè delle componenti  $u$ ,  $v$ ,  $w$  di velocità — e per piccole variazioni  $\delta_T$  del grado di ammissione. Nota la  $\Delta T$  le perturbazioni (16.72) potranno essere agevolmente calcolate.

Nel seguito, per semplicità si arriverà ad assumere che il sistema propulsivo non esercita coppie sul velivolo, cioè che la spinta è sempre baricentrica,  $e_T = 0$ , anche nel moto perturbato. Questa può sembrare un'ipotesi semplificativa abbastanza forte che richiede un vettore spinta allineato inizialmente con la velocità  $V_0$  — cioè con l'asse stabilità  $x_S$ . Quest'ultimo ha una posizione  $\mu_T$  variabile rispetto alla fusoliera al variare della condizione di riferimento considerata mentre, com'è noto, la spinta ha una posizione fissa rispetto al velivolo. D'altra parte, nelle normali condizioni di volo l'angolo  $\mu_T$  è piccolo e può essere trascurato.

In tali ipotesi le (16.73) si semplificano nelle seguenti:

$$T_0 = \delta_{T_0} T_{\max}(z_0), \quad X_{T_0} = T_0, \quad Z_{T_0} = \mathcal{M}_{T_0} = 0 \quad (16.75)$$

## 16.4.2 Modellazione del coefficiente di spinta

Nell'intorno della condizione di volo di riferimento, in cui tipicamente il motore funziona in una condizione nominale, il coefficiente di spinta può essere modellato come segue:

$$C_T = (C_{T_{\text{Fix}}} + k_V |V|^\eta) (\delta_{T_0} + \delta_T) \approx [C_{T_{\text{Fix}}} + k_V (U_0 + u)^\eta] (\delta_{T_0} + \delta_T) \quad (16.76)$$

dove  $\delta_T$  è la variazione della manetta rispetto alla regolazione di equilibrio  $\delta_{T_0}$ . L'equazione modello (16.76) è adattabile ad una vasta gamma di motorizzazioni. In essa

- il numero costante  $C_{T_{\text{Fix}}}$  è il coefficiente di spinta a punto fisso, cioè quando  $U_0 = u = 0$  e  $\delta_{T_0} + \delta_T = 1$ ,
- la quantità costante  $k_V$  è un fattore di scala dell'effetto dovuto alla velocità di volo,
- $\eta$  è un esponente, tipicamente negativo, funzione del tipo di motore.

Della (16.76) vanno valutate le derivate parziali rispetto a  $u/U_0$  e alla  $\delta_T$  in corrispondenza della velocità di equilibrio  $U_0$  e della regolazione  $\delta_{T_0}$ .

La derivata rispetto alla perturbazione di velocità è data dall'espressione seguente:

$$\begin{aligned} C_{T_u}|_0 &\triangleq \left. \frac{\partial C_T}{\partial (u/U_0)} \right|_{u=0, \delta_T=0} = U_0 \left. \frac{\partial [k_V (U_0 + u)^\eta \delta_T]}{\partial u} \right|_0 = U_0 \eta k_V (U_0 + 0)^{\eta-1} \delta_{T_0} \\ &= \eta C_T|_0 \left( 1 - \frac{C_{T_{\text{Fix}}} \delta_{T_0}}{C_T|_0} \right) \end{aligned} \quad (16.77a)$$

$$\approx \eta C_T|_0 \quad \text{per } C_{T_{\text{Fix}}} \delta_{T_0} \ll C_T|_0 \quad (16.77b)$$

dove

$$C_T|_0 = \left( C_{T_{\text{Fix}}} + k_V U_0^\eta \right) \delta_{T0} \quad (16.77c)$$

è il coefficiente di spinta in volo equilibrato.

La derivata rispetto a  $\delta_T$  si esprime semplicemente come:

$$\left. \frac{\partial C_T}{\partial \delta_T} \right|_{u=0, \delta_T=0} \triangleq C_{T_{\delta_T}}|_0 = \left( C_{T_{\text{Fix}}} + k_V U_0^\eta \right) \quad (16.78)$$

Le espressioni precedenti, valide per un moto a piccole perturbazioni, sono generali nel senso che esistono svariate particolarizzazioni possibili del modello di spinta a seconda del tipo di motorizzazione/propulsione in esame. In molti casi è ingegneristicamente accettabile assumere un coefficiente di spinta a punto fisso tale che  $C_{T_{\text{Fix}}} \delta_{T0} \ll C_T|_0$ , ponendo cioè nelle formule  $C_{T_{\text{Fix}}} = 0$ . Si veda la (16.77b).

Se un dato motore è caratterizzato da una potenza disponibile poco variabile con la velocità, si può assumere un prodotto  $T|V| \approx T(U_0 + u)$  costante e dedurre che:

$$\eta = -3, \quad C_{T_u}|_0 \approx -3 C_T|_0 \quad (\text{modello a potenza costante}) \quad (16.79a)$$

Questo modello è rappresentativo della propulsione ad elica (con adattamento automatico del passo) o di un motore *turbofan* ad alto rapporto di *bypass*.

Per un motore caratterizzato da una spinta poco variabile con la velocità, come i turbogetti o i motori a razzo, si assumerà:

$$\eta = -2, \quad C_{T_u}|_0 \approx -2 C_T|_0 \quad (\text{modello a spinta costante}) \quad (16.79b)$$

D'altra parte, spesso si deve modellare un propulsore caratterizzato da un flusso di massa costante attraverso il motore. In questi casi si deve porre:

$$\eta = -1, \quad C_{T_u}|_0 \approx -C_T|_0 \quad (\text{modello a flusso di massa costante}) \quad (16.79c)$$

e si avrà una spinta  $T$  linearmente crescente con  $V$ .

Un caso ancora diverso è quello dei motori *ramjet* che presentano un  $C_T$  praticamente costante con la velocità fino a un determinato valore limite del numero di Mach. Per questi motori si pone:

$$\eta = 0, \quad C_{T_u}|_0 = 0 \quad (\text{modello a coefficiente di spinta costante}) \quad (16.79d)$$

e si ammette un modello di spinta crescente con  $(U_0 + u)^2$ .

Si lascia al lettore il compito di ricavare per esercizio le quattro condizioni su menzionate a partire dalle (16.74), (16.76) e (16.77b).

Il modello di spinta (16.74) permette di formulare l'espressione linearizzata

$$\begin{aligned} \Delta T &= \bar{q}_0 S \left( \left. \frac{\partial C_T}{\partial (u/U_0)} \right|_0 \frac{u}{U_0} + \left. \frac{\partial C_T}{\partial \delta_T} \right|_0 \delta_T \right) + C_T|_0 \frac{\partial \bar{q}}{\partial (u/U_0)} \frac{u}{U_0} S \\ &= \bar{q}_0 S \left( C_{T_u}|_0 \frac{u}{U_0} + C_{T_{\delta_T}}|_0 \delta_T \right) + C_T|_0 \frac{1}{2} \rho_0 S \left. \frac{\partial (U_0 + u)^2}{\partial u} \right|_0 u \\ &= \bar{q}_0 S \left( C_{T_u}|_0 \frac{u}{U_0} + C_{T_{\delta_T}}|_0 \delta_T \right) + C_T|_0 \rho_0 S U_0^2 \frac{u}{U_0} \end{aligned} \quad (16.80)$$

e di dedurre la formula notevole

$$\Delta T = \bar{q}_0 S \left[ \left( 2 C_T|_0 + C_{T_u}|_0 \right) \frac{u}{U_0} + C_{T_{\delta_T}}|_0 \delta_T \right] \quad (16.81)$$

La perturbazione di spinta  $\Delta T$ , nelle varie sue espressioni qui ricavate per i diversi tipi di motorizzazione, opportunamente proiettata in assi stabilità, permette di ricavare le perturbazioni (16.72). Queste ultime si sovrappongono in generale alle componenti di equilibrio (16.73) o, nelle usuali ipotesi semplificative, alle (16.75).

## 16.5 Separazione tra moto longitudinale e moto latero-direzionale

Con le forme lineari approssimate (16.29), (16.71) e (16.80) delle perturbazioni delle azioni gravitazionali, aerodinamiche e propulsive — valide nell'intorno della soluzione nominale — si è completata la linearizzazione delle equazioni del moto.

Quanto discusso nei paragrafi precedenti consente di esprimere le perturbazioni a secondo membro delle (16.56) e (16.54) come segue:

$$\Delta X_A + \Delta X_T = X_u u + X_w w + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T \quad (16.82a)$$

$$\Delta Y_A + \Delta Y_T = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r \quad (16.82b)$$

$$\Delta Z_A + \Delta Z_T = Z_u u + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_T} \delta_T \quad (16.82c)$$

$$\Delta \mathcal{L}_A + \Delta \mathcal{L}_T = \mathcal{L}_v v + \mathcal{L}_p p + \mathcal{L}_r r + \mathcal{L}_{\delta_a} \delta_a + \mathcal{L}_{\delta_r} \delta_r \quad (16.82d)$$

$$\Delta \mathcal{M}_A + \Delta \mathcal{M}_T = \mathcal{M}_u u + \mathcal{M}_w w + \mathcal{M}_{\dot{w}} \dot{w} + \mathcal{M}_q q + \mathcal{M}_{\delta_e} \delta_e + \mathcal{M}_{\delta_T} \delta_T \quad (16.82e)$$

$$\Delta \mathcal{N}_A + \Delta \mathcal{N}_T = \mathcal{N}_v v + \mathcal{N}_p p + \mathcal{N}_r r + \mathcal{N}_{\delta_a} \delta_a + \mathcal{N}_{\delta_r} \delta_r \quad (16.82f)$$

dove si è posto

$$\varphi_\xi \triangleq \left. \frac{\partial(\varphi_A + \varphi_T)}{\partial \xi} \right|_0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} \varphi \in \{X, Y, Z, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}\} \\ \xi \in \{u, v, w, \dot{w}, \dots, \delta_T\} \end{cases} \quad (16.83)$$

Si osservino, in particolare, le espressioni (16.82c) e (16.82e); esse presentano termini proporzionali a  $\dot{w}$  che si ritroveranno a primo membro di due tra le equazioni linearizzate discusse più avanti.

Dall'esame delle (16.82) e dei rimanenti termini a primo e secondo membro delle equazioni linearizzate (16.54), (16.56), (16.34) e (16.45) si farà vedere qui che le piccole perturbazioni del moto di un velivolo intorno a una condizione nominale di moto equilibrato, ad ali livellate e a velocità angolare nulla possono essere analizzate ponendo due sottoproblemi separati. Il primo permetterà di caratterizzare la cosiddetta *dinamica longitudinale* del velivolo, cioè l'evoluzione delle perturbazioni delle variabili simmetriche. Con il secondo problema si analizzerà invece la cosiddetta *dinamica latero-direzionale*, cioè le piccole perturbazioni delle variabili non simmetriche. Ciò è noto come *separazione* del moto longitudinale da quello latero-direzionale.

La separazione tra la dinamica longitudinale e quella latero-direzionale può essere meglio compresa dopo aver riordinato le variabili di stato, definendo il vettore di stato

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{LON}} \\ \mathbf{x}_{\text{LD}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ x_{E,G} \\ z_{E,G} \\ \theta \\ v \\ p \\ r \\ y_{E,G} \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (16.84)$$

in cui le perturbazioni simmetriche hanno indici da 1 a 6 e le perturbazioni non simmetriche occupano i posti da 7 a 12.

Analogamente il vettore degli input perturbati sarà ridefinito come

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\text{LON}} \\ \mathbf{u}_{\text{LD}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_T \\ \delta_c \\ \delta_a \\ \delta_r \end{pmatrix} \quad (16.85)$$

Riordinando in modo analogo le variabili totali, cioè ponendo

$$\mathbf{X}_{\text{LON}} = \mathbf{X}_{\text{LON}0} + \mathbf{x}_{\text{LON}} \quad \mathbf{U}_{\text{LON}} = \mathbf{U}_{\text{LON}0} + \mathbf{u}_{\text{LON}} \quad (16.86)$$

$$\mathbf{X}_{\text{LD}} = \mathbf{X}_{\text{LD}0} + \mathbf{x}_{\text{LD}} \quad \mathbf{U}_{\text{LD}} = \mathbf{U}_{\text{LD}0} + \mathbf{u}_{\text{LD}} \quad (16.87)$$

le equazioni non lineari del moto possono dunque essere riscritte come segue:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m - Z_{\dot{w}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{M}_{\dot{w}} & I_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{W} \\ \dot{Q} \\ \dot{X}_{E,G} \\ \dot{Z}_{E,G} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_A + X_T + m(-gS_\theta + RV - QW) \\ (Z_A + Z_T)_* + m(gC_\phi C_\theta + QU - PV) \\ (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T)_* - (I_{xx} - I_{zz})PR - I_{xz}(P^2 - R^2) \\ C_\theta C_\psi U + (-C_\phi S_\psi + S_\phi S_\theta C_\psi)V + (S_\phi S_\psi + C_\phi S_\theta C_\psi)W \\ -S_\theta U + S_\phi C_\theta V + C_\phi C_\theta W \\ C_\phi Q - S_\phi R \end{pmatrix} \quad (16.88a)$$

e

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & -I_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{xz} & I_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{P} \\ \dot{R} \\ \dot{Y}_{E,G} \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_A + Y_T + m(gS_\Phi C_\Theta - RU + PW) \\ \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_T + (I_{yy} - I_{zz})QR + I_{xz}PQ \\ \mathcal{N}_A + \mathcal{N}_T + (I_{xx} - I_{yy})PQ - I_{xz}QR \\ C_\Theta S_\Psi U + (C_\Phi C_\Psi + S_\Phi S_\Theta S_\Psi)V + (-S_\Phi C_\Psi + C_\Phi S_\Theta S_\Psi)W \\ P + (S_\Phi Q + C_\Phi R)S_\Theta / C_\Theta \\ (S_\Phi Q + C_\Phi R) / C_\Theta \end{pmatrix} \quad (16.88b)$$

avendo posto

$$(Z_A + Z_T)_* \triangleq Z_A + Z_T - Z_{\dot{w}}, \quad (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T)_* \triangleq \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T - \mathcal{M}_{\dot{w}} \quad (16.89)$$

Le equazioni precedenti si scrivono sinteticamente nella forma compatta

$$\dot{X}_{\text{LON}} = f_{\text{LON}}(X, U) \quad (16.90a)$$

$$\dot{X}_{\text{LD}} = f_{\text{LD}}(X, U) \quad (16.90b)$$

dove le componenti  $f_1, \dots, f_6$  della funzione vettoriale  $f_{\text{LON}}$  ed  $f_7, \dots, f_{12}$  della  $f_{\text{LD}}$  possono dedursi dalle (16.88a)-(16.88b) dopo averle moltiplicate per le inverse delle matrici di massa

$$[M_{\text{LON}}] \triangleq \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m - Z_{\dot{w}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{M}_{\dot{w}} & I_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.91a)$$

$$[M_{\text{LD}}] \triangleq \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & -I_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{xz} & I_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.91b)$$

Si lascia al lettore l'esercizio di verificare le seguenti espressioni:

$$[M_{\text{LON}}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m - Z\dot{w}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{M}\dot{w}}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} & \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.91c)$$

$$[M_{\text{LD}}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{zz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & \frac{I_{xx}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.91d)$$

Per le particolari condizioni di trim adottate la soluzione nominale  $\mathbf{X}_N$  ha componenti da 7 a 12 (parte latero-direzionale) identicamente nulle:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \\ X_{11} \\ X_{12} \end{pmatrix}_0 = \begin{cases} \mathbf{X}_{\text{LON}} \\ \mathbf{X}_{\text{LD}} \end{cases}_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ W_0 \\ Q_0 \\ X_{E,G,0}(t) \\ Z_{E,G,0}(t) \\ \Theta_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \\ U_0 t \\ Z_{E,G,0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.92)$$

volò ad ali livellate,  
fusoliera orientata verso Nord
volò traslatorio, quota costante,  
assi velivolo  $\equiv$  assi stabilità

Inoltre, le componenti da 1 a 6 (parte longitudinale) del vettore di stato (16.92) sono tutte costanti — di cui  $X_2 = X_3 = X_6 = 0$  — eccezion fatta per la componente  $X_4$  corrispondente alla coordinata  $X_{E,G}$  che cresce linearmente con il tempo  $t$  a una velocità  $U_0$ .

Pertanto, il moto nominale è puramente longitudinale e permane fin quando le variabili

di input sono uguali alle regolazioni nominali

$$\mathbf{U}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\text{LON}} \\ \mathbf{U}_{\text{LD}} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \delta_{\text{T}} \\ \delta_{\text{e}} \\ \delta_{\text{a}} \\ \delta_{\text{r}} \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} \delta_{\text{T}0} \\ \delta_{\text{e}0} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.93)$$

Se la risposta  $\mathbf{X}$  del velivolo è una perturbazione arbitraria della soluzione nominale, in generale sia la parte longitudinale  $X_1(t), \dots, X_6(t)$  che la parte latero-direzionale  $X_7(t), \dots, X_{12}(t)$  saranno non nulle e potranno essere calcolate numericamente risolvendo il sistema completo delle equazioni non lineari del moto.

Per la simmetria del velivolo, se la risposta perturbata origina da una perturbazione arbitraria delle sole variabili simmetriche essa ha la parte latero-direzionale identicamente nulla.

A questo punto, si consideri la matrice jacobiana

$$[F] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{12}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_{12}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{U}}{\partial w} & \dots & \frac{\partial \dot{U}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{W}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{W}}{\partial w} & \dots & \frac{\partial \dot{W}}{\partial \psi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial w} & \dots & \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \psi} \end{bmatrix} \quad (16.94)$$

avente per elementi le sensibilità con cui i secondi membri  $f_i$  (con  $i = 1, \dots, 12$ ) delle equazioni del moto complete, non lineari variano in presenza di variazioni delle variabili di stato.

Analogamente, si definisce la matrice jacobiana

$$[G] \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} & \frac{\partial f_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} & \frac{\partial f_2}{\partial u_4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{12}}{\partial u_1} & \frac{\partial f_{12}}{\partial u_2} & \frac{\partial f_{12}}{\partial u_3} & \frac{\partial f_{12}}{\partial u_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \delta_{\text{T}}} & \frac{\partial \dot{U}}{\partial \delta_{\text{e}}} & \frac{\partial \dot{U}}{\partial \delta_{\text{a}}} & \frac{\partial \dot{U}}{\partial \delta_{\text{r}}} \\ \frac{\partial \dot{W}}{\partial \delta_{\text{T}}} & \frac{\partial \dot{W}}{\partial \delta_{\text{e}}} & \frac{\partial \dot{W}}{\partial \delta_{\text{a}}} & \frac{\partial \dot{W}}{\partial \delta_{\text{r}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \delta_{\text{T}}} & \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \delta_{\text{e}}} & \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \delta_{\text{a}}} & \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \delta_{\text{r}}} \end{bmatrix} \quad (16.95)$$

contenente le sensibilità con cui i secondi membri delle equazioni variano in presenza di variazioni delle variabili di input.

In generale le due matrici jacobiane possono essere espresse come matrici a blocchi

$$[F] \triangleq \begin{bmatrix} [F_{\text{LON}}] & [F_{\text{LD}}^{\text{LON}}] \\ [F_{\text{LON}}^{\text{LD}}] & [F_{\text{LD}}] \end{bmatrix}, \quad [G] \triangleq \begin{bmatrix} [G_{\text{LON}}] & [G_{\text{LD}}^{\text{LON}}] \\ [G_{\text{LON}}^{\text{LD}}] & [G_{\text{LD}}] \end{bmatrix} \quad (16.96)$$

I blocchi diagonali  $[F_{\text{LON}}]$  ed  $[F_{\text{LD}}]$  rappresentano l'influenza delle perturbazioni delle

variabili longitudinali  $\mathbf{x}_{\text{LON}}$  e latero-direzionali  $\mathbf{x}_{\text{LD}}$ , rispettivamente, sul moto longitudinale e sul moto latero-direzionale. Il blocco fuori diagonale  $[F_{\text{LD}}^{\text{LON}}]$  rappresenta gli effetti sul moto longitudinale delle perturbazioni delle variabili latero-direzionali. Il blocco fuori diagonale  $[F_{\text{LON}}^{\text{LD}}]$  rappresenta gli effetti sul moto latero-direzionale delle perturbazioni delle variabili longitudinali. Un'analoga interpretazione vale per i blocchi  $[G_{\text{LD}}^{\text{LON}}]$  e  $[G_{\text{LON}}^{\text{LD}}]$  in termini di perturbazioni delle regolazioni dei comandi.

Dalle discussioni dei paragrafi precedenti si deduce che, per un velivolo simmetrico e per piccole perturbazioni di una condizione di trim ad ali livellate, si può assumere

$$[F_{\text{LD}}^{\text{LON}}] = [F_{\text{LON}}^{\text{LD}}] = [G_{\text{LD}}^{\text{LON}}] = [G_{\text{LON}}^{\text{LD}}] = 0 \quad (16.97)$$

Per la (16.97) le equazioni linearizzate possono porsi nella forma

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{\text{LON}} \\ \dot{x}_{\text{LD}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{\text{LON}}] & 0 \\ 0 & [F_{\text{LD}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{\text{LON}} \\ x_{\text{LD}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [G_{\text{LON}}] & 0 \\ 0 & [G_{\text{LD}}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\text{LON}} \\ u_{\text{LD}} \end{Bmatrix} \quad (16.98)$$

cioè sono disaccoppiabili nei seguenti due sistemi separati di equazioni:

$$\{\dot{x}_{\text{LON}}\} = [F_{\text{LON}}]\{x_{\text{LON}}\} + [G_{\text{LON}}]\{u_{\text{LON}}\} \quad (16.99a)$$

$$\{\dot{x}_{\text{LD}}\} = [F_{\text{LD}}]\{x_{\text{LD}}\} + [G_{\text{LD}}]\{u_{\text{LD}}\} \quad (16.99b)$$

Le (16.99) rappresentano due sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti (*Linear Time-Invariant*, LTI) del tipo

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} \quad (16.100)$$

nelle incognite  $\mathbf{x}_{\text{LON}}(t)$  e  $\mathbf{x}_{\text{LD}}(t)$ , per assegnate leggi di comando  $\mathbf{u}_{\text{LON}}(t)$  e  $\mathbf{u}_{\text{LD}}(t)$ . Ciascuno dei due sistemi ha una matrice  $[A]$  di dimensioni  $6 \times 6$  e una matrice degli ingressi  $[B]$  di dimensioni  $6 \times n$ , con  $n = n_{\text{LON}} = 2$  oppure  $n = n_{\text{LD}} = 2$ . Caso per caso le dimensioni  $n_{\text{LON}}$  e  $n_{\text{LD}}$  possono essere diverse a seconda del numero di comandi del moto longitudinale e latero-direzionale (si pensi a un velivolo dotato di alette canard oppure di spoiler sulle semiali ad azionamento separato).

Ad entrambi i sistemi al tempo iniziale  $t_0 = 0$  possono associarsi due condizioni iniziali omogenee

$$\{x_{\text{LON}}\}_0 = \{u_{\text{LON}}\}_0 = 0 \quad (16.101a)$$

$$\{x_{\text{LD}}\}_0 = \{u_{\text{LD}}\}_0 = 0 \quad (16.101b)$$

Per definizione di moto perturbato, per leggi di comando identicamente nulle, entrambi i problemi di valori iniziali (16.99a)-(16.101a) e (16.99b)-(16.101b) hanno banalmente una soluzione identicamente nulla.

D'altra parte, dei sistemi (16.99) interessano le soluzioni non banali che originano da condizioni iniziali non nulle mantenendo i comandi bloccati (ingressi  $\mathbf{u}$  identicamente nulli). Questa non è altro che una *risposta libera* del sistema velivolo a comandi bloccati provocata da una perturbazione delle condizioni iniziali rispetto alla condizione nominale. In alternativa, interessa la risposta del sistema per leggi di comando variabili ma limitate nel tempo; per esempio è particolarmente interessante studiare le risposte che originano

da ingressi variabili sinusoidalmente.

Un'importante conseguenza del disaccoppiamento delle equazioni linearizzate intorno alla soluzione (16.92) è che, in ipotesi di piccole perturbazioni, una risposta latero-direzionale  $\mathbf{x}_{LD}(t)$  origina esclusivamente da disturbi delle variabili asimmetriche; disturbi che non comportano, in questa approssimazione, perturbazioni delle variabili simmetriche. Com'è ovvio, una piccola perturbazione  $\mathbf{x}_{LON}(t)$  del moto longitudinale origina esclusivamente da perturbazioni delle variabili simmetriche.

## 16.6 Modi della risposta libera e stabilità

### 16.6.1 Richiami sui sistemi lineari tempo-invarianti

Più avanti utilizzeremo alcuni esempi pratici per avere conferma di alcuni concetti che anticipiamo qui. Essi discendono dalla particolare forma delle (16.99) e (16.98). Queste equazioni rivelano un aspetto fondamentale della dinamica longitudinale e latero-direzionale delle piccole perturbazioni del volo traslato ad ali livellate. Le due dinamiche possono essere analizzate separatamente con gli strumenti noti dalla Teoria dei sistemi dinamici lineari tempo-invarianti.

Un sistema LTI ha in generale un'equazione di evoluzione lineare

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (16.102)$$

dove  $\mathbf{A}$  è la *matrice del sistema* di dimensioni  $n_x \times n_x$  e  $\mathbf{B}$  è la *matrice degli ingressi* di dimensioni  $n_x \times n_u$ . Inoltre, quando interessa monitorare un insieme di grandezze ausiliarie, funzioni delle variabili di stato e in generale anche delle variabili di input, esse vengono collezionate in un *vettore di osservazione*  $\mathbf{y}$  di dimensioni  $n_y$ . Anche per il vettore di osservazione vale un'equazione di osservazione lineare

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (16.103)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la *matrice di osservazione* di dimensioni  $n_y \times n_x$  e  $\mathbf{D}$  è una matrice di dimensioni  $n_y \times n_u$ . Quest'ultima rappresenta un'influenza diretta delle variabili di input sulle variabili osservate; spesso questa matrice può essere considerata nulla.

#### Risposta libera

La risposta libera del sistema è l'evoluzione  $\mathbf{x}(t)$  ottenuta a partire da un'assegnato stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  al tempo  $t = 0$ , per un input  $\mathbf{u}$  identicamente nullo. Essa non è che la soluzione del problema di valori iniziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (16.104)$$

ed è esprimibile nella forma

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad (16.105)$$

La matrice  $\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}$  è detta *matrice di transizione dello stato*. Per un sistema a ingressi nulli la transizione dallo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  allo stato  $\mathbf{x}$  al generico istante  $t$  è data

semplicemente dal prodotto dello stato di partenza per la matrice esponenziale di  $A t$ . Quest'ultima è definita come somma della serie

$$\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} \triangleq e^{\mathbf{A}t} \quad (16.106)$$

con  $\mathbf{A}^0 \triangleq \mathbf{I}$  la matrice identica di dimensione  $n_x$ .

### Risposta forzata

La soluzione completa del problema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ ed } \mathbf{u}(t) \text{ assegnata per } 0 \leq t \leq t_{\text{fin}} \quad (16.107)$$

in cui il forzamento *non* è identicamente nullo, è data dall'espressione

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_{\text{fin}}} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (16.108)$$

che non è altro che la somma della soluzione transitoria (16.105) e di un integrale di convoluzione delle funzioni  $e^{\mathbf{A}t}$  e  $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ . La (16.108) è nota anche come *formula risolvente* del problema (16.107).

La trasformata di Laplace della matrice di transizione di stato

$$\Phi(s) \triangleq \mathcal{L}[\Phi(t)] = \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} e^{-st} dt = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (16.109)$$

è nota come *matrice risolvente* di  $\mathbf{A}$ . Nella letteratura ingegneristica la matrice risolvente viene anche chiamata *matrice delle frequenze caratteristiche* o semplicemente *matrice caratteristica*.

Si osservi nella (16.109) l'uso dell'operatore  $\mathcal{L}[\cdot]$  con il quale si suole indicare la trasformata di Laplace. Se  $f(t)$  è una funzione del tempo, la trasformata di Laplace  $\mathcal{L}[f]$  viene indicata con  $f$  usando un carattere tipografico particolare. La trasformata è una funzione  $f(s)$  della variabile complessa  $s$ . Quest'ultima è anche detta *frequenza complessa*. La trasformata  $\Phi(s)$  espressa dalla (16.109) è una matrice che ha per elementi le trasformate dei corrispondenti elementi della matrice  $e^{\mathbf{A}t}$ .

Le possibili soluzioni del problema (16.107) per diverse leggi di input  $\mathbf{u}(t)$  si possono analizzare con la tecnica della trasformata di Laplace passando dal dominio del tempo al dominio della frequenza. Un noto risultato teorico è quello che fornisce la trasformata  $\mathbf{x}(s)$  della risposta  $\mathbf{x}(t)$  nella forma seguente:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)] \quad (16.110)$$

Nella (16.110), oltre alla condizione iniziale  $\mathbf{x}_0$  e alla trasformata del vettore degli ingressi  $\mathbf{u}(s)$ , compare proprio la matrice risolvente  $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ . Questa circostanza ne giustifica il nome.

## Polinomio caratteristico e autovalori del sistema

Dalla (16.110), essendo

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{|sI - A|} \quad (16.111)$$

con  $\text{Adj}(\cdot)$  l'operatore che calcola la matrice aggiunta di una generica matrice quadrata, si deduce la particolare importanza ai fini della stabilità di un sistema LTI del polinomio caratteristico

$$\Delta(s) \triangleq |sI - A| = s^{n_x} + a_1 s^{n_x-1} + a_2 s^{n_x-2} + \dots + a_{n_x-1} s + a_{n_x} \quad (16.112)$$

dato dal determinante di  $(sI - A)$ . Le radici del polinomio, cioè gli zeri dell'equazione caratteristica  $\Delta(s) = 0$ , non sono altro che gli autovalori della matrice  $A$  e definiscono i *modi di risposta* del sistema.

Il polinomio  $\Delta(s)$  può essere espresso in termini delle sue  $n_x$  radici ottenendo una forma più intuitiva dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s^{n_x} + a_1 s^{n_x-1} + a_2 s^{n_x-2} + \dots + a_{n_x-1} s + a_{n_x} \\ &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_{n_x}) = 0 \end{aligned} \quad (16.113)$$

Il generico autovalore  $\lambda_k$  è in generale un numero complesso, eventualmente di molteplicità superiore a 1, e viene indicato come

$$\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k \quad (j = \sqrt{-1} \text{ e } k = 1, \dots, n_x) \quad (16.114)$$

dove  $\sigma_k$  è la parte reale (eventualmente nulla) e  $\omega_k$  è la parte immaginaria (eventualmente nulla). Gli eventuali autovalori non reali compaiono sempre a coppie di numeri complessi coniugati

$$\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k, \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k^* = \sigma_k - j\omega_k \quad (16.115)$$

La figura 16.7 a fronte richiama le relazioni notevoli tra la parte reale  $\sigma = \text{Re}(\lambda)$ , la parte immaginaria  $\omega = \text{Im}(\lambda)$ , il coefficiente di smorzamento

$$\zeta = \cos(\tan^{-1} \omega/\sigma) \quad (16.116)$$

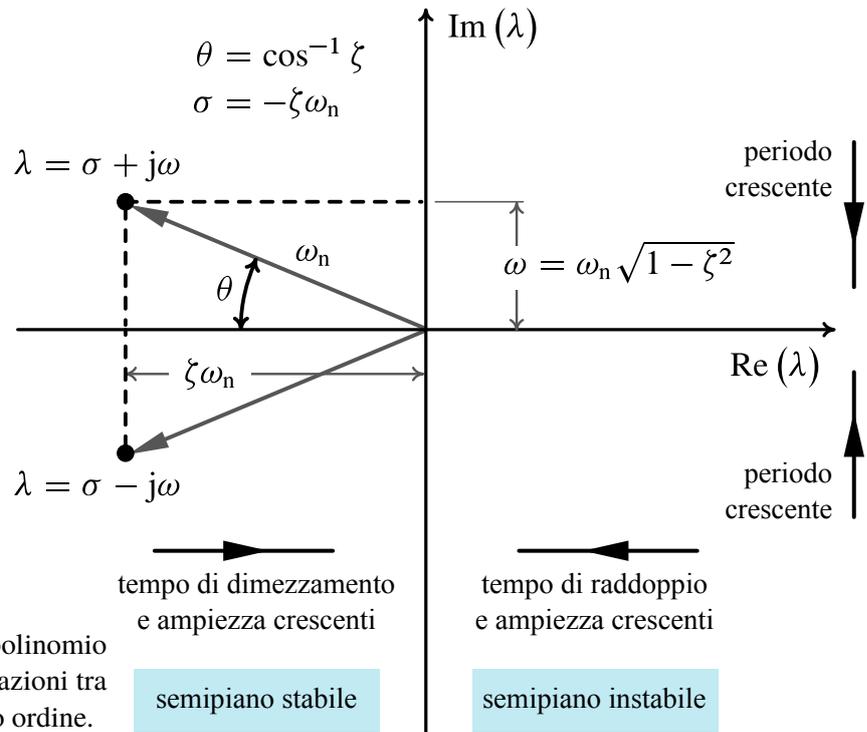
e la frequenza naturale

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad (16.117)$$

per un sistema del secondo ordine.

## Scomposizione modale della risposta

A questo punto si richiama un risultato notevole dell'Algebra lineare per il quale gli autovettori di una matrice quadrata  $n_x \times n_x$  con autovalori tutti distinti costituiscono una base di uno spazio vettoriale  $n_x$ -dimensionale. Pertanto, se la matrice  $A$  del sistema ha  $n_x$  autovalori tutti distinti, detti  $\lambda_k$  il generico  $k$ -mo autovalore,  $\xi_k$  e  $\chi_k$  gli autovettori sinistro e destro corrispondenti, l'espressione della risposta libera data dalla (16.105) può



**Figura 16.7** Radice  $\lambda = \sigma + j\omega$  del polinomio caratteristico nel piano complesso. Relazioni tra  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\zeta$  e  $\omega_n$  per un sistema del secondo ordine.

essere riformulata come segue:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = \sum_{k=1}^{n_x} \xi_k^0 e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\chi}_k \quad (16.118)$$

dove

$$\xi_k^0 = \boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{x}_0 \quad (16.119)$$

è la proiezione della condizione iniziale sul generico autovettore sinistro. La (16.118) è nota come *scomposizione modale* o *espansione modale* di  $\mathbf{x}(t)$ , in cui il generico vettore  $e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\chi}_k$  prende il nome di *k-mo modo naturale* o *modo proprio* del sistema.

La risposta di un sistema a ingressi nulli è quindi una combinazione lineare dei suoi ‘modi naturali di vibrare’. I coefficienti di peso  $\xi_k^0$  dei singoli modi sono collegati alla particolare condizione iniziale del sistema. È noto che per un insieme di autovettori distinti e normalizzati si ha

$$\boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_k = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq k \\ 1 & \text{per } i = k \end{cases} \quad \boldsymbol{\chi}_i \cdot \boldsymbol{\chi}_k = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq k \\ 1 & \text{per } i = k \end{cases}$$

Pertanto, la (16.105) mostra che i singoli modi del sistema  $e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\chi}_k$  corrispondono alle particolari soluzioni  $\mathbf{x}(t)$  ottenute a partire da condizioni iniziali  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\xi}_k$ . In tali casi, infatti, solo il coefficiente di peso *k*-mo è pari a 1 mentre i rimanenti sono nulli. In generale, per una condizione iniziale  $\mathbf{x}_0$  qualsiasi la soluzione sarà data dalla sovrapposizione (somma pesata) dei modi di risposta libera.

### Approfondimento 16.1: Scomposizione modale e autovalori complessi

Le relazioni (16.119) e (16.118), valide in generale, sono facilmente deducibili nel caso di autovalori distinti e reali, per i quali anche le componenti degli autovettori sono reali. Se si considera la matrice

$$V = [\chi_1 \cdots \chi_{n_x}] \quad (16.120)$$

le cui colonne coincidono con gli autovettori destri, si ha

$$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_x} \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_x}) \triangleq \Lambda \quad (16.121)$$

La (16.121) è una *trasformazione simile* che diagonalizza la matrice del sistema  $A$ . È facile far vedere che la matrice di transizione è esprimibile in termini della matrice diagonale  $\Lambda$ , ovvero che

$$e^{At} = Ve^{At}V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{n_x} t} \end{bmatrix} V^{-1} \quad (16.122)$$

La (16.122) corrisponde alla relazione (16.118) potendo porsi

$$W \triangleq V^{-1} = \begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \vdots \\ \xi_{n_x}^T \end{bmatrix} \quad (16.123)$$

Il prodotto  $Ve^{At}$  nella (16.122) è una matrice che ha per colonne i modi  $e^{\lambda_k t} \chi_k$  mentre la  $W = V^{-1}$ , che ha per righe gli autovettori sinistri, è destinata alla moltiplicazione per il vettore dei valori iniziali  $x_0$  in accordo con la formula risolvente (16.105).

Quando gli autovalori di  $A$  sono presenti a coppie di valori complessi coniugati il procedimento di analisi dei modi oscillanti è simile ma un po' più complicato.

Si consideri, per esempio, una matrice  $2 \times 2$  di autovalori  $\lambda_1 = \sigma + j\omega$  e  $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\omega$  ed autovettori corrispondenti  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , con  $\chi_2 = \chi_1^*$ . Dalla (16.121) si ha

$$\begin{aligned} A &= [\chi_1 \mid \chi_2] \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} [\chi_1 \mid \chi_2]^{-1} \\ &= [\chi_1 \mid \chi_1^*] \begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix} [\chi_1 \mid \chi_1^*]^{-1} = V\Lambda V^{-1} \end{aligned} \quad (16.124)$$

A questo punto se si trasforma la  $A$  secondo le matrici

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (16.125)$$

si ottiene

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{V} \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}^{-1}) = (\mathbf{V} \mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T})(\mathbf{V} \mathbf{T})^{-1} \quad (16.126)$$

Svolgendo i passaggi si può verificare che l'espressione precedente si presenta nella semplice forma

$$\mathbf{A} = \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right]^{-1} \quad (16.127)$$

in cui tutte le matrici hanno elementi reali. La (16.127) suggerisce che nel caso di radici complesse del polinomio caratteristico la  $\mathbf{A}$  è trasformabile tramite una matrice reale in una matrice reale e diagonale a blocchi.

Per il caso particolare qui considerato, la (16.122) diventa

$$e^{\mathbf{A}t} = \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right]^{-1} \quad (16.128)$$

Osservando che

$$\left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right]^{-1} \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16.129)$$

si deduce che, dato il problema di valori iniziali (16.104), una condizione iniziale  $\mathbf{x}(0)$  coincidente con  $\operatorname{Re}(\chi_1)$ ,  $\operatorname{Im}(\chi_1)$  o una loro combinazione lineare, va ad eccitare una risposta libera corrispondente al modo considerato. Per esempio, se si assegna  $\mathbf{x}(0) = \operatorname{Re}(\chi_1)$ , dalle (16.105), (16.128) e (16.129) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right] e^{\sigma t} \\ &\quad \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right]^{-1} \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \right] \\ &= \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= e^{\sigma t} \left[ \operatorname{Re}(\chi_1) \mid \operatorname{Im}(\chi_1) \right] \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{bmatrix} \\ &= e^{\sigma t} \left( \operatorname{Re}(\chi_1) \cos(\omega t) - \operatorname{Im}(\chi_1) \sin(\omega t) \right) \quad (16.130) \end{aligned}$$

Questa relazione mostra che, per la particolare condizione iniziale scelta, la risposta è esprimibile semplicemente in termini di  $\lambda_1$  e  $\chi_1$ .

La (16.130) può essere analizzata interpretandone opportunamente i termini della parentesi tonda a secondo membro. Delle singole componenti complesse di  $\chi_1$  si può dare una rappresentazione polare, visualizzandole cioè come vettori del piano complesso applicati all'origine. Le proiezioni di tali vettori sull'asse reale sono date dalle componenti

di  $\text{Re}(\chi_1)$ . Pertanto, le componenti di  $\text{Re}(\chi_1) \cos(\omega t)$  sono quelle dei medesimi vettori che ruotano intorno all'origine con velocità angolare  $\omega$ . Le componenti di  $\chi_1$  interpretate come vettori rotanti del piano complesso prendono il nome di *fasori*. Si osserva facilmente che il termine  $-\text{Im}(\chi_1) \sin(\omega t)$  rappresenta le componenti sull'asse immaginario degli stessi fasori sfasati di  $\pi/2$ . Infine, il termine  $e^{\sigma t}$  rappresenta un fattore di scala che, per un sistema stabile dinamicamente, tende asintoticamente a zero.

Si veda anche a tal proposito l'approfondimento 16.7.5.

## Stabilità

Nell'analisi della stabilità di un sistema dinamico interessa verificare se in risposta a determinati ingressi o condizioni iniziali si ottiene un'evoluzione  $\mathbf{x}(t)$  la cui norma  $|\mathbf{x}|$  è limitata o divergente al crescere di  $t$ . Nel caso particolare della dinamica dei velivoli la  $\mathbf{x}$  è il discostamento della condizione di volo corrente da quella nominale. Per un velivolo dinamicamente stabile i disturbi arrecati alla condizione di riferimento di volo equilibrato decadono nel tempo e il sistema tende a ritornare in condizioni nominali.

A seconda se si considerino variazioni nell'ingresso, detto anche *forzamento*, o nelle condizioni iniziali si parla, rispettivamente, di *stabilità rispetto al forzamento* oppure di *stabilità rispetto alle condizioni iniziali*.

Un sistema lineare a ingresso  $\mathbf{u}$  identicamente nullo si definisce stabile rispetto alle condizioni iniziali se la soluzione (16.105) resta limitata al tendere del tempo all'infinito, per qualunque condizione iniziale. Il sistema si dice altrimenti instabile. All'interno della stabilità si distinguono due sottocasi. Un sistema si dirà *asintoticamente* stabile, o stabile *in senso stretto*, se per una  $\mathbf{x}_0$  non nulla la soluzione tende a zero al tendere del tempo all'infinito. Invece si dirà *marginalmente* stabile se il sistema è stabile ma non in senso stretto.

Pertanto, è possibile enunciare la seguente condizione di stabilità per un sistema a tempo continuo, lineare, a coefficienti costanti:

Un sistema LTI a tempo continuo, con matrice di evoluzione  $\mathbf{A}$  ad autovalori tutti distinti, è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa; è marginalmente stabile se uno o più autovalori hanno parte reale uguale a 0 e quella dei rimanenti non è positiva; è instabile se uno o più autovalori hanno parte reale positiva.

La suddetta condizione si riferisce ovviamente alla (16.105) e all'andamento nel tempo delle funzioni esponenziali  $e^{\lambda_k t}$  dei modi di risposta libera.

Una proprietà della stabilità rispetto alle condizioni iniziali di un sistema LTI risulta di notevole importanza: se, per una data condizione iniziale  $\mathbf{x}_0$ , un sistema lineare a ingressi nulli possiede una soluzione  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$  tale andamento si verificherà per tutte le altre possibili soluzioni al variare di  $\mathbf{x}_0$ . Ciò non è necessariamente vero per un sistema non lineare.

Per quanto riguarda la stabilità rispetto al forzamento, il suo studio richiede la soluzione delle equazioni di evoluzione con ingresso non nullo, che è possibile effettuare mediante l'uso della trasformata di Laplace a partire dalla (16.108). Esistono due tipi di stabilità rispetto al forzamento: la stabilità rispetto a disturbi applicati per un tempo limitato e la stabilità rispetto a disturbi applicati con continuità nel tempo ma di ampiezza limitata.

Per forzamenti (disturbi) applicati prima di un certo tempo  $t_0$ , quindi identicamente nulli dopo tale istante, l'equivalenza con la stabilità rispetto alle condizioni iniziali è evidente data la linearità: ciò che si ottiene per effetto del disturbo è una variazione dello stato del sistema al tempo  $t_0$ , che ha lo stesso effetto di una perturbazione delle condizioni iniziali applicata all'istante  $t_0$ . Mediante un'analisi nel piano complesso della soluzione ottenuta per mezzo della trasformata di Laplace, è possibile dimostrare che la stessa proprietà vale anche per disturbi che non sono identicamente nulli per  $t > t_0$  purché vadano a zero abbastanza velocemente per  $t \rightarrow \infty$ .

Nel caso di disturbi qualsiasi presenti con continuità nel tempo non è sensato aspettarsi che la perturbazione dello stato del sistema vada a zero per  $t \rightarrow \infty$ . La definizione di stabilità che viene data in questo caso è la cosiddetta *stabilità ingresso limitato/uscita limitata*. Si dice cioè che per ingressi uniformemente limitati nel tempo, cioè forzamenti la cui norma rimanga minore di una certa costante per  $t \rightarrow \infty$ , il sistema lineare è stabile in tal senso se l'uscita, o la perturbazione nello stato, resta limitata. Anche in questo caso è possibile dimostrare, per mezzo della trasformata di Laplace, che la stabilità ingresso limitato/uscita limitata è conseguenza della stabilità asintotica rispetto a disturbi nelle condizioni iniziali. È quindi sufficiente accertare quest'ultima.

Dunque, è notevole il risultato della Teoria dei sistemi lineari secondo cui *la stabilità rispetto al forzamento è generalmente conseguenza della stabilità rispetto alle condizioni iniziali*, cosicché non è necessario appurarla separatamente. Pertanto la rappresentazione modale (16.118) è significativa anche per un sistema dinamico sottoposto a ingressi  $u$  non nulli (e non divergenti).

## 16.6.2 Modi di risposta dei velivoli

Ai richiami precedenti seguono alcune considerazioni basate sull'esperienza e valide per la grande maggioranza dei velivoli ad architettura tradizionale.

Le  $n_x = 12$  equazioni linearizzate del moto di un velivolo sono caratterizzate da un polinomio caratteristico del tipo

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s^{12} + a_{11}s^{11} + \dots + a_1s + a_0 \\ &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_{12}) \quad (16.131) \end{aligned}$$

di radici  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n_x$ ). Dalla separazione delle equazioni, cioè dal fatto che la matrice  $[F]$  nella (16.98) è diagonale a blocchi, consegue una circostanza importante: è possibile separare gli autovalori in due gruppi distinti

$$\Delta(s) = \underbrace{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_6)}_{\text{DINAMICA LONGITUDINALE, } \Delta_{\text{LON}}(s)} \underbrace{(s - \lambda_7)(s - \lambda_8) \cdots (s - \lambda_{12})}_{\text{DINAMICA LATERO-DIREZIONALE, } \Delta_{\text{LD}}(s)} = 0 \quad (16.132)$$

pertinenti, rispettivamente, alla dinamica longitudinale e alla dinamica latero-direzionale. Si potrà dunque porre

$$\Delta(s) = \Delta_{\text{LON}}(s) \Delta_{\text{LD}}(s) \quad (16.133)$$

con  $\Delta_{\text{LON}}(s)$  e  $\Delta_{\text{LD}}(s)$  i polinomi caratteristici associati, rispettivamente, alla  $[F_{\text{LON}}]$  nella (16.99a) e alla  $[F_{\text{LD}}]$  nella (16.99b).

## Modi di risposta longitudinale

Il polinomio caratteristico del moto longitudinale può essere tipicamente espresso come segue:

$$\Delta_{\text{LON}}(s) = \underbrace{(s - \lambda_{\text{RANGE}})}_{\substack{\lambda_k \rightarrow \\ \text{reale}}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{HEIGHT}})}_{\text{reale}} \times \underbrace{(s - \lambda_{\text{PH}})}_{\lambda_k \rightarrow \text{complesso}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{PH}}^*)}_{\text{complesso}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{SP}})}_{\text{complesso}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{SP}}^*)}_{\text{complesso}} \quad (16.134)$$

La (16.134) mostra che le  $n_x = 6$  radici sono normalmente costituite da due valori reali distinti  $\lambda_{\text{RANGE}}$  e  $\lambda_{\text{HEIGHT}}$  e da due coppie distinte di numeri complessi coniugati  $(\lambda_{\text{SP}}, \lambda_{\text{SP}}^*)$  e  $(\lambda_{\text{PH}}, \lambda_{\text{PH}}^*)$ . Le due radici reali sono associate rispettivamente alle equazioni cinematiche linearizzate delle perturbazioni  $x_{E,G}$  (di distanza percorsa) e  $z_{E,G}$  (di quota). Per tale motivo vengono dette radice del modo di *range* e radice del modo di *height*.

Le rimanenti radici complesse rappresentano chiaramente due componenti modali oscillanti. Tipicamente le loro frequenze assumono valori alquanto diversi: la prima componente, detta *modo di lungo periodo* o *di fugoide* (*phugoid*, PH), possiede una frequenza bassa e uno smorzamento relativamente piccolo; l'altra componente oscillatoria, detta *modo di corto periodo* (*short period*, SP), è caratterizzata invece da una frequenza elevata e da un forte smorzamento.

I tipici modi di risposta oscillanti della dinamica longitudinale possono essere espressi in termini della loro frequenza naturale  $\omega_n$  e del loro rapporto di smorzamento  $\zeta$ . Esplicitando l'espressione delle radici complesse si può porre per il modo di fugoide

$$(s - \lambda_{\text{PH}})(s - \lambda_{\text{PH}}^*) = \left[ s - (\sigma_{\text{PH}} + j\omega_{\text{PH}}) \right] \left[ s - (\sigma_{\text{PH}} - j\omega_{\text{PH}}) \right] = s^2 - 2\zeta_{\text{PH}} \omega_{n,\text{PH}} s + \omega_{n,\text{PH}}^2 \quad (16.135)$$

e per il modo di corto periodo

$$(s - \lambda_{\text{SP}})(s - \lambda_{\text{SP}}^*) = \left[ s - (\sigma_{\text{SP}} + j\omega_{\text{SP}}) \right] \left[ s - (\sigma_{\text{SP}} - j\omega_{\text{SP}}) \right] = s^2 - 2\zeta_{\text{SP}} \omega_{n,\text{SP}} s + \omega_{n,\text{SP}}^2 \quad (16.136)$$

Pertanto la (16.134) viene riformulata come segue:

$$\Delta_{\text{LON}}(s) = \underbrace{(s - \lambda_{\text{RANGE}})}_{\text{RANGE MODE}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{HEIGHT}})}_{\text{HEIGHT MODE}} \times \underbrace{(s^2 + 2\zeta_{\text{PH}} \omega_{n,\text{PH}} s + \omega_{n,\text{PH}}^2)}_{\text{PHUGOID MODE}} \underbrace{(s^2 + 2\zeta_{\text{SP}} \omega_{n,\text{SP}} s + \omega_{n,\text{SP}}^2)}_{\text{SHORT PERIOD MODE}} \quad (16.137)$$

Va infine osservato che normalmente si ha

$$\lambda_{\text{RANGE}} \approx 0 \quad , \quad \lambda_{\text{HEIGHT}} \approx 0 \quad (16.138)$$

dunque i modi di *range* e di *height*, per i quali si può assumere una radice nulla di

molteplicità 2, sono di scarsa rilevanza. Per tale motivo dalle equazioni linearizzate della dinamica longitudinale solitamente si escludono le due equazioni cinematiche della traslazione, cioè le matrici  $[F_{\text{LON}}]$  e  $[G_{\text{LON}}]$  vengono opportunamente ridotte eliminando le righe e le colonne corrispondenti.

Si osserva dunque che la dinamica longitudinale dei velivoli è essenzialmente caratterizzata da due modi di risposta oscillanti determinati dall'interazione dei disturbi di velocità, angolo d'attacco e angolo di beccheggio.

Più avanti sarà discussa la dipendenza degli autovalori  $\lambda_{\text{PH}}$  e  $\lambda_{\text{SP}}$  dalle caratteristiche aerodinamiche, propulsive e inerziali del velivolo.

### Modi di risposta latero-direzionale

Il polinomio caratteristico del moto latero-direzionale può essere espresso come segue:

$$\Delta_{\text{LD}}(s) = \underbrace{(s - \lambda_{\text{CROSSRANGE}})}_{\lambda_k \rightarrow \text{reale}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{HEADING}})}_{\text{reale}} \times \underbrace{(s - \lambda_{\text{SPIRAL}})}_{\lambda_k \rightarrow \text{reale}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{ROLL}})}_{\text{reale}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{DR}})}_{\text{complesso}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{DR}}^*)}_{\text{complesso}} \quad (16.139)$$

La (16.139) mostra che le  $n_x = 6$  radici sono tipicamente costituite da 4 valori reali distinti  $\lambda_{\text{CROSSRANGE}}$ ,  $\lambda_{\text{HEADING}}$ ,  $\lambda_{\text{SPIRAL}}$ ,  $\lambda_{\text{ROLL}}$  e da una coppia  $(\lambda_{\text{DR}}, \lambda_{\text{DR}}^*)$  di numeri complessi coniugati.

Le prime due radici reali sono associate alle due equazioni cinematiche linearizzate, rispettivamente, della perturbazione  $y_{E,G}$  (della coordinata trasversale) e della perturbazione  $\psi$  (dell'angolo di prua). Per tale motivo esse vengono dette radice del *modo di crossrange* e radice del *modo di heading*.

Le rimanenti radici reali  $\lambda_{\text{SPIRAL}}$  e  $\lambda_{\text{ROLL}}$ , tipicamente negative, sono associate alle componenti modali note, rispettivamente, come *modo di spirale* e *modo di rollio*. La coppia di radici complesse rappresenta chiaramente una componente modale oscillante detta *modo di dutch roll* (DR). Questo tipico modo di risposta oscillante della dinamica latero-direzionale viene espresso in termini della sua frequenza naturale  $\omega_{n,\text{DR}}$  e del suo rapporto di smorzamento  $\zeta_{\text{DR}}$ .

Esplicitando l'espressione delle due radici complesse coniugate si può porre per il modo di *dutch roll*

$$(s - \lambda_{\text{DR}})(s - \lambda_{\text{DR}}^*) = \left[ s - (\sigma_{\text{DR}} + j\omega_{\text{DR}}) \right] \left[ s - (\sigma_{\text{DR}} - j\omega_{\text{DR}}) \right] = s^2 + 2\zeta_{\text{DR}}\omega_{n,\text{DR}}s + \omega_{n,\text{DR}}^2 \quad (16.140)$$

riformulando la (16.139) come segue:

$$\Delta_{\text{LD}}(s) = \underbrace{(s - \lambda_{\text{CROSSRANGE}})}_{\text{CROSSRANGE MODE}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{HEADING}})}_{\text{HEADING MODE}} \times \underbrace{(s - \lambda_{\text{SPIRAL}})}_{\text{SPIRAL MODE}} \underbrace{(s - \lambda_{\text{ROLL}})}_{\text{ROLL MODE}} \underbrace{(s^2 + 2\zeta_{\text{DR}}\omega_{n,\text{DR}}s + \omega_{n,\text{DR}}^2)}_{\text{DUTCH-ROLL MODE}} \quad (16.141)$$

Normalmente le due radici di *crossrange* e di *heading* sono molto piccole

$$\lambda_{\text{CROSSRANGE}} \approx 0 \quad , \quad \lambda_{\text{HEADING}} \approx 0 \quad (16.142)$$

e i modi ad esse associati sono considerati irrilevanti. Per tale motivo dalle equazioni linearizzate della dinamica latero-direzionale solitamente si escludono le due equazioni cinematiche della traslazione laterale e dell'orientamento della prua, cioè le matrici  $[F_{LD}]$  e  $[G_{LD}]$  vengono opportunamente ridotte eliminando le righe e le colonne corrispondenti.

La dinamica latero-direzionale dei velivoli è essenzialmente caratterizzata da: (i) un modo non oscillante, lentamente convergente o eventualmente divergente detto modo di spirale, (ii) un modo non oscillante, rapidamente convergente detto modo di rollio, (iii) un modo oscillatorio, mediamente smorzato, di frequenza relativamente bassa detto modo di *dutch roll*.

Più avanti sarà discussa la dipendenza degli autovalori  $\lambda_{\text{SPIRAL}}$ ,  $\lambda_{\text{ROLL}}$  e  $\lambda_{\text{DR}}$  dalle caratteristiche aerodinamiche, propulsive e inerziali del velivolo.

## 16.7 Dinamica longitudinale

Per confermare le anticipazioni dei paragrafi precedenti sulla natura degli autovalori delle equazioni linearizzate della dinamica del volo andiamo ora a esplicitarle in termini delle variabili in gioco. Cominciamo con le equazioni della dinamica longitudinale.

L'equazione (16.99a) delle perturbazioni del moto longitudinale può essere convenientemente espressa a partire dalla (16.88a), tenendo conto delle (16.82a), (16.82c), (16.82e), della prima e terza equazione delle (16.42) e della seconda delle (16.33). Accorpando queste espressioni e ponendole in forma matriciale si perviene all'equazione (16.143) riportata per convenienza nella figura 16.8 nella pagina successiva.

La (16.143) si presenta ancora in una forma 'ibrida', poiché a primo membro compare il prodotto della matrice di massa  $[M_{\text{LON}}]$ , data dalla (16.91a), per  $\dot{\mathbf{x}}_{\text{LON}}$ . Moltiplicando il primo e secondo membro della (16.143) per,  $[M_{\text{LON}}]^{-1}$ , la cui espressione è data dalla (16.91c), si perviene all'equazione (16.144) nella figura 16.9 a pagina 48. Quest'ultima si presenta nella forma attesa

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{LON}} = \mathbf{A}_{\text{LON}} \mathbf{x}_{\text{LON}} + \mathbf{B}_{\text{LON}} \mathbf{u}_{\text{LON}} \quad (16.146)$$

corrispondente all'equazione di evoluzione (16.102) di un sistema LTI.

### 16.7.1 Equazioni del moto longitudinale perturbato

Per semplicità la (16.146) viene associata a una forma ridotta della (16.144) ottenuta eliminando le equazioni corrispondenti ai modi di *range* e di *height*. Dunque, il vettore  $\mathbf{x}_{\text{LON}}$  della (16.146) si otterrà da quello definito dalla (16.84) eliminandone la quarta e la quinta componente. Si perviene quindi all'equazione (16.145) della figura 16.10 in cui si ha

$$\mathbf{x}_{\text{LON}} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}_{\text{LON}} = \begin{Bmatrix} \delta_T \\ \delta_e \end{Bmatrix} \quad (16.147a)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m - Z_{\dot{w}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{M}_{\dot{w}} & I_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{x}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w - Q_0 m & -W_0 m & 0 & 0 & -C_{\theta_0} g m \\ Z_u + Q_0 m & Z_w & Z_q + U_0 m & 0 & 0 & -S_{\theta_0} g m \\ \mathcal{M}_u & \mathcal{M}_w & \mathcal{M}_q & 0 & 0 & 0 \\ C_{\theta_0} & S_{\theta_0} & 0 & 0 & 0 & C_{\theta_0} W_0 - S_{\theta_0} U_0 \\ -S_{\theta_0} & C_{\theta_0} & 0 & 0 & 0 & -S_{\theta_0} W_0 - C_{\theta_0} U_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ x_{E,G} \\ z_{E,G} \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_\Gamma} & X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_\Gamma} & Z_{\delta_e} \\ \mathcal{M}_{\delta_\Gamma} & \mathcal{M}_{\delta_e} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\Gamma \\ \delta_e \end{Bmatrix} \quad (16.143)$$

Figura 16.8 Equazioni linearizzate ibride della dinamica longitudinale.

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{x}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m} & \frac{X_w - Q_0 m}{m} & -W_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Z_u + Q_0 m}{m - Z\dot{w}} & \frac{Z_w}{m - Z\dot{w}} & \frac{Z_q + U_0 m}{m - Z\dot{w}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathcal{M}_u}{I_{yy}} + \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}(Z_u + Q_0 m)}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} & \frac{\mathcal{M}_w}{I_{yy}} + \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}Z_w}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} & \frac{\mathcal{M}_q}{I_{yy}} + \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}(Z_q + U_0 m)}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} & 0 & 0 & 0 \\ C_{\Theta_0} & S_{\Theta_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_{\Theta_0} & C_{\Theta_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ x_{E,G} \\ z_{E,G} \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{X_{\delta_T}}{m} & \frac{X_{\delta_e}}{m} \\ \frac{Z_{\delta_T}}{m - Z\dot{w}} & \frac{Z_{\delta_e}}{m - Z\dot{w}} \\ \frac{\mathcal{M}_{\delta_T}}{I_{yy}} + \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}Z_{\delta_T}}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} & \frac{\mathcal{M}_{\delta_e}}{I_{yy}} + \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}Z_{\delta_e}}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_T \\ \delta_e \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{X_w - Q_0 m}{m} \\ \frac{Z_w}{m - Z\dot{w}} \\ \frac{\mathcal{M}_w}{I_{yy}} + \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}Z_w}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} \\ S_{\Theta_0} \\ C_{\Theta_0} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ x_{E,G} \\ z_{E,G} \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -C_{\Theta_0}g \\ \frac{S_{\Theta_0}gm}{m - Z\dot{w}} \\ \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}S_{\Theta_0}gm}{I_{yy}(m - Z\dot{w})} \\ C_{\Theta_0}W_0 - S_{\Theta_0}U_0 \\ -S_{\Theta_0}W_0 - C_{\Theta_0}U_0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ x_{E,G} \\ z_{E,G} \\ \theta \end{pmatrix} \quad (16.144)$$

Figura 16.9 Equazioni linearizzate della dinamica longitudinale.

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_u & \hat{X}_w & 0 & -g C_{\theta_0} \\ \frac{\hat{Z}_u}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{\hat{Z}_w}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{\hat{Z}_q + U_0}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{-g S_{\theta_0}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} \\ \hat{M}_u + \hat{k} \hat{Z}_u & \hat{M}_w + \hat{k} \hat{Z}_w & \hat{M}_q + \hat{k} (\hat{Z}_q + U_0) & -\hat{k} g S_{\theta_0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{X}_{\delta_T} & \hat{X}_{\delta_e} \\ \frac{\hat{Z}_{\delta_T}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{\hat{Z}_{\delta_e}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} \\ \hat{M}_{\delta_T} + \hat{k} \hat{Z}_{\delta_T} & \hat{M}_{\delta_e} + \hat{k} \hat{Z}_{\delta_e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_T \\ \delta_e \end{pmatrix} \quad (16.145)$$

con

$$\kappa = \frac{\hat{M}_{\dot{w}}}{m - \hat{Z}_{\dot{w}}}$$

$$\hat{X}_\xi = \frac{X_\xi}{m}, \quad \hat{Z}_\xi = \frac{Z_\xi}{m}, \quad \hat{M}_\xi = \frac{M_\xi}{I_{yy}}, \quad \text{per } \xi \in \{u, w, \dot{w}, q, \delta_T, \delta_e\} \quad \text{e} \quad \hat{k} = \frac{\hat{M}_{\dot{w}}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}}$$

**Figura 16.10** Equazioni linearizzate della dinamica longitudinale. Le matrici del sistema sono ridotte eliminando le equazioni delle perturbazioni  $x_{E,G}$  e  $z_{E,G}$ . Le equazioni sono semplificate perché valide per  $Q_0 = 0$  (volo traslato iniziale) e  $W_0 = 0$  (in assi stabilità).

$$\mathbf{A}_{\text{LON}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_u & \hat{X}_w & 0 & -g C_{\Theta_0} \\ \frac{\hat{Z}_u}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{\hat{Z}_w}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{\hat{Z}_q + U_0}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{-g S_{\Theta_0}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} \\ \hat{\mathcal{M}}_u + \hat{\kappa} \hat{Z}_u & \hat{\mathcal{M}}_w + \hat{\kappa} \hat{Z}_w & \hat{\mathcal{M}}_q + \hat{\kappa} (\hat{Z}_q + U_0) & -\hat{\kappa} g S_{\Theta_0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.147b)$$

$$\mathbf{B}_{\text{LON}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{\delta_T} & \hat{X}_{\delta_e} \\ \frac{\hat{Z}_{\delta_T}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} & \frac{\hat{Z}_{\delta_e}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} \\ \hat{\mathcal{M}}_{\delta_T} + \hat{\kappa} \hat{Z}_{\delta_T} & \hat{\mathcal{M}}_{\delta_e} + \hat{\kappa} \hat{Z}_{\delta_e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.147c)$$

con

$$\hat{X}_\xi = \frac{X_\xi}{m} \quad \hat{Z}_\xi = \frac{Z_\xi}{m} \quad \hat{\mathcal{M}}_\xi = \frac{\mathcal{M}_\xi}{I_{yy}} \quad (16.147d)$$

per  $\xi \in \{u, w, \dot{w}, q, \delta_T, \delta_e\}$  e

$$\kappa = \frac{\mathcal{M}_{\dot{w}}}{m - Z_{\dot{w}}} \quad , \quad \hat{\kappa} = \frac{\hat{\mathcal{M}}_{\dot{w}}}{1 - \hat{Z}_{\dot{w}}} \quad (16.147e)$$



Le (16.147) sono valide per il moto perturbato longitudinal-simmetrico a partire da condizioni di volo equilibrate ad ali livellate e sono da intendersi in assi stabilità con traiettoria iniziale inclinata di un angolo  $\Gamma_0 = \Theta_0$  rispetto all'orizzontale.

Le matrici (16.147b) e (16.147c) rivestono un ruolo fondamentale nello studio della dinamica longitudinale. In esse, oltre alle grandezze relative alla condizione iniziale e alle caratteristiche geometriche e inerziali del velivolo, compaiono combinazioni delle derivate di stabilità. Disporre dei valori accurati di queste ultime per le varie condizioni di riferimento di interesse è un aspetto chiave di alcune attività progettuali. Per esempio, nell'implementazione di sistemi di *aumento artificiale* della stabilità (*Stability Augmentation Systems*, SAS) o nella sintesi di algoritmi di controllo automatico dell'assetto.

Le derivate di stabilità longitudinali sono brevemente ricavate qui di seguito.

## 16.7.2 Derivate di stabilità longitudinali

Le grandezze che interessano sono le componenti della forza  $X$  e  $Z$  e di momento di beccheggio  $\mathcal{M}$  risultanti dall'azione aerodinamica e propulsiva. In questo contesto valgono quindi le seguenti posizioni:

$$X \triangleq X_A + X_T, \quad Z \triangleq Z_A + Z_T, \quad \mathcal{M} \triangleq \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T \quad (16.148)$$

insieme alle definizioni dei coefficienti corrispondenti:

$$C_X = \frac{X_A + X_T}{\bar{q}_0 S}, \quad C_Z = \frac{Z_A + Z_T}{\bar{q}_0 S}, \quad C_{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T}{\bar{q}_0 S \bar{c}} \quad (16.149)$$

Si confrontino queste espressioni con le (16.82)-(16.83).

Va ricordato che in letteratura, piuttosto che le  $X_\xi$ ,  $Z_\xi$  e  $\mathcal{M}_\xi$ , sono le  $\hat{X}_\xi$ ,  $\hat{Z}_\xi$  e  $\hat{\mathcal{M}}_\xi$  (con  $\xi$  la generica perturbazione di variabile di stato o di input) ad essere chiamate con il nome di *derivate di stabilità dimensionali* — cioè le derivate delle componenti di forza divise per la massa (la costante  $m$ ) e delle componenti di momento divise per il corrispondente momento d'inerzia (in questo caso la costante  $I_{yy}$ ). In diversi testi americani la  $X_u$ , per esempio, è per convenzione la derivata parziale di  $X_A + X_T$  divisa per  $m$ ; in questo testo si preferisce mettere in evidenza questo fatto usando l'apposita notazione  $\hat{X}_u$ .



### Derivate rispetto ad $u$

Le derivate delle componenti di forza e momento rispetto alla variabile  $u$  possono essere espresse in termini di derivate rispetto alla perturbazione adimensionale  $u/U_0$  o anche rispetto alla perturbazione  $\Delta M$  del numero di Mach.

Per le definizioni di derivate di stabilità (16.82a), (16.82c), e (16.82e), e per le posizioni (16.147d), le derivate  $\hat{X}_u$ ,  $\hat{Z}_u$ ,  $\hat{\mathcal{M}}_u$  diventano

$$\hat{X}_u = \frac{S}{mU_0} \left. \frac{\partial(\bar{q} C_X)}{\partial\left(\frac{u}{U_0}\right)} \right|_0, \quad \hat{Z}_u = \frac{S}{mU_0} \left. \frac{\partial(\bar{q} C_Z)}{\partial\left(\frac{u}{U_0}\right)} \right|_0, \quad \hat{\mathcal{M}}_u = \frac{S \bar{c}}{I_{yy}U_0} \left. \frac{\partial(\bar{q} C_{\mathcal{M}})}{\partial\left(\frac{u}{U_0}\right)} \right|_0 \quad (16.150)$$

opportunamente espresse in termini di derivate di coefficienti adimensionali. Le (16.150) mostrano che le derivate dimensionali rispetto alla velocità hanno dimensioni, rispettivamente,  $s^{-1}$ ,  $s^{-1}$  e  $(ms)^{-1}$ .

Si osservi che nelle (16.150) la pressione dinamica istantanea  $\bar{q}(t)$ , che dipende in generale dalle perturbazioni di velocità  $u(t)$ ,  $v(t)$  e  $w(t)$ , deve comparire all'interno del segno di derivazione. La  $\bar{q}$  si esprime come

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \left[ \left( \frac{U_0 + u}{U_0} \right)^2 + \left( \frac{v}{U_0} \right)^2 + \left( \frac{w}{U_0} \right)^2 \right] \quad (16.151)$$

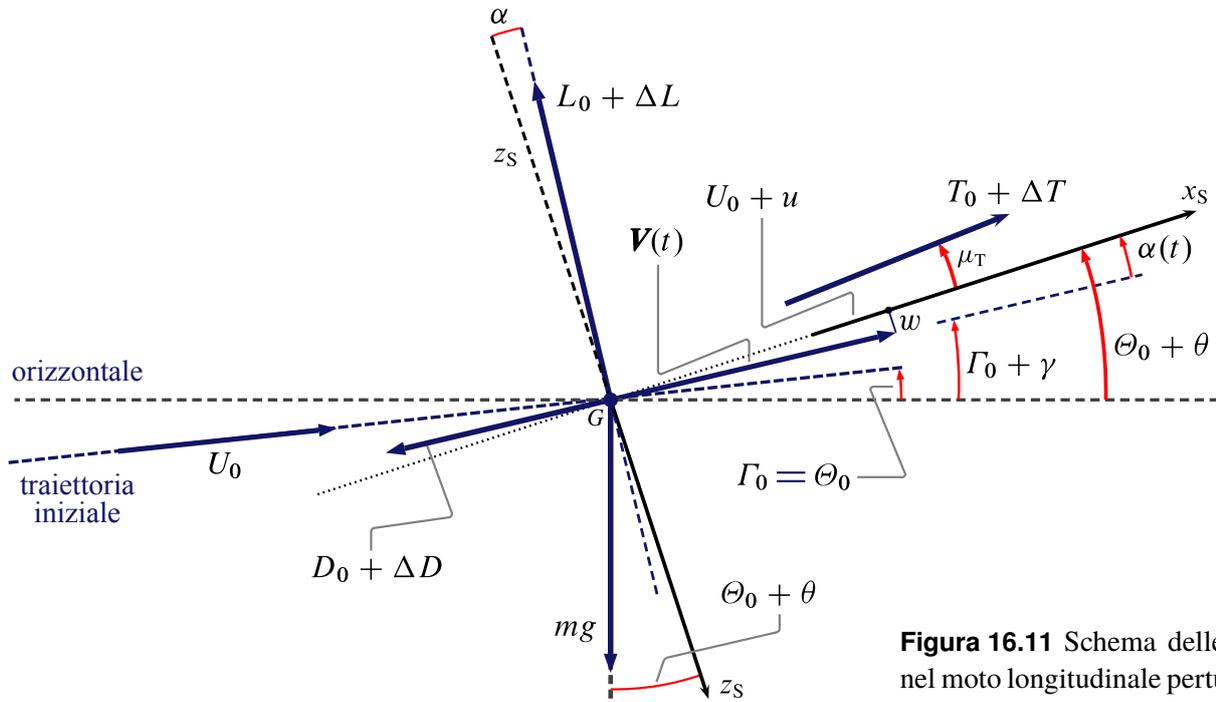
dove  $\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 = \bar{q}_0$  è la pressione dinamica iniziale (con  $\rho_0$  la densità dell'aria, praticamente costante nel moto perturbato date le piccole variazioni di quota). Per piccole perturbazioni la (16.151) può essere linearizzata ottenendo

$$\bar{q} \simeq \bar{q}_0 \left[ 1 + 2 \left( \frac{u}{U_0} \right) \right] \quad (16.152)$$

dopo aver trascurato i termini quadratici in  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Dalla prima delle (16.150), derivando il prodotto  $(\bar{q} C_X)$  e tenendo conto della (16.152), si ha

$$\hat{X}_u = \frac{\bar{q}_0 S}{mU_0} \left[ 2 C_X|_0 + C_{Xu}|_0 \right] \quad (16.153)$$



**Figura 16.11** Schema delle forze nel moto longitudinale perturbato.

dove  $C_{Xu} \triangleq \partial C_X / \partial (u/U_0)$ . Si noti qui che, come al solito, la derivata di un coefficiente adimensionale deve rimanere un numero puro; quindi con il simbolo  $C_{Xu}$ , così come nel caso di coefficienti come  $C_{Lq}$  e  $C_{L\dot{\alpha}}$ , si intende una derivata rispetto a una velocità adimensionale.

Il secondo termine in parentesi quadra nella formula (16.153) può essere espresso in termini di variazioni del numero di Mach,  $M \simeq (U_0 + u)/a$ . Potendo certamente trascurare le variazioni di velocità del suono rispetto al valore nominale  $a_0$ , si può assumere una perturbazione del numero di Mach  $\Delta M = u/a_0$  da cui consegue l'uguaglianza

$$C_{Xu} = \frac{\partial C_X}{\partial \left(\frac{u}{U_0}\right)} \frac{a_0}{a_0} = \frac{\partial C_X}{\partial (u/a_0)} \frac{U_0}{a_0} = M_0 \frac{\partial C_X}{\partial M} \quad (16.154)$$

Dunque la (16.153) può essere riscritta come

$$\hat{X}_u = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left[ 2 C_X|_0 + C_{Xu}|_0 \right] = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left[ 2 C_X|_0 + M_0 C_{XM}|_0 \right] \quad (16.155)$$

Il termine  $\partial C_X / \partial M|_0$  nella (16.155) evidenzia gli eventuali effetti della comprimibilità sulla derivata di stabilità. La loro entità dipende dal numero di Mach di volo della condizione di riferimento ovvero dal regime di moto considerato (basso subsonico, alto subsonico, transonico o supersonico).

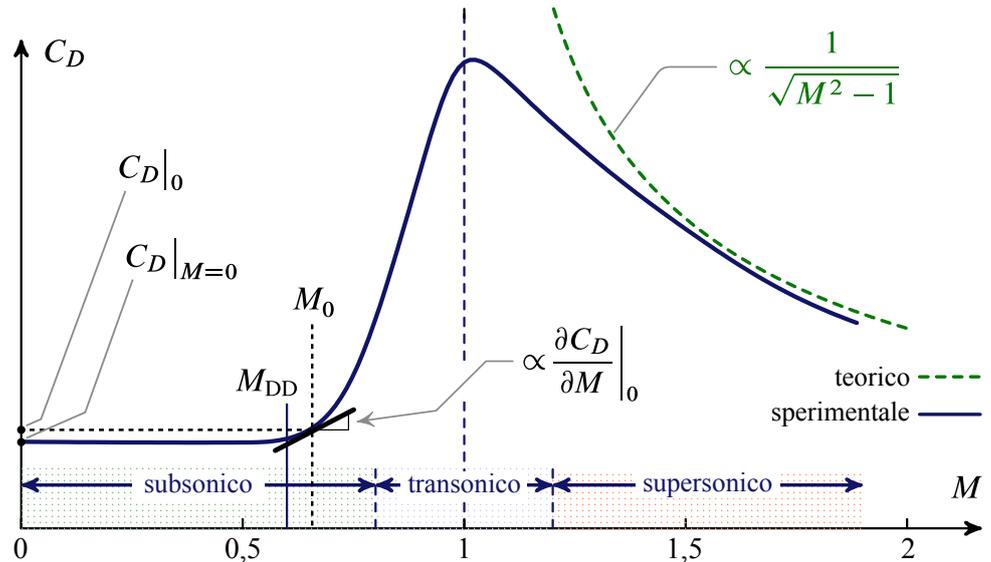
Dallo schema delle forze della figura 16.11, per  $\mu_T \approx 0$  si può scrivere

$$X = X_0 + \Delta X \simeq (L_0 + \Delta L)\alpha - (D_0 + \Delta D) + (T_0 + \Delta T) \quad (16.156)$$

Dalle figure 16.2 a pagina 8 e 16.11, per le quali si ha all'equilibrio

$$T_0 - D_0 = mg \sin \Gamma_0 \quad (16.157)$$

**Figura 16.12** Tipico andamento del coefficiente di resistenza di un velivolo al variare del numero di Mach per un fissato angolo d'attacco.



si ricava

$$\Delta X \simeq mgS_{\Theta_0} + L_0 \alpha - \Delta D + \Delta T = mg \sin \Theta_0 + L_0 \frac{w}{U_0} - \Delta D + \Delta T \quad (16.158)$$

avendo trascurato il termine  $(\Delta L \alpha)$ , prodotto di due perturbazioni.

Dalla (16.155) e dalla (16.158), essendo  $X_u = \partial(X_0 + \Delta X)/\partial(U_0 + u) = \partial \Delta X/\partial u$ , discende l'espressione notevole

$$\hat{X}_u = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left[ 2(C_T|_0 - C_D|_0) + (C_{T_u}|_0 - C_{D_u}|_0) \right] \quad (16.159)$$

dove, per la (16.157)

$$2(C_T|_0 - C_D|_0) = 2 \frac{T_0 - D_0}{\bar{q}_0 S} = 2 \frac{mg}{\bar{q}_0 S} \sin \Gamma_0 \quad (16.160)$$

è un termine proporzionale all'angolo  $\Gamma_0 = \Theta_0$ . Pertanto, si ha

$$\hat{X}_u = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left[ 2 \frac{mg}{\bar{q}_0 S} \sin \Gamma_0 + (C_{T_u}|_0 - C_{D_u}|_0) \right] \quad (16.161)$$

La (16.161) si particolarizza nel caso di volo iniziale a quota costante,  $\Gamma_0 = 0$ , ottenendo

$$\hat{X}_u = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (C_{T_u}|_0 - C_{D_u}|_0) \quad (16.162)$$

Ricordando le (16.79) discusse nella sezione 16.4, per i velivoli convenzionali si ha che il termine propulsivo

$$C_{T_u}|_0 = M_0 \frac{\partial C_T}{\partial M}|_0 = \begin{cases} -2 C_T|_0 & \text{per spinta costante} \\ -3 C_T|_0 & \text{per potenza costante} \end{cases} \quad (16.163)$$

La prima delle (16.163) è appropriata per velivoli a getto o per volo senza motore ( $C_T|_0 = 0$ ). La seconda va utilizzata invece per velivoli a elica con controllo automatico del passo e numero di giri costanti.

D'altra parte, sempre per la figura 16.2 a pagina 8 si ha che all'equilibrio (in assi stabilità e per spinta allineata con la velocità)

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= D_0 + mg \sin \Gamma_0 \\ L_0 &= mg \cos \Gamma_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_T|_0 = C_D|_0 + C_L|_0 \tan \Gamma_0 \quad (16.164)$$

A questo punto, riconsiderando la (16.155) e la (16.159), tenendo conto della (16.163) e della (16.164), si può esprimere il  $C_{X_u}$  come segue:

$$C_{X_u} = \begin{cases} -2 C_D|_0 - 2 C_L|_0 \tan \Gamma_0 - M_0 C_{D_M}|_0 & \text{per spinta costante} \\ -3 C_D|_0 - 3 C_L|_0 \tan \Gamma_0 - M_0 C_{D_M}|_0 & \text{per potenza costante} \end{cases} \quad (16.165)$$

cioè solo in termini di coefficienti aerodinamici del velivolo. Sostituendo le (16.165) nella (16.159), tenendo conto che, per le (16.164)

$$2 \frac{mg}{\bar{q}_0 S} \sin \Gamma_0 = 2 \frac{mg}{\bar{q}_0 S} \sin \Gamma_0 \frac{\cos \Gamma_0}{\cos \Gamma_0} = 2 \frac{mg \cos \Gamma_0}{\bar{q}_0 S} \tan \Gamma_0 = 2 C_L|_0 \tan \Gamma_0$$

si ricavano le espressioni finali di

$$\hat{X}_u = \begin{cases} -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left( 2 C_D|_0 + M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M}|_0 \right) & \text{per spinta costante} \\ -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left( 3 C_D|_0 + C_L|_0 \tan \Gamma_0 + M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M}|_0 \right) & \text{per potenza costante} \end{cases} \quad (16.166)$$

L'andamento qualitativo del coefficiente di resistenza  $C_D$  di un velivolo riportato nella figura 16.12 nella pagina precedente mostra i regimi di moto in cui la comprimibilità della corrente è significativa. Tipicamente, il regime subsonico incomprimibile è caratterizzato da un  $C_D$  praticamente costante fino al numero di Mach  $M_{DD}$  di divergenza della resistenza (*Mach of drag divergence* o anche *Mach of drag rise*), condizione in cui convenzionalmente si ha

$$C_D|_{M_{DD}} - C_D|_{M=0} = 0,0020 \quad (20 \text{ drag counts}) \quad (16.167)$$

Per  $M > M_{DD}$  gli effetti della comprimibilità si manifestano visibilmente sia nel regime transonico che in quello supersonico. Ciò si riassume come segue:

$$C_{D_u}|_0 = M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M}|_0 \Rightarrow \begin{cases} \approx 0 \quad (C_D \approx \text{costante}) & \text{per } 0 < M \leq M_{DD} \\ > 0 \quad (C_D \text{ crescente}) & \text{per } M_{DD} < M < 1 \\ < 0 \quad (C_D \text{ decrescente}) & \text{per } M > 1 \end{cases} \quad (16.168)$$

In assenza di effetti della comprimibilità della corrente (volo a bassa velocità e piccole variazioni di quota) i termini delle (16.166) dipendenti dal numero di Mach — cioè il termine  $\partial C_X / \partial M|_0$  nella (16.155) — sono praticamente trascurabili. D'altra parte, per alcuni fenomeni collegati al modo di Fugoide (risposta libera di lungo periodo) la derivata  $C_{X_u}|_0$  può assumere un ruolo significativo.

Attraverso un procedimento simile a quello precedente anche per la componente  $Z$  si

ricava

$$\hat{Z}_u = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (2 C_Z|_0 + C_{Z_u}|_0) = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (2 C_Z|_0 + M_0 C_{Z_M}|_0) \quad (16.169)$$

Dalla figura 16.11, assumendo ancora una volta un angolo  $\mu_T + \alpha$  piccolo, si può scrivere

$$Z = Z_0 + \Delta Z \simeq -(L_0 + \Delta L) - (D_0 + \Delta D)\alpha \simeq -L_0 - D_0 \frac{w}{U_0} - \Delta L \quad (16.170)$$

Derivando la (16.170) rispetto a  $u/U_0$  e applicando la (16.169) si ottiene

$$\hat{Z}_u = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial u} (-\Delta L) \simeq -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (2 C_L|_0 + C_{L_u}|_0) \quad (16.171)$$

La (16.171) non è altro che la (16.169) nell'approssimazione di spinta sempre allineata alla velocità e  $C_Z \approx -C_L$ .

Dunque, analogamente alla (16.155), si dispone dell'espressione notevole,

$$\hat{Z}_u = -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (2 C_L|_0 + C_{L_u}|_0) = -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (2 C_L|_0 + M_0 C_{L_M}|_0) \quad (16.172)$$

Vale la pena elaborare ulteriormente il termine  $C_{L_M}|_0$  nella (16.172) — dove si è posto  $C_{L_M} \triangleq \partial C_L / \partial M$  — ricordando il risultato teorico dell'Aerodinamica noto come *regola di Prandtl-Glauert*:

$$C_L = \frac{C_L|_{M=0}}{\sqrt{1-M^2}} \quad (\text{in regime subsonico}) \quad (16.173)$$

valida al generico numero di Mach di volo  $M$ , per fissato angolo d'attacco. Come si vede dalla figura 16.13 nella pagina seguente la (16.173) rappresenta con buona approssimazione la legge di variazione del  $C_L$  in regime subsonico fino al numero di Mach  $M_{DD}$  di divergenza della resistenza. Dalla (16.173), essendo  $C_L|_{M=0}$  una costante per fissato assetto di volo, si deducono i seguenti passaggi matematici

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M} \left[ (1-M^2)^{\frac{1}{2}} C_L \right] = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} (1-M^2)^{-\frac{1}{2}} (-2M) C_L + (1-M^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial C_L}{\partial M} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial C_L}{\partial M} \Big|_0 &= \left( \frac{M C_L}{1-M^2} \right) \Big|_0 \Rightarrow M_0 \frac{\partial C_L}{\partial M} \Big|_0 = \frac{M_0^2}{1-M_0^2} C_L|_0 \end{aligned} \quad (16.174)$$

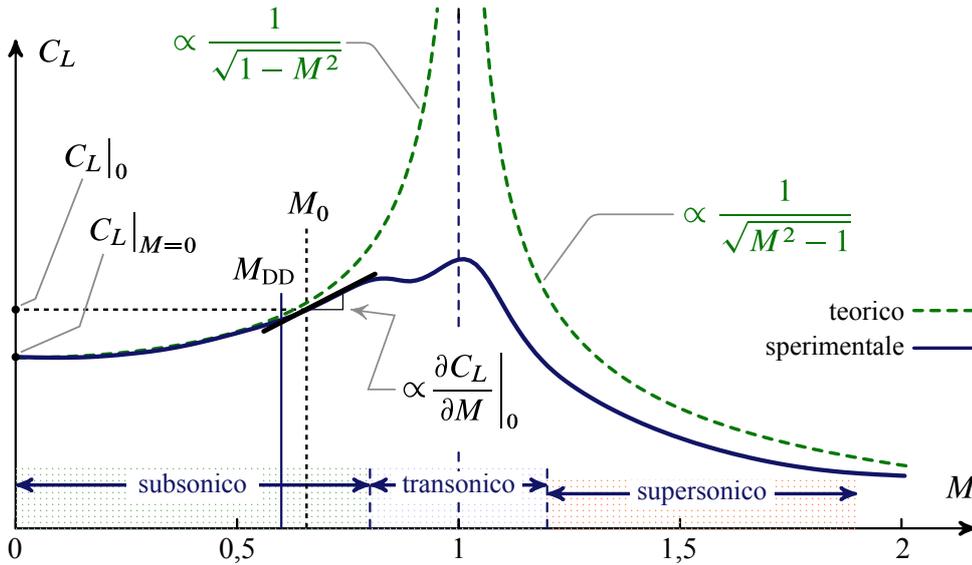
La (16.174) permette di riscrivere la (16.172) nella forma notevole

$$\hat{Z}_u = -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left[ 2 C_L|_0 + \frac{M_0^2}{1-M_0^2} C_L|_0 \right] \quad (16.175)$$

Infine, per quanto riguarda il momento di beccheggio, per il quale  $C_{\mathcal{M}}|_0 = 0$ , è facile far vedere che

$$\hat{\mathcal{M}}_u = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy} U_0} C_{\mathcal{M}_u}|_0 = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy} U_0} M_0 C_{\mathcal{M}_M}|_0 \quad (16.176)$$

dove si è posto  $C_{\mathcal{M}_M} \triangleq \partial C_{\mathcal{M}} / \partial M$ .



**Figura 16.13** Tipico andamento del coefficiente di portanza di un velivolo al variare del numero di Mach per un fissato angolo d’attacco.

Al termine  $M_0 C_{M_M}|_0$  a secondo membro della (16.176), tipicamente negativo, è associato un fenomeno noto in gergo come *tuck under* o *Mach tuck*, cioè una tendenza a picchiare al crescere del numero di Mach oltre il  $M_{DD}$ . Esso mostra che vi è una sensibilità del coefficiente di momento, dunque dell’equilibrio e della dinamica al beccheggio, rispetto a variazioni del numero di Mach. Il fenomeno fu notato per la prima volta dai piloti in servizio sui velivoli da combattimento all’epoca della seconda guerra mondiale quando si effettuavano affondate ad alta velocità. Con la tecnologia di controllo d’assetto dei velivoli attuali e grazie al disegno dei profili alari moderni questo fenomeno è praticamente sconosciuto ai piloti dei nostri giorni.

**Derivate rispetto ad  $w$**

Le derivate delle componenti di forza e momento rispetto alla variabile  $w$  possono essere espresse in termini di derivate rispetto alla perturbazione adimensionale  $w/U_0$ , cioè rispetto alla perturbazione  $\alpha$  dell’angolo d’attacco.

Per le definizioni di derivate di stabilità (16.82a), (16.82c), e (16.82e), e per le posizioni (16.147d), le derivate  $\hat{X}_w, \hat{Z}_w, \hat{M}_w$  diventano

$$\hat{X}_w = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left. \frac{\partial C_X}{\partial \alpha} \right|_0, \quad \hat{Z}_w = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left. \frac{\partial C_Z}{\partial \alpha} \right|_0, \quad \hat{M}_w = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy} U_0} \left. \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \right|_0 \quad (16.177)$$

dove  $U_0 \partial \alpha = \partial w$ . Le (16.177) mostrano che le derivate dimensionali rispetto alla velocità hanno dimensioni, rispettivamente,  $s^{-1}$ ,  $s^{-1}$  e  $(ms)^{-1}$ .

Si osservi che nelle (16.177) la pressione dinamica istantanea  $\bar{q}(t)$  non risente delle piccole perturbazioni di velocità  $w(t)$  e può comparire all’esterno del segno di derivazione come valore di riferimento  $\bar{q}_0$ .

Ricordando la (16.158) e trascurando le variazioni di spinta rispetto all’angolo d’attacco, la prima delle (16.177) diventa

$$\hat{X}_w = \frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (C_L|_0 - C_{D\alpha}|_0) \quad (16.178)$$

dove  $C_{D\alpha} \triangleq \partial C_D / \partial \alpha$  è solitamente un numero positivo per angoli d’attacco inferiori all’incidenza critica.

Analogamente, ricordando la (16.170), la seconda delle (16.177) diventa

$$\hat{Z}_w = -\frac{\bar{q}_0 S}{mU_0} (C_D|_0 + C_{L\alpha}|_0) \quad (16.179)$$

dove  $C_{L\alpha} \triangleq \partial C_L / \partial \alpha$  è il ben noto gradiente del coefficiente di portanza del velivolo. Quest'ultimo è positivo, è normalmente espresso in  $\text{rad}^{-1}$  ed è tale che  $C_{L\alpha}|_0 \gg C_D|_0$  ai normali assetti di volo, lontani dall'assetto di stallo.

Infine, la terza delle (16.177) che qui riscriviamo

$$\hat{M}_w = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy} U_0} C_{M\alpha}|_0 \quad (16.180)$$

evidenzia la proporzionalità della derivata di stabilità dimensionale all'indice di stabilità statica  $C_{M\alpha} \triangleq \partial C_M / \partial \alpha$  nella condizione di volo nominale. Com'è noto, per velivoli staticamente stabili  $C_{M\alpha}$  è un numero negativo.

### Derivate rispetto ad $\dot{w}$

Secondo le ipotesi di Bryan tra le derivate rispetto a  $\dot{w}$ , cioè rispetto a  $U_0 \dot{\alpha}$ , le più significative sono  $\hat{Z}_{\dot{w}}$  e  $\hat{M}_{\dot{w}}$  potendosi assumere  $\hat{X}_{\dot{w}} \approx 0$ .

Nel ricavarne le espressioni è possibile trascurare le variazioni di pressione dinamica e di spinta rispetto a variazioni di  $\dot{\alpha}$  ipotizzando, al solito, una spinta baricentrica e allineata con la velocità. Si otterrà:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{\dot{w}} &= \frac{1}{mU_0} \frac{\partial Z_A}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_0 = \frac{1}{mU_0} \frac{1}{\frac{2U_0}{\bar{c}}} \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 S C_{Z_A} \right)}{\partial \left( \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_0} \right)} \Big|_0 \\ &= -\frac{\bar{c} \left( \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 S \right)}{2mU_0^2} C_{L\dot{\alpha}}|_0 = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0 S \bar{c}}{2m} C_{L\dot{\alpha}}|_0 = -\frac{1}{2\mu_0} C_{L\dot{\alpha}}|_0 \quad (16.181) \end{aligned}$$

dove

$$\mu_0 = 2m / (\rho_0 S \bar{c}) \quad (16.182)$$

è il parametro di massa del velivolo alla quota di riferimento, e

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\dot{w}} &= \frac{1}{I_{yy} U_0} \frac{\partial \mathcal{M}_A}{\partial \dot{\alpha}} \Big|_0 = \frac{1}{I_{yy} U_0} \frac{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 S \bar{c}}{\frac{2U_0}{\bar{c}}} \frac{\partial C_{M_A}}{\partial \left( \frac{\dot{\alpha} \bar{c}}{2U_0} \right)} \Big|_0 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho_0 U_0^2 S \bar{c}^2}{2I_{yy} U_0^2} C_{M\dot{\alpha}}|_0 = \frac{\rho_0 S \bar{c}^2}{4I_{yy}} C_{M\dot{\alpha}}|_0 \quad (16.183) \end{aligned}$$

Le (16.181)-(16.183) mostrano che la derivata  $\hat{Z}_{\dot{w}}$  è in effetti adimensionale mentre la  $\hat{M}_{\dot{w}}$  ha dimensioni  $\text{m}^{-1}$ .

Le derivate di stabilità rispetto a  $\dot{w}$  sono proporzionali alle derivate aerodinamiche  $C_{L_{\dot{\alpha}}}$  e  $C_{M_{\dot{\alpha}}}$  del velivolo valutate al numero di Mach nominale. Com'è noto esse si possono stimare in prima approssimazione attraverso le formule

$$C_{L_{\dot{\alpha}}} = 2 \eta_H \bar{V}_H \frac{d\epsilon}{d\alpha} C_{L_{\alpha,H}}, \quad C_{M_{\dot{\alpha}}} = -2 K \eta_H \bar{V}_H \frac{l_H}{\bar{c}} \frac{d\epsilon}{d\alpha} C_{L_{\alpha,H}} \quad (16.184)$$

dove

- $\eta_H = \bar{q}/\bar{q}_H$  è il rapporto tra la pressione dinamica di volo e quella in corrispondenza dell'impennaggio orizzontale, tipicamente di poco inferiore a 1,
- $\bar{V}_H = S_H l_H / (S \bar{c})$  è il parametro volumetrico del piano orizzontale di coda,
- $S_H$  è la superficie dell'impennaggio orizzontale,
- $l_H$  è la distanza del centro aerodinamico dell'impennaggio dal baricentro del velivolo,
- $d\epsilon/d\alpha$  è il gradiente dell'angolo di *downwash* in coda,
- $C_{L_{\alpha,H}}$  è il gradiente della retta di portanza dell'impennaggio orizzontale,
- $K$  è un coefficiente adimensionale, tipicamente di poco superiore a 1, che tiene conto degli effetti dell'ala e della fusoliera (tipicamente  $K = 1,1$ ).

Nelle (16.184) i termini  $\eta_H$ ,  $d\epsilon/d\alpha$  e  $C_{L_{\alpha,H}}$  dipendono dal numero di Mach di volo e vanno valutati nelle condizioni di riferimento. La derivata  $C_{L_{\dot{\alpha}}}$  è tipicamente positiva mentre  $C_{M_{\dot{\alpha}}}$  è una *derivata di smorzamento* (per i motivi che saranno chiariti tra breve) ed è un numero tipicamente negativo.

### Derivate rispetto ad $q$

Secondo le ipotesi di Bryan tra le derivate rispetto a  $q$  le più significative sono  $\hat{Z}_q$  e  $\hat{M}_q$  potendosi assumere  $\hat{X}_q \approx 0$ .

Trascurando le variazioni di pressione dinamica e di spinta rispetto a piccole variazioni di  $q$  e assumendo, al solito, una spinta baricentrica e allineata con la velocità si otterrà:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_q &= \frac{1}{m} \frac{1}{2U_0} \frac{\partial (\bar{q}_0 S C_{Z_A})}{\partial \left( \frac{q\bar{c}}{2U_0} \right)} \Big|_0 = \frac{\bar{c}}{2mU_0} \left( \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 S \right) \frac{\partial C_{Z_A}}{\partial \left( \frac{q\bar{c}}{2U_0} \right)} \Big|_0 \\ &= -\frac{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 S \bar{c}}{2mU_0} C_{L_q} \Big|_0 = -\frac{1}{\frac{2m}{\rho_0 S \bar{c}}} \frac{U_0}{2} C_{L_q} = -\frac{U_0}{2\mu_0} C_{L_q} \Big|_0 \quad (16.185) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_q &= \frac{1}{I_{yy}} \frac{1}{2U_0} \frac{\partial (\bar{q}_0 S \bar{c} C_{M_A})}{\partial \left( \frac{q\bar{c}}{2U_0} \right)} \Big|_0 = \frac{\bar{c}}{2I_{yy}U_0} \left( \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 S \bar{c} \right) \frac{\partial C_{M_A}}{\partial \left( \frac{q\bar{c}}{2U_0} \right)} \Big|_0 \\ &= \frac{\frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 S \bar{c}^2}{2I_{yy}U_0} C_{M_q} \Big|_0 = \frac{\rho_0 U_0 S \bar{c}^2}{4I_{yy}} C_{M_q} \Big|_0 \quad (16.186) \end{aligned}$$

Le (16.185)-(16.186) mostrano che le derivate  $\hat{Z}_q$  e  $\hat{M}_q$  hanno dimensioni, rispettivamente,  $\text{ms}^{-1}$  e  $\text{s}^{-1}$ . Esse sono proporzionali alle ben note derivate aerodinamiche  $C_{L_q}$  e

$C_{Mq}$  del velivolo valutate al numero di Mach nominale. Queste ultime si possono stimare in prima approssimazione attraverso le formule

$$C_{Lq} = 2 \eta_H \bar{V}_H C_{L\alpha,H}, \quad C_{Mq} = -2 K \eta_H \bar{V}_H \frac{l_H}{\bar{c}} C_{L\alpha,H} \quad (16.187)$$

simili alle (16.184). Anche nelle (16.187) i termini  $\eta_H$  e  $C_{L\alpha,H}$  dipendono dal numero di Mach di volo e vanno valutati nelle condizioni di riferimento. La derivata  $C_{Lq}$  è tipicamente positiva mentre  $C_{Mq}$  è anch'essa una *derivata di smorzamento* tipicamente negativa.

### Derivate di controllo

Le derivate di controllo, cioè rispetto alle variazioni  $\delta_e$  e  $\delta_T$ , sono facilmente ottenibili dalle definizioni di potenze aerodinamiche di controllo. Per le definizioni (16.82a), (16.82c), e (16.82e), e per le posizioni (16.147d), si ha

$$\hat{X}_{\delta_e} = \frac{\bar{q}_0 S}{m} \frac{\partial C_X}{\partial \delta_e} \Big|_0, \quad \hat{Z}_{\delta_e} = \frac{\bar{q}_0 S}{m} \frac{\partial C_Z}{\partial \delta_e} \Big|_0, \quad \hat{M}_{\delta_e} = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy}} \frac{\partial C_M}{\partial \delta_e} \Big|_0 \quad (16.188)$$

e

$$\hat{X}_{\delta_T} = \frac{\bar{q}_0 S}{m} \frac{\partial C_X}{\partial \delta_T} \Big|_0, \quad \hat{Z}_{\delta_T} = \frac{\bar{q}_0 S}{m} \frac{\partial C_Z}{\partial \delta_T} \Big|_0, \quad \hat{M}_{\delta_T} = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy}} \frac{\partial C_M}{\partial \delta_T} \Big|_0 \quad (16.189)$$

Per quanto riguarda le (16.188), le variazioni di deflessione dell'elevatore non modificano la spinta quindi si deve tener conto delle sole azioni aerodinamiche. Inoltre l'esperienza conferma che  $\hat{X}_{\delta_e} \approx 0$ . Si ha dunque

$$\hat{Z}_{\delta_e} = -\frac{\bar{q}_0 S}{m} C_{L\delta_e} \Big|_0, \quad \hat{M}_{\delta_e} = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy}} C_{M\delta_e} \Big|_0 \quad (16.190)$$

dove

$$C_{L\delta_e} \Big|_0 \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \Big|_0 = \eta_H \frac{S_H}{S} C_{L\alpha,H} \tau_e, \quad C_{M\delta_e} \Big|_0 \triangleq \frac{\partial C_M}{\partial \delta_e} \Big|_0 = -\eta_H \bar{V}_H C_{L\alpha,H} \tau_e \quad (16.191)$$

sono le ben note potenze aerodinamiche di controllo del comando longitudinale e

$$\tau_e = \frac{\partial |\alpha_{0L,H}|}{\partial \delta_e} \quad (16.192)$$

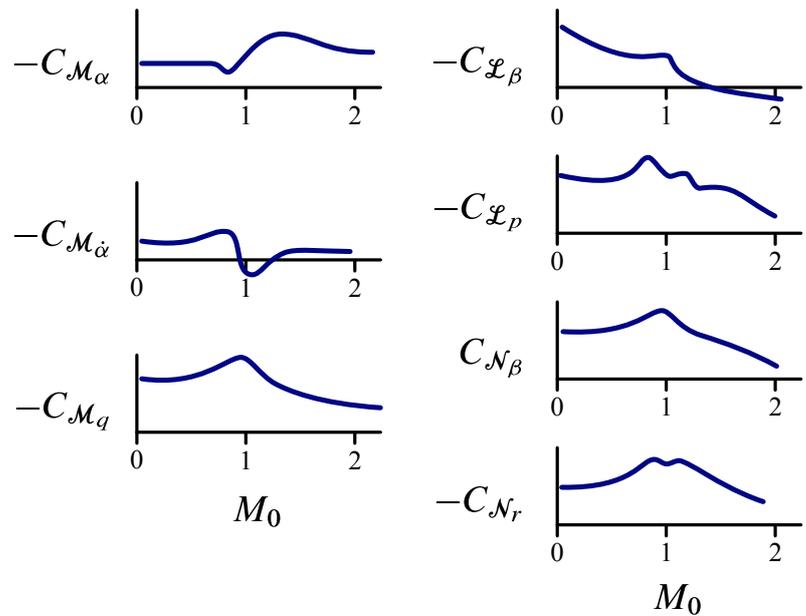
è il fattore di efficacia dell'elevatore.

Le (16.190) mostrano che le derivate  $\hat{Z}_{\delta_e}$  e  $\hat{M}_{\delta_e}$  hanno dimensioni, rispettivamente,  $\text{ms}^{-2}$  e  $\text{s}^{-2}$ . Nelle (16.191) i termini  $\eta_H$ ,  $C_{L\alpha,H}$  e  $\tau_e$  dipendono dal numero di Mach di volo e vanno valutati nelle condizioni di riferimento. La derivata  $C_{L\delta_e}$  è tipicamente positiva mentre  $C_{M\delta_e}$  è negativa.

Per quanto riguarda le (16.189) va osservato che le variazioni della manetta  $\delta_T$  non modificano le forze e i momenti aerodinamici — cioè sono trascurati gli effetti indiretti della propulsione sulle caratteristiche aerodinamiche — quindi si può tener conto delle sole azioni propulsive. Per il calcolo di  $\hat{X}_{\delta_T}$ ,  $\hat{Z}_{\delta_T}$  ed  $\hat{M}_{\delta_T}$  valgono le (16.78), (16.79)

Tabella 16.2 Derivate di stabilità dimensionali del moto longitudinale.

Derivata	Formula di calcolo	Unità
$\hat{X}_u$	$\left( -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left( 2 C_D _0 + M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M} \Big _0 \right) \right)$	per spinta costante
	$\left( -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left( 3 C_D _0 + C_L _0 \tan \Gamma_0 + M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M} \Big _0 \right) \right)$	per potenza costante
$\hat{X}_w$	$\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (C_L _0 - C_{D\alpha} _0)$	$s^{-1}$
$\hat{X}_{\dot{w}}$	$\approx 0$	–
$\hat{X}_q$	$\approx 0$	$ms^{-1}$
$\hat{X}_{\delta_e}$	$\approx 0$	$ms^{-2}$
$\hat{X}_{\delta_T}$	$\frac{\bar{q}_0 S}{m} (C_{T_{\text{Fix}}} + k_V / U_0^2)$	per spinta costante
	$\frac{\bar{q}_0 S}{m} (C_{T_{\text{Fix}}} + k_V / U_0^3)$	per potenza costante
$\hat{Z}_u$	$-\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left[ 2 C_L _0 + \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} C_L _0 \right]$	$s^{-1}$
$\hat{Z}_w$	$-\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} (C_D _0 + C_{L\alpha} _0)$	$s^{-1}$
$\hat{Z}_{\dot{w}}$	$-\frac{1}{2} \frac{\rho_0 S \bar{c}}{2m} C_{L\dot{\alpha}} _0 = -\frac{1}{2\mu_0} C_{L\dot{\alpha}} _0 \approx 0$	–
$\hat{Z}_q$	$-\frac{U_0}{2\mu_0} C_{Lq} _0 \approx 0$	$ms^{-1}$
$\hat{Z}_{\delta_e}$	$-\frac{\bar{q}_0 S}{m} C_{L\delta_e} _0 = -\frac{\bar{q}_0 S}{m} \eta_H \frac{S_H}{S} C_{L\alpha, H} \tau_e$	$ms^{-2}$
$\hat{M}_u$	$\frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy} U_0} C_{\mathcal{M}u} _0 = \frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy} U_0} M_0 C_{\mathcal{M}M} _0$	$m^{-1} s^{-1}$
$\hat{M}_w$	$\frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy} U_0} C_{\mathcal{M}\alpha} _0$	$m^{-1} s^{-1}$
$\hat{M}_{\dot{w}}$	$\frac{\rho_0 S \bar{c}^2}{4 I_{yy}} C_{\mathcal{M}\dot{\alpha}} _0 = -2 \frac{\rho_0 S \bar{c}^2}{4 I_{yy}} K \eta_H \bar{V}_H \frac{l_H}{\bar{c}} \frac{d\epsilon}{d\alpha} C_{L\alpha, H}$	$m^{-1}$
$\hat{M}_q$	$\frac{\rho_0 U_0 S \bar{c}^2}{4 I_{yy}} C_{\mathcal{M}q} = -2 \frac{\rho_0 U_0 S \bar{c}^2}{4 I_{yy}} K \eta_H \bar{V}_H \frac{l_H}{\bar{c}} C_{L\alpha, H}$	$s^{-1}$
$\hat{M}_{\delta_e}$	$\frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy}} C_{\mathcal{M}\delta_e} _0 = -\frac{\bar{q}_0 S \bar{c}}{I_{yy}} \eta_H \bar{V}_H C_{L\alpha, H} \tau_e$	$s^{-2}$



**Figura 16.14** Andamenti qualitativi con il numero di Mach delle più importanti derivate aerodinamiche di un velivolo.

e (16.80). Inoltre, per una spinta baricentrica e allineata alla velocità si può assumere  $\hat{Z}_{\delta_T} = \hat{M}_{\delta_T} = 0$ .

Si ha dunque

$$\hat{X}_{\delta_T} = \frac{\bar{q}_0 S}{m} C_{T_{\delta_T}}|_0 = \begin{cases} \frac{\bar{q}_0 S}{m} \left( C_{T_{\text{Fix}}} + \frac{k_V}{U_0^2} \right) & \text{per spinta costante} \\ \frac{\bar{q}_0 S}{m} \left( C_{T_{\text{Fix}}} + \frac{k_V}{U_0^3} \right) & \text{per potenza costante} \end{cases} \quad (16.193)$$

dove  $C_{T_{\text{Fix}}}$  e  $k_V$  sono stati definiti nella sezione 16.4. Le (16.193) mostrano che la derivata  $\hat{X}_{\delta_T}$  ha dimensioni  $\text{ms}^{-2}$ .

### 16.7.3 Semplificazione delle equazioni longitudinali

Le equazioni linearizzate del moto longitudinale possono essere semplificate considerando l'ordine di grandezza delle derivate  $\hat{Z}_{\dot{w}}$  e  $\hat{Z}_q$  in relazione alle altre grandezze in gioco.

Dalle espressioni (16.181) e (16.185) relative, rispettivamente, a  $\hat{Z}_{\dot{w}}$  e  $\hat{Z}_q$  si osserva che il parametro di massa dei velivoli  $\mu_0 = 2m/(\rho_0 S \bar{c})$  è un numero molto grande nelle normali condizioni di riferimento (di valore tipicamente intorno a 100), tale che  $\hat{Z}_{\dot{w}} \ll 1$  e  $\hat{Z}_q \ll U_0$ . Pertanto, sono accettabili le approssimazioni

$$\hat{Z}_q + U_0 \approx U_0 \quad 1 - \hat{Z}_{\dot{w}} \approx 1 \implies \hat{k} \approx \hat{M}_{\dot{w}} \quad (16.194)$$

che semplificano alcuni elementi delle matrici (16.147b) e (16.147c).

Le semplificazioni precedenti possono essere verificate più avanti al paragrafo 16.7.4 con un esempio di calcolo delle caratteristiche dinamiche longitudinali di un Boeing 747.

Le matrici del sistema (16.146) assumono dunque la forma

$$\mathbf{A}_{\text{LON}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_u & \hat{X}_w & 0 & -g C_{\theta_0} \\ \hat{Z}_u & \hat{Z}_w & U_0 & -g S_{\theta_0} \\ \hat{M}_u + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_u & \hat{M}_w + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_w & \hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{w}} U_0 & -\hat{M}_{\dot{w}} g S_{\theta_0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.195a)$$

$$\mathbf{B}_{\text{LON}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{\delta_T} & \hat{X}_{\delta_e} \\ \hat{Z}_{\delta_T} & \hat{Z}_{\delta_e} \\ \hat{M}_{\delta_T} + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_{\delta_T} & \hat{M}_{\delta_e} + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_{\delta_e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.195b)$$

Le (16.195) sono le matrici approssimate della dinamica longitudinale dei velivoli riportate da diversi autori. Si vedano, ad esempio, i testi di Etkin [17] e di Nelson [60]. Le derivate dimensionali che in esse compaiono sono collegate ai coefficienti aerodinamici e propulsivi del velivolo in accordo alle definizioni (16.82) e (16.83).

Nella tabella 16.2 sono riassunte le espressioni delle derivate dimensionali ricavate precedentemente, valide per  $X_T \approx T$ ,  $Y_T = Z_T = 0$  ed  $\mathcal{L}_T = \mathcal{M}_T = \mathcal{N}_T = 0$ .

Nella figura 16.14 nella pagina precedente sono riportati gli andamenti qualitativi con il numero di Mach di volo di alcune delle più importanti derivate aerodinamiche di un velivolo. Le caratteristiche aerodinamiche valutate nella condizione di volo nominale determinano i valori degli elementi delle matrici  $\mathbf{A}_{\text{LON}}$  e  $\mathbf{B}_{\text{LON}}$  ovvero le caratteristiche di risposta libera e ai comandi del velivolo.

## 16.7.4 Dinamica longitudinale di un Boeing 747

Riportiamo nella tabella 16.3 a pagina 64 le caratteristiche di un *airliner* di grandi dimensioni con motori turbofan, il Boeing 747, in diverse condizioni di volo. I dati sono stati ricavati dal NASA Report di Heffley e Jewell [47]. La numerazione delle condizioni considerate ('2', '5', '7', '9', '10') corrisponde a quella utilizzata nel report originale. Tutte valgono per il velivolo in configurazione pulita — cioè flap non deflessi e motori in funzione — tranne la '2', per la quale il velivolo è in configurazione di *powered approach* con flap deflessi di 20 deg.

Andiamo a verificare l'esistenza dei caratteristici modi di risposta *open loop* longitudinali dei velivoli anticipati nel paragrafo 16.6.2 considerando l'esempio pratico del Boeing 747. Scegliamo dalla tabella 16.3 la condizione '2' per la quale si ha:

quota di volo,	$h_0 = 0 \text{ m (SL)}$	$= 0 \text{ ft (SL)}$
densità dell'aria (@SL),	$\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$	$= 0,002377 \text{ slug/ft}^3$
velocità del suono dell'aria (@SL),	$a_0 = 340,29 \text{ m/s}$	$= 1117 \text{ ft/s}$

continua nella pagina seguente →

→ continua dalla pagina precedente

numero di Mach,	$M_0 = 0,25$	
velocità del velivolo,	$U_0 = 85,07 \text{ m/s}$	$= 279,10 \text{ ft/s}$
massa,	$m = 255753 \text{ kg}$	$= 564032 \text{ lb}$
momento d'inerzia longitudinale,	$I_{yy} = 4,38 \cdot 10^7 \text{ kg m}^2$	$= 3,23 \cdot 10^7 \text{ slug ft}^2$
superficie alare,	$S = 510,97 \text{ m}^2$	$= 5500 \text{ ft}^2$
corda media aerodinamica,	$\bar{c} = 8,32 \text{ m}$	$= 27,30 \text{ ft}$
marginale statico, $SM = (X_N - X_{cg})/\bar{c}$	$= 0,22$	
angolo di salita,	$\Gamma_0 = 0 \text{ deg}$	

coefficienti e derivate aerodinamiche:

$$\begin{aligned}
 C_L|_0 &= 1,11, & C_D|_0 &= 0,10, & C_{D\alpha}|_0 &= 0,66 \\
 C_{L\alpha}|_0 &= 5,70 \text{ rad}^{-1}, & C_{L\dot{\alpha}}|_0 &= 6,70 \text{ rad}^{-1}, & C_{Lq}|_0 &= 5,40 \text{ rad}^{-1}, & C_{LM}|_0 &= 0 \\
 C_{D\alpha}|_0 &= 0,66 \text{ rad}^{-1}, & C_{D\dot{\alpha}}|_0 &= 0 \text{ rad}^{-1}, & C_{Dq}|_0 &= 0 \text{ rad}^{-1}, & C_{DM}|_0 &= 0 \\
 C_{M\alpha}|_0 &= -1,26 \text{ rad}^{-1}, & C_{M\dot{\alpha}}|_0 &= -3,20 \text{ rad}^{-1}, & C_{Mq}|_0 &= -20,80 \text{ rad}^{-1}, & C_{MM}|_0 &= 0
 \end{aligned}$$

I valori precedenti, sostituiti nelle formule della tabella 16.2 a pagina 60, forniscono le seguenti derivate di stabilità dimensionali non nulle:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_u &= -0,0212 \text{ s}^{-1}, & \hat{X}_w &= 0,0466 \text{ s}^{-1}, \\
 \hat{Z}_u &= -0,2307 \text{ s}^{-1}, & \hat{Z}_w &= -0,6040 \text{ s}^{-1} \\
 \hat{Z}_{\dot{w}} &= -0,0341, & \hat{Z}_q &= -2,339 \text{ m/s} = -7,67 \text{ ft/s}, \\
 \hat{M}_u &= 0 \text{ (m s)}^{-1} = 0 \text{ (ft s)}^{-1}, & \hat{M}_w &= -0,0064 \text{ (m s)}^{-1} = -0,0019 \text{ (ft s)}^{-1} \\
 \hat{M}_{\dot{w}} &= -0,00079 \text{ m}^{-1} = -0,00020 \text{ ft}^{-1}, & \hat{M}_q &= -0,4378 \text{ s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Le derivate di stabilità così calcolate possono essere sostituite nell'espressione (16.147b) della matrice del sistema ottenendo (in unità del SI):

$$\mathbf{A}_{\text{LON}} = \begin{bmatrix} -0,0212 & 0,0466 & 0 & -9,8100 \\ -0,2231 & -0,5841 & 80,0055 & 0 \\ 0,0002 & -0,0059 & -0,5011 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.196)$$

Per la stabilità il problema di valori iniziali

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{LON}} = \mathbf{A}_{\text{LON}} \mathbf{x}_{\text{LON}}, \quad \mathbf{x}_{\text{LON}}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (16.197)$$

deve avere soluzione non divergente per ogni  $\mathbf{x}_0$  non nullo. Il vettore  $\mathbf{x}_0$  rappresenta una perturbazione delle condizioni iniziali di equilibrio longitudinale del velivolo che va ad 'eccitare' una risposta libera data dall'espressione modale (16.118). Se  $\mathbf{x}_0$  coincide con il  $k$ -mo autovettore sinistro  $\xi_k$  allora la risposta libera è una *risposta modale* — cioè coincide con il modo  $e^{\lambda_k t} \chi_k$  — il cui andamento nel tempo è regolato dal solo autovalore  $\lambda_k$ . Il modo, a meno del fattore moltiplicativo reale  $e^{\sigma_k t}$ , è il vettore  $e^{i\omega_k t} \chi_k$  avente per componenti delle funzioni isofrequenziali. Dunque le componenti complesse della parte costante  $\chi_k$  sono rappresentabili nel piano complesso in forma di fasori (rappresentazione polare) come nella figura 16.15 a pagina 68 (si veda anche l'approfondimento 16.7.5 e la

**Tabella 16.3** Caratteristiche inerziali e derivate aerodinamiche longitudinali di un Boeing 747 in diverse condizioni di volo nominali. Gli angoli d'attacco sono misurati rispetto alla retta di riferimento della fusoliera. Le derivate angolari sono in  $\text{rad}^{-1}$ .

Condizione	2	5	7	9	10
$h$ (ft)	SL	20000	20000	40000	40000
$M$	0,25	0,50	0,80	0,80	0,90
$\alpha_B$ (deg)	5,70	6,80	0,00	4,60	2,40
$W$ (lbf)	564000	636640	636640	636640	636640
$I_{yy}$ (slug ft <sup>2</sup> )	$32,30 \cdot 10^6$	$33,10 \cdot 10^6$	$33,10 \cdot 10^6$	$33,10 \cdot 10^6$	$33,10 \cdot 10^6$
$C_L$	1,10	0,68	0,27	0,66	0,52
$C_D$	0,10	0,04	0,02	0,04	0,04
$C_{L\alpha}$	5,70	4,67	4,24	4,92	5,57
$C_{D\alpha}$	0,66	0,37	0,08	0,43	0,53
$C_{M\alpha}$	-1,26	-1,15	-0,63	-1,03	-1,61
$C_{L\dot{\alpha}}$	6,70	6,53	5,99	5,91	5,53
$C_{M\dot{\alpha}}$	-3,20	-3,35	-5,40	-6,41	-8,82
$C_{Lq}$	5,40	5,13	5,01	6,00	6,94
$C_{Mq}$	-20,80	-20,70	-20,50	-24,00	-25,10
$C_{LM}$	0	-0,09	0,11	0,21	-0,28
$C_{DM}$	0	0	0,01	0,03	0,24
$C_{MM}$	0	0,12	-0,12	0,17	-0,11
$C_{L\delta_e}$	0,338	0,356	0,270	0,367	0,300
$C_{M\delta_e}$	-1,34	-1,43	-1,06	-1,45	-1,20

figura 16.26 a pagina 89). Interessa pertanto ricavare gli autovalori e gli autovettori della matrice  $A_{\text{LON}}$  relativa al caso pratico esaminato.

La matrice (16.196) ha per polinomio caratteristico

$$\Delta_{\text{LON}}(s) = |A_{\text{LON}} - \lambda I| = s^4 + 1,1065 s^3 + 0,7992 s^2 + 0,0225 s + 0,0140 \quad (16.198)$$

i cui zeri sono

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \{ \lambda_{\text{SP}}, \lambda_{\text{SP}}^* \} = \sigma_{\text{SP}} \pm j \omega_{\text{SP}} = -0,5515 s^{-1} \pm j 0,6879 s^{-1} \\ \lambda_{3,4} &= \{ \lambda_{\text{PH}}, \lambda_{\text{PH}}^* \} = \sigma_{\text{PH}} \pm j \omega_{\text{PH}} = -0,0018 s^{-1} \pm j 0,1340 s^{-1} \end{aligned} \quad (16.199)$$

I nomi degli autovalori (16.199) hanno senso se si ricordano le espressioni (16.134)-(16.138) con le quali si sono introdotti i modi di corto periodo e di fugoide. Si può dunque porre

$$\Delta_{\text{LON}}(s) = \underbrace{(s^2 - 2\zeta_{\text{SP}} \omega_{\text{n,SP}} s + \omega_{\text{n,SP}}^2)}_{\text{SHORT PERIOD MODE}} \underbrace{(s^2 - 2\zeta_{\text{PH}} \omega_{\text{n,PH}} s + \omega_{\text{n,PH}}^2)}_{\text{PHUGOID MODE}} \quad (16.200)$$

dove

$$\begin{aligned}
 s^2 - 2\zeta_{SP} \omega_{n,SP} s + \omega_{n,SP}^2 &= (s - \lambda_{SP})(s - \lambda_{SP}^*) \\
 &= \left[ s - (\sigma_{SP} + j\omega_{SP}) \right] \left[ s - (\sigma_{SP} - j\omega_{SP}) \right] \\
 &= \left[ s - (-0,5515 + j0,6879) \right] \left[ s - (-0,5515 - j0,6879) \right] \quad (16.201)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 s^2 - 2\zeta_{PH} \omega_{n,PH} s + \omega_{n,PH}^2 &= (s - \lambda_{PH})(s - \lambda_{PH}^*) \\
 &= \left[ s - (\sigma_{PH} + j\omega_{PH}) \right] \left[ s - (\sigma_{PH} - j\omega_{PH}) \right] \\
 &= \left[ s - (-0,0018 + j0,1340) \right] \left[ s - (-0,0018 - j0,1340) \right] \quad (16.202)
 \end{aligned}$$

Per le note espressioni valide per i sistemi del secondo ordine si ha

$$\zeta_{SP} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{SP}}{\sigma_{SP}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{0,6879 \text{ s}^{-1}}{-0,5515 \text{ s}^{-1}}\right)^2}} = 0,6255 \quad (16.203a)$$

$$\omega_{n,SP} = \frac{-\sigma_{SP}}{\zeta_{SP}} = \frac{-(-0,5515 \text{ s}^{-1})}{0,6255} = 0,8816 \text{ s}^{-1} \quad (16.203b)$$

$$T_{SP} = \frac{2\pi}{\omega_{n,SP} \sqrt{1 - \zeta_{SP}^2}} = \frac{6,28}{0,8816 \text{ s}^{-1} \sqrt{1 - 0,6255^2}} = 9,13 \text{ s} \quad (16.203c)$$

$$t_{1/2,SP} = \frac{\ln 2}{\omega_{n,SP} \zeta_{SP}} = \frac{0,6931}{0,8816 \text{ s}^{-1} \cdot 0,6255} = 1,26 \text{ s} \quad (16.203d)$$

$$N_{1/2,SP} = \frac{t_{1/2,SP}}{T_{SP}} = \frac{1,26 \text{ s}}{9,13 \text{ s}} = 0,138 \quad (16.203e)$$

e

$$\zeta_{PH} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{PH}}{\sigma_{PH}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{0,1340 \text{ s}^{-1}}{-0,00177 \text{ s}^{-1}}\right)^2}} = 0,0132 \quad (16.204a)$$

$$\omega_{n,PH} = \frac{-\sigma_{PH}}{\zeta_{PH}} = \frac{-(-0,00177 \text{ s}^{-1})}{0,0132} = 0,1340 \text{ s}^{-1} \quad (16.204b)$$

$$T_{PH} = \frac{2\pi}{\omega_{n,PH} \sqrt{1 - \zeta_{PH}^2}} = \frac{6,28}{0,1340 \text{ s}^{-1} \sqrt{1 - 0,0132^2}} = 46,91 \text{ s} \quad (16.204c)$$

$$t_{1/2,PH} = \frac{\ln 2}{\omega_{n,PH} \zeta_{PH}} = \frac{0,6931}{0,1340 \text{ s}^{-1} \cdot 0,0132} = 391,13 \text{ s} \quad (16.204d)$$

$$N_{1/2,PH} = \frac{t_{1/2,PH}}{T_{PH}} = \frac{391,13 \text{ s}}{46,91 \text{ s}} = 8,339 \quad (16.204e)$$

### Approfondimento 16.2: Scomposizione modale e dinamica longitudinale

La (16.127) può essere formulata nel caso particolare della dinamica longitudinale dei velivoli ottenendo

$$\mathbf{A}_{\text{LON}} = \left[ \text{Re}(\chi_1) \mid \text{Im}(\chi_1) \mid \text{Re}(\chi_3) \mid \text{Im}(\chi_3) \right] \begin{bmatrix} \sigma_{\text{SP}} & \omega_{\text{SP}} & 0 & 0 \\ -\omega_{\text{SP}} & \sigma_{\text{SP}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{PH}} & \omega_{\text{PH}} \\ 0 & 0 & -\omega_{\text{PH}} & \sigma_{\text{PH}} \end{bmatrix} \left[ \text{Re}(\chi_1) \mid \text{Im}(\chi_1) \mid \text{Re}(\chi_3) \mid \text{Im}(\chi_3) \right]^{-1} \quad (16.205)$$

Analogamente la (16.128) diventa

$$e^{\mathbf{A}_{\text{LON}} t} = \left[ \text{Re}(\chi_1) \mid \text{Im}(\chi_1) \mid \text{Re}(\chi_3) \mid \text{Im}(\chi_3) \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega_{\text{SP}} t) & \sin(\omega_{\text{SP}} t) & 0 & 0 \\ -\sin(\omega_{\text{SP}} t) & \cos(\omega_{\text{SP}} t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_{\text{PH}} t) & \sin(\omega_{\text{PH}} t) \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_{\text{PH}} t) & \cos(\omega_{\text{PH}} t) \end{bmatrix} \left[ \text{Re}(\chi_1) \mid \text{Im}(\chi_1) \mid \text{Re}(\chi_3) \mid \text{Im}(\chi_3) \right]^{-1} \quad (16.206)$$

Pertanto, se si assegna  $\mathbf{x}(0) = \text{Re}(\chi_{\text{SP}})$ , si ottiene un'espressione analitica della risposta modale simile alla (16.130), cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}_{\text{LON}} t} \text{Re}(\chi_1) = \left[ \text{Re}(\chi_1) \mid \text{Im}(\chi_1) \mid \text{Re}(\chi_3) \mid \text{Im}(\chi_3) \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega_{\text{SP}} t) & \sin(\omega_{\text{SP}} t) & 0 & 0 \\ -\sin(\omega_{\text{SP}} t) & \cos(\omega_{\text{SP}} t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_{\text{PH}} t) & \sin(\omega_{\text{PH}} t) \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_{\text{PH}} t) & \cos(\omega_{\text{PH}} t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= e^{\sigma t} \left[ \text{Re}(\chi_1) \mid \text{Im}(\chi_1) \mid \text{Re}(\chi_3) \mid \text{Im}(\chi_3) \right] \begin{bmatrix} \cos(\omega_{\text{SP}} t) \\ -\sin(\omega_{\text{SP}} t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= e^{\sigma t} \left( \text{Re}(\chi_1) \cos(\omega_{\text{SP}} t) - \text{Im}(\chi_1) \sin(\omega_{\text{SP}} t) \right) \quad (16.207) \end{aligned}$$

Questa relazione mostra che, per la particolare condizione iniziale scelta, la risposta è esprimibile semplicemente in termini di  $\lambda_{\text{SP}} = \sigma_{\text{SP}} + j\omega_{\text{SP}}$  e  $\chi_1 \equiv \chi_{\text{SP}}$ .

L'analisi degli autovettori fornisce infine delle informazioni sullo sfasamento e sull'intensità relativa dei modi. A tale scopo è opportuno normalizzare e scalare gli autovettori come segue:

- ciascun autovettore destro  $\chi$  viene diviso per la sua quarta componente — cioè quella associata alla perturbazione dell'angolo di Eulero  $\theta$  — in modo che l'autovettore

normalizzato abbia quarta componente pari a 1; questa componente è un particolare numero complesso rappresentato in coordinate polari come *fasore* (vettore) allineato all'asse reale;

- si dividono la prima e la seconda componente per  $U_0$ , trasformando le perturbazioni  $u$  e  $w$  in perturbazioni adimensionali  $\hat{u} = u/U_0$  e  $\alpha = w/U_0$  (in particolare, la seconda è interpretabile come perturbazione angolare);
- si moltiplica la terza componente per  $\bar{c}/(2U_0)$  trasformando la perturbazione  $q$  in perturbazione adimensionale  $\hat{q} = q\bar{c}/(2U_0)$ .

In tal caso si possono interpretare i fasori delle prime tre componenti dell'autovettore normalizzato  $\chi$  — associate, rispettivamente, alla perturbazione adimensionale di velocità, alla perturbazione di angolo d'attacco e alla perturbazione adimensionale di velocità angolare di beccheggio — come risposte periodiche sfasate in anticipo o in ritardo rispetto alla risposta oscillatoria  $\theta(t)$ .

La normalizzazione proposta può essere così ricondotta ad una trasformazione delle variabili di stato del tipo

$$\mathbf{T}_{\text{LON}} \mathbf{x}_{\text{LON}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ U_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{c}}{2U_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u/U_0 \\ w/U_0 \\ q\bar{c}/(2U_0) \\ \theta \end{Bmatrix} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_{\text{LON}} \quad (16.208)$$

con la matrice  $\mathbf{T}_{\text{LON}}$  che, per la (16.197) riscritta in termini del nuovo vettore di stato

$$\mathbf{T}_{\text{LON}}^{-1} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\text{LON}} = \mathbf{A}_{\text{LON}} \mathbf{T}_{\text{LON}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{\text{LON}} \Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{\text{LON}} = (\mathbf{T}_{\text{LON}} \mathbf{A}_{\text{LON}} \mathbf{T}_{\text{LON}}^{-1}) \hat{\mathbf{x}}_{\text{LON}} \quad (16.209)$$

trasforma la matrice  $\mathbf{A}_{\text{LON}}$  come segue:

$$\hat{\mathbf{A}}_{\text{LON}} = \mathbf{T}_{\text{LON}} \mathbf{A}_{\text{LON}} \mathbf{T}_{\text{LON}}^{-1} \quad (16.210)$$

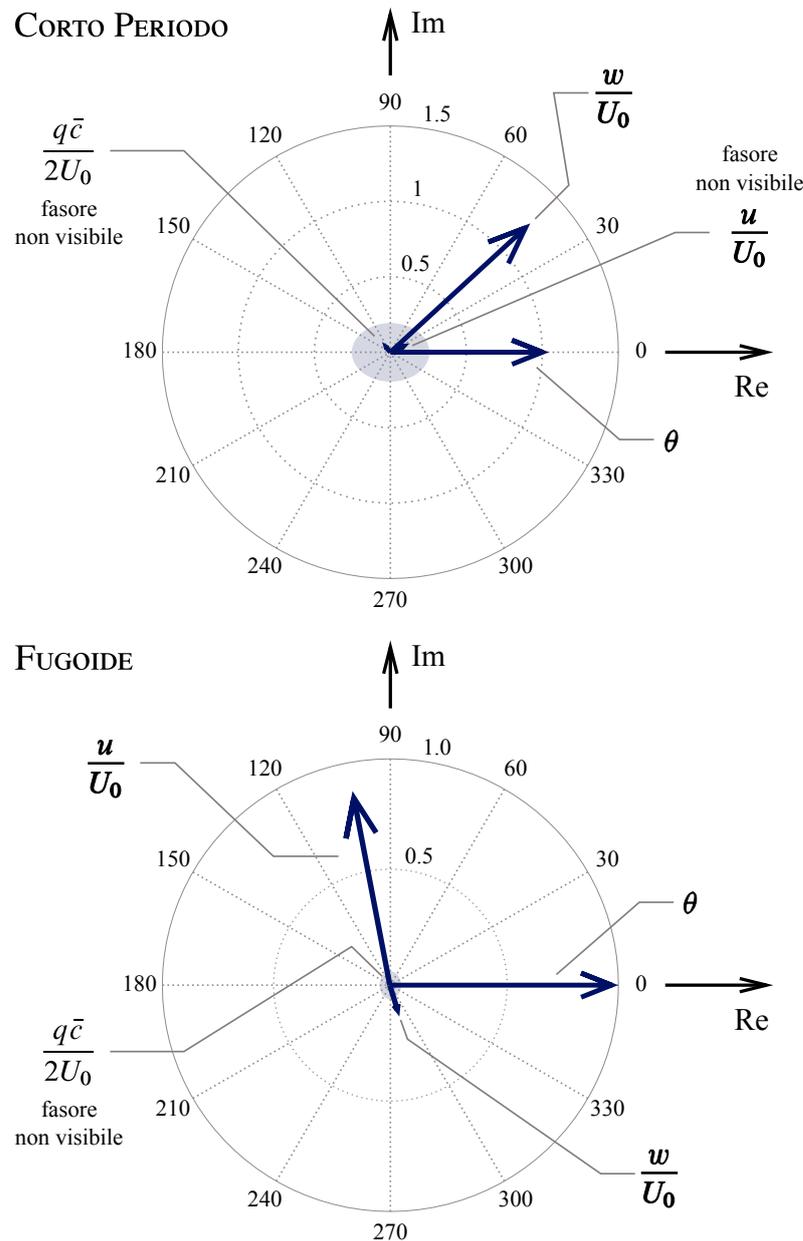
Le matrici  $\mathbf{A}_{\text{LON}}$  e  $\hat{\mathbf{A}}_{\text{LON}}$  sono matrici simili e hanno gli stessi autovalori. Si lascia al lettore l'esercizio di determinare la forma della matrice  $\hat{\mathbf{A}}_{\text{LON}}$  data dalla trasformazione simile (16.210).

La rappresentazione in forma di fasori (o *diagrammi di Argand*) degli autovettori (normalizzati e scalati) della matrice  $\mathbf{A}_{\text{LON}}$  è riportata nella figura 16.15 nella pagina seguente. Si osservano i fasori associati all'autovettore  $\chi_1 \equiv \chi_{\text{SP}}$  del corto periodo e all'autovettore  $\chi_3 \equiv \chi_{\text{PH}}$  del fugoide.

Le componenti degli autovettori normalizzati hanno i seguenti valori numerici:

$$\chi_{\text{SP}} = \begin{Bmatrix} 0,0869921 + j0,040355 \\ 0,888243 + j0,82427 \\ -0,0269694 + j0,033641 \\ 1 + j0 \end{Bmatrix} \quad \chi_{\text{PH}} = \begin{Bmatrix} -0,157650 + j0,826524 \\ 0,032727 + j(-0,107837) \\ -0,000087 + j(0,006551) \\ 1 + j0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u/U_0 \\ \leftarrow w/U_0 \\ \leftarrow q\bar{c}/(2U_0) \\ \leftarrow \theta \end{matrix} \quad (16.211)$$

Le risposte libere riportate nella figura 16.16 a pagina 69 si ottengono risolvendo il problema (16.104) per una condizione iniziale coincidente, rispettivamente, con gli autovettori (sinistri) del corto periodo  $\xi_1^T$  e del fugoide  $\xi_3^T$ .



**Figura 16.15** Diagramma dei fasori nel piano complesso. Auto-vettori normalizzati del modo di corto periodo e del modo di fugoide per un Boeing 747 per una condizione di volo di riferimento di *powered approach* al numero di Mach  $M_0 = 0,25$  (si veda la condizione '2' nella tabella 16.3).

### Esercizio 16.1: Caratteristiche longitudinali di un Boeing 747 in Matlab

Per mezzo di uno script Matlab ricavare la matrice (16.196) calcolandone gli autovalori e gli autovettori. Diagrammare le risposte modali e i fasori degli autovettori. Verificare l'esistenza dei modi di corto periodo e di fugoide. Calcolare le caratteristiche di ciascun modo: coefficiente di smorzamento  $\zeta$ , pulsazione naturale  $\omega_n$ , periodo  $T$ , tempo di dimezzamento (o raddoppio)  $t_{1/2}$  (o  $t_{2x}$ ), numero di cicli fino al tempo di dimezzamento (o di raddoppio)  $N_{1/2}$  (o  $N_{2x}$ ).

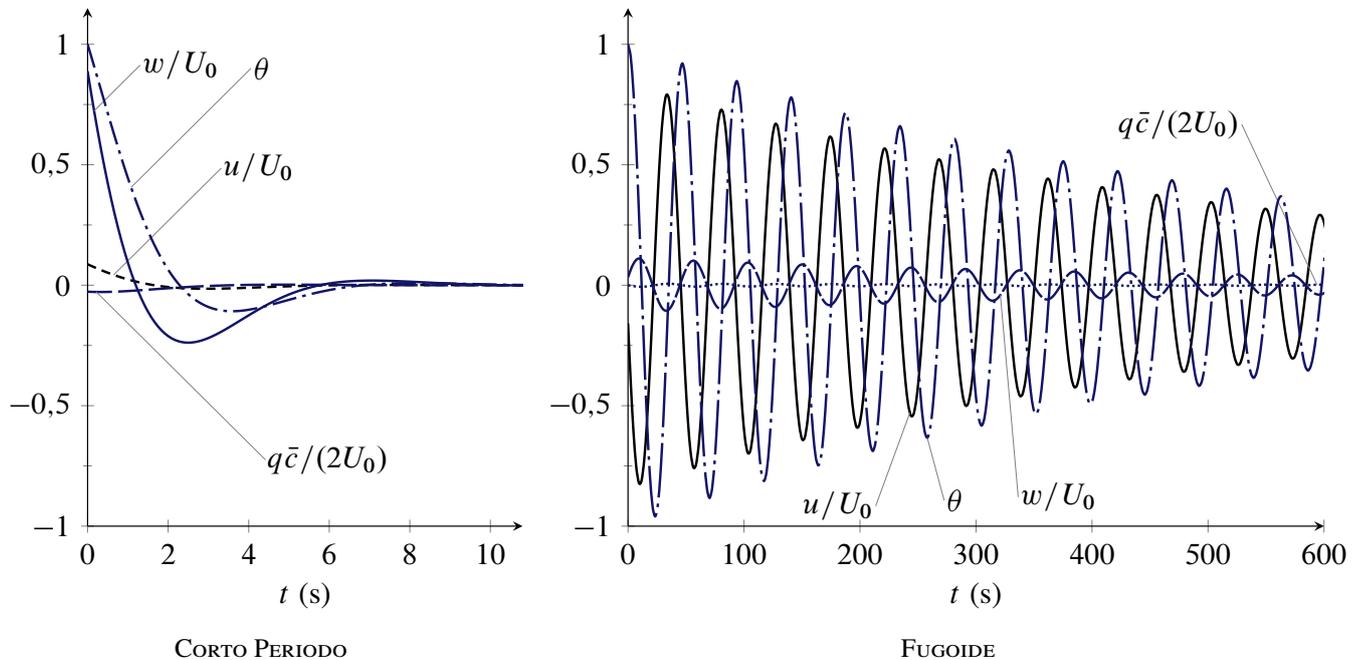
#### Suggerimenti per lo svolgimento

Una possibile via per risolvere il problema assegnato è data dal codice seguente.

```
clc; clear; close all;

% condition 2, report by Heffley et alii

Weight = convforce(564032, 'lbf', 'N');
g_0 = 9.81; % m/s^2
mass = Weight/g_0;
```



**Figura 16.16** Risposte libere di un Boeing 747 a perturbazioni longitudinali della condizione iniziale. Le due risposte sono state ottenute eccitando, rispettivamente, *solo* il modo di corto periodo (a sinistra) e *solo* il modo di fugoide (a destra).

```

SLUGFT2toKGM2 = convmass(1,'slug','kg')*(convlenght(1,'ft','m')^2);
Iyy = 32.3e6 * SLUGFT2toKGM2; % kg*m^2

h_0 = 0; % m
[T_0, a_0, p_0, rho_0] = atmosisa(h_0);

Mach_0 = 0.25;

% U_0 = convvel(279.1,'ft/s','m/s'); % m/s
U_0 = Mach_0 * a_0;

S = 5500*(convlenght(1,'ft','m'))^2; % m^2
cbar = convlenght(27.3,'ft','m'); % m

qbar_0 = 0.5*rho_0*(U_0^2);
mu_0 = mass/(0.5*rho_0*S*cbar);

Gamma_0 = 0.0; % rad
C_L = 1.108;
C_D = 0.102;
C_L_Mach = 0.0;
C_L_alpha = 5.70; % 1/rad
C_L_alphadot = 6.7; % 1/rad
C_L_q = 5.4; % 1/rad
C_D_alpha = 0.66; % 1/rad
C_D_alphadot = 0.0; % 1/rad
C_D_q = 0.0; % 1/rad
C_D_Mach = 0.0;

SM_0 = 0.22;
C_m_alpha_0 = -1.26; % 1/rad
SM = 0.22; % Try also: 0.0158 0.0021 0.0 -0.0145
C_m_alpha = C_m_alpha_0*(SM/SM_0); % 1/rad

C_m_alphadot = -3.2; % 1/rad
C_m_q = -20.8; % 1/rad
C_m_Mach = 0.0;
C_L_de = 0.338; % 1/rad
C_m_de = -1.34; % 1/rad

```

```

X_u    = -(qbar_0*S/(mass*U_0))*(2*C_D + Mach_0*C_D_Mach); % constant thrust
X_w    = (qbar_0*S/(mass*U_0))*(C_L - C_D_alpha);
X_wdot = 0;
X_q    = 0;
X_de   = 0;
X_dT   = 0;

Z_u    = -(qbar_0*S/(mass*U_0))*( ...
    2*C_L + (Mach_0^2/(1-Mach_0^2))*C_L_Mach); % constant thrust
Z_w    = -(qbar_0*S/(mass*U_0))*(C_D + C_L_alpha);
Z_wdot = -(1/(2*mu_0))*C_L_alphadot;
Z_q    = -(U_0/(2*mu_0))*C_L_q; % *convvel(1,'m/s','ft/s')
Z_de   = 0;
Z_dT   = 0;

M_u    = (qbar_0*S*cbar/(Iyy*U_0))*Mach_0*C_m_Mach;
M_w    = (qbar_0*S*cbar/(Iyy*U_0))*C_m_alpha; % /convvel(1,'m/s','ft/s')
M_wdot = (rho_0*S*(cbar^2)/(4*Iyy))*C_m_alphadot; % /convvel(1,'m/s','ft/s')
M_q    = (rho_0*U_0*S*(cbar^2)/(4*Iyy))*C_m_q;
M_de   = 0;
M_dT   = 0;

k_hat = M_wdot/(1-Z_wdot);

```

(continua)

Fin qui si sono definite le grandezze da inserire nelle matrici del sistema LTI. Esse vengono costruite nel frammento di codice seguente.

```

% A_lon = [ ...
%   X_u,          X_w,          0, ...
%   -g_0*cos(Gamma_0); ...
%   Z_u/(1-Z_wdot), Z_w/(1-Z_wdot), (Z_q + U_0)/(1-Z_wdot), ...
%   -g_0*sin(Gamma_0)/(1-Z_wdot); ...
%   M_u + k_hat*Z_u, M_w+k_hat*Z_w, M_q + k_hat*(Z_q + U_0), ...
%   -k_hat*g_0*sin(Gamma_0); ...
%   0,           0,           1, ...
%   0 ];

% Plant matrix → cfr. (16.147b)
A_lon(1,1) = X_u;
A_lon(1,2) = X_w;
A_lon(1,3) = 0;
A_lon(1,4) = -g_0*cos(Gamma_0);
A_lon(2,1) = Z_u/(1 - Z_wdot);
A_lon(2,2) = Z_w/(1 - Z_wdot);
A_lon(2,3) = (Z_q + U_0)/(1 - Z_wdot);
A_lon(2,4) = -g_0*sin(Gamma_0)/(1 - Z_wdot);
A_lon(3,1) = M_u + k_hat*Z_u;
A_lon(3,2) = M_w + k_hat*Z_w;
A_lon(3,3) = M_q + k_hat*(Z_q+U_0);
A_lon(3,4) = -k_hat*g_0*sin(Gamma_0);
A_lon(4,1) = 0;
A_lon(4,2) = 0;
A_lon(4,3) = 1;
A_lon(4,4) = 0;

% Input matrix → cfr. (16.147c)
B_lon = [ ...
    X_de/mass,          X_dT/mass; ...
    Z_de/(mass-Z_wdot), Z_dT/(mass-Z_wdot); ...
    (M_de + Z_de*M_wdot/(mass-Z_wdot))/Iyy, ...
    (M_dT + Z_dT*M_wdot/(mass-Z_wdot))/Iyy; ...
    0,          0];

% Output matrices
C_lon = eye(3,4);
D_lon = zeros(3,2);

```

(continua)

Infine il frammento di codice seguente calcola gli autovalori e gli autovettori. In questo esempio particolare si utilizzano le funzioni del toolbox di calcolo simbolico di Matlab.

(continua dal listato precedente)

```

%% symbolic determinant --> characteristic equation
syms lambda

characteristic_sym_polynomial_lon = det(A_lon-lambda*eye(4));
char_poly_lon = sym2poly(characteristic_sym_polynomial_lon);

a1 = char_poly_lon(1);
a2 = char_poly_lon(2); a2 = a2/a1;
a3 = char_poly_lon(3); a3 = a3/a1;
a4 = char_poly_lon(4); a4 = a4/a1;
a5 = char_poly_lon(5); a5 = a5/a1; a1 = 1;

%% Eigenvector, eigenvalues
[V,D] = eig(A_lon);

W = inv(V);

V_SP = V(:,1);
V_SP = V_SP/V_SP(4);
V_SP(1,1) = V_SP(1,1)/U_0;
V_SP(2,1) = V_SP(2,1)/U_0;
V_SP(3,1) = V_SP(3,1)/(2*U_0/cbar);

V_Ph = V(:,3);
V_Ph = V_Ph/V_Ph(4);
V_Ph(1,1) = V_Ph(1,1)/U_0;
V_Ph(2,1) = V_Ph(2,1)/U_0;
V_Ph(3,1) = V_Ph(3,1)/(2*U_0/cbar);

%% State variables transformation
syms a11 a12 a13 a14 a21 a22 a23 a24 a31 a32 a33 a34 a41 a42 a43 a44
AA = [ ...
    a11, a12, a13, a14; ...
    a21, a22, a23, a24; ...
    a31, a32, a33, a34; ...
    a41, a42, a43, a44];

% Transform plant matrix → cfr. (16.208)-(16.210)
syms U0 Cbar
TT = diag([1/U0,1/U0,Cbar/(2*U0),1]);

AA1 = TT*AA*inv(TT); % symbolic

% evaluate AA1 by substituting numbers to symbols
A_lon1 = ...
    double( ... % make the result double
        subs( ... % substitute
            AA1, ... % in AA1
            [a11, a12, a13, a14, ... % the values aij
             a21, a22, a23, a24, ...
             a31, a32, a33, a34, ...
             a41, a42, a43, a44 ...
            U0, Cbar], ... % etc, with the following numbers
            [A_lon(1,1), A_lon(1,2), A_lon(1,3), A_lon(1,4), ...
             A_lon(2,1), A_lon(2,2), A_lon(2,3), A_lon(2,4), ...
             A_lon(3,1), A_lon(3,2), A_lon(3,3), A_lon(3,4), ...
             A_lon(4,1), A_lon(4,2), A_lon(4,3), A_lon(4,4), ...
             U_0, cbar] ...
        ) ...
    )

% right eigenvectors (columns) and eigenvalues
[V1,D1] = eig(A_lon1);

% left eigenvectors (rows)
W1 = inv(V1);

```

```

% make a state-space representation
sys = ss( ...
    A_lon1, ...           % A
    zeros(size(A_lon1,1),1), ... % B
    eye(4,4), ...       % C
    zeros(4,1) ...      % D
);

% Short-Period/Phugoid, normalized left eigenvector
V1SP = V1(:,1);
V1SP = V1SP/V1SP(4,1);
V1Ph = V1(:,3);
V1Ph = V1Ph/V1Ph(4,1);

% time response taking the initial state coincident
% with the original eigenvectors
→ cfr. approfondimenti (16.6.1) e (16.7.4)
x_init_1 = real(V1SP);
[y1,t1,x1] = initial(sys,x_init_1);

x_init_3 = real(V1Ph);
[y3,t3,x3] = initial(sys,x_init_3);

```

(continua)

Di seguito vengono rappresentati i risultati.

(continua dal listato precedente)

```

%% eigenvector plot
figure(1)

subplot(221)
compass(V_SP)
axis('square')
xlabel(num2str(abs(V_SP)))

subplot(222)
compass(V_Ph)
axis('square')
xlabel(num2str(abs(V_Ph)))

subplot(223)
plot( ...
    t1,y1(:,1),'-.', ...
    t1,y1(:,2),'-.-', ...
    t1,(cbar/(2*U_0))*y1(:,3),'-.-', ...
    t1,y1(:,4),'-.-' ...
)
legend('u/U_0','w/U_0','q c/(2 U_0)','theta')
ylabel('Perturbation States u,w,q');
xlabel('time (sec)');
axis([0 10 -1 1.0])

subplot(224)
plot( ...
    t3,y3(:,1),'-.', ...
    t3,y3(:,2),'-.-', ...
    t3,(cbar/(2*U_0))*y3(:,3),'-.-', ...
    t3,y3(:,4),'-.-' ...
)
legend('u/U_0','w/U_0 (deg)','q c/(2 U_0)','theta (deg)')
ylabel('Perturbation States u,w,q');
xlabel('time (sec)');
axis([0 600 -1 1])

```

(continua)

Infine vengono calcolate le caratteristiche modali richieste.

(continua dal listato precedente)

```

% anonymous functions
zeta = @(sigma,omega) ...
    sqrt(1/(1+(omega/sigma)^2));
omega_n = @(sigma,omega) ...

```

```

-sigma/zeta(sigma,omega);
Period = @(sigma,omega) ...
    2*pi/(omega_n(sigma,omega)*sqrt(1-(zeta(sigma,omega))^2));
t_half = @(sigma,omega) ...
    log(2)/(omega_n(sigma,omega)*zeta(sigma,omega));
N_half = @(sigma,omega) ...
    t_half(sigma,omega)/Period(sigma,omega);

% Short Period
lambda_SP = D(1,1);
sigma_SP = real(lambda_SP);
omega_SP = imag(lambda_SP);

zeta_SP = zeta(sigma_SP,omega_SP); % sqrt(1/(1+(omega_SP/sigma_SP)^2));
omega_n_SP = omega_n(sigma_SP,omega_SP); % -sigma_SP/zeta_SP;
T_SP = Period(sigma_SP,omega_SP); % 2*pi/(omega_n_SP*sqrt(1-zeta_SP^2));
t_half_SP = t_half(sigma_SP,omega_SP); % log(2)/(omega_n_SP*zeta_SP);
N_half_SP = N_half(sigma_SP,omega_SP); % t_half_SP/T_SP;

% Phugoid
lambda_Ph = D(3,3);
sigma_Ph = real(lambda_Ph);
omega_Ph = imag(lambda_Ph);
zeta_Ph = sqrt(1/(1+(omega_Ph/sigma_Ph)^2));
omega_n_Ph = -sigma_Ph/zeta_Ph;
T_Ph = 2*pi/(omega_n_Ph*sqrt(1-zeta_Ph^2));
t_half_Ph = log(2)/(omega_n_Ph*zeta_Ph);
N_half_Ph = t_half_Ph/T_Ph;

```

Il codice precedente consente di ottenere i risultati presentati dalle (16.203)-(16.204) e rappresentati nelle figure 16.16 e 16.15.



### Esercizio 16.2: Caratteristiche longitudinali di un Boeing 747 in Matlab

Ripetere la procedura dell'esercizio 16.1 per diverse condizioni di volo nominali. Scegliere una fra le condizioni '5', '7', '9' o '10' elencate nella tabella 16.3 a pagina 64.

Calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice del sistema. Individuare i modi caratteristici di risposta. Diagrammare le singole risposte modali assegnando opportunamente le condizioni iniziali.



### Esercizio 16.3: Risposta di un Boeing 747 a una legge di comando

Con riferimento agli esercizi 16.1 e 16.2, risolvere numericamente in Matlab il problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{\text{LON}} = \mathbf{A}_{\text{LON}} \mathbf{x}_{\text{LON}} + \mathbf{B}_{\text{LON}} \mathbf{u}_{\text{LON}} \\ \mathbf{x}_{\text{LON}}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_{\text{LON}} = [\delta_c(t), 0]^T \quad \text{per } 0 \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (16.212)$$

costruendo entrambi le matrici  $\mathbf{A}_{\text{LON}}$  e  $\mathbf{B}_{\text{LON}}$  e assegnando una legge di movimento dell'equilibratore  $\delta_c(t)$ .

#### *Suggerimenti per lo svolgimento*

Usare la funzione predefinita `lsim` come nel frammento di codice seguente.

(si veda il listato dell'esercizio 16.1)

```

sys_lon = ss( ...
    A_lon, ... % A
    B_lon, ... % B
    eye(4,4), ... % C
    zeros(4,2) ... % D
);

% Break Points of command law
t_BP = [0, 4.99, 5, 6.0, 6.01, 14.99, 15, 16.0, 16.01, 300];
de_deg_BP = [0, 0, -8, -8, 0, 0, 8, 8, 0, 0];

% Time vector
t_Elevator_Doublet = [0:0.025:300]';

% Commanded deflection column vector
de_rad_Elevator_Doublet = ...
    interp1(t_BP, convang(de_deg_BP, 'deg', 'rad'), t_Elevator_Doublet);
de_deg_Elevator_Doublet = convang(de_rad_Elevator_Doublet, 'rad', 'deg');

% Input u, nx2 matrix
u_Elevator_Doublet = [ ...
    de_rad_Elevator_Doublet, zeros(length(de_rad_Elevator_Doublet), 1)];

% Initial condition
x0_Elevator_Doublet = [0;0;0;0];

% Simulation
[y_Elevator_Doublet, t_Elevator_Doublet, x_Elevator_Doublet] = ...
    lsim(sys_lon, u_Elevator_Doublet, t_Elevator_Doublet, x0_Elevator_Doublet);

```

Si confrontino i risultati con quelli della figura 16.27 a pagina 92 validi per un Lockheed F104.



#### Esercizio 16.4: *Caratteristiche longitudinali di un velivolo*



Ripetere la procedura degli esercizi precedenti per un velivolo a scelta analizzato con Digital DATCOM.

A partire dalla conoscenza dei dati di massa, aerodinamici e propulsivi del velivolo scegliere una appropriata condizione di volo di riferimento e calcolare gli autovalori e gli autovettori della matrice del sistema. Individuare i modi caratteristici di risposta.



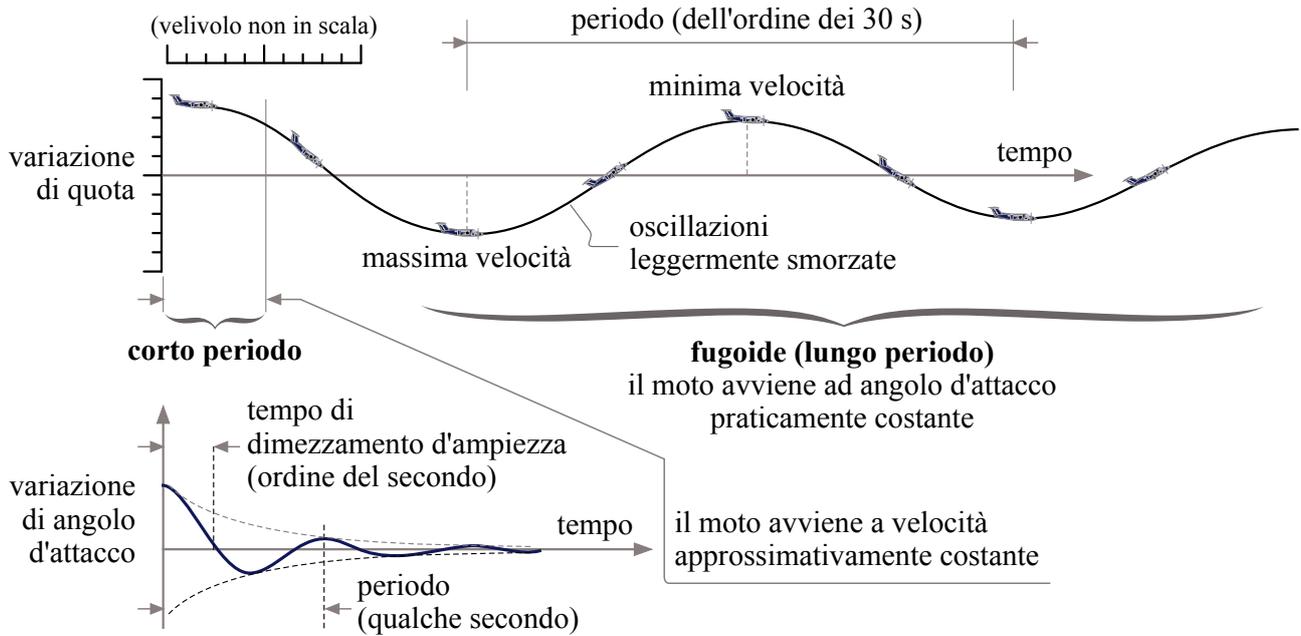
#### Esercizio 16.5: *Confronto tra modello di moto non lineare e modello linearizzato*



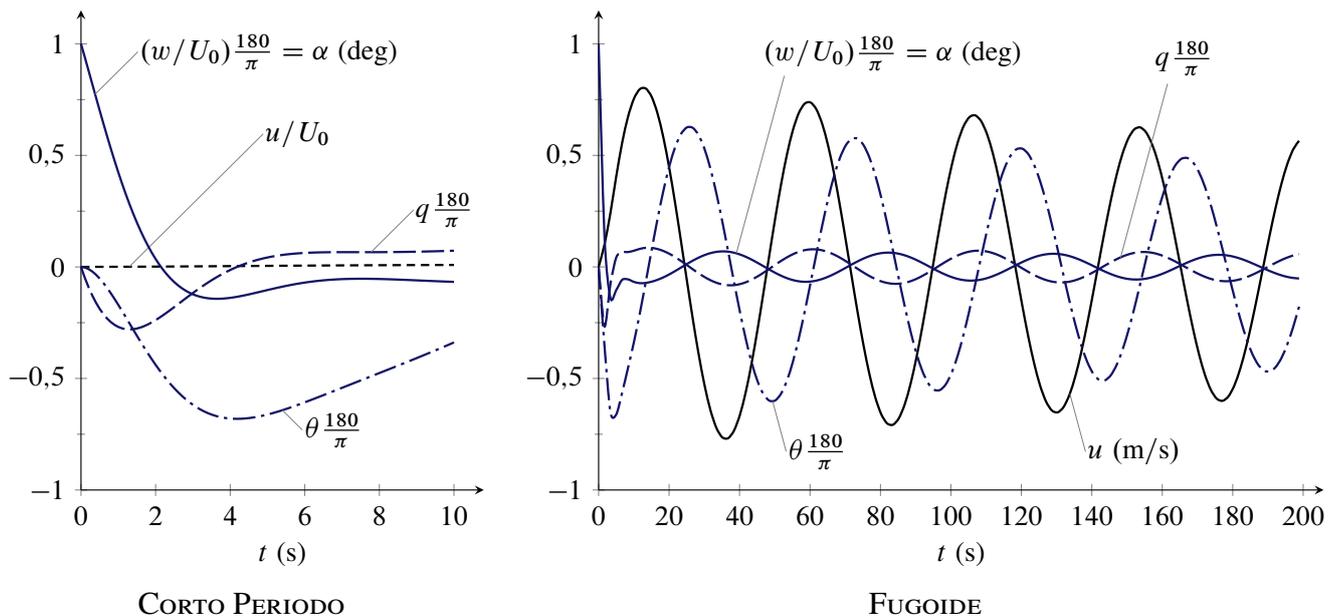
Per il velivolo selezionato nell'esercizio 16.4 eseguire il confronto fra le risposte del modello di moto non lineare a 3-DoF con le risposte del moto linearizzato.

Dopo aver ricavato le risposte del modello non lineare per una manovra “cabra-picchia” determinare l'entità delle perturbazioni delle variabili di stato nell'istante in cui la deflessione  $\delta_e$  viene riportata al valore iniziale  $\delta_{e0}$ . Utilizzare queste perturbazioni per ottenere la risposta libera del modello linearizzato. Riportare in grafico le storie temporali delle perturbazioni di  $V$ ,  $\alpha$ ,  $Q$  e  $\Theta$  eseguendo opportunamente i confronti.





**Figura 16.17** Risposta libera longitudinale a comandi bloccati ad un'assegnata perturbazione delle condizioni iniziali. Tipici moti associati ai modi di corto periodo e di fugoide.



**Figura 16.18** Risposta libera di un Boeing 747 alla perturbazione iniziale unitaria (in gradi) dell'angolo d'attacco. A sinistra la scala temporale mette in risalto la componente di risposta legata al modo di corto periodo. A destra la scala temporale evidenzia il modo di fugoide.

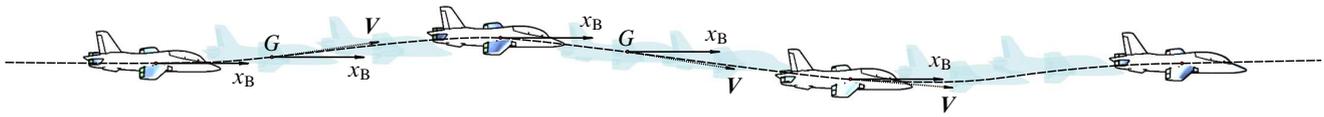
### 16.7.5 Approssimazioni della dinamica longitudinale

La figura 16.17 è un'illustrazione qualitativa della risposta libera longitudinale a comandi bloccati ottenuta in seguito ad un'assegnata perturbazione delle condizioni iniziali. Un esempio concreto è dato dalla figura 16.18 in cui è rappresentata la risposta libera di un Boeing 747 alla perturbazione iniziale unitaria (in gradi) dell'angolo d'attacco.

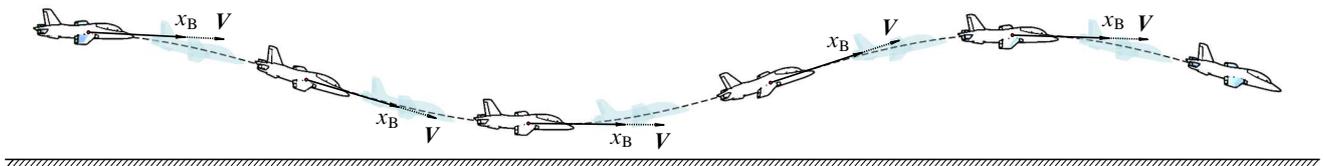
La risposta di corto periodo avviene praticamente a velocità costante e presenta significative perturbazioni dell'angolo d'attacco e della velocità angolare di beccheggio. Queste presentano rapide oscillazioni, con periodi  $T_{SP}$  dell'ordine di grandezza dei secondi, che



(a) Una tipica oscillazione di corto periodo, dove si osservano variazioni temporali sia dell'angolo d'assetto  $\theta$  che dell'angolo di incidenza  $\alpha$ .



(b) Una evoluzione con variazione temporale del solo angolo di incidenza  $\alpha$ .



(c) Una evoluzione con variazione temporale del solo angolo d'assetto  $\theta$ .

**Figura 16.19** Moto longitudinale-simmetrico con variazioni dell'angolo d'assetto  $\theta$  e dell'angolo di incidenza  $\alpha$ . (a) Caso tipico, con velocità angolare di beccheggio  $q$  e rateo  $\dot{\alpha}$  variabili e sfasati temporalmente. (b) Caso limite in cui  $q \equiv 0$ . (c) Caso limite in cui  $\dot{\alpha} \equiv 0$ .

si smorzano del tutto dopo pochi cicli, con coefficienti di smorzamento  $\zeta_{SP}$  dell'ordine dei decimi.

Una volta smorzata la componente di alta frequenza nella risposta libera si evidenzia la sola componente di lungo periodo, caratterizzata da un moto ad angolo d'attacco praticamente costante. Si può immaginare che nel moto di fugoide avvenga un graduale interscambio tra energia cinetica e potenziale con oscillazioni di bassa frequenza della velocità e dell'altitudine intorno ai valori di equilibrio. I valori tipici del periodo  $T_{Ph}$  delle oscillazioni di fugoide si aggirano intorno ai 30 s, con coefficienti di smorzamento  $\zeta_{Ph}$  dell'ordine dei centesimi.

Queste considerazioni consentono di pervenire a delle formulazioni ulteriormente approssimate (ridotte) delle equazioni (16.146). Le forme approssimate presentate qui di seguito valgono separatamente per le componenti di risposta di corto periodo e di lungo periodo.

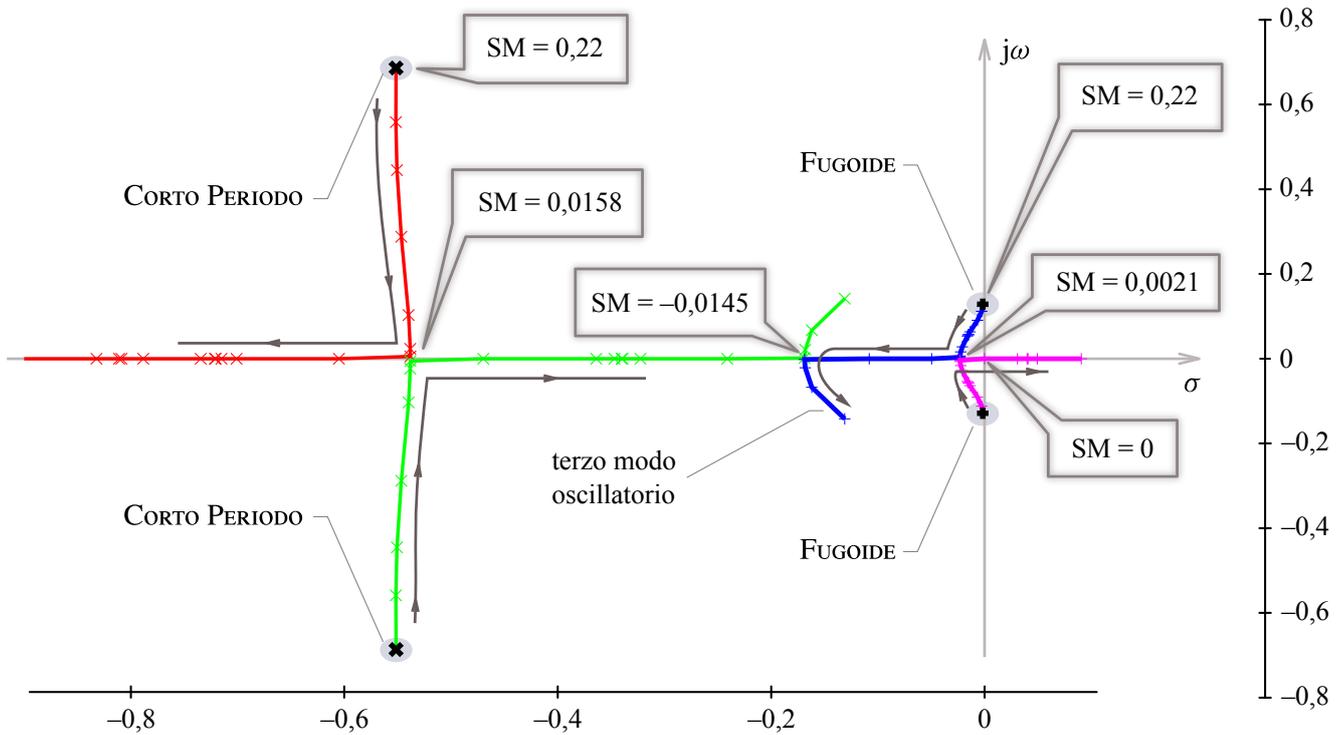
### Approssimazione di corto periodo

Per arrivare a questa forma approssimata delle equazioni linearizzate del moto si parte dalla

$$\dot{\mathbf{x}}_{LON} = \mathbf{A}_{LON} \mathbf{x}_{LON} + \mathbf{B}_{LON} \mathbf{u}_{LON} \quad (16.146)$$

con le matrici  $\mathbf{A}_{LON}$  e  $\mathbf{B}_{LON}$  date dalle (16.195).

Si osserva che nel corto periodo  $\dot{u} \approx 0$  quindi la prima equazione del moto longitudi-



**Figura 16.20** Luogo delle radici caratteristiche (*root locus*) della matrice  $A_{\text{LON}}$  per un Boeing 747 in configurazione di avvicinamento al numero di Mach  $M = 0,25$ , al livello del mare, con motori in funzione (*powered approach*). Riducendo il margine statico  $SM = \bar{X}_N - \bar{X}_{cg}$ , le coppie di radici complesse coniugate dei modi oscillatori tendono a collassare in un punto sull'asse reale (smorzamento critico) e successivamente a sdoppiarsi nuovamente in coppie di radici reali. Diminuendo ulteriormente SM, una delle radici di fugoide diventa instabile mentre l'altra si muove verso sinistra e collassa con una radice proveniente dal ramo di corto periodo. Queste ultime tendono a sdoppiarsi ancora nel cosiddetto *terzo modo oscillatorio*.

nale può essere scartata e il vettore di stato diventa

$$\mathbf{x}_{\text{LON,SP}} = \begin{Bmatrix} w \\ q \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (16.213)$$

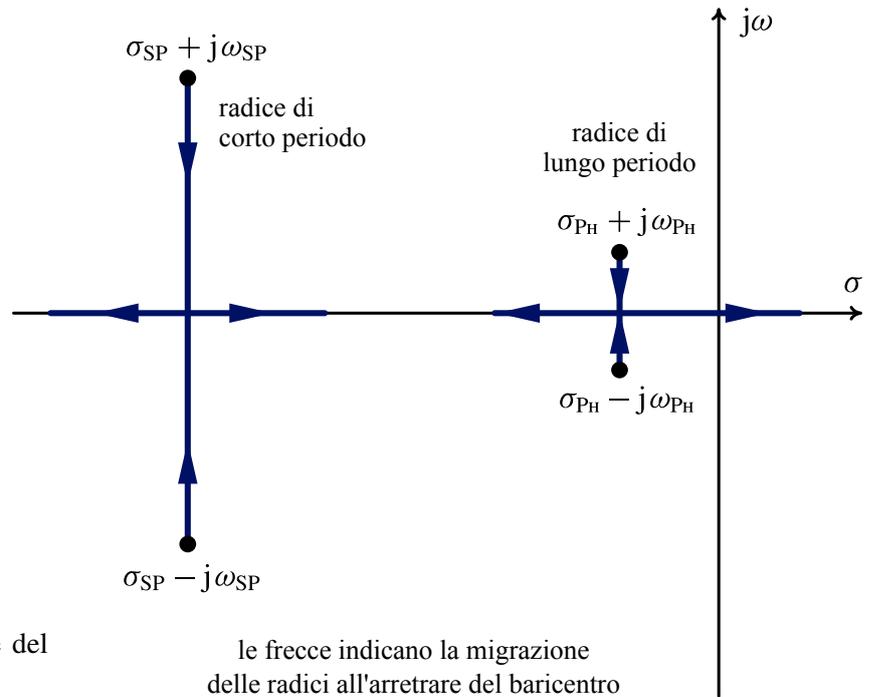
Dalle (16.195) si ottiene la forma semplificata della matrice del sistema

$$\mathbf{A}_{\text{LON,SP}} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_w & U_0 & -g S_{\theta_0} \\ \hat{M}_w + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_w & \hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{w}} U_0 & -\hat{M}_{\dot{w}} g S_{\theta_0} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.214)$$

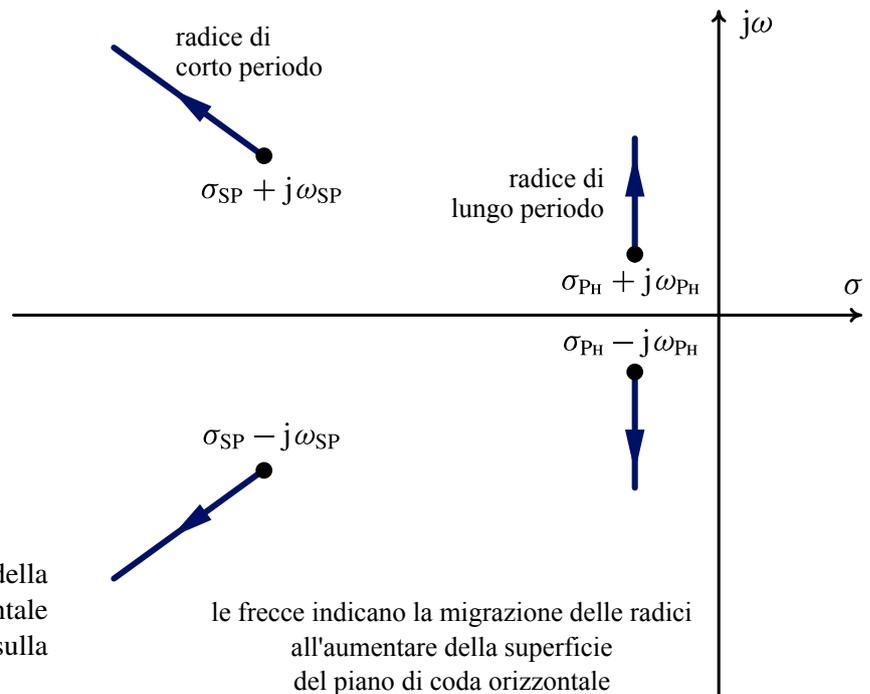
A questo punto, per  $\theta_0 = 0$  e potendo per semplicità rimuovere anche la variabile  $\theta$  dal modello approssimato, le equazioni della dinamica del corto periodo diventano

$$\begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_w & U_0 \\ \hat{M}_w + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_w & \hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{w}} U_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ q \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{Z}_{\delta_T} & \hat{Z}_{\delta_e} \\ \hat{M}_{\delta_T} + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_{\delta_T} & \hat{M}_{\delta_e} + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_{\delta_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_T \\ \delta_e \end{Bmatrix} \quad (16.215)$$





**Figura 16.22** Influenza della posizione del baricentro sulla risposta longitudinale.



**Figura 16.23** Influenza dell'area  $S_H$  della forma in pianta del piano di coda orizzontale (o anche del rapporto volumetrico  $\bar{V}_H$ ) sulla risposta longitudinale.

L'equazione caratteristica associata alla parte omogenea della (16.215) è

$$s^2 + 2 \zeta_{SP} \omega_{n,SP} s + \omega_{n,SP}^2 = 0 \quad (16.216)$$

con

$$2 \zeta_{SP} \omega_{n,SP} = -(\hat{Z}_w + \hat{M}_q + \hat{M}_w U_0) \quad (16.217a)$$

$$\omega_{n,SP}^2 = \hat{Z}_w \hat{M}_q - \hat{M}_w U_0 \quad (16.217b)$$

Per una verifica dimensionale delle espressioni precedenti si faccia riferimento alla tabella 16.2 a pagina 60. Si noti inoltre che le derivate di stabilità dimensionali che compaiono a secondo membro delle due espressioni precedenti sono tutte negative per un velivolo

staticamente stabile al beccheggio.

Ricordando che per piccole perturbazioni si ha

$$\alpha = \frac{w}{U_0} \quad (16.69b)$$

le (16.217a)-(16.217b) possono anche scriversi come segue

$$\zeta_{SP} = -\frac{1}{2\omega_{n,SP}} \left( \frac{\hat{Z}_\alpha}{U_0} + \hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{\alpha}} \right) \quad (16.217c)$$

$$\omega_{n,SP} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_\alpha}{U_0} \hat{M}_q - \hat{M}_\alpha} \quad (16.217d)$$

Tenendo conto degli ordini di grandezza delle derivate aerodinamiche dei velivoli di configurazione tradizionale si può arrivare ad espressioni ulteriormente semplificate. A partire dalle (16.217) si osserva che

$$2\zeta_{SP}\omega_{n,SP} \approx -\hat{M}_q, \quad \omega_{n,SP}^2 \approx -\hat{M}_w U_0 = -\hat{M}_\alpha \quad (16.218a)$$

che conducono alle formule finali

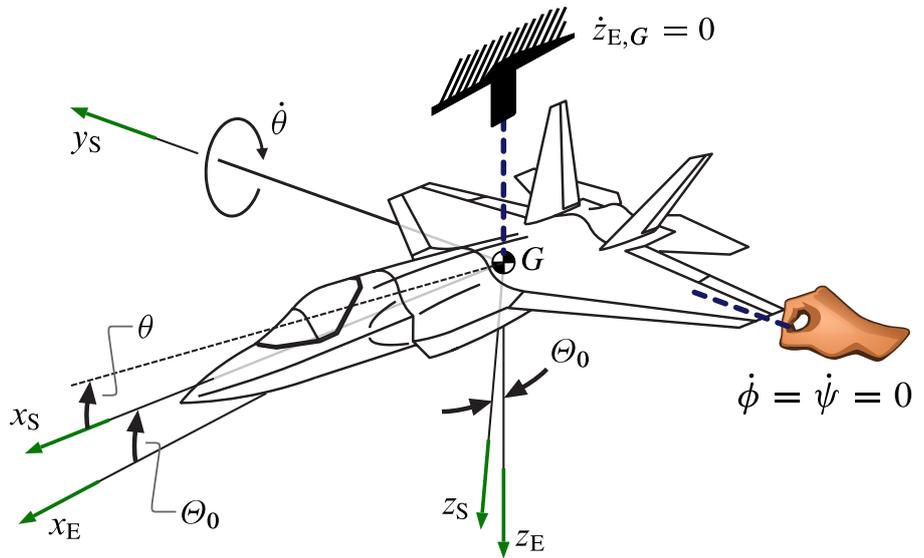
$$\zeta_{SP} = \frac{-\hat{M}_q}{2\sqrt{-\hat{M}_w U_0}} = \frac{-\hat{M}_q}{2\sqrt{-\hat{M}_\alpha}}, \quad \omega_{n,SP} = \sqrt{-\hat{M}_w U_0} = \sqrt{-\hat{M}_\alpha} \quad (16.218b)$$

Le espressioni notevoli (16.217) e (16.218) sono note, rispettivamente, come formule di *short period approximation* e di *short period coarse approximation*. Esse sono lo scopo per cui si derivano le equazioni approssimate (16.215): si riduce l'ordine del sistema per ottenere delle formule di calcolo analitiche delle caratteristiche di corto periodo di un velivolo.

Le (16.217) insieme alla figura 16.21 a pagina 78 suggeriscono un'analogia tra la dinamica longitudinale di corto periodo e un sistema massa-molla-smorzatore. La coppia di richiamo è proporzionale ad  $\alpha$  e l'indice di stabilità statica  $\hat{M}_\alpha$  (con la partecipazione del gradiente di portanza  $\hat{Z}_\alpha$ ) gioca il ruolo della costante di una molla torsionale. L'effetto dei coefficienti di smorzamento aerodinamico  $\hat{M}_q$  ed  $\hat{M}_{\dot{w}}$  è quello di uno smorzatore oleodinamico equivalente.

Le espressioni qui ricavate mostrano l'importanza dei coefficienti aerodinamici  $C_{L_\alpha}$ ,  $C_{M_\alpha}$ ,  $C_{M_q}$  e  $C_{M_{\dot{\alpha}}}$  di un velivolo nello studio della stabilità dinamica longitudinale. Combinazioni di questi coefficienti sono presenti nella matrice  $A_{LON}$  e determinano l'entità dei suoi autovalori. Questi, in particolare, migreranno nel piano complesso al variare di uno dei parametri del velivolo che influenzano i valori delle derivate aerodinamiche.

La figura 16.20 a pagina 77 mostra il luogo delle radici dell'equazione caratteristica del moto longitudinale per diversi valori del margine di stabilità statica  $SM = \bar{X}_N - \bar{X}_{cg}$ . La figura 16.22 nella pagina precedente mostra qualitativamente le direzioni di migrazione delle radici di corto e di lungo periodo al variare della posizione del baricentro. Analogamente, la figura 16.23 nella pagina precedente mostra la tipica migrazione degli autovalori al variare del rapporto volumetrico di coda dell'impennaggio orizzontale.



**Figura 16.24** Un modello di velivolo vincolato a compiere un moto di puro beccheggio. Le ali sono costantemente orizzontali, la direzione della prua è fissa.

### Approfondimento 16.3: Moto di puro beccheggio

La figura 16.24 mostra uno schema di velivolo vincolato a compiere un moto di *puro beccheggio*, con le ali costantemente orizzontali ( $\dot{\phi} = 0$ ), la direzione della prua fissa ( $\dot{\psi} = 0$ ) e la quota di poco variabile ( $\dot{z}_{E,G} = -V_0 \sin \Theta_0 \approx 0$ ). In pratica, il baricentro  $G$  percorre una traiettoria rettilinea a velocità costante e il velivolo è libero di ruotare solo intorno all'asse di stabilità laterale  $y_S$ .

Le equazioni linearizzate del moto perturbato di puro beccheggio potrebbero dedursi come caso particolare delle (16.145) riportate nella figura 16.10 a pagina 49. D'altra parte esse possono ricavarsi agevolmente a partire dai principi primi della Fisica. Ed infatti dalla seconda legge di Newton:

$$I_{yy} \ddot{\Theta} = \mathcal{M}$$

dove  $\mathcal{M}$  è il momento baricentrico risultante istantaneo delle azioni esterne e  $\Theta$  è l'inclinazione istantanea dell'asse di stabilità  $x_S$ . Nelle condizioni equilibrate iniziali quest'angolo vale  $\Theta_0$  e il momento risultante è nullo. Si può porre pertanto

$$\Theta = \Theta_0 + \theta, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \Delta \mathcal{M} = \Delta \mathcal{M}$$

e l'equazione del moto prende la forma seguente:

$$I_{yy} \ddot{\theta} = \Delta \mathcal{M}$$

Nel moto qui considerato le variabili in gioco sono le perturbazioni  $\alpha$  dell'angolo d'attacco,  $\theta$  dell'angolo di elevazione, le loro derivate  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\theta} = q$  e il discostamento  $\delta_e$  della deflessione dell'equilibratore dal valore di equilibrio  $\delta_{e0}$ . La perturbazione  $\Delta \mathcal{M}$  è funzione di  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta \dot{\alpha}$ ,  $q$  e  $\delta_e$  e in ipotesi di piccoli disturbi può essere approssimata dalla forma linearizzata:

$$\Delta \mathcal{M} = \mathcal{M}_\alpha \alpha + \mathcal{M}_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \mathcal{M}_q q + \mathcal{M}_{\delta_e} \delta_e$$

Dalla figura 16.24 si osserva che, nelle particolari condizioni di vincolo qui considerate, le variazioni di angolo d'attacco coincidono con le variazioni di angolo di inclinazione

della fusoliera. Pertanto

$$\theta = \alpha, \quad \dot{\theta} = q = \dot{\alpha}, \quad \ddot{\theta} = \ddot{\alpha}$$

e l'equazione del moto perturbato diventa

$$\ddot{\alpha} - (\hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{\alpha}}) \dot{\alpha} - \hat{M}_\alpha \alpha = \hat{M}_{\delta_e} \delta_e$$

Questa è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, a coefficienti costanti, non omogenea. Essa è simile all'equazione valida per un sistema massa-molla-smorzatore di tipo torsionale sottoposto ad una coppia forzante esterna (si veda anche la figura 16.21 a pagina 78). La stabilità statica  $\hat{M}_\alpha$  del velivolo può essere immaginata come l'equivalente di una 'molla aerodinamica' mentre le derivate aerodinamiche di smorzamento  $\hat{M}_q$  ed  $\hat{M}_{\dot{\alpha}}$  hanno un ruolo equivalente a quello di uno smorzatore torsionale.

Il polinomio caratteristico dell'equazione qui ricavata è

$$s^2 - (\hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{\alpha}})s - \hat{M}_\alpha = 0$$

Questa equazione, confrontata con la forma convenzionale valida per un sistema del secondo ordine

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

fornisce per ispezione le seguenti espressioni

$$2\zeta\omega_n = -(\hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{\alpha}}), \quad \omega_n^2 = -\hat{M}_\alpha$$

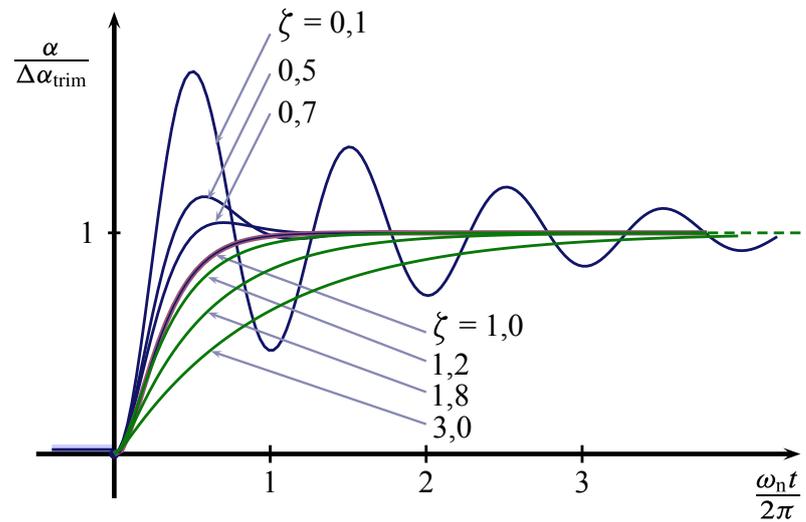
dove  $\omega_n$  è la pulsazione naturale e  $\zeta$  è il coefficiente di smorzamento del moto di puro beccheggio. Queste grandezze sono calcolabili con le seguenti formule finali

$$\zeta = \frac{-(\hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{\alpha}})}{2\sqrt{-\hat{M}_\alpha}}, \quad \omega_n = \sqrt{-\hat{M}_\alpha}$$

In definitiva, un moto perturbato di puro beccheggio è in diretta analogia con un sistema del secondo ordine di tipo torsionale e per esso si perviene a formule di calcolo delle caratteristiche di risposta del tutto simili alle (16.217c)-(16.217d). Queste ultime sono state ricavate nell'approssimazione di corto periodo e sono valide più in generale per un moto in cui sono permesse oscillazioni di quota. Per tale motivo in esse compare anche la derivata  $\dot{Z}_\alpha$ .

Dalle formule risolventi della teoria dei sistemi del secondo ordine è possibile esprimere analiticamente la risposta del moto di puro beccheggio. Per una legge a gradino dell'equilibratore di intensità  $\delta_e$  si ha

$$\alpha(t) = \Delta\alpha_{\text{trim}} \left[ 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \varphi) \right]$$



**Figura 16.25** Storia temporale della perturbazione di angolo d'attacco per una legge a gradino dell'equilibratore, per diversi valori del coefficiente di smorzamento.

dove

$$\Delta\alpha_{\text{trim}} = -\frac{\hat{M}_{\delta_e} \bar{\delta}_e}{\hat{M}_\alpha}$$

è il valore asintotico della perturbazione di angolo d'attacco e

$$\varphi = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}$$

è la fase. Le storie temporali della perturbazione  $\alpha(t)$  sono rappresentate nella figura 16.25. Esse presentano un asintoto orizzontale al quale tutte tendono al crescere del tempo quando le oscillazioni si saranno smorzate.

### Esercizio 16.6: Caratteristiche di corto periodo approximate di un Boeing 747

A valle degli esercizi 16.1 e 16.2 ripetere il calcolo di  $\zeta_{\text{SP}}$  e  $\omega_{n,\text{SP}}$  utilizzando le formule approssimate (16.217) e (16.218).

Per una data condizione di riferimento confrontare i valori ottenuti dagli autovalori della matrice del sistema, dalle formule approssimate (16.217) e dalle formule ulteriormente approssimate (16.218).

La tabella 16.6 riporta il confronto tra i metodi di calcolo delle caratteristiche di corto periodo di un Boeing 747 per una condizione di volo di riferimento di *powered approach* al numero di Mach  $M_0 = 0,25$ . La frequenza naturale e il coefficiente di smorzamento sono ben approssimati dalle formule approssimate (16.217). Con le formule (16.218) si calcola invece con ragionevole approssimazione la  $\omega_{n,\text{SP}}$  mentre viene sottostimato il coefficiente  $\zeta_{\text{SP}}$ .



**Tabella 16.6** Confronto tra i metodi di calcolo delle caratteristiche di corto periodo di un Boeing 747 per una condizione di volo di riferimento di *powered approach* al numero di Mach  $M_0 = 0,25$  (si veda la condizione '2' nella tabella 16.3).

	$\omega_{n,SP}$ (s <sup>-1</sup> )	$\zeta_{SP}$
Modello completo, cfr. (16.195)	0,8816	0,6255
Short period approximation, cfr. (16.217)	0,8982	0,6175
Short period coarse approximation, cfr. (16.218)	0,7364	0,2973

### Approssimazione di lungo periodo

La componente di lungo periodo è caratterizzata da un angolo d'attacco praticamente costante,  $\dot{\alpha} \approx 0$ . Inoltre le rotazioni di beccheggio del velivolo  $q$ , pur se variabili nel tempo, sono così lente da poter assumere  $\dot{q} \approx 0$ .

Sulla base di queste due osservazioni si perviene a un modello ridotto delle equazioni linearizzate valido esclusivamente per il moto di fugoide (*Phugoid mode approximation*). In pratica nel sistema lineare (16.146) si scarteranno la seconda e la terza equazione considerando le sole equazioni omogenee ( $\mathbf{u}_{LON} = 0$ ) alla traslazione nella direzione tangenziale e normale alla traiettoria.

Partendo dalla (16.146) e dalla forma (16.147b), ponendo  $\dot{w} = \dot{q} = 0$  e  $\Theta_0 = 0$  si scriverà:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_u & \hat{X}_w & 0 & -g \\ \hat{Z}_u & \hat{Z}_w & U_0 & 0 \\ \hat{M}_u + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_u & \hat{M}_w + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_w & \hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{w}} U_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{pmatrix} \quad (16.219)$$

Di queste equazioni la seconda e la terza non sono differenziali e possono essere considerate a parte

$$\begin{bmatrix} \hat{Z}_w & U_0 \\ \hat{M}_w + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_w & \hat{M}_q + \hat{M}_{\dot{w}} U_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w \\ q \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{Z}_u \\ \hat{M}_u + \hat{M}_{\dot{w}} \hat{Z}_u \end{bmatrix} u \quad (16.220)$$

Dopo alcuni passaggi (in cui si cancellano i termini in  $\hat{M}_{\dot{w}}$ ) esse diventano

$$\begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{M}_u U_0 - \hat{M}_q \hat{Z}_u}{-\hat{M}_w U_0 + \hat{M}_q \hat{Z}_w} \\ \frac{\hat{M}_w \hat{Z}_u - \hat{M}_u \hat{Z}_w}{-\hat{M}_w U_0 + \hat{M}_q \hat{Z}_w} \end{bmatrix} u \quad (16.221)$$

Le (16.221) possono ora essere sostituite nelle (16.219) ottenendo

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_u + \hat{X}_w \frac{\hat{M}_u U_0 - \hat{M}_q \hat{Z}_u}{-\hat{M}_w U_0 + \hat{M}_q \hat{Z}_w} & -g \\ \frac{\hat{M}_w \hat{Z}_u - \hat{M}_u \hat{Z}_w}{-\hat{M}_w U_0 + \hat{M}_q \hat{Z}_w} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (16.222)$$

Il sistema (16.222) è il risultato della cosiddetta *phugoid full approximation* in cui il vettore di stato è

$$\mathbf{x}_{\text{LON,PH}} = \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (16.223)$$

Il modello approssimato qui ottenuto si semplifica ulteriormente osservando che tipicamente si ha

$$\underbrace{|\hat{M}_u \hat{Z}_w|}_{\sim 1,4} \ll \underbrace{|\hat{M}_w \hat{Z}_u|}_{\sim 4}, \quad \underbrace{|\hat{M}_w U_0|}_{\sim 1} \gg \underbrace{|\hat{M}_q \hat{Z}_w|}_{\sim 0,13}, \quad \underbrace{|\hat{M}_u X_w / \hat{M}_w|}_{\text{molto piccolo}} \ll \underbrace{|\hat{X}_u|}_{\text{piccolo}} \quad (16.224)$$

ottenendo la cosiddetta *phugoid coarse approximation*

$$\begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_u & -g \\ -\frac{\hat{Z}_u}{U_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (16.225)$$

L'equazione caratteristica associata alla (16.225) è

$$s^2 + 2 \zeta_{\text{PH}} \omega_{\text{n,PH}} s + \omega_{\text{n,PH}}^2 = 0 \quad (16.226)$$

con

$$2 \zeta_{\text{PH}} \omega_{\text{n,PH}} = -\hat{X}_u, \quad \omega_{\text{n,PH}}^2 = -\frac{g \hat{Z}_u}{U_0} \quad (16.227a)$$

Dall'espressione di  $\hat{Z}_u$  riportata nella tabella 16.2 per volo subsonico a basso numero di Mach si ha

$$\hat{Z}_u = -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left[ 2 C_L|_0 + \frac{M_0^2}{1 - M_0^2} C_L|_0 \right] \approx -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} 2 C_L|_0 \quad (16.228)$$

e per  $\bar{q}_0 S C_L|_0 = mg$

$$\hat{Z}_u = -\frac{2g}{U_0} \quad (16.229)$$

Dunque la seconda delle (16.227a) diventa

$$\omega_{\text{n,PH}} = \sqrt{\frac{-g \hat{Z}_u}{U_0}} = \sqrt{2} \frac{g}{U_0} \quad (16.230)$$

La frequenza naturale del modo di fugoide è inversamente proporzionale alla velocità di volo di riferimento.

Per quanto riguarda il coefficiente di smorzamento, per volo a basso numero di Mach e spinta costante si ha

$$\hat{X}_u = -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} \left( 2 C_D|_0 + M_0 \frac{\partial C_D}{\partial M} \Big|_0 \right) \approx -\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} 2 C_D|_0 \quad (16.231)$$

e la prima delle (16.227a) diventa

$$\zeta_{\text{PH}} = \frac{-\hat{X}_u}{2 \omega_{n,\text{PH}}} = \frac{\frac{\bar{q}_0 S}{m U_0} 2 C_D|_0}{2 \sqrt{2} \frac{g}{U_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\bar{q}_0 S C_D|_0}{\bar{q}_0 S C_L|_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C_D|_0}{C_L|_0} \quad (16.232)$$

Lo smorzamento del modo di fugoide è inversamente proporzionale all'efficienza di volo in condizioni di riferimento. Dati gli alti valori dell'efficienza di volo dei velivoli, specie nelle condizioni di progetto in cui il volo avviene nell'intorno dell'efficienza massima della configurazione aerodinamica, gli smorzamenti del moto di fugoide sono tipicamente molto bassi.

#### Approfondimento 16.4: Modello approssimato di Lanchester

Le basi teoriche per l'analisi del moto dei velivoli furono sviluppate nello stesso periodo storico in cui per la prima volta fu dimostrata con successo la possibilità del volo pilotato a motore da parte dei fratelli Wright. Ancora prima, nel 1837, Frederick Lanchester aveva studiato il moto degli alianti. Lanchester condusse degli esperimenti con alianti lanciati a mano e trovò che essi percorrevano traiettorie rettilinee se lanciati in volo a una determinata velocità che venne soprannominata 'velocità naturale' dell'aliante. Se un aliante veniva lanciato a velocità minori o maggiori della propria velocità naturale la sua traiettoria mostrava delle notevoli oscillazioni. Lanchester osservò anche che, quando il lancio avveniva alla velocità naturale e il moto veniva poi disturbato da qualche causa esterna, l'aliante cominciava a oscillare lungo la sua traiettoria di volo. Queste osservazioni portarono alla luce delle caratteristiche comuni a tutti i velivoli, cioè che il loro moto ha delle frequenze naturali o modi naturali di oscillare in conseguenza di perturbazioni di una data condizione di volo equilibrato.

Lanchester chiamò i moti oscillatori *moti di fugoide* utilizzando una parola greca (phygē, che significa "fuggire" o "scappare") per identificare il comportamento caratteristico dei velivoli da egli scoperto. Oggi si usa ancora il termine *fugoide* per indicare i moti oscillatori di lungo periodo e basso coefficiente di smorzamento del moto longitudinale dei velivoli.

Le oscillazioni del moto di fugoide possono essere modellate in maniera semplice ipotizzando un volo a energia totale costante in cui vi è una conversione continua di energia cinetica in energia potenziale gravitazionale. Schematizzando il velivolo come punto materiale, la velocità di volo e la quota istantanea

$$U = U_0 + u, \quad h = h_0 + \Delta h$$

sono la conseguenza di piccole perturbazioni  $u$  e  $\Delta h$ , rispettivamente, dei valori  $U_0$  (velocità naturale o di equilibrio) e  $h_0$  (quota iniziale). L'energia totale istantanea del

moto è la somma  $E = \frac{1}{2}mU^2 + mgh$ . Essa è costante e pari al valore di equilibrio  $E_0 = \frac{1}{2}mU_0^2 + mgh_0$ . Dall'uguaglianza  $E = E_0$  consegue che

$$u \approx -\frac{g \Delta h}{U_0}$$

cioè a una variazione di quota corrisponde una proporzionale variazione di velocità di segno opposto.

Dalla seconda legge della meccanica applicata al punto materiale si ha

$$m \ddot{h} = L - W$$

dove  $W = mg$  è il peso ed  $L = \frac{1}{2}\rho U^2 S C_L$  è la portanza istantanea. Osservando che in condizioni di volo equilibrato  $W = mg = \frac{1}{2}\rho U_0^2 S C_L$ , la precedente equazione diventa

$$\begin{aligned} m \ddot{h} = L - W &= \frac{1}{2}\rho S (U^2 - U_0^2) C_L \\ &= \frac{1}{2}\rho S [(U_0 + u)^2 - U_0^2] C_L \approx \frac{1}{2}\rho S (2uU_0) C_L \\ &\approx \frac{1}{2}\rho S \left(-2\frac{g\Delta h}{U_0} U_0\right) C_L = -\rho S C_L g \Delta h \end{aligned}$$

Essendo  $\ddot{h} = \Delta \ddot{h}$  si ha

$$m \Delta \ddot{h} + \rho S C_L g \Delta h = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \ddot{h} + \frac{\rho S C_L g}{m} \Delta h = 0$$

Il termine che moltiplica  $\Delta h$  può esprimersi diversamente osservando che

$$mg = \frac{1}{2}\rho U_0^2 S C_L \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho S C_L}{m} = 2 \frac{g}{U_0^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho S C_L g}{m} = 2 \left(\frac{g}{U_0}\right)^2 \triangleq \Omega^2$$

Dunque l'equazione del modello semplificato del moto di fugoide è

$$\Delta \ddot{h} + \Omega^2 \Delta h = 0$$

con  $\Omega = \sqrt{2} g/U_0$  la pulsazione naturale delle oscillazioni intorno alla quota iniziale  $h_0$  e alla 'velocità naturale'  $U_0$ . Si ritrova così la formula (16.230) che fornisce la pulsazione  $\omega_{n,PH}$  nell'approssimazione del moto di fugoide.

### Esempio 16.1: Caratteristiche di fugoide approssimate di un Boeing 747

Per una data condizione di riferimento è interessante confrontare i valori di  $\zeta_{PH}$  e  $\omega_{n,PH}$  ottenuti dagli autovalori della matrice (16.195a), dalla matrice del sistema (16.222) e dalle formule (16.227a).

La tabella 16.7 riporta il confronto tra i metodi di calcolo delle caratteristiche di lungo periodo di un Boeing 747 per una condizione di volo di riferimento di *powered approach* al numero di Mach  $M_0 = 0,25$ . La frequenza naturale  $\omega_{n,PH}$  è accettabilmente calcolata sia con l'approssimazione (16.222) che con la (16.227a).

**Tabella 16.7** Confronto tra i metodi di calcolo delle caratteristiche di fugaide di un Boeing 747 per una condizione di volo di riferimento di *powered approach* al numero di Mach  $M_0 = 0,25$  (si veda la condizione '2' nella tabella 16.3).

	$\omega_{n,PH} \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$\zeta_{PH}$
Modello completo, cfr. (16.195)	0,1340	0,0132
Phugoid approximation, cfr. (16.222)	0,1337	0,1012
Phugoid coarse approximation, cfr. (16.227a)	0,1631	0,0651

Si deve osservare che il modello approssimato del moto di fugaide non fornisce valori particolarmente accurati del coefficiente di smorzamento. Quest'approssimazione esprime  $\zeta_{PH}$  semplicemente in termini del rapporto portanza/resistenza del velivolo e non cattura alcune caratteristiche fondamentali. Ad esempio ignora tutti i termini collegati al momento di beccheggio e alle sue derivate e assume un angolo d'attacco strettamente costante. Dunque non entrano nel modello effetti potenzialmente importanti come la stabilità statica e lo smorzamento al beccheggio.

Phillips [10] ha proposto una formulazione più accurata del modello ridotto del moto di fugaide. Una previsione approssimata ma accettabile degli autovalori del modo di lungo periodo si ottiene non trascurando del tutto le variazioni di  $\alpha$  e di  $q$  ma modellandole come leggi sinusoidali di piccola ampiezza e bassa frequenza.

Si arriva alle formule di calcolo approssimate:

$$\omega_{n,PH} = \sqrt{2} \frac{g}{U_0} \sqrt{\frac{\left(\frac{4m}{\rho S \bar{c}}\right) C_{M\alpha}}{\left(\frac{4m}{\rho S \bar{c}}\right) C_{M\alpha} - C_{z\alpha} C_{Mq}}} \quad (16.233)$$

$$\zeta_{PH} = \zeta_{PH}|_{\text{drag}} + \zeta_{PH}|_{\text{pitch damping}} + \zeta_{PH}|_{\text{phase damping}} \quad (16.234)$$

Le (16.233)-(16.234) generalizzano le (16.230)-(16.232). In particolare, l'approssimazione del coefficiente di smorzamento è la somma di tre contributi:

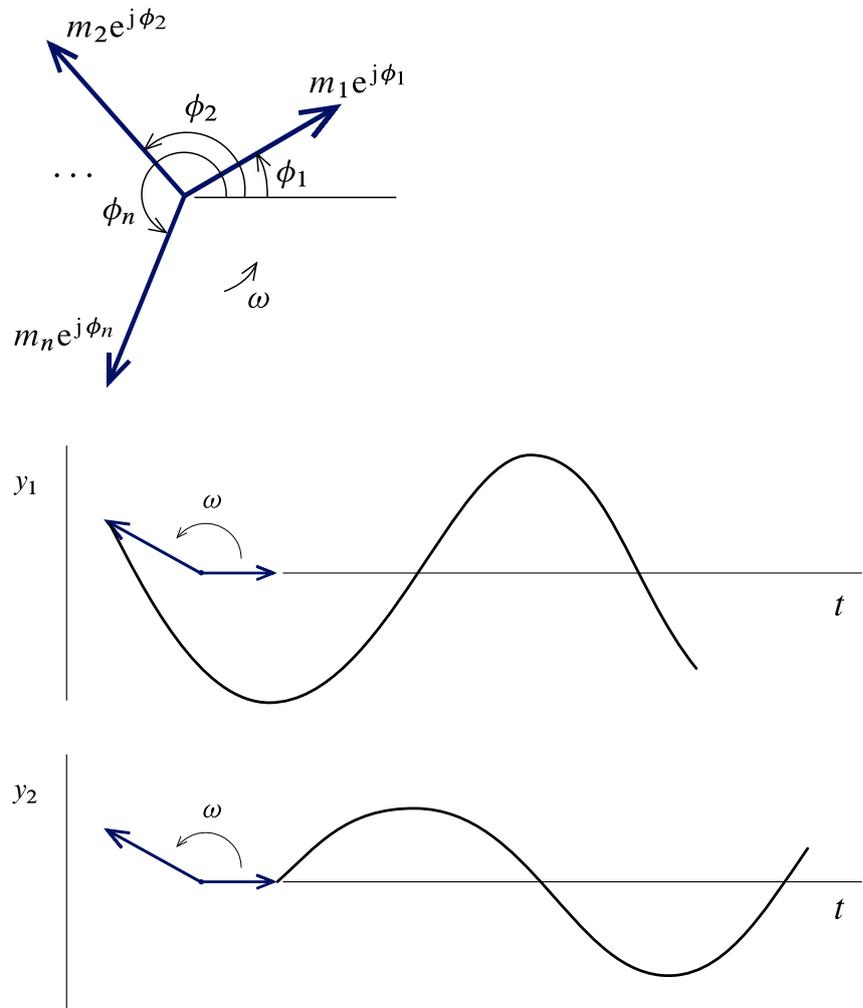
$$\zeta_{PH}|_{\text{drag}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C_D|_0}{C_L|_0}$$

detto *drag damping*, coincidente con il risultato della (16.232),

$$\zeta_{PH}|_{\text{pitch damping}} = \frac{g}{U_0} \frac{C_{X\alpha} C_{Mq}}{\left(\frac{4m}{\rho S \bar{c}}\right) C_{M\alpha} - C_{z\alpha} C_{Mq}}$$

detto *pitch damping* e

$$\zeta_{PH}|_{\text{phase damping}} = -\frac{g^2 \bar{c}}{2 U_0^3} \mathcal{R}_s \frac{\left(\frac{8 I_{yy}}{\rho S \bar{c}^3}\right) C_{z\alpha} + \left(\frac{4m}{\rho S \bar{c}}\right) C_{Mq}}{\left(\frac{4m}{\rho S \bar{c}}\right) C_{M\alpha} - C_{z\alpha} C_{Mq}}$$



**Figura 16.26** Fasori come rappresentazioni vettoriali di funzioni sinusoidali isofrequenziali. Nella figura la grandezza  $y_2$  è in anticipo di fase rispetto alla  $y_1$  di un angolo  $\phi_2 - \phi_1$ .

detto *phase damping*, dove  $\mathcal{R}_s$  è il *phugoid stability ratio*, funzione di  $\hat{Z}_w$ ,  $\hat{M}_w$  ed  $\hat{M}_q$ . Phillips definisce questo rapporto caratteristico come

$$\mathcal{R}_s = \frac{\mathcal{R}_{M,\alpha}}{\mathcal{R}_{M,\alpha} - \mathcal{R}_{Z,\alpha} \mathcal{R}_{M,q}}$$

con

$$\mathcal{R}_{X,\alpha} = \frac{\rho S \bar{c}}{4m} C_{X\alpha}, \quad \mathcal{R}_{Z,\alpha} = \frac{\rho S \bar{c}}{4m} C_{Z\alpha}, \quad \mathcal{R}_{M,\alpha} = \frac{\rho S \bar{c}^3}{8I_{yy}} C_{M\alpha}, \quad \mathcal{R}_{M,q} = \frac{\rho S \bar{c}^3}{8I_{yy}} C_{Mq}$$

◆

### Esercizio 16.7: Caratteristiche di fugaide approssimate di un Boeing 747



A valle degli esercizi 16.1 e 16.2 ripetere il calcolo di  $\zeta_{PH}$  e  $\omega_{n,PH}$  utilizzando i modelli approssimati (16.222) e (16.225).

Per una data condizione di riferimento confrontare i valori ottenuti dagli autovalori della matrice (16.195a), dalla matrice del sistema (16.222), dalle formule (16.227a) e infine dalle (16.233)-(16.234).

◆

### Approfondimento 16.5: Modi di risposta e fasori

I fasori sono utilizzati quale comoda rappresentazione in campo complesso di grandezze fisiche reali oscillanti. Nell'analisi dei circuiti elettrici un esempio è dato da grandezze elettriche come la tensione o la corrente.

Una famiglia di funzioni sinusoidali isofrequenziali, cioè alla stessa frequenza e quindi con pulsazione  $\omega$  fissata, rappresentate genericamente come

$$x(t) = X \cos(\omega t + \phi_x)$$

dove  $X$  rappresenta l'ampiezza della grandezza e  $\phi_x$  la fase, può quindi essere rappresentata da un numero complesso di modulo  $X$  e anomalia (o angolo)  $\phi_x$ . Si può scrivere cioè che

$$x(t) \longrightarrow X \triangleq X e^{j\phi_x}$$

indicando la trasformazione da funzione del tempo a fasore. Il vettore  $X$  rappresenta in maniera compatta il fasore. I fasori permettono di descrivere le grandezze sinusoidali isofrequenziali con un numero complesso costante omettendo il fattore  $e^{j\omega t}$ . Per ritrasformare un fasore nella grandezza fisica corrispondente è necessario moltiplicarlo per tale esponenziale ed estrarre la parte reale:  $X \rightarrow \text{Re}(X e^{j\omega t}) \rightarrow \text{Re}(X e^{j\phi_x} e^{j\omega t}) \rightarrow \text{Re}(X e^{j(\omega t + \phi_x)}) \rightarrow X \cos(\omega t + \phi_x)$ .

Nella dinamica dei velivoli un esempio di grandezze isofrequenziali è dato dalle storie temporali delle componenti del vettore di stato quando la risposta libera eccitata corrisponde a un particolare modo oscillante. Ciò si verifica quando la parte reale di un autovettore associato a un autovalore complesso viene assegnata come condizione iniziale del problema (16.104). In generale, se il vettore di stato iniziale  $x_0$  coincide con il  $k$ -mo autovettore sinistro  $\xi_k$ , la risposta libera è una *risposta modale*

$$x(t) = e^{\lambda_k t} \chi_k = e^{\sigma_k t} e^{j\omega_k t} \chi_k$$

il cui andamento nel tempo è regolato dal solo autovalore  $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$ . Il modo, a meno del fattore moltiplicativo reale  $e^{\sigma_k t}$ , è il vettore  $e^{j\omega_k t} \chi_k$  avente per componenti delle funzioni isofrequenziali. Ciascuna di esse è del tipo

$$(\chi_k)_m = e^{j\omega_k t} \chi_{k,m} = e^{j\omega_k t} X_{k,m} e^{j\phi_m}$$

con  $m = 1, \dots, 4$  sia per la dinamica longitudinale che latero-direzionale. La parte costante, cioè il numero complesso  $\chi_{k,m} = X_{k,m} e^{j\phi_m}$ , è interpretabile come fasore. Si ricordi anche che un autovalore/autovettore complesso compare sempre in coppia con il suo complesso coniugato e che la somma delle due risposte modali implica sempre la cancellazione delle parti immaginarie (si veda l'approfondimento 16.6.1).

Un esempio di rappresentazione fasoriale è dato dalla figura 16.26 nella pagina precedente da cui si vede che l'analisi dei fasori serve a evidenziare i ritardi/anticipi di fase delle diverse storie temporali rispetto a un dato fasore di riferimento. Tipicamente, per le note proprietà degli autovettori,  $\chi_k$  può essere diviso senza alterare l'entità degli autovalori per una delle componenti  $\chi_{k,m}$  ottenendo  $(\chi_k)_m = 1$ . Pertanto l' $m$ -mo fasore diventa il riferimento rispetto al quale si valutano i ritardi dei fasori rimanenti.

**Tabella 16.8** Effetti di  $m$ ,  $I_{yy}$ ,  $U_0$ ,  $h_0$  sulle caratteristiche di corto periodo e di fuga di un business jet (simile al Learjet 23).

## Effects of Airspeed, Altitude, Mass, and Moment of Inertia on Fighter Aircraft Short Period'

### Airspeed variation at constant altitude!

Airspeed m/s	Dynamic Pressure P	Angle of Attack deg	Natural Frequency rad/s	Period sec	Damping Ratio
91	2540	14.6	1.34	4.7	0.3
152	7040	5.8	2.3	2.74	0.31
213	13790	3.2	3.21	1.96	0.3
274	22790	2.2	3.84	1.64	0.3

### Mass variation at constant altitude!

Mass Variation %	Natural Frequency rad/s	Period sec	Damping Ratio
-50	2.4	2.62	0.44
0	2.3	2.74	0.31
50	2.26	2.78	0.26

### Altitude variation with constant dynamic pressure!

Airspeed m/s	Altitude m	Natural Frequency rad/s	Period sec	Damping Ratio
122	2235	2.36	2.67	0.39
152	6095	2.3	2.74	0.31
213	11915	2.24	2.8	0.23
274	16260	2.18	2.88	0.18

### Moment of inertia variation at constant altitude

Moment of Inertia Variation %	Natural Frequency rad/s	Period sec	Damping Ratio
-50	3.25	1.94	0.33
0	2.3	2.74	0.31
50	1.87	3.35	0.31

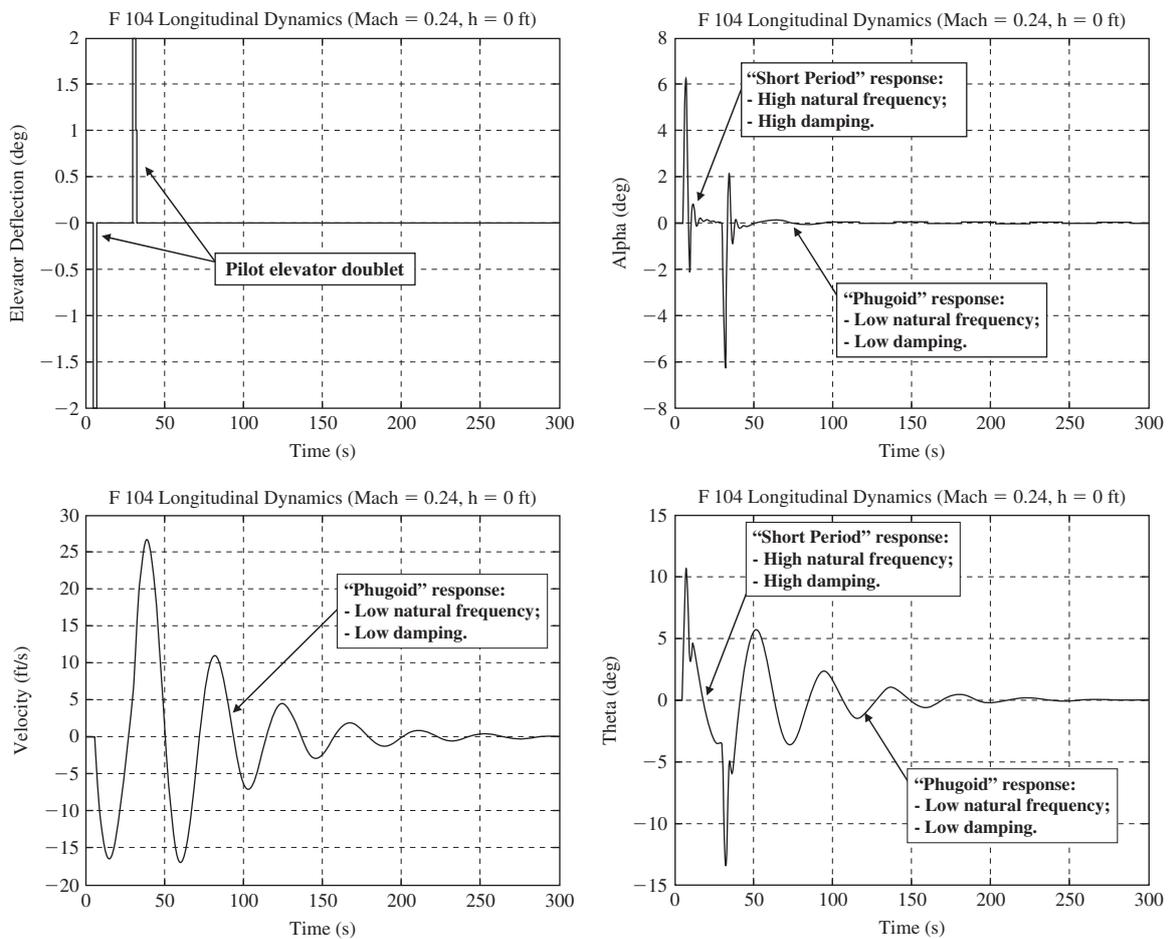
Neglecting  
compressibility effects

Velocity m/s	Natural Frequency rad/s	Period sec	L/D	Damping Ratio
50	0.28	23	5	0.14
100	0.14	45	10	0.07
200	0.07	90	20	0.035
400	0.035	180	40	0.018

**Tabella 16.9** Caratteristiche di corto periodo e di fugoide di alcuni velivoli [13].

Aircraft Class	Longitudinal Parameters			
	$\zeta_{SP}$	$\omega_{n_{SP}}$	$\zeta_{PH}$	$\omega_{n_{PH}}$
<b>General Aviation/Light Commercial Aviation</b>				
Cessna 182 (Alt. = 5,000 ft. Mach = 0.2)	0.844	5.27	0.129	0.171
Beech 99 (Alt. = 20,000ft. Mach = 0.43)	0.485	5.0	0.062	0.095
Cessna 620 (Alt. = SL, Mach = 0.17)	0.720	2.71	0.087	0.205
<b>Military Trainer</b>				
SIAI Marchetti 211 (Alt. = SL, Mach = 0.11)	0.742	1.645	0.019	0.293
Cessna T37 A (Alt. = 30,000 ft. Mach = 0.46)	0.493	4.652	0.053	0.093
<b>Business jet</b>				
Learjet 24 (Alt. = SL, Mach = 0.15)	0.564	1.562	0.067	0.263
<b>Fighter</b>				
Lockheed F-104 (Alt. = SL, Mach = 0.26)	0.221	2.847	—	—
McDonnell F-4 (Alt. = 35,000 ft. Mach = 0.9)	0.307	1.468	0.138	0.148
<b>Commercial Jetliner</b>				
Boeing B747-200 (Alt. = 40,000 ft, Mach = 0.9)	0.353	1.321	—	—

----: 'Degenerated' phugoid with 2 real roots



**Figura 16.27** Dinamica longitudinale di un Lockheed F104 in configurazione di atterraggio [13].

## 16.8 Dinamica latero-direzionale

In questa parte troveranno conferma le anticipazioni del paragrafo 16.6.2 sulla natura degli autovalori delle equazioni linearizzate della dinamica latero-direzionale.

Le equazioni (16.99b) possono essere esplicitate a partire dalle (16.88b) tenendo conto delle (16.82b), (16.82d) e (16.82f), della seconda equazione del sistema (16.42) e della prima e terza del sistema (16.33). Accorpando queste espressioni e ponendole in forma matriciale si perviene alle (16.241) riportate per convenienza nella figura 16.28 a pagina 96.

A primo membro della (16.241) compare il prodotto della matrice di massa  $[M_{LD}]$ , data dalla (16.91b), per la colonna  $\dot{\mathbf{x}}_{LD}$ . Moltiplicando il primo e secondo membro della (16.241) per,  $[M_{LD}]^{-1}$ , la cui espressione è data dalla (16.91d), si ottiene l'equazione (16.242) riportata nella figura 16.29 a pagina 97. Quest'ultima si presenta nella forma attesa

$$\dot{\mathbf{x}}_{LD} = \mathbf{A}_{LD} \mathbf{x}_{LD} + \mathbf{B}_{LD} \mathbf{u}_{LD} \quad (16.235)$$

corrispondente all'equazione di evoluzione (16.102) di un sistema LTI.

### 16.8.1 Equazioni del moto latero-direzionale perturbato

Per semplicità la (16.235) viene associata a una forma ridotta della (16.242) ottenuta eliminando le equazioni corrispondenti ai modi di *cross-range* e di *heading*. Dunque, il vettore  $\mathbf{x}_{LD}$  della (16.235) si otterrà da quello definito dalla (16.84) eliminandone la quarta e la sesta componente. Si perviene quindi al sistema di 4 equazioni (16.243) della figura 16.30 a pagina 98 in cui si ha

$$\mathbf{x}_{LD} = \begin{Bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \mathbf{u}_{LD} = \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} \quad (16.236a)$$

$$\mathbf{A}_{LD} = \begin{bmatrix} Y'_v & Y'_p & Y'_r - U_0 & g C_{\theta_0} \\ \mathcal{L}'_v & \mathcal{L}'_p & \mathcal{L}'_r & 0 \\ \mathcal{N}'_v & \mathcal{N}'_p & \mathcal{N}'_r & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S_{\theta_0}}{C_{\theta_0}} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{LD} = \begin{bmatrix} Y'_{\delta_a} & Y'_{\delta_r} \\ \mathcal{L}'_{\delta_a} & \mathcal{L}'_{\delta_r} \\ \mathcal{N}'_{\delta_a} & \mathcal{N}'_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.236b)$$

con

$$I'_{xx} = \frac{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{zz}} = I_{xx} - \frac{I_{xz}^2}{I_{zz}}, \quad I'_{zz} = \frac{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{xx}} = I_{zz} - \frac{I_{xz}^2}{I_{xx}}, \quad I'_{xz} = \frac{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{xz}} \quad (16.236c)$$

$$i_1 = \frac{I_{xz}}{I_{xx}}, \quad i_2 = \frac{I_{xz}}{I_{zz}} \quad (16.236d)$$

$$\frac{1}{I'_{xx}} = \frac{1}{I_{xx} \left(1 - \frac{I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz}}\right)} = \frac{1}{I_{xx}(1 - i_1 i_2)}, \quad \frac{1}{I'_{zz}} = \frac{1}{I_{zz} \left(1 - \frac{I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz}}\right)} = \frac{1}{I_{zz}(1 - i_1 i_2)} \quad (16.236e)$$

$$\frac{1}{I'_{xz}} = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} = \frac{I_{xz}}{I_{xx}I_{zz}(1 - i_1 i_2)} = \frac{i_2}{I_{xx}(1 - i_1 i_2)} = \frac{i_1}{I_{zz}(1 - i_1 i_2)} \quad (16.236f)$$

$$\hat{Y}_\bullet = \frac{Y_\bullet}{m}, \quad \hat{\mathcal{L}}_\bullet = \frac{\mathcal{L}_\bullet}{I_{xx}}, \quad \hat{\mathcal{N}}_\bullet = \frac{\mathcal{N}_\bullet}{I_{zz}} \quad (16.236g)$$

$$Y'_\bullet = \hat{Y}_\bullet, \quad \mathcal{L}'_\bullet = \frac{\mathcal{L}_\bullet}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_\bullet}{I'_{xz}} = \frac{\hat{\mathcal{L}}_\bullet + i_1 \hat{\mathcal{N}}_\bullet}{1 - i_1 i_2}, \quad \mathcal{N}'_\bullet = \frac{\mathcal{L}_\bullet}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_\bullet}{I'_{zz}} = \frac{i_2 \hat{\mathcal{L}}_\bullet + \hat{\mathcal{N}}_\bullet}{1 - i_1 i_2} \quad (16.236h)$$

per  $\bullet = v, p, r, \delta_a, \delta_r$ . Le definizioni (16.236g)-(16.236h) introducono le cosiddette *primed derivatives* del moto latero-direzionale.



Le (16.236) sono valide per il moto perturbato latero-direzionale a partire da condizioni di volo equilibrate ad ali livellate e sono da intendersi in assi stabilità con traiettoria iniziale inclinata di un angolo  $\Gamma_0 = \Theta_0$  rispetto all'orizzontale. Si osservi inoltre che per  $I_{xz} = 0$  si ha, in base alle definizioni (16.236c)-(16.236f),  $i_1 = i_2 = 1/I'_{xz} = 0$ ; pertanto le derivate  $\mathcal{L}'_\bullet$  ed  $\mathcal{N}'_\bullet$  si semplificano, rispettivamente, nelle  $\hat{\mathcal{L}}_\bullet$  ed  $\hat{\mathcal{N}}_\bullet$ .

L'adozione degli assi stabilità deve comportare una valutazione attenta delle costanti  $I_{xx}$ ,  $I_{zz}$  e  $I_{xz}$  presenti nelle definizioni (16.236c)-(16.236h). Normalmente sono noti per un dato velivolo i momenti d'inerzia  $I_{x_B x_B}$ ,  $I_{z_B z_B}$  e il prodotto d'inerzia  $I_{x_B z_B}$  rispetto alla coppia  $(x_B, z_B)$  di assi velivolo costruttivi. Per una particolare condizione di volo di riferimento la coppia di assi stabilità  $(x_S, z_S)$  si presenta ruotata rispetto agli assi costruttivi di un angolo  $\alpha_{B0}$  — si veda la figura 16.31 a pagina 99 — pertanto si avrà [13]

$$\begin{Bmatrix} I_{xx} \\ I_{zz} \\ I_{xz} \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} I_{x_S x_S} \\ I_{z_S z_S} \\ I_{x_S z_S} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_{B0} & \sin^2 \alpha_{B0} & -\sin 2\alpha_{B0} \\ \sin^2 \alpha_{B0} & \cos^2 \alpha_{B0} & \sin 2\alpha_{B0} \\ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_{B0} & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha_{B0} & \cos 2\alpha_{B0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{x_B x_B} \\ I_{z_B z_B} \\ I_{x_B z_B} \end{Bmatrix} \quad (16.237)$$

La (16.237) è facilmente ricavabile applicando le formule caratteristiche della Geometria delle masse al velivolo in volo equilibrato iniziale ad ali livellate.

Considerazioni simili valgono anche per le perturbazioni di velocità, di velocità angolare, di forza e di momento. Detta

$$[T_{SB}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{B0} & 0 & \sin \alpha_{B0} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_{B0} & 0 & \cos \alpha_{B0} \end{bmatrix} \quad (16.238)$$

la matrice di trasformazione tra le componenti di un generico vettore in assi *body* costruttivi e in assi stabilità, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_S = [T_{SB}] \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_S = [T_{SB}] \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_S = [T_{SB}] \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} \Delta \mathcal{L} \\ \Delta \mathcal{M} \\ \Delta \mathcal{N} \end{pmatrix}_S = [T_{SB}] \begin{pmatrix} \Delta \mathcal{L} \\ \Delta \mathcal{M} \\ \Delta \mathcal{N} \end{pmatrix}_B \quad (16.239)$$

le cui inverse si ottengono semplicemente trasponendo la matrice ortogonale  $[T_{SB}]$ . Dalle (16.239) si capisce che per esprimere le perturbazioni  $\Delta Y$ ,  $\Delta \mathcal{L}$  e  $\Delta \mathcal{N}$  in assi stabilità è necessario determinare senza ambiguità la natura delle derivate  $Y_v$ ,  $Y_p$ ,  $Y_r$ ,  $\mathcal{L}_v$ ,  $\mathcal{L}_p$ , e così via. Normalmente queste ultime sono note direttamente in assi stabilità; al contrario, se per qualche motivo si avessero dati aerodinamici del velivolo in assi *body* costruttivi si dovranno applicare leggi di trasformazione simili alle (16.239). Ad esempio,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_v \\ 0 \\ \mathcal{N}_v \end{pmatrix}_S = [T_{SB}] \begin{pmatrix} \mathcal{L}_v \\ 0 \\ \mathcal{N}_v \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{L}_p \\ 0 \\ \mathcal{N}_p \end{pmatrix}_S = [T_{SB}] \begin{pmatrix} \mathcal{L}_p \\ 0 \\ \mathcal{N}_p \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{L}_r \\ 0 \\ \mathcal{N}_r \end{pmatrix}_S = [T_{SB}] \begin{pmatrix} \mathcal{L}_r \\ 0 \\ \mathcal{N}_r \end{pmatrix}_B \quad (16.240)$$

Per quanto riguarda la componente di forza laterale si osserva che le derivate  $Y_v$ ,  $Y_p$ , e  $Y_r$  rimangono inalterate passando da un riferimento all'altro.

## 16.8.2 Semplificazione delle equazioni latero-direzionali

Le equazioni (16.243), ovvero le (16.235) con le definizioni (16.236), si semplificano se si assume una condizione di volo nominale a traiettoria orizzontale,  $\Theta_0 = 0$ . Da questo momento si riterrà valida questa ipotesi.

Inoltre, conviene effettuare un cambio di variabili e riordinare gli elementi del vettore di stato. Nella definizione (16.236a) di  $\mathbf{x}_{LD}$ , alla perturbazione  $v$  si sostituirà la perturbazione  $\beta \approx v/U_0$  — si vedano le (16.69c) e (16.70b). In secondo luogo, si porterà il terzo elemento di  $\mathbf{x}_{LD}$ , cioè  $r$ , al primo posto. In definitiva si otterrà:

$$\mathbf{x}_{LD} = \begin{pmatrix} r \\ \beta \\ p \\ \phi \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_{LD} = \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{pmatrix} \quad (16.244a)$$

$$\mathbf{A}_{LD} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}'_r & \mathcal{N}'_\beta & \mathcal{N}'_p & 0 \\ \frac{Y'_r}{U_0} - 1 & \frac{Y'_\beta}{U_0} & \frac{Y'_p}{U_0} & \frac{g}{U_0} \\ \mathcal{L}'_r & \mathcal{L}'_\beta & \mathcal{L}'_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{LD} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}'_{\delta_a} & \mathcal{N}'_{\delta_r} \\ \frac{Y'_{\delta_a}}{U_0} & \frac{Y'_{\delta_r}}{U_0} \\ \mathcal{L}'_{\delta_a} & \mathcal{L}'_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.244b)$$

Grazie ai raggruppamenti contenuti nelle definizioni (16.244) si favorisce la derivazione successiva di modelli approssimati per l'analisi separata dei modi di risposta libera latero-direzionale. In particolare, si anticipa ciò che l'esperienza conferma, cioè che la risposta di *Dutch-Roll* è rappresentata prevalentemente dalle oscillazioni di velocità angolo-

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p + W_0 m & Y_r - U_0 m & 0 & g C_{\theta_0} m & 0 \\ \mathcal{L}_v & \mathcal{L}_p + I_{xz} Q_0 & \mathcal{L}_r + Q_0 (I_{yy} - I_{zz}) & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{N}_v & \mathcal{N}_p + Q_0 (I_{xx} - I_{yy}) & \mathcal{N}_r - I_{xz} Q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -W_0 & S_{\theta_0} W_0 + C_{\theta_0} U_0 \\ 0 & 1 & \frac{S_{\theta_0}}{C_{\theta_0}} & 0 & \frac{S_{\theta_0}}{Q_0 C_{\theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_{\theta_0}} & 0 & \frac{Q_0}{C_{\theta_0}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ y_{E,G} \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} Y_{\delta_a} & Y_{\delta_r} \\ \mathcal{L}_{\delta_a} & \mathcal{L}_{\delta_r} \\ \mathcal{N}_{\delta_a} & \mathcal{N}_{\delta_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{Bmatrix} \quad (16.241)$$

Figura 16.28 Equazioni linearizzate della dinamica latero-direzionale.

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p + W_0}{m} & \frac{Y_r - U_0}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathcal{L}'_{xx} \mathcal{N}_v}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_v}{I'_{xz}} & \frac{\mathcal{L}'_{xx} \mathcal{N}_p + (I_{yy} - I_{zz}) \mathcal{Q}_0}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{L}'_{xz} \mathcal{N}_p + (I_{yy} - I_{zz}) \mathcal{Q}_0}{I'_{xz}} & \frac{\mathcal{L}'_{xz} \mathcal{N}_r + (I_{yy} - I_{zz}) \mathcal{Q}_0}{I'_{xz}} + \frac{I'_{xx}}{I'_{xz}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathcal{L}'_{xz} \mathcal{N}_v}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_v}{I'_{zz}} & \frac{\mathcal{L}'_{xz} \mathcal{N}_p + (I_{xx} - I_{yy}) \mathcal{Q}_0}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{L}'_{zz} \mathcal{N}_p + (I_{xx} - I_{yy}) \mathcal{Q}_0}{I'_{zz}} & \frac{\mathcal{L}'_{zz} \mathcal{N}_r + (I_{yy} - I_{zz}) \mathcal{Q}_0}{I'_{zz}} + \frac{I'_{xz}}{I'_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -W_0 & S_{\Theta_0} W_0 + C_{\Theta_0} U_0 \\ 0 & 1 & \frac{S_{\Theta_0}}{C_{\Theta_0}} & 0 & \frac{S_{\Theta_0}}{Q_0} \frac{C_{\Theta_0}}{C_{\Theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_{\Theta_0}} & 0 & \frac{Q_0}{C_{\Theta_0}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \\ r \\ y_{E,G} \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_a}}{m} & \frac{Y_{\delta_r}}{m} \\ \frac{\mathcal{L}'_{xx} \mathcal{N}_{\delta_a}}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_a}}{I'_{xz}} & \frac{\mathcal{L}'_{xx} \mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{xz}} \\ \frac{\mathcal{L}'_{xz} \mathcal{N}_{\delta_a}}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_a}}{I'_{zz}} & \frac{\mathcal{L}'_{xz} \mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{zz}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{pmatrix} \quad (16.242)$$

con

$$I'_{xx} = \frac{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{zz}}, \quad I'_{zz} = \frac{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{xx}}, \quad I'_{xz} = \frac{I_{xx} I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{xz}}$$

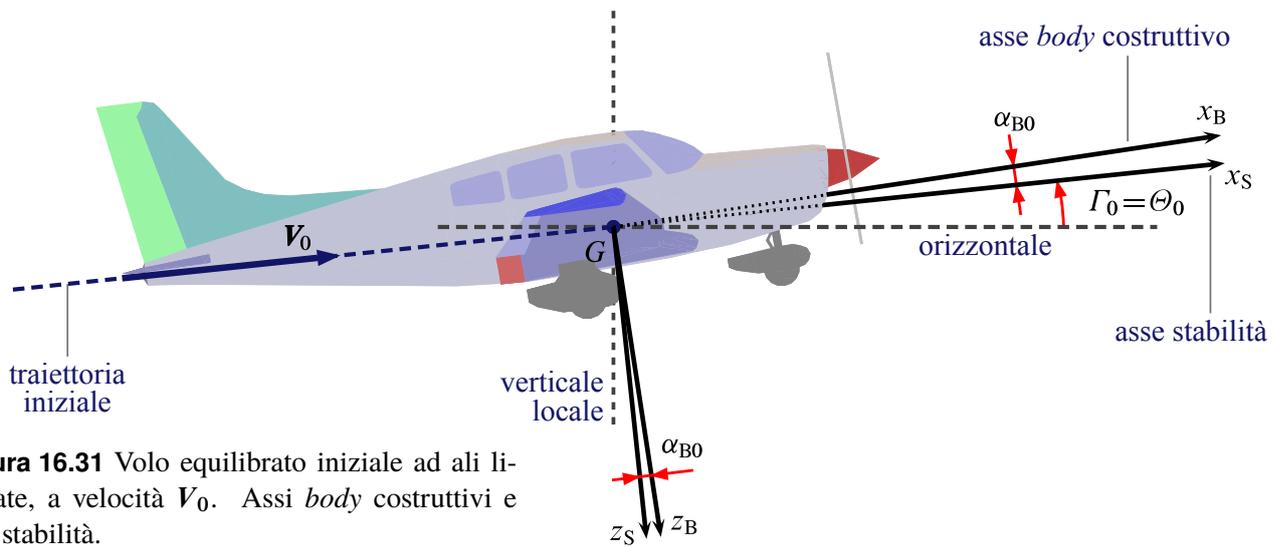
Figura 16.29 Equazioni linearizzate della dinamica latero-direzionale.

$$\begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_v}{m} & \frac{Y_p}{m} & \frac{Y_r - U_0}{m} & g C_{\Theta_0} \\ \frac{\mathcal{L}_v}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_v}{I'_{xz}} & \frac{\mathcal{L}_p}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_p}{I'_{xz}} & \frac{\mathcal{L}_r}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_r}{I'_{xz}} & 0 \\ \frac{\mathcal{L}_v}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_v}{I'_{zz}} & \frac{\mathcal{L}_p}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_p}{I'_{zz}} & \frac{\mathcal{L}_r}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_r}{I'_{zz}} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{S_{\Theta_0}}{C_{\Theta_0}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta_a}}{m} & \frac{\mathcal{L}_{\delta_a}}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_a}}{I'_{xz}} & 0 & 0 \\ \frac{Y_{\delta_r}}{m} & \frac{\mathcal{L}_{\delta_r}}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{xz}} & \frac{\mathcal{L}_{\delta_r}}{I'_{xz}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{zz}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{pmatrix} \quad (16.243)$$

potendo porsi

$$\hat{Y}_v = \frac{Y_v}{m}, \quad \hat{Y}_p = \frac{Y_p}{m}, \quad \hat{Y}_r = \frac{Y_r}{m}, \\
 \hat{\mathcal{L}}_v = \frac{\mathcal{L}_v}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_v}{I'_{xz}}, \quad \hat{\mathcal{N}}_v = \frac{\mathcal{N}_v}{I'_{zz}}, \quad \hat{\mathcal{L}}_p = \frac{\mathcal{L}_p}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_p}{I'_{xz}}, \quad \hat{\mathcal{N}}_p = \frac{\mathcal{N}_p}{I'_{zz}}, \quad \hat{\mathcal{L}}_r = \frac{\mathcal{L}_r}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_r}{I'_{xz}}, \quad \hat{\mathcal{N}}_r = \frac{\mathcal{N}_r}{I'_{zz}} + \frac{\mathcal{L}_r}{I'_{xz}}, \\
 \hat{Y}_{\delta_a} = \frac{Y_{\delta_a}}{m}, \quad \hat{Y}_{\delta_r} = \frac{Y_{\delta_r}}{m}, \quad \hat{\mathcal{L}}_{\delta_a} = \frac{\mathcal{L}_{\delta_a}}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_a}}{I'_{xz}}, \quad \hat{\mathcal{N}}_{\delta_a} = \frac{\mathcal{N}_{\delta_a}}{I'_{zz}} + \frac{\mathcal{L}_{\delta_a}}{I'_{xz}}, \quad \hat{\mathcal{L}}_{\delta_r} = \frac{\mathcal{L}_{\delta_r}}{I'_{xx}} + \frac{\mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{xz}}, \quad \hat{\mathcal{N}}_{\delta_r} = \frac{\mathcal{N}_{\delta_r}}{I'_{zz}} + \frac{\mathcal{L}_{\delta_r}}{I'_{xz}}$$

**Figura 16.30** Equazioni linearizzate della dinamica latero-direzionale. Le matrici del sistema sono ridotte eliminando le equazioni delle perturbazioni  $y_{E,G}$  e  $\psi$ . Quest'ultima è semplicemente  $\dot{\psi} = r/C_{\Theta_0}$ . Le equazioni sono semplificate perché valide per  $Q_0 = 0$  (volo traslato iniziale) e  $W_0 = 0$  (in assi stabilità).



**Figura 16.31** Volo equilibrato iniziale ad ali livellate, a velocità  $V_0$ . Assi *body* costruttivi e assi stabilità.

lare di imbardata  $r$  (in assi stabilità) e dalle oscillazioni di angolo di derapata  $\beta$ . D'altra parte, è noto che il modo di rollio è caratterizzato prevalentemente dalla velocità angolare di rollio  $p$  e dall'angolo di rollio  $\phi$ .

La riorganizzazione delle variabili di stato permette di ottenere la matrice  $A_{LD}$  data dalla prima delle (16.244b). Essa ha la forma seguente:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l} \text{effetti delle} \\ \text{perturbazioni di Dutch-Roll} \\ \text{sul moto di Dutch-Roll} \end{array} \downarrow \\
 \begin{array}{c}
 A_{LD} = \left[ \begin{array}{c|c} [A_{DR}] & [A_{DR}^{RS}] \\ \hline [A_{RS}^{DR}] & [A_{RS}] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} [A_{DR}] & \text{valori} \\ \hline \text{piccoli} & [A_{RS}] \end{array} \right] \approx \left[ \begin{array}{c|c} [A_{DR}] & 0 \\ \hline 0 & [A_{RS}] \end{array} \right] \\
 \begin{array}{l} \text{effetti delle} \\ \text{perturbazioni di Dutch-Roll} \\ \text{sul moto di Rollio/Spirale} \end{array} \uparrow
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \begin{array}{l} \text{effetti delle} \\ \text{perturbazioni di Rollio/Spirale} \\ \text{sul moto di Dutch-Roll} \end{array} \downarrow \\
 \begin{array}{l} \text{effetti delle} \\ \text{perturbazioni di Rollio/Spirale} \\ \text{sul moto di Rollio/Spirale} \end{array} \uparrow
 \end{array}
 \quad (16.245)$$

dove i blocchi diagonali  $[A_{DR}]$  e  $[A_{RS}]$  rappresentano le parti della matrice del sistema che influenzano in modo diretto, rispettivamente, i modi di Dutch-Roll e di Rollio/Spirale. I blocchi non diagonali  $[A_{DR}^{RS}]$  e  $[A_{RS}^{DR}]$  rappresentano invece le influenze, rispettivamente, dei modi di Rollio/Spirale sul modo di Dutch-Roll e viceversa ed hanno elementi di valore molto piccolo se paragonati agli elementi dei blocchi diagonali. In pratica, per ottenere modelli approssimati del solo modo di Dutch-Roll o dei modi di Rollio e Spirale — come si è fatto per i modi della dinamica longitudinale — basterà supporre nulli i blocchi non diagonali e manipolare le equazioni rimanenti tenendo conto delle caratteristiche specifiche di ciascuna dinamica.

Va osservato che ritenere nulle le matrici di influenza fuori diagonale è comodo per arrivare elegantemente a modelli ridotti che spiegano gli aspetti chiave della dinamica latero-direzionale anche se, al tempo stesso, nella  $[A_{DR}^{RS}]$  è presente una derivata importante, la  $\mathcal{L}'_{\beta}$ , che esprime l'effetto diedro del velivolo (decisiva nell'approssimazione del modo di spirale). Altro termine che potrebbe essere significativo per alcuni velivoli è la derivata incrociata  $\mathcal{N}'_p$  presente in  $[A_{DR}^{RS}]$ .

Tabella 16.10 Derivate di stabilità dimensionali del moto latero-direzionale.

Derivata	Formula di calcolo	Unità
$\hat{Y}_\beta$	$= \frac{\bar{q}_0 S}{m} C_{Y_\beta}$	$\text{m s}^{-2}$
$\hat{Y}_p$	$= \frac{\bar{q}_0 S}{m} \left( \frac{b}{2U_0} \right) C_{Y_p}$	$\text{m s}^{-1}$
$\hat{Y}_r$	$= \frac{\bar{q}_0 S}{m} \left( \frac{b}{2U_0} \right) C_{Y_r}$	$\text{m s}^{-1}$
$\hat{Y}_{\delta_a}$	$= \frac{\bar{q}_0 S}{m} C_{Y_{\delta_a}}$	$\text{m s}^{-2}$
$\hat{Y}_{\delta_r}$	$= \frac{\bar{q}_0 S}{m} C_{Y_{\delta_r}}$	$\text{m s}^{-2}$
$\hat{\mathcal{L}}_\beta$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{xx}} C_{\mathcal{L}_\beta}$	$\text{s}^{-2}$
$\hat{\mathcal{L}}_p$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{xx}} \left( \frac{b}{2U_0} \right) C_{\mathcal{L}_p}$	$\text{s}^{-1}$
$\hat{\mathcal{L}}_r$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{xx}} \left( \frac{b}{2U_0} \right) C_{\mathcal{L}_r}$	$\text{s}^{-1}$
$\hat{\mathcal{L}}_{\delta_a}$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{xx}} C_{\mathcal{L}_{\delta_a}}$	$\text{s}^{-2}$
$\hat{\mathcal{L}}_{\delta_r}$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{xx}} C_{\mathcal{L}_{\delta_r}}$	$\text{s}^{-2}$
$\hat{\mathcal{N}}_\beta$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{zz}} C_{\mathcal{N}_\beta}$	$\text{s}^{-2}$
$\hat{\mathcal{N}}_p$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{zz}} \left( \frac{b}{2U_0} \right) C_{\mathcal{N}_p}$	$\text{s}^{-1}$
$\hat{\mathcal{N}}_r$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{zz}} \left( \frac{b}{2U_0} \right) C_{\mathcal{N}_r}$	$\text{s}^{-1}$
$\hat{\mathcal{N}}_{\delta_a}$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{zz}} C_{\mathcal{N}_{\delta_a}}$	$\text{s}^{-2}$
$\hat{\mathcal{N}}_{\delta_r}$	$= \frac{\bar{q}_0 S b}{I_{zz}} C_{\mathcal{N}_{\delta_r}}$	$\text{s}^{-2}$

**Tabella 16.11** Caratteristiche inerziali e derivate aerodinamiche latero-direzionali di un Boeing 747 in diverse condizioni di volo nominali. Gli angoli d'attacco sono misurati rispetto alla retta di riferimento della fusoliera. I momenti e i prodotti d'inerzia sono in assi stabilità per ciascuna condizione di volo. Le derivate angolari sono in  $\text{rad}^{-1}$ .

Condizione	2	5	7	9	10
$h$ (ft)	SL	20000	20000	40000	40000
$M$	0,25	0,50	0,80	0,80	0,90
$\alpha_B$ (deg)	5,70	6,80	0,00	4,60	2,40
$W$ (lbf)	564000	636640	636640	636640	636640
$I_{xx}$ (slug ft <sup>2</sup> )	$14,30 \cdot 10^6$	$18,40 \cdot 10^6$	$18,20 \cdot 10^6$	$18,20 \cdot 10^6$	$18,20 \cdot 10^6$
$I_{zz}$ (slug ft <sup>2</sup> )	$45,30 \cdot 10^6$	$49,50 \cdot 10^6$	$49,70 \cdot 10^6$	$49,70 \cdot 10^6$	$49,70 \cdot 10^6$
$I_{xz}$ (slug ft <sup>2</sup> )	$-2,23 \cdot 10^6$	$-2,76 \cdot 10^6$	$0,97 \cdot 10^6$	$-1,56 \cdot 10^6$	$-0,35 \cdot 10^6$
$C_{Y\beta}$	-0,96	-0,90	-0,81	-0,88	-0,92
$C_{\mathcal{L}\beta}$	-0,221	-0,193	-0,164	-0,277	-0,095
$C_{N\beta}$	0,150	0,147	0,179	0,195	0,207
$C_{\mathcal{L}p}$	-0,450	-0,323	-0,315	-0,334	-0,296
$C_{Np}$	-0,121	-0,0687	0,0028	-0,0415	0,0230
$C_{\mathcal{L}r}$	0,101	0,212	0,0979	0,300	0,193
$C_{Nr}$	-0,300	-0,278	-0,265	-0,327	-0,333
$C_{\mathcal{L}\delta_a}$	0,0461	0,0129	0,0120	0,0137	0,1390
$C_{N\delta_a}$	0,0064	0,0015	0,0008	0,0002	-0,0027
$C_{Y\delta_r}$	0,175	0,1448	0,0841	0,1157	0,0620
$C_{\mathcal{L}\delta_r}$	0,007	0,0039	0,0090	0,0070	0,0052
$C_{N\delta_r}$	-0,109	-0,1081	-0,0988	-0,1256	-0,0914

### 16.8.3 Derivate di stabilità latero-direzionali

Le formule di calcolo delle derivate dimensionali del moto latero-direzionale sono date dalla tabella 16.10 a fronte. Esse permettono il calcolo delle *primed derivatives* date dalle (16.236h) e, in definitiva, l'assemblaggio delle matrici  $\mathbf{A}_{LD}$  e  $\mathbf{B}_{LD}$  date dalle (16.244b). Nelle formule di calcolo si osserva l'importanza dei gradienti  $C_{Y\bullet}$ ,  $C_{\mathcal{L}\bullet}$  e  $C_{N\bullet}$  dei coefficienti aerodinamici latero-direzionali (con  $\bullet = \beta, p, r, \delta_a, \delta_r$ ). In particolare, si ricordano qui le derivate dinamiche

$$C_{\xi p} \triangleq \frac{\partial C_{\xi}}{\partial \left( \frac{pb}{2U_0} \right)} \quad C_{\xi r} \triangleq \frac{\partial C_{\xi}}{\partial \left( \frac{rb}{2U_0} \right)} \quad (16.246)$$

per  $\xi = Y, \mathcal{L}, N$ , di cui è ben nota l'interpretazione fisica dai corsi di base di Meccanica del volo.

### 16.8.4 Dinamica latero-direzionale di un Boeing 747

Andiamo a verificare l'esistenza dei caratteristici modi di risposta *open loop* latero-direzionali anticipati nel paragrafo 16.6.2 considerando l'esempio pratico del Boeing 747.

Dalle tabelle 16.3 e 16.11 sono note le caratteristiche di questo velivolo in diverse condizioni di volo. In particolare, per i calcoli che seguiranno scegliamo la condizione '2' per la quale si ha:

quota di volo,	$h_0 = 0 \text{ m}$ (SL)
densità dell'aria (@SL),	$\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$
velocità del suono dell'aria (@SL),	$a_0 = 340,29 \text{ m/s}$
numero di Mach,	$M_0 = 0,25$
velocità del velivolo,	$U_0 = 85,07 \text{ m/s}$
massa,	$m = 255753 \text{ kg}$
momento d'inerzia laterale,	$I_{xx} = 1,94 \cdot 10^7 \text{ kg m}^2$
momento d'inerzia trasversale,	$I_{zz} = 6,14 \cdot 10^7 \text{ kg m}^2$
prodotto d'inerzia,	$I_{xz} = -3,02 \cdot 10^6 \text{ kg m}^2$
superficie alare,	$S = 510,97 \text{ m}^2$
corda media aerodinamica,	$\bar{c} = 8,32 \text{ m}$
apertura alare,	$\bar{b} = 59,64 \text{ m}$
angolo di salita,	$\Gamma_0 = 0 \text{ deg}$
coefficienti e derivate aerodinamiche:	

$$\begin{aligned}
 C_{Y\beta} &= -0,96, & C_{Yp} &= 0, & C_{Yr} &= 0 \\
 C_{\mathcal{L}\beta} &= -0,22, & C_{\mathcal{L}p} &= -0,45, & C_{\mathcal{L}r} &= 0,10 \\
 C_{\mathcal{N}\beta} &= 0,15, & C_{\mathcal{N}p} &= -0,12, & C_{\mathcal{N}r} &= -0,30
 \end{aligned}$$

I valori precedenti, sostituiti nelle formule della tabella 16.10 a pagina 100 e successivamente nelle (16.236h) forniscono le seguenti derivate di stabilità dimensionali:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= -0,1559, & i_2 &= -0,0492, \\
 \hat{Y}_\beta &= Y'_\beta = -8,5023 \text{ m s}^{-2}, & \hat{Y}_p &= Y'_p = 0 \text{ m s}^{-1}, & \hat{Y}_r &= Y'_r = 0 \text{ m s}^{-1}, \\
 \hat{\mathcal{L}}_\beta &= -1,540 \text{ s}^{-2}, & \hat{\mathcal{L}}_p &= -1,099 \text{ s}^{-1}, & \hat{\mathcal{L}}_r &= 0,247 \text{ s}^{-1}, \\
 \hat{\mathcal{N}}_\beta &= 0,3299 \text{ s}^{-2}, & \hat{\mathcal{N}}_p &= -0,0933 \text{ s}^{-1}, & \hat{\mathcal{N}}_r &= -0,0933 \text{ s}^{-1}, \\
 \mathcal{L}'_\beta &= -1,604 \text{ s}^{-2}, & \mathcal{L}'_p &= -1,093 \text{ s}^{-1}, & \mathcal{L}'_r &= 0,285 \text{ s}^{-1}, \\
 \mathcal{N}'_\beta &= 0,409 \text{ s}^{-2}, & \mathcal{N}'_p &= -0,039 \text{ s}^{-1}, & \mathcal{N}'_r &= -0,245 \text{ s}^{-1},
 \end{aligned}$$

Le derivate di stabilità così calcolate possono essere utilizzate per costruire la matrice del sistema LTI definito dalle (16.244a)-(16.244b). Si otterrà (in unità del SI):

$$\mathbf{A}_{LD} = \begin{bmatrix} -0,2453 & 0,4089 & -0,0395 & 0 \\ -1 & -0,0999 & 0 & 0 \\ 0,2850 & -1,6037 & -1,0930 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16.247)$$

Per la stabilità il problema di valori iniziali

$$\dot{\mathbf{x}}_{LD} = \mathbf{A}_{LD} \mathbf{x}_{LD}, \quad \mathbf{x}_{LD}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (16.248)$$

deve avere soluzione non divergente per ogni  $\mathbf{x}_0$  non nullo. Il vettore  $\mathbf{x}_0$  rappresenta una perturbazione delle condizioni iniziali di equilibrio latero-direzionale del velivolo che va

ad ‘eccitare’ una risposta libera data dall’espressione modale (16.118). Interessa pertanto ricavare gli autovalori e gli autovettori della matrice  $A_{LD}$  relativa al caso pratico esaminato.

L’equazione caratteristica della matrice (16.247) ha le seguenti radici

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sigma_{ROLL} = -1,2306 \text{ s}^{-1} \\ \lambda_{2,3} &= \{ \lambda_{DR}, \lambda_{DR}^* \} = \sigma_{DR} \pm j \omega_{DR} = -0,0806 \text{ s}^{-1} \pm j 0,7433 \text{ s}^{-1} \\ \lambda_4 &= \sigma_{SPIRAL} = -0,0464 \text{ s}^{-1}\end{aligned}\quad (16.249)$$

dalle quali si ricava:

$$\zeta_{DR} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{DR}}{\sigma_{DR}}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{0,7433 \text{ s}^{-1}}{-0,0806 \text{ s}^{-1}}\right)^2}} = 0,1078 \quad (16.250a)$$

$$\omega_{n,DR} = \frac{-\sigma_{DR}}{\zeta_{DR}} = \frac{-(-0,0806 \text{ s}^{-1})}{0,1078} = 0,7477 \text{ s}^{-1} \quad (16.250b)$$

$$T_{DR} = \frac{2\pi}{\omega_{n,DR} \sqrt{1 - \zeta_{DR}^2}} = \frac{6,28}{0,7477 \text{ s}^{-1} \sqrt{1 - 0,1078^2}} = 8,45 \text{ s} \quad (16.250c)$$

$$t_{1/2,DR} = \frac{\ln 2}{\omega_{n,DR} \zeta_{DR}} = \frac{0,6931}{0,7477 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1078} = 8,60 \text{ s} \quad (16.250d)$$

$$N_{1/2,DR} = \frac{t_{1/2,DR}}{T_{DR}} = \frac{8,60 \text{ s}}{8,45 \text{ s}} = 1,017 \quad (16.250e)$$

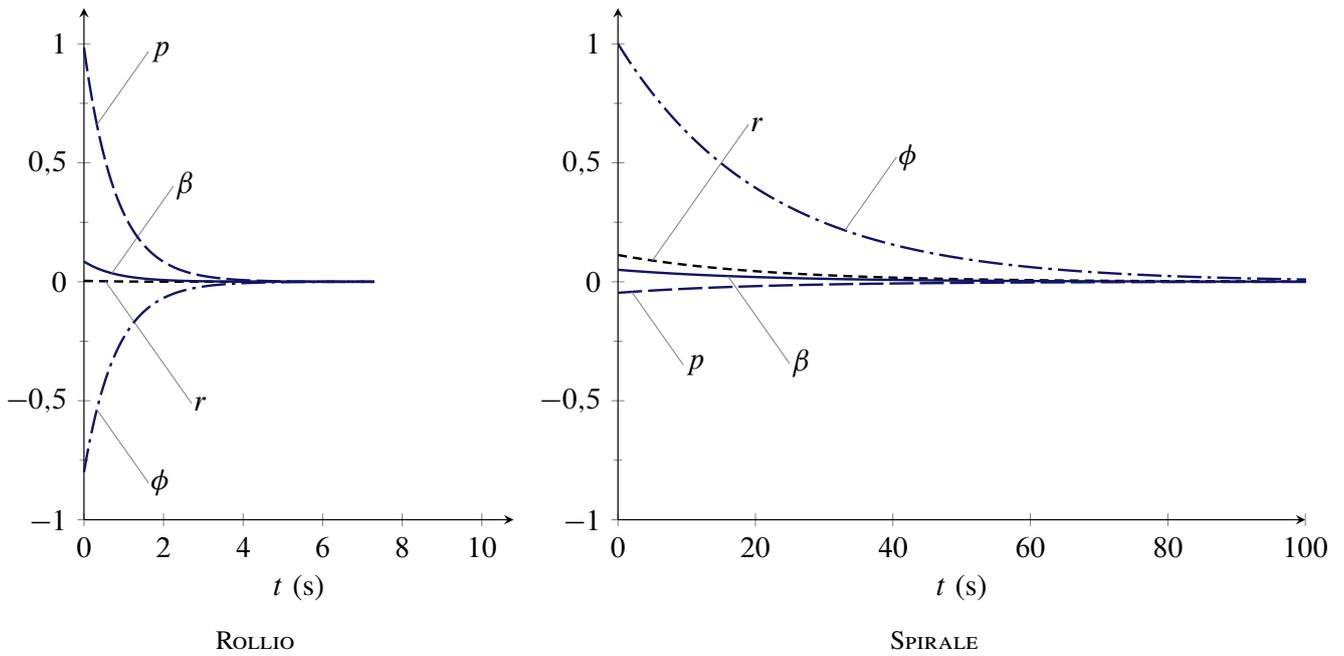
Le componenti dell’autovettore normalizzato del modo di Dutch-Roll sono le seguenti:

$$\chi_{DR} = \begin{pmatrix} -0,245816 + j(-0,252248) \\ 0,351743 + j(-0,476691) \\ -0,080622 + j0,743317 \\ 1 + j0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow r \\ \leftarrow \beta \\ \leftarrow p \\ \leftarrow \phi \end{matrix} \quad (16.251)$$

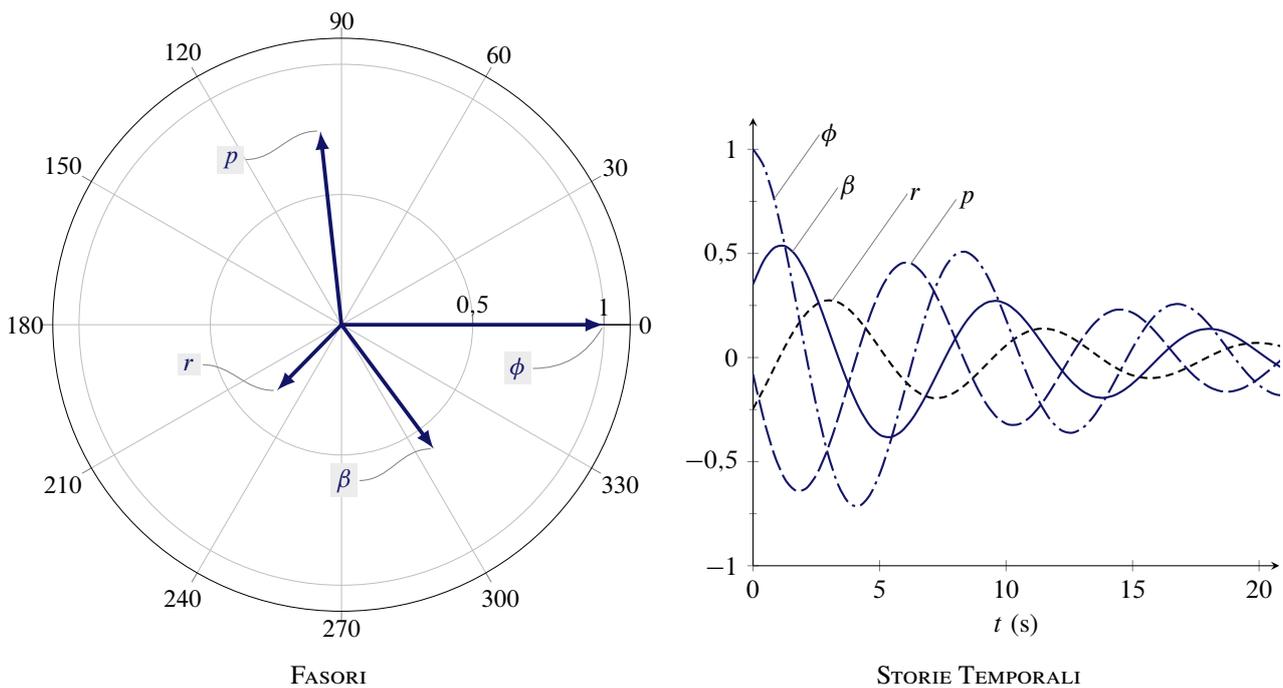
Le risposte libere riportate nella figura 16.32 nella pagina seguente si ottengono risolvendo il problema (16.248) per una condizione iniziale coincidente, rispettivamente, con gli autovettori (sinistri) dei modi di rollio  $\xi_1^T$  e di spirale  $\xi_4^T$ .

La rappresentazione fasoriale delle componenti (16.251) e le risposte libere di puro Dutch-Roll sono riportate nella figura 16.33 nella pagina successiva. Le caratteristiche oscillazioni di Dutch-Roll — si veda la figura 16.42 a pagina 117 — sono principalmente dovute allo sfasamento tra la  $r$  e la  $p$  (ovvero tra la  $\psi$  e la  $\phi$ ) che è vicino ai 90 deg.

**TO DO:** Riproduci da Schmidt l’esempio sul Navion (General Aviation) o da Stengel l’esempio sul Business Jet.



**Figura 16.32** Risposte libere di un Boeing 747 a perturbazioni latero-direzionali della condizione iniziale. Le due risposte sono state ottenute eccitando, rispettivamente, *solo* il modo di rollio (a sinistra) e *solo* il modo di spirale (a destra).



**Figura 16.33** Risposta libera di un Boeing 747 a perturbazioni latero-direzionali della condizione iniziale ottenuta eccitando *solo* il modo di Dutch-Roll.

**Esercizio 16.8:** *Dinamica latero-direzionale di un Boeing 747 in Matlab*

Dai dati del Boeing 747 ricavare le risposte modali presentate nelle figure 16.33 e 16.32. Inoltre, dopo aver costruito anche la matrice degli input  $\mathbf{B}_{LD}$  si ricavino le storie temporali analoghe a quelle mostrane dalle figure 16.34 e 16.35.

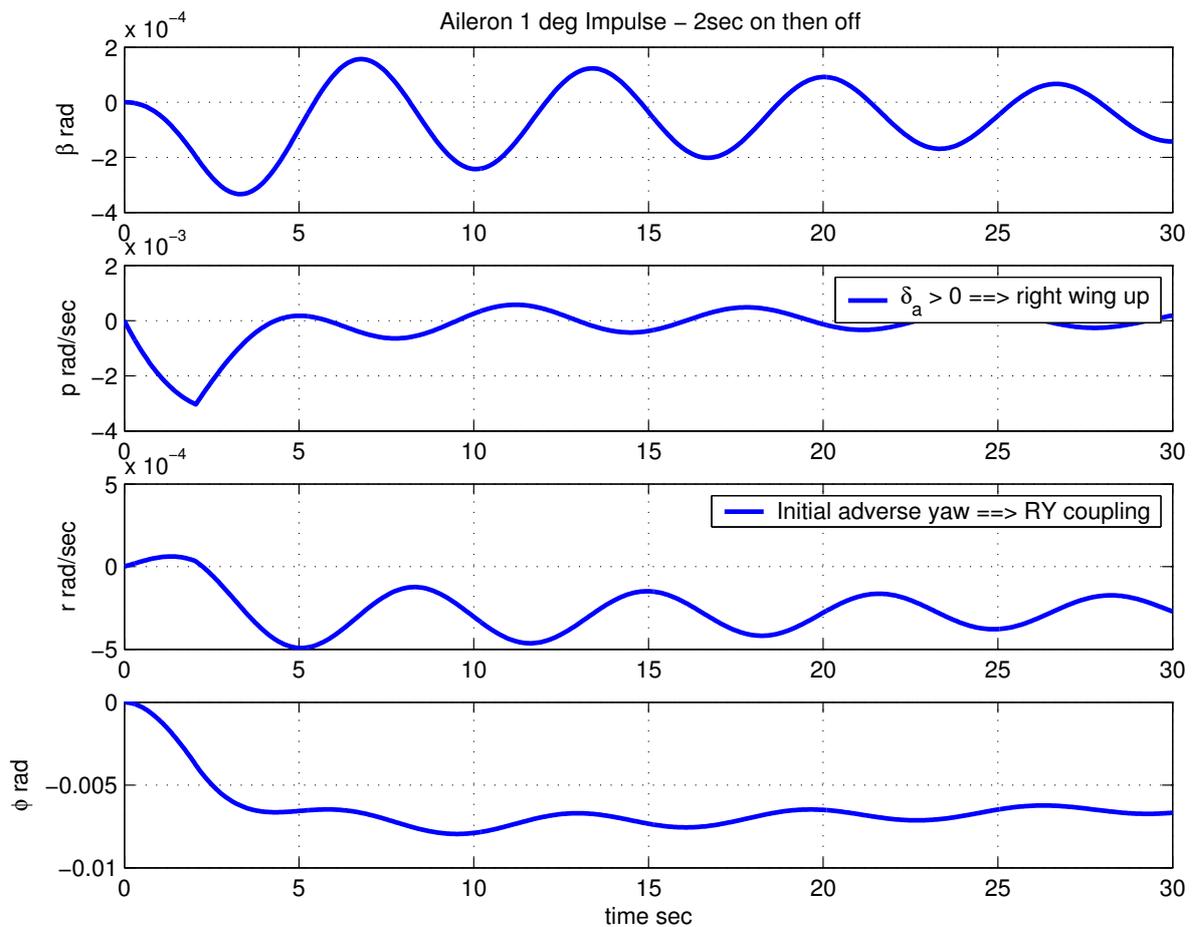


Figure 3: Aileron impulse to flight variables

- **Aileron**  $\delta_a = 1\text{deg}$  impulse for 2 sec.

- Since  $\delta_a > 0$  then right aileron goes down, and right wing goes up  $\rightarrow$  Reid's notation, and it is **not** consistent with the picture on 6–4 (from Nelson).
- Influence of the roll mode seen in the response of  $p$  to application and release of the aileron input.
- See effect of *adverse yaw* in the yaw rate response caused by the differential drag due to aileron deflection.
- Spiral mode harder to see.
- Dutch mode response in other variables clear (1 rad/sec  $\sim$  6 sec period).

**Figura 16.34** Risposta latero-direzionale di un velivolo da trasporto commerciale ad un impulso degli alettoni di durata 2 s ed ampiezza 1 deg.

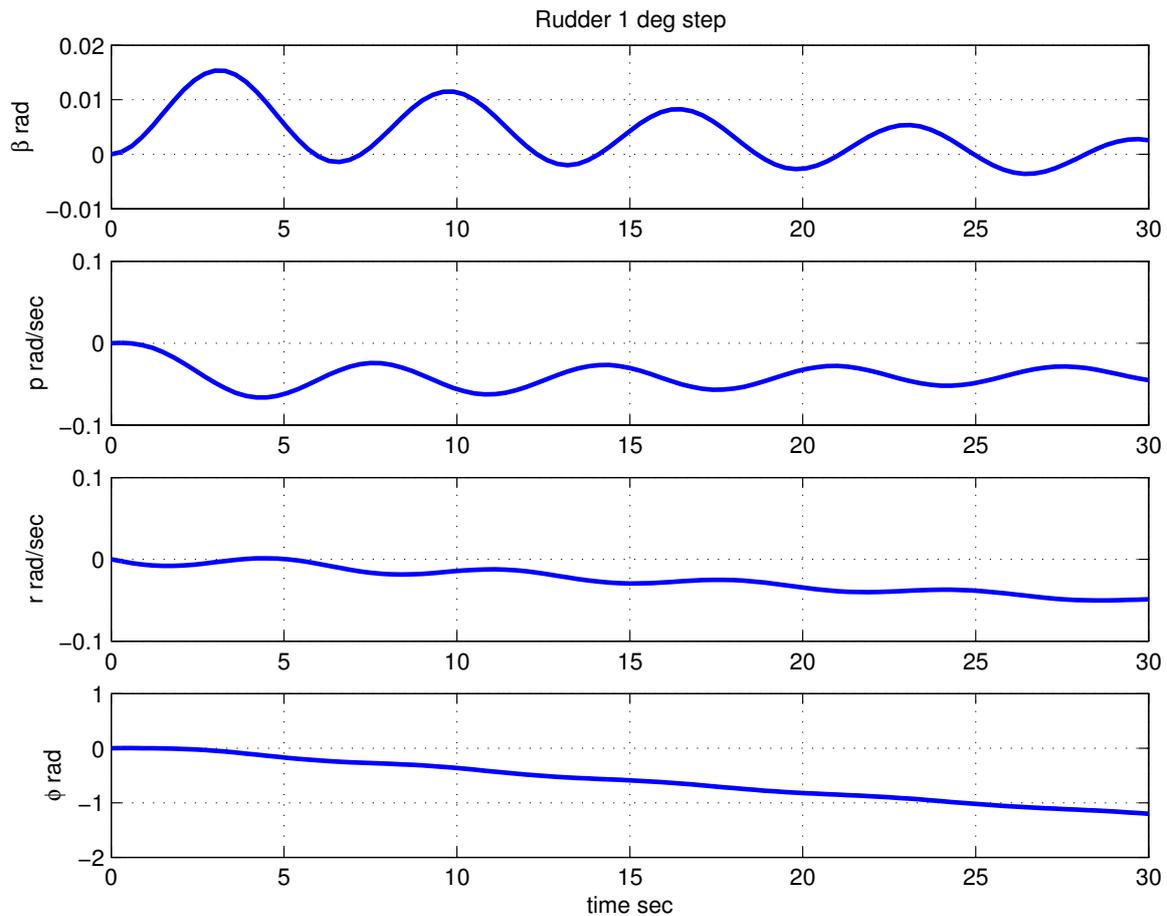


Figure 4: Rudder step to flight variables

- **Rudder step input 1deg step.**

- Dutch roll response very clear. Other 2 modes are much less pronounced.
- $\beta$  shows a very lightly damped decay.
- $p$  clearly excited as well. Doesn't show it, but often see evidence of adverse roll in  $p$  response where initial  $p$  is opposite sign to steady state value. Reason is that the forces act on the fin which is well above the  $cg \rightarrow$  and the aircraft responds rapidly (initially) in roll.
- $\phi$  ultimately oscillates around  $2.5^\circ$

**Figura 16.35** Risposta latero-direzionale di un velivolo da trasporto commerciale ad un gradino del timone di ampiezza 1 deg.

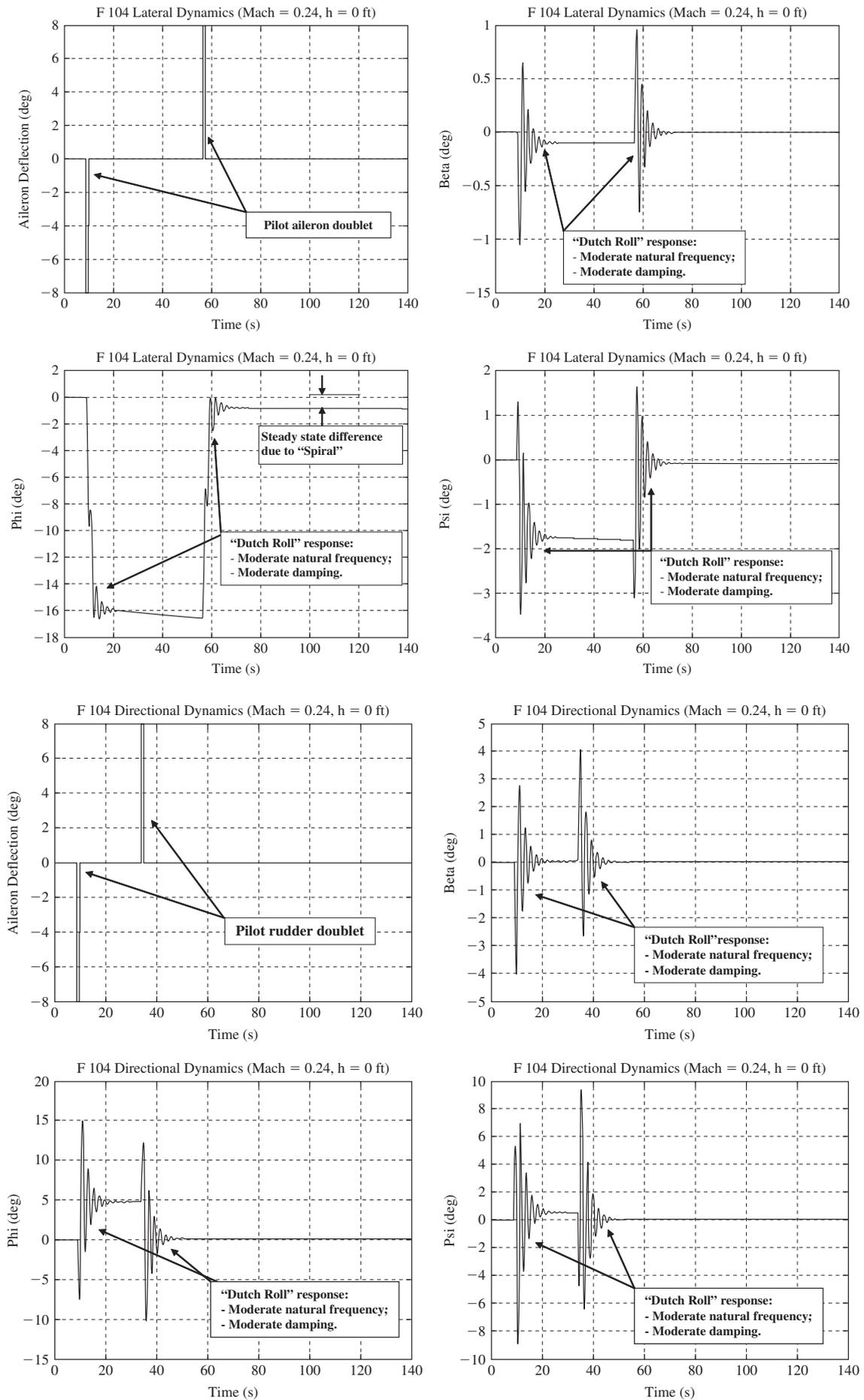


Figura 16.36 Dinamica laterale e direzionale di un Lockheed F104 in configurazione di atterraggio [13].

*Suggerimenti per lo svolgimento*

Seguire l'impostazione dell'esercizio 16.1, usare la funzione predefinita `lsim` come nell'esercizio 16.3 e impostare lo script seguendo il frammento di codice seguente.

```
(continua dal listato precedente riportato nell'esercizio 16.1)
b = convlength(195.68, 'ft', 'm'); % m

% 'Condition 2', see data on B747
alphaB0 = convang(5.70, 'deg', 'rad');

% Inertias
Ixx = 14.30e+6 * SLUGFT2toKGM2; % kg*m^2
Izz = 45.30e+6 * SLUGFT2toKGM2; % kg*m^2
Ixz = -2.23e+6 * SLUGFT2toKGM2; % kg*m^2

i1 = (Ixz/Ixx);
i2 = (Ixz/Izz);

% Lateral-Directional Stability Derivatives
% (dimensionless - along stability axes)
Clbeta = -0.221;
Clp = -0.450;
Clr = 0.101;
Cybeta = -0.96;
Cyp = 0;
Cyr = 0.0;
Cnbeta = 0.150;
CnTbeta = 0;
Cnp = -0.121;
Cnr = -0.300;

% Lateral-Directional Control Derivatives
% (dimensionless - along stability axes)
Cldeltaa = 0.0461;
Cldeltar = 0.007;
Cydeltaa = 0;
Cydeltar = 0.175;
Cndeltaa = 0.0064;
Cndeltar = -0.109;

% Lateral-Directional Dimensional Stability Derivatives
Ybeta = (qbar_0*S*Cybeta)/mass;
Yp = (qbar_0*S*b*Cyp)/(2*mass*U_0);
Yr = (qbar_0*S*b*Cyr)/(2*mass*U_0);
Lbeta = (qbar_0*S*b*Clbeta)/Ixx;
Lp = (qbar_0*S*(b^2)*Clp)/(2*Ixx*U_0);
Lr = (qbar_0*S*(b^2)*Clr)/(2*Ixx*U_0);
Nbeta = (qbar_0*S*b*Cnbeta)/Izz;
NTbeta = (qbar_0*S*b*CnTbeta)/Izz;
Np = (qbar_0*S*(b^2)*Cnp)/(2*Izz*U_0);
Nr = (qbar_0*S*(b^2)*Cnr)/(2*Izz*U_0);

% Lateral-Directional Dimensional Control Derivatives
Ydeltaa = (qbar_0*S*Cydeltaa)/mass;
Ydeltar = (qbar_0*S*Cydeltar)/mass;
Ldeltaa = (qbar_0*S*b*Cldeltaa)/Ixx;
Ldeltar = (qbar_0*S*b*Cldeltar)/Ixx;
Ndeltaa = (qbar_0*S*b*Cndeltaa)/Izz;
Ndeltar = (qbar_0*S*b*Cndeltar)/Izz;

% Lateral-Directional Primed Stability Derivatives
Ybeta_1 = Ybeta;
Yp_1 = Yp;
Yr_1 = Yr;
Lbeta_1 = (Lbeta + i1*Nbeta)/(1-i1*i2);
Lp_1 = (Lp + i1*Np)/(1-i1*i2);
Lr_1 = (Lr + i1*Nr)/(1-i1*i2);
Nbeta_1 = (i2*Lbeta + Nbeta)/(1-i1*i2);
Np_1 = (i2*Lp + Np)/(1-i1*i2);
Nr_1 = (i2*Lr + Nr)/(1-i1*i2);
```

```

% Lateral-Directional Primed Control Derivatives
Ydeltaa_1 = Ydeltaa;
Ydeltar_1 = Ydeltar;
Ldeltaa_1 = (Ldeltaa + i1*Ndeltaa)/(1-i1*i2);
Ldeltar_1 = (Ldeltar + i1*Ndeltar)/(1-i1*i2);
Ndeltaa_1 = (i2*Ldeltaa + Ndeltaa)/(1-i1*i2);
Ndeltar_1 = (i2*Ldeltar + Ndeltar)/(1-i1*i2);

% Lateral-Directional matrices
A_ld = [ ...
    Nr_1, Nbeta_1, Np_1, 0; ...
    Yr_1/U_0 - 1, Ybeta_1/U_0, Yp_1/U_0, g_0/U_0; ...
    Lr_1, Lbeta_1, Lp_1, 0; ...
    0, 0, 1, 0];
B_ld = [ ...
    Ndeltaa_1, Ndeltar_1; ...
    Ydeltaa_1/U_0, Ydeltar_1/U_0; ...
    Ldeltaa_1, Ldeltar_1; ...
    0, 0];

% Lateral-Directional eigenvalues/eigenvectors
[Vld,Dld] = eig(A_ld); % right eigenvectors (columns) and eigenvalues

Vld_Roll = Vld(:,1);
Vld_Roll = Vld_Roll/Vld_Roll(4,1);

Vld_Spiral = Vld(:,4);
Vld_Spiral = Vld_Spiral/Vld_Spiral(4,1);

lambda_DR = Dld(2,2);
Vld_DR = Vld(:,2);
Vld_DR = Vld_DR/Vld_DR(4,1);

sigma_DR = real(lambda_DR);
omega_DR = imag(lambda_DR);
zeta_DR = zeta(sigma_DR,omega_DR);
omega_n_DR = omega_n(sigma_DR,omega_DR);
T_DR = Period(sigma_DR,omega_DR);
t_half_DR = t_half(sigma_DR,omega_DR);
N_half_DR = N_half(sigma_DR,omega_DR);

```

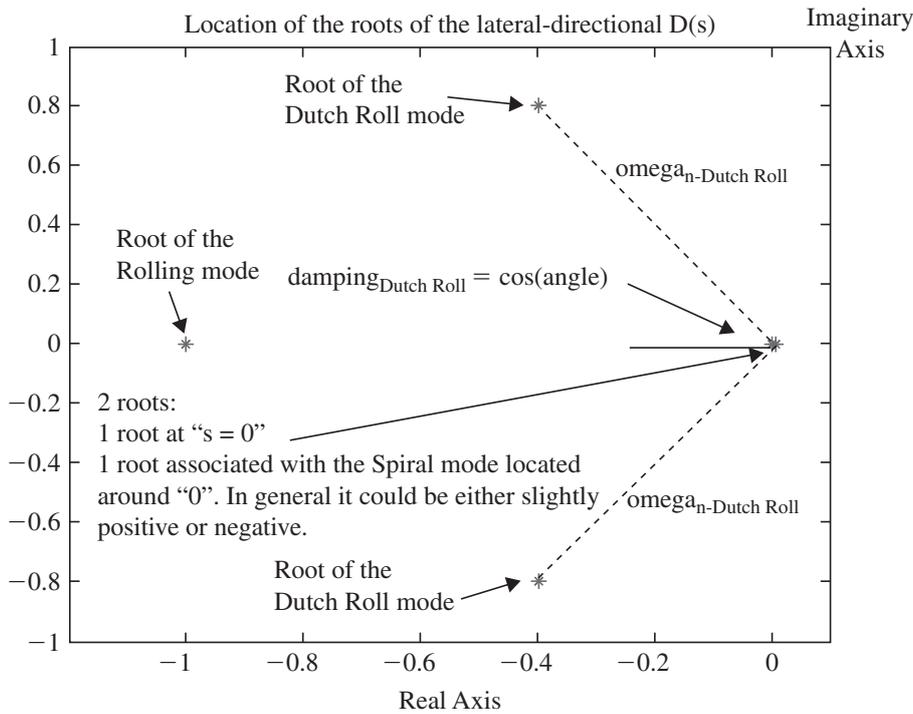
**TO DO:** Check & expand.



## 16.8.5 Approssimazioni della dinamica latero-direzionale

Come si è visto, la risposta libera dei velivoli ad architettura tradizionale a perturbazioni latero-direzionali è tipicamente costituita dalla sovrapposizione di un modo oscillatorio smorzato, il Dutch-Roll, e di due modi a decadimento esponenziale, il modo di spirale e di rollio. Ciò è riassunto schematicamente nella figura 16.37 nella pagina successiva.

Dalla figura 16.32 a pagina 104 si osserva che nel modo di rollio la variabile che mostra una risposta prevalente è la velocità angolare di rollio  $p$ , insieme all'angolo  $\phi$  di cui essa è la derivata. Questo modo ha tipicamente uno smorzamento molto forte. Nella stessa figura (a destra) si osserva che il modo di spirale ha smorzamento piccolo e tempi caratteristici decisamente lunghi. In alcuni casi esso è instabile ma la sua dinamica è così lenta che i piloti riescono a compensarne la tendenza a divergere — almeno quando volano a vista (VFR) e il riferimento orizzontale è chiaramente visibile; al contrario, in volo strumentale (IFR) i piloti devono imparare a fidarsi dell'orizzonte artificiale per evitare di entrare in una spirale divergente.



**Figura 16.37** Posizioni tipiche delle radici di Dutch-Roll, rollio e spirale nel piano complesso.

La figura 16.33 mostra che il Dutch-Roll è caratterizzato da una concomitanza di oscillazioni dell'angolo di rollio, di derapata e d'imbardata fra loro sfasate che ricordano il movimento di un pattinatore (*speed-skater*). Alcuni attribuiscono al termine 'Dutch-Roll' lo stesso significato che esso ha in campo navale, in cui ci si riferisce a vecchie imbarcazioni (*Dutchman*) dalla chiglia poco pronunciata che esibiscono simili oscillazioni.

Dalle caratteristiche principali delle dinamiche latero-direzionali è possibile ricavare dei modelli ridotti (riducendo l'ordine della matrice del sistema) che approssimano ingegneristicamente le dinamiche di ciascun modo. Ogni modello ridotto fornisce le espressioni analitiche per il calcolo approssimato degli autovalori.

### Approssimazione di spirale

Il modo di spirale rappresenta una dinamica 'lenta' e in non pochi casi è instabile. Esso consiste in una combinazione di moti di rollio e imbardata a bassi valori di  $p$  ed  $r$  in presenza di angoli di derapata  $\beta$  relativamente bassi. Inoltre la  $p$  è piccola se confrontata alla  $r$  dunque, a partire dal modello completo definito dalle (16.244a)-(16.244b), una ragionevole approssimazione consiste nel porre

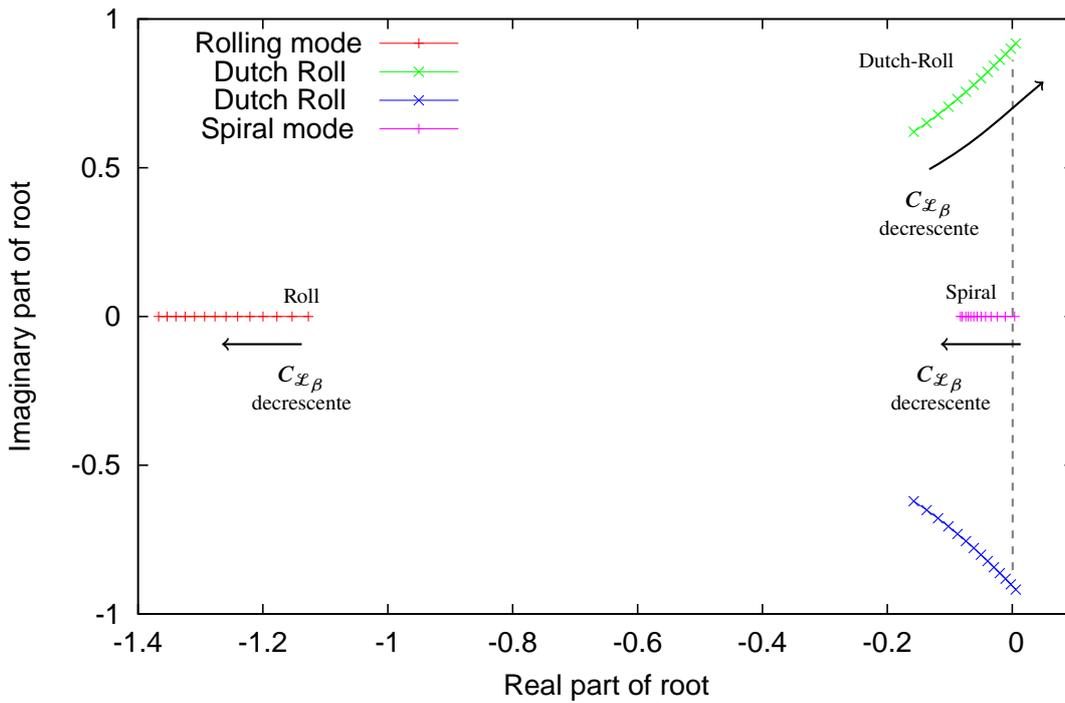
$$p, \dot{p} \approx 0 \implies 0 \approx \mathcal{L}'_{\beta} \beta + \mathcal{L}'_r r + \mathcal{L}'_p \cdot 0 \tag{16.252}$$

ottenendo

$$\beta \approx -\frac{\mathcal{L}'_r}{\mathcal{L}'_{\beta}} r = -\frac{\hat{\mathcal{L}}_r + i_1 \hat{\mathcal{N}}_r}{\hat{\mathcal{L}}_{\beta} + i_1 \hat{\mathcal{N}}_{\beta}} r \tag{16.253}$$

che per  $i_1 \approx 0$  e  $i_2 \approx 0$  diventa

$$\beta \approx -\frac{\hat{\mathcal{L}}_r}{\hat{\mathcal{L}}_{\beta}} r \tag{16.254}$$



**Figura 16.38** Luogo delle radici latero-direzionali per un Boeing 747 in *powered approach* a  $M_0 = 0,25$  (condizioni '2' della tabella 16.11) ottenuto variando l'effetto diedro  $C_{\mathcal{L}\beta}$  dal valore  $-0,041$  fino a  $-0,561$  (con passo  $-0,04$ ) e mantenendo le altre derivate di stabilità costanti e pari ai valori nominali. L'aumento della stabilità laterale migliora la stabilità dei modi di rollio e di spirale (che si stabilizza per  $C_{\mathcal{L}\beta} \leq -0,051$ ); al contrario, peggiora la stabilità del modo di Dutch-Roll, che diventa instabile per valori di  $C_{\mathcal{L}\beta} \leq -0,532$ .

Sostituendo nell'equazione in  $\dot{r}$

$$\dot{r} = \mathcal{N}'_r r + \mathcal{N}'_\beta \beta + \mathcal{N}'_p p \approx \mathcal{N}'_r r + \mathcal{N}'_\beta \beta \quad (16.255)$$

e trascurando i termini in cui compaiono i prodotti d'inerzia ( $\mathcal{N}'_\beta \approx \hat{\mathcal{N}}_\beta$  e  $\mathcal{N}'_r \approx \hat{\mathcal{N}}_r$ ) si ha

$$\dot{r} = \left( \hat{\mathcal{N}}_r - \frac{\hat{\mathcal{L}}_r \hat{\mathcal{N}}_\beta}{\hat{\mathcal{L}}_\beta} \right) r \quad (16.256)$$

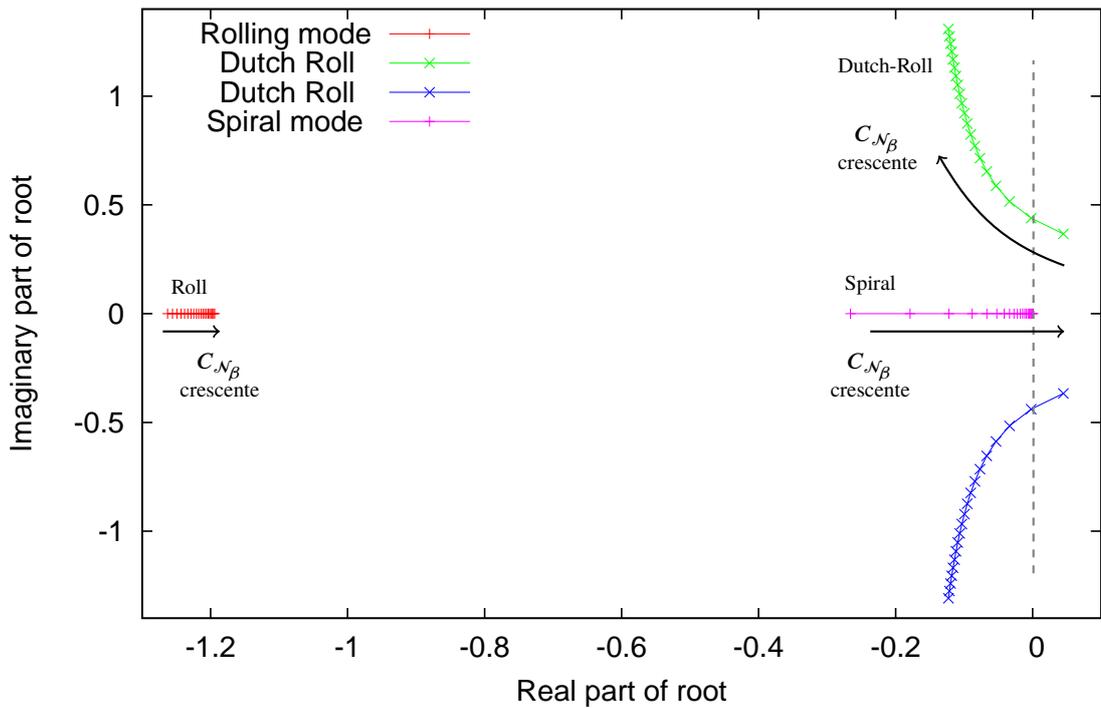
Il polinomio caratteristico di questa equazione ha per radice il numero reale

$$\lambda_{\text{SPIRAL}} = \hat{\mathcal{N}}_r + \frac{\hat{\mathcal{L}}_r \hat{\mathcal{N}}_\beta}{-\hat{\mathcal{L}}_\beta} = \frac{\hat{\mathcal{L}}_\beta \hat{\mathcal{N}}_r - \hat{\mathcal{L}}_r \hat{\mathcal{N}}_\beta}{\hat{\mathcal{L}}_\beta} \quad (16.257)$$

Tipicamente per i velivoli le due derivate di stabilità  $\hat{\mathcal{L}}_\beta$  (effetto diedro) e  $\hat{\mathcal{N}}_r$  (smorzamento della velocità angolare d'imbardata) sono negative. D'altra parte, le derivate  $\hat{\mathcal{N}}_\beta$  (stabilità direzionale) ed  $\hat{\mathcal{L}}_r$  (momento di rollio dovuto alla velocità angolare d'imbardata unitaria) sono quantità positive. Pertanto, per velivoli convenzionali si ha un modo di spirale stabile,  $\lambda_{\text{SPIRAL}} < 0$ , quando

$$\hat{\mathcal{L}}_\beta \hat{\mathcal{N}}_r > \hat{\mathcal{L}}_r \hat{\mathcal{N}}_\beta \quad (16.258)$$

Incrementare l'effetto diedro  $\hat{\mathcal{L}}_\beta$  o lo smorzamento dell'imbardata  $\hat{\mathcal{N}}_r$  normalmente comporta uno spostamento nel verso negativo dell'asse reale dell'autovalore del modo di spirale. Talvolta ciò serve a rendere stabile un modo di spirale che in una prima



**Figura 16.39** Luogo delle radici latero-direzionali per un Boeing 747 in *powered approach* a  $M_0 = 0,25$  (condizioni '2' della tabella 16.11) ottenuto variando la stabilità direzionale  $C_{N_\beta}$  dal valore  $-0,07$  fino a  $0,69$  (con passo  $0,04$ ) e mantenendo le altre derivate di stabilità costanti e pari ai valori nominali. L'aumento della stabilità direzionale peggiora la stabilità dei modi di rollio e di spirale (che diventa instabile per  $C_{N_\beta} \geq 0,657$ ); al contrario, migliora la stabilità del modo di Dutch-Roll, che diventa stabile per valori di  $C_{N_\beta} \geq -0,032$ .

fase progettuale è risultato instabile. Se, invece, si aumenta la stabilità direzionale  $\hat{N}_\beta$  si accresce il secondo membro della disuguaglianza (16.258), cioè aumenta il termine additivo positivo nella prima delle espressioni (16.257), ottenendo un peggioramento della stabilità (ed eventualmente una instabilità) del modo di spirale.

Per visualizzare i fenomeni tipici di un moto di spirale divergente si considerino le figure 16.40 e 16.41. A partire dalla condizione di volo equilibrato su traiettoria rettilinea orizzontale ad ali livellate, si consideri una perturbazione positiva  $\phi_0$  dell'angolo d'inclinazione delle ali. Nelle condizioni indicate nelle figure con  $A$ ,  $B$  e  $C$  si ha quanto segue:

- (i) Il vettore portanza, che inizialmente è  $L_0$  ed equilibra il peso  $mg$ , ruota insieme al velivolo e non cambia significativamente in modulo. Conseguentemente, ad ali inclinate la risultante tra il peso e la portanza provoca un'accelerazione laterale  $\dot{v}$  positiva, che determina una velocità laterale  $v$  ovvero un'angolo di derapata  $\beta$  positivo.
- (ii) In presenza di un vento relativo laterale e ad ali inclinate, la forte stabilità direzionale — legata principalmente all'insorgere di una forza laterale  $\Delta F_V$  dovuta all'impenningo verticale — determina un momento d'imbardata  $\mathcal{N}_\beta \beta$  positivo che fa ruotare il velivolo intorno all'asse d'imbardata con la prua che 'insegue' il vento. Questa rotazione è associata a una velocità angolare d'imbardata  $r$  positiva.
- (iii) A questo punto la derivata incrociata  $\mathcal{L}_r$ , tipicamente positiva, determina un momento di rollio  $\mathcal{L}_r r$  positivo che tende a far inclinare le ali ulteriormente e a far crescere (gradualmente)  $\beta$ .

(iv) Per un modo di spirale instabile e senza interventi correttivi del pilota, il velivolo prosegue in un'evoluzione in cui gli angoli  $\phi$  e  $\psi$  e la diminuzione di quota divergono lentamente, con una traiettoria a spirale verso il basso.

Anche se in alcuni velivoli il modo di spirale è instabile, la sua costante di tempo è così elevata (radice molto vicina all'origine) che il pilota non ha problemi a percepire e a compensarne la tendenza a divergere. Altro discorso vale per i velivoli non pilotati che normalmente devono avere un modo di spirale stabile (ciò giustifica l'elevato effetto diedro dei droni ad ala fissa).

### Approssimazione di rollio

It has been seen that the rolling mode typically corresponds to almost pure roll. Thus, it is reasonable to neglect all equations except the rolling moment equation, and all perturbations except  $p$ . We thus approximate the rolling mode by a single first-order equation.

Dalla (16.245), tenendo conto delle (16.244b), si approssima

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{RS}} \approx \mathbf{A}_{\text{RS}} \mathbf{x}_{\text{RS}} + \mathbf{B}_{\text{RS}} u_{\text{RS}} \quad (16.259)$$

con

$$\mathbf{x}_{\text{RS}} = \begin{Bmatrix} p \\ \phi \end{Bmatrix} \quad u_{\text{RS}} = \delta_a \quad (16.260)$$

$$\mathbf{A}_{\text{RS}} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_p & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{\text{RS}} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_{\delta_a} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.261)$$

La dinamica di rollio è espressa dalle prime righe nelle matrici  $\mathbf{A}_{\text{RS}}$  e  $\mathbf{B}_{\text{RS}}$ . Pertanto, per lo studio della stabilità si arriva alla equazione del primo ordine

$$\tau \dot{p} + p = 0 \quad (16.262)$$

dove

$$\lambda_{\text{ROLL}} = -\frac{1}{\tau} = \mathcal{L}'_p = \frac{\hat{\mathcal{L}}_p + i_1 \hat{\mathcal{N}}_p}{1 - i_1 i_2} \quad (16.263)$$

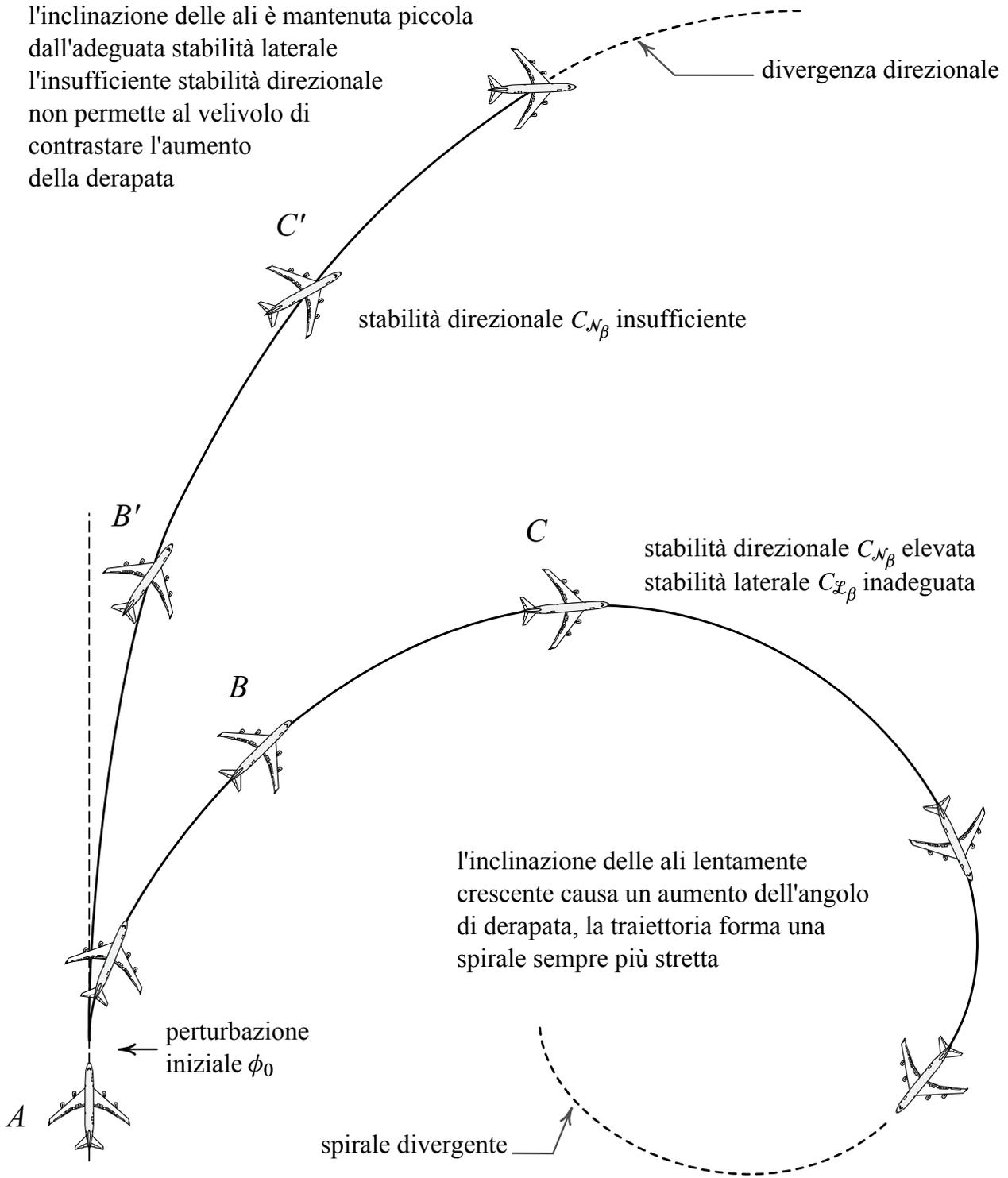
Tipicamente  $i_1$  e  $i_2$  sono molto piccoli,  $i_1 \hat{\mathcal{N}}_p \ll \hat{\mathcal{L}}_p$  e  $i_1 i_2 \ll 1$ , quindi

$$\lambda_{\text{ROLL}} \approx \hat{\mathcal{L}}_p \quad (16.264)$$

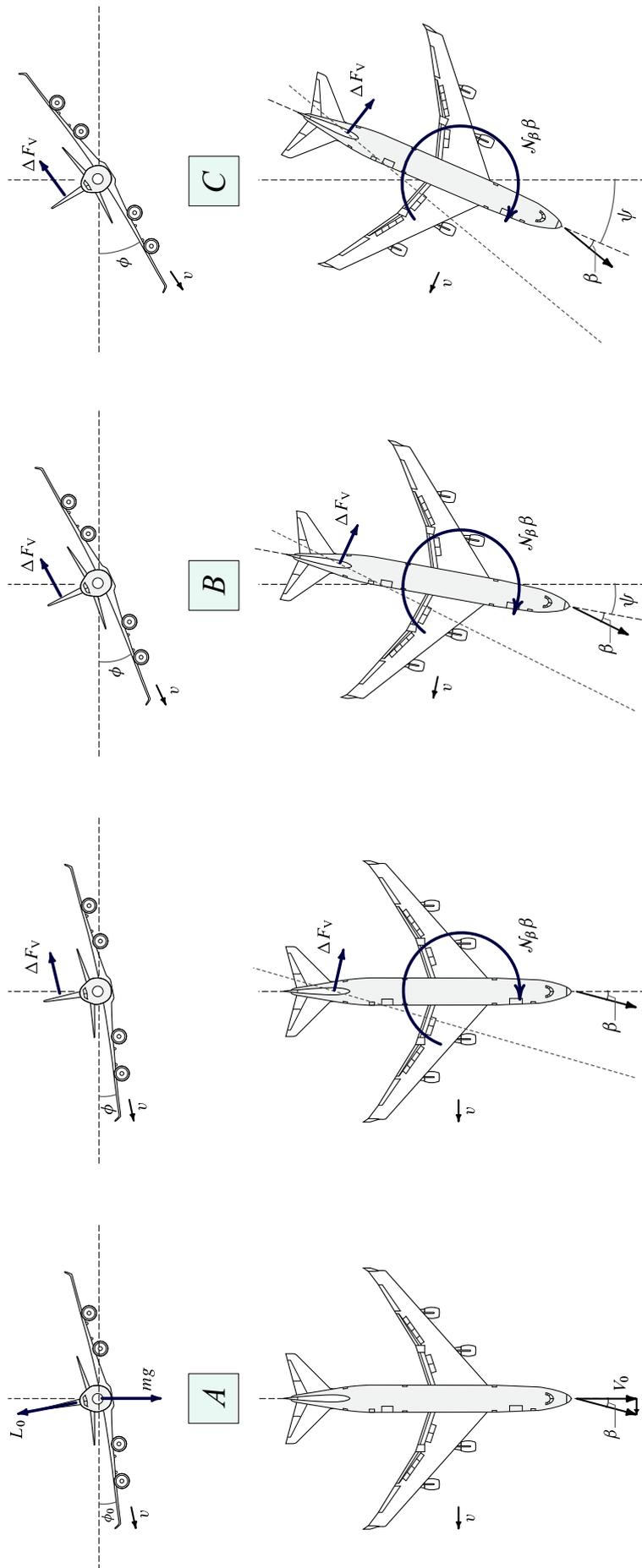
The rolling mode is seen to be dominated by roll damping  $\hat{\mathcal{L}}_p$ , which is almost always large and negative.

### Approssimazione di dutch roll

The Dutch Roll mode is particularly difficult to approximate because it usually involves significant perturbations in all four state variables. The most useful approximations require neglecting either the roll component or simplifying the sideslip component by assuming the vehicle c.g. travels in a straight line. This latter approximation means that  $\psi = -\beta$ , or



**Figura 16.40** Tendenze di un velivolo a entrare in un moto divergente di spirale o divergente direzionale. Nel primo caso una perturbazione iniziale  $\phi_0$  dell'angolo di *bank* determina un'evoluzione da  $A$  a  $B$  a  $C$  fino alla divergenza del modo di spirale — angolo di  $\phi(t)$  sempre più elevato, angolo di derapata  $\beta(t)$  non nullo. Nel secondo caso il moto evolve da  $A$  a  $B'$  a  $C'$  fino alla divergenza direzionale — angolo di *bank*, angolo di derapata divergente.



**Figura 16.41** Tendenza di un velivolo a entrare in un moto divergente di spirale per la prevalenza della stabilità direzionale sulla laterale (si veda la figura 16.40).



## Approximate Dutch Roll Mode

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{r} \\ \Delta \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_\beta \\ \left(\frac{Y_r}{V_N} - 1\right) & \frac{Y_\beta}{V_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{\delta R} \\ \frac{Y_{\delta R}}{V_N} \end{bmatrix} \Delta \delta R$$

- **Characteristic polynomial, natural frequency, and damping ratio**

$$\Delta_{DR}(s) = s^2 - \left(N_r + \frac{Y_\beta}{V_N}\right) s + \left[N_\beta \left(1 - \frac{Y_r}{V_N}\right) + N_r \frac{Y_\beta}{V_N}\right]$$

$$\omega_{nDR} = \sqrt{N_\beta \left(1 - \frac{Y_r}{V_N}\right) + N_r \frac{Y_\beta}{V_N}}$$

$$\zeta_{DR} = -\left(N_r + \frac{Y_\beta}{V_N}\right) / 2\sqrt{N_\beta \left(1 - \frac{Y_r}{V_N}\right) + N_r \frac{Y_\beta}{V_N}}$$

- **With negligible side-force sensitivity to yaw rate,  $Y_r$**

$$\omega_{nDR} = \sqrt{N_\beta + N_r \frac{Y_\beta}{V_N}}$$

$$\zeta_{DR} = -\left(N_r + \frac{Y_\beta}{V_N}\right) / 2\sqrt{N_\beta + N_r \frac{Y_\beta}{V_N}}$$

Dalla (16.245), tenendo conto delle (16.244b), si approssima

$$\dot{\mathbf{x}}_{DR} \approx \mathbf{A}_{DR} \mathbf{x}_{DR} + \mathbf{B}_{DR} u_{DR} \quad (16.265)$$

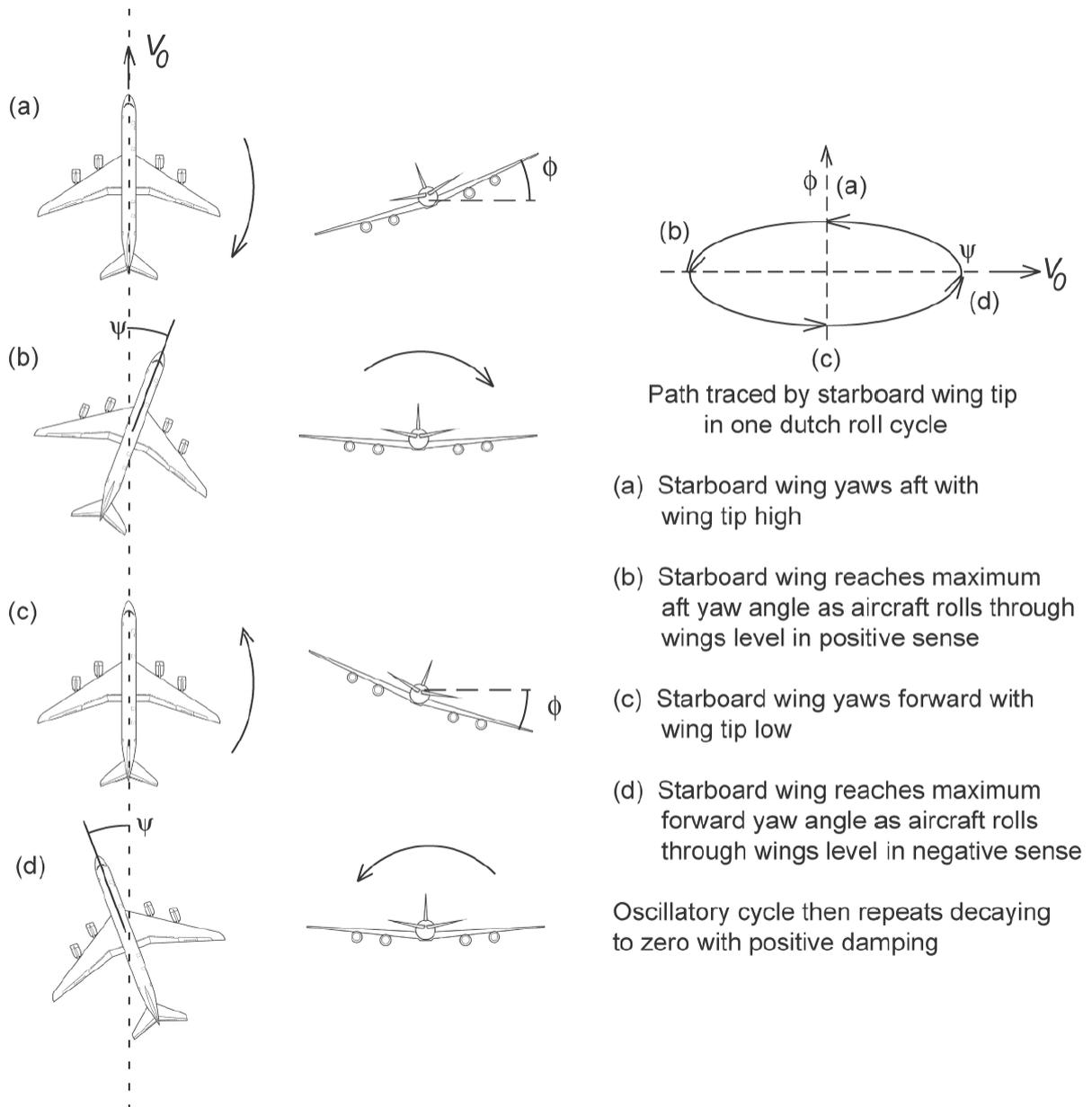
$$\mathbf{x}_{DR} = \begin{Bmatrix} r \\ \beta \end{Bmatrix} \quad u_{DR} = \delta_r \quad (16.266)$$

$$\mathbf{A}_{DR} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}'_r & \mathcal{N}'_\beta \\ \left(\frac{Y'_r}{U_0} - 1\right) & \frac{Y'_\beta}{U_0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{DR} = \begin{bmatrix} \mathcal{N}'_{\delta_r} \\ \frac{Y'_{\delta_r}}{U_0} \end{bmatrix} \quad (16.267)$$

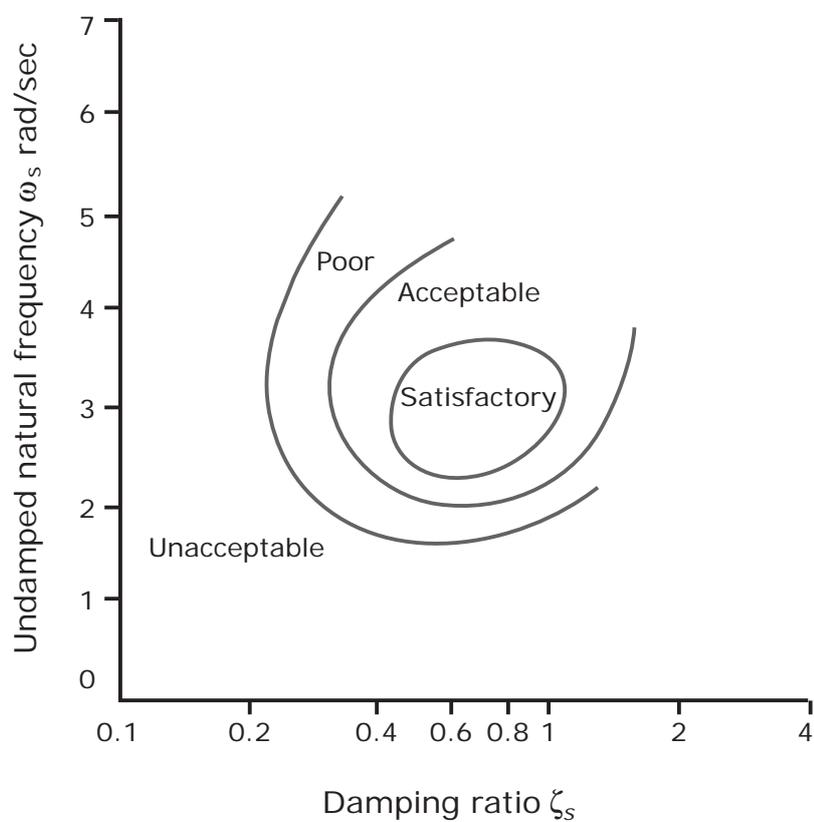
## 16.9 Qualità di volo

Si veda:

[http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/sdqv\\_intro\\_qualita\\_volo.pdf](http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/sdqv_intro_qualita_volo.pdf)



**Figura 16.42** Interpretazione del moto di Dutch-Roll.



**Figura 16.43** Criterio del *Thumb Print* per la valutazione della qualità di volo connessa al corto periodo.

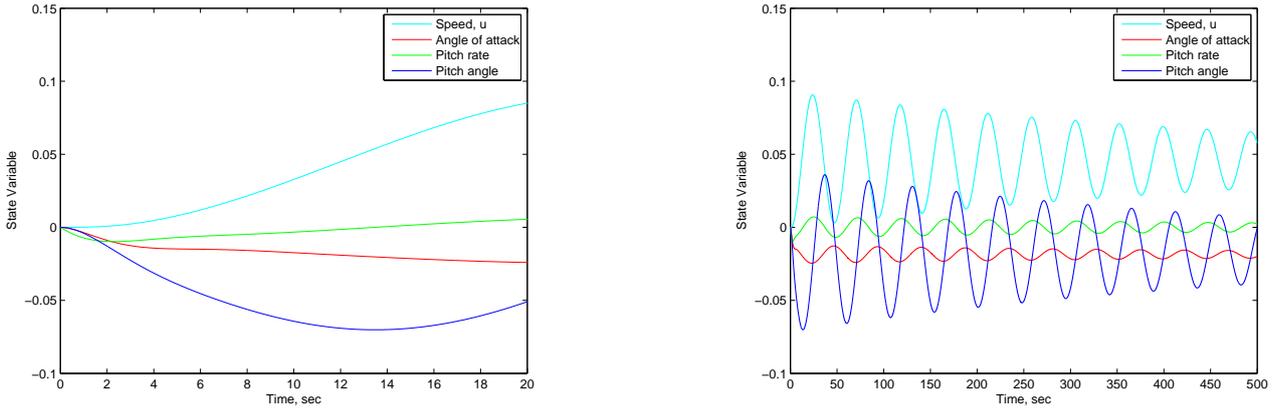


Figure 11: Response of Boeing 747 in powered approach at  $M_\infty = 0.25$  and standard sea level conditions to one-degree step elevator input. Left plot is scaled to illustrate short-period response, and right plot is scaled to illustrate phugoid.

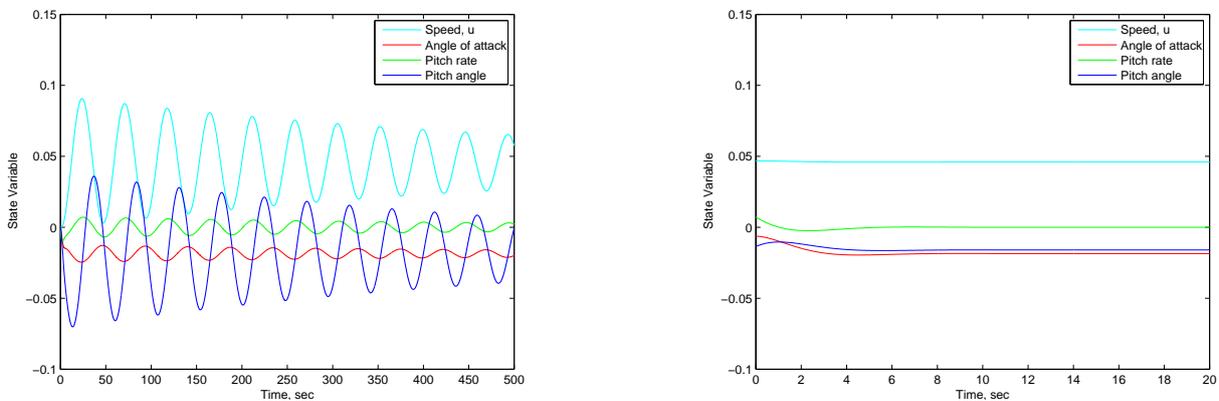


Figure 12: Response of Boeing 747 in powered approach at  $M_\infty = 0.25$  and standard sea level conditions to one-degree step elevator input. Left plot illustrates phugoid resulting from step input; right plot adds perturbation to initial condition to cancel transient phugoid component of step input.

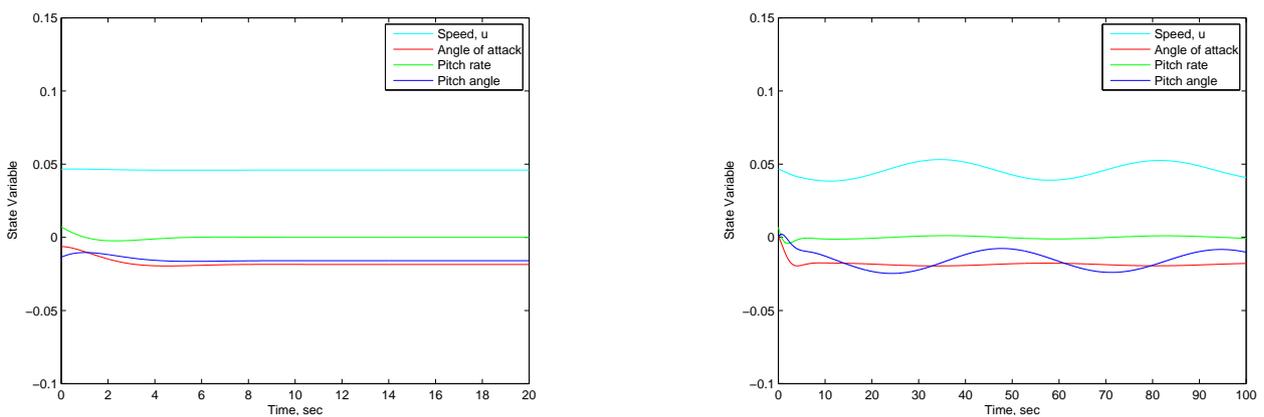


Figure 13: Response of Boeing 747 in powered approach at  $M_\infty = 0.25$  and standard sea level conditions to one-degree step elevator input. Left plot illustrates phugoid resulting from step input with perturbation added to the initial condition to cancel transient phugoid component of step input. Right plot illustrates degree to which the phugoid can be canceled by impulsive control input.

Figura 16.44 Esempi di controllo della dinamica di fugoide di un Boeing 747 in *powered approach* a  $M_0 = 0,25$  (condizioni ‘2’ della tabella 16.11).

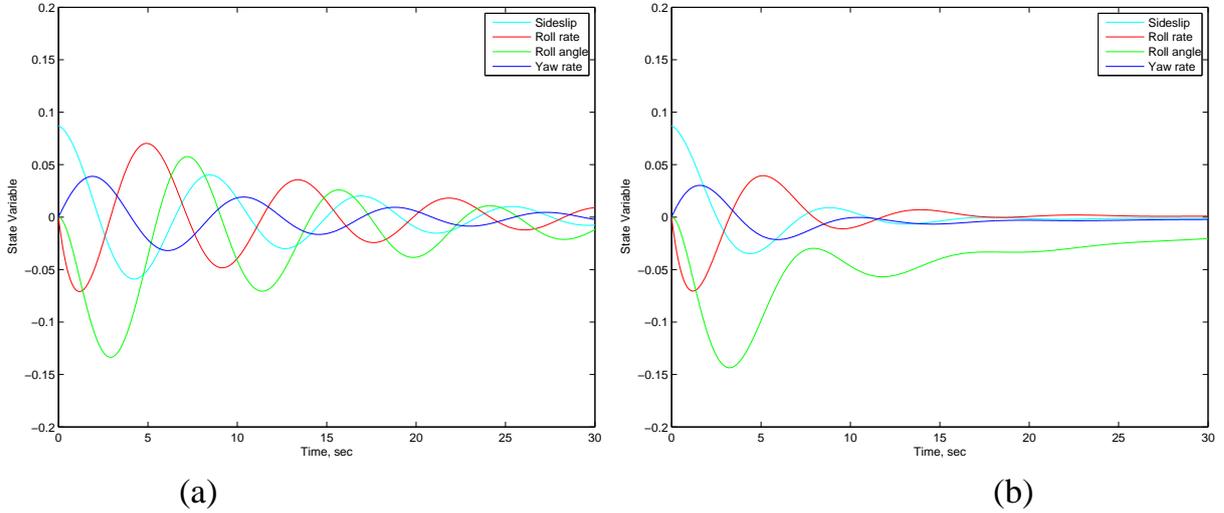


Figure 15: Boeing 747 aircraft in powered approach at standard sea level conditions and  $M_\infty = 0.25$ ; response to 5 degree (0.08727 radian) perturbation in sideslip. (a) Original open-loop response; (b) Closed loop response with Dutch Roll damping ratio changed to  $\zeta = 0.30$  using rudder state-variable feedback.

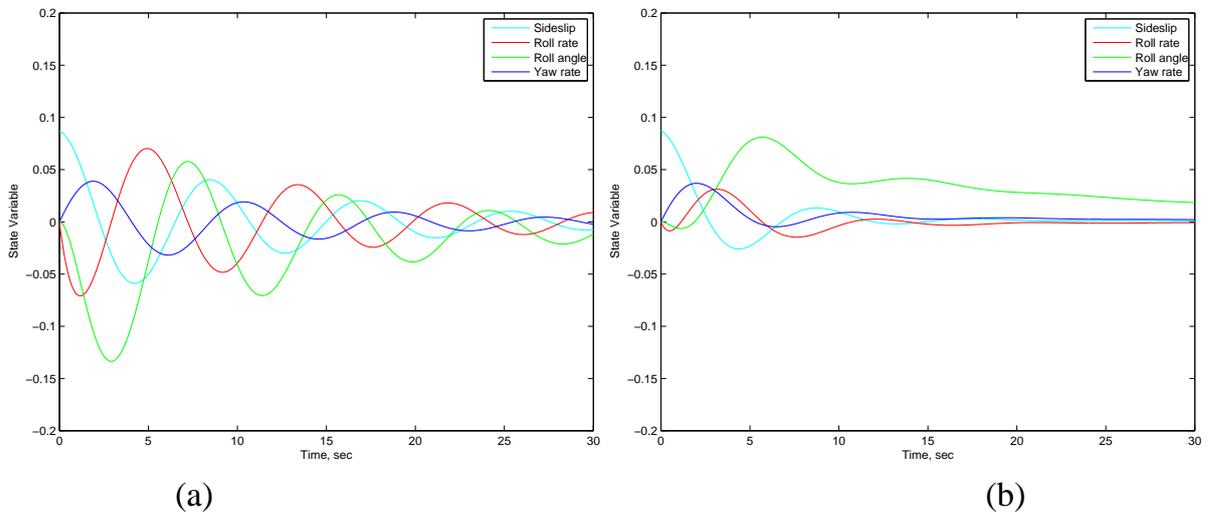


Figure 16: Boeing 747 aircraft in powered approach at standard sea level conditions and  $M_\infty = 0.25$ ; response to 5 degree (0.08727 radian) perturbation in sideslip. (a) Original open-loop response; (b) Closed loop response with Dutch Roll damping ratio changed to  $\zeta = 0.30$  using aileron state-variable feedback.

Figura 16.45 Esempi di controllo classico della dinamica di Dutch-Roll di un Boeing 747 in *powered approach* a  $M_0 = 0,25$  (condizioni '2' della tabella 16.11).

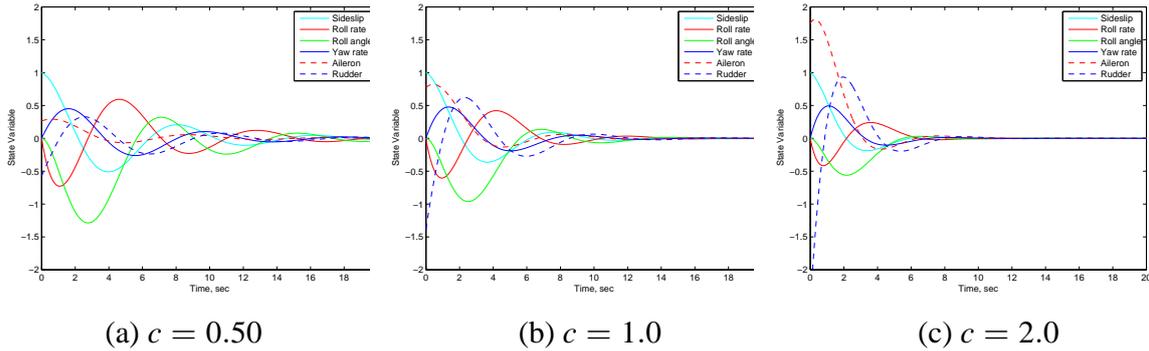


Figure 20: Boeing 747 aircraft in powered approach at standard sea level conditions and  $M_\infty = 0.25$ ; response to unit perturbation in sideslip illustrating effect of varying weighting parameter  $c$ . Optimal closed-loop responses with (a)  $c = 0.50$ ; (b)  $c = 1.0$ ; and (c)  $c = 2.0$ . Control deflections required to stabilize the motions are also shown.

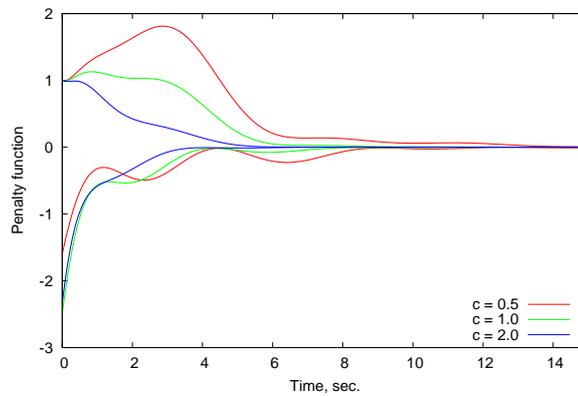


Figure 21: Penalty functions in performance index for optimal control solution; Boeing 747 aircraft in powered approach at standard sea level conditions and  $M_\infty = 0.25$ . Upper curves are  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ , and lower curves are  $-\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\eta}$ , as functions of time for response to unit perturbation in sideslip angle  $\beta$ , so the area between the curves is equal to the performance index  $J_\infty$ .

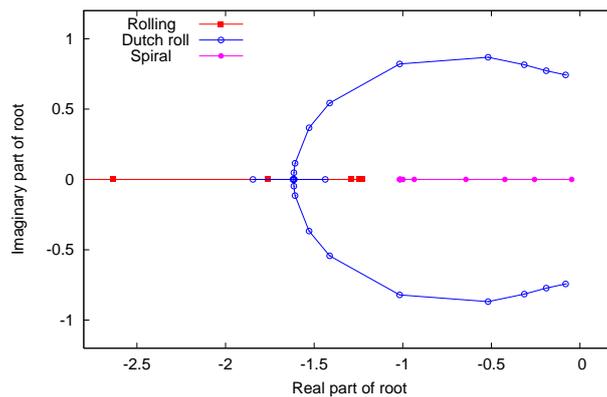


Figure 22: Boeing 747 aircraft in powered approach at standard sea level conditions and  $M_\infty = 0.25$ ; locus of roots of characteristic equation of augmented matrix as control weighting parameter  $c$  is increased. Symbols represent root locations for  $c = 0.001, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 8.0, 9.0, 9.7, 9.76, 9.7727, 9.7728, 10.0$ ; as  $c$  is increased, all roots move to the left (except for one of the Dutch Roll roots after that mode becomes critically damped between  $9.7227 < c < 9.7228$ ).

Figura 16.46 Esempi di controllo lineare quadratico della dinamica di Dutch-Roll di un Boeing 747 in *powered approach* a  $M_0 = 0,25$  (condizioni ‘2’ della tabella 16.11).



# Bibliografia

- [1] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Hodges & Smith, 1853.
- [2] O. Rodrigues, “Des lois géométriques qui régissent les déplacements d’un système solide dans l’espace, et de la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1840.
- [3] E. Salamin, “Application of Quaternions to Computation with Rotations”, Working paper, Stanford AI Lab, 1979.
- [4] A. P. Yefremov, “Quaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories”, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, vol. 1, 2004.
- [5] Schwab A. L., “Quaternions, Finite Rotations and Euler Parameters”, Course notes on Applied Multibody Dynamics, Delft University of Technology, Laboratory for Engineering Mechanics, 2003.  
<http://tam.cornell.edu/~als93/quaternion.pdf>.
- [6] AIAA/ANSI, *Recommended Practice for Atmospheric and Space Flight Vehicle Coordinate Systems*. R-004-1992, 1992.
- [7] G. H. Bryan, *Stability in Aviation: An Introduction to Dynamical Stability as Applied to the Motions of Aeroplanes*. Macmillan and Co., Limited, London, 1911.
- [8] D. J. Diston, *Computational Modelling of the Aircraft and the Environment. Volume 1, Platform Kinematics and Synthetic Environment*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [9] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [10] W. F. Phillips, “Phugoid Approximation for Conventional Airplanes”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, January-February 2000.
- [11] W. F. Phillips, “Improved Closed-Form Approximation for Dutch-Roll”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, May-June 2000.
- [12] R. Stengel, *Flight Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2004.
- [13] M. R. Napolitano, *Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation*. John Wiley, 2012.

- [14] D. K. Schmidt, *Modern Flight Dynamics*. McGraw-Hill, 2010.
- [15] B. Stevens, F. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [16] D. Stinton, *The Anatomy of the Airplane* (2nd edition). American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [17] B. Etkin, *Dynamics of Flight, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [18] M. Calcara, *Elementi di dinamica del velivolo*. Edizioni CUEN, Napoli, 1988.
- [19] L. V. Schmidt, *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. AIAA Education Series, 1998.
- [20] W. J. Duncan, *Control and Stability of Aircraft*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [21] R. Jategaonkar, *Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology*. Progress in Astronautics and Aeronautics Series, 2006.
- [22] C. D. Perkins, R. E. Hage, *Aircraft Performance, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [23] J. R. Wright, J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [24] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*. Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- [25] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*. Springer, Heidelberg, 2009.
- [26] P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. Second Edition. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2007.
- [27] J. D. Mattingly, *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2006.
- [28] K. Hünecke, *Jet Engines. Fundamentals of Theory, Design and Operation*. Motorbooks International, 1997.
- [29] A. Linke-Diesinger, *Systems of Commercial Turbofan Engines*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [30] F. R. Garza, E. A. Morelli, "A Collection of Nonlinear Aircraft Simulations with MATLAB". NASA-TM-2003-212145, January 2003.
- [31] Voce WGS84 su *Wikipedia*:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/World\\_Geodetic\\_System](http://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System)

- [32] Anonimo, *Department of Defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems*. NIMA TR8350.2, Third Edition, Amendment 2. National Imagery and Mapping Agency, US Department of Defense, 2004.
- [33] J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. DARcorporation, 2001.
- [34] H. T. Schlichting, E. A. Truckenbrodt, *Aerodynamics of the Aeroplane*. McGraw Hill Higher Education, 2nd edition, 1979.
- [35] M. M. Munk, “The aerodynamic forces on airship hulls”. NACA-TR-184, 1924.
- [36] A. Silverstein, S. Katzoff, “Aerodynamic characteristics of horizontal tail surfaces”. NACA-TR-688, 1940.
- [37] R. I. Sears, “Wind-tunnel data on the aerodynamic characteristics of airplane control surfaces”. NACA-WR-L-663, 1943.
- [38] E. Garner, “Wind-tunnel investigation of control-surface characteristics XX: plain and balanced flaps on an NACA 0009 rectangular semispan tail surface”. NACA-WR-L-186, 1944.
- [39] J. D. Brewer, M. J. Queijo, “Wind-tunnel investigation of the effect of tab balance on tab and control-surface characteristics”. NACA-TN-1403, 1947.
- [40] S. M. Crandall, H. E. Murray, “Analysis of available data on the effects of tabs on control-surface hinge moments”. NACA-TN-1049, 1946.
- [41] B. W. McCormick, *Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics*. John Wiley & Sons, 1979.
- [42] B. N. Pamadi, *Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, 1998.
- [43] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics. Modelling and Simulation with Matlab and Simulink*. Birkhäuser, Berlin, 2007.
- [44] D. Howe, *Aircraft Loading and Structural Layout*. AIAA Education Series, 2004.
- [45] P. Morelli, *Static Stability and Control of Sailplanes*. Levrotto & Bella, Torino, 1976.
- [46] L. Prandtl, O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. Dover, 1957.
- [47] R. K. Heffley, W. F. Jewell, “Aircraft Handling Qualities Data”. NASA-CR-2144, December 1972.
- [48] H. P. Stough III, J. M. Patton Jr, S. M. SliWa, “Flight Investigation of the Effect of Tail Configuration on Stall, Spin, and Recovery Characteristics of a Low-Wing General Aviation Research Airplane”. NASA-TP-1987-2644, February 1987.

- [49] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 3rd edition, New York, 2001.
- [50] J. J. Bertin, *Aerodynamics for Engineers*. Prentice-Hall, 4th edition, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [51] J. Katz, A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, England, U.K., 2001.
- [52] D. E. Hoak, *et al.*, “The USAF Stability and Control Datcom”. Air Force Wright Aeronautical Laboratories, TR-83-3048, 1960 (Revised 1978).
- [53] R. T. Jones, “A Note on the Stability and Control of Tailless Airplanes”. NACA Report 837, 1941.
- [54] D. P. Coiro, F. Nicolosi, A. De Marco, N. Genito, S. Figliolia, “Design of a Low Cost Easy-to-Fly STOL Ultralight Aircraft in Composite Material”. *Acta Polytechnica*, Vol. 45 no. 4, 2005, pp. 73-80; ISSN 1210-2709.
- [55] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Flight Tests, Performances and Flight Certification of a Twin-Engine Light Aircraft”. *Journal of Aircraft*, Vol 48, No. 1, January-February 2011.
- [56] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Parameter Estimation and Flying Qualities of a Twin-Engine CS23/FAR23 Certified Light Aircraft”. AIAA-2010-7947, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Toronto, 2010.
- [57] B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, Dover Publications, 2005.
- [58] L. Mangiacasale, *Flight Mechanics of a  $\mu$ -Airplane*, Edizioni Libreria CLUP, Milano, 1998.
- [59] G. Mengali, *Elementi di Dinamica del Volo con Matlab*, Edizioni ETS, Pisa, 2001.
- [60] R. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1989.
- [61] Y. Li, M. Nahon, “Modeling and simulations of airship dynamics”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 30, No. 6, November-December 2007.
- [62] Y. Fan, F. H. Lutze, E. M. Cliff, “Time-Optimal Lateral Maneuvers of an Aircraft”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 18, No. 5, September-October 1995.
- [63] J. N. Nielsen, *Missile Aerodynamics*, AIAA, Cambridge, MA, 1988.
- [64] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean’s Vehicles*, Wiley, New York, 1998.
- [65] J. N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- [66] E. L. Duke, R. F. Antoniewicz, K. D. Krambeer, “Derivation and Definition of a Linear Aircraft Model”. Technical Report NASA Reference Publication RP-1207, Research Engineering, NASA Ames Research Center and NASA Dryden Flight Research Facility, 1988.

- [67] G. A. Stagg, *An Unsteady Aerodynamic Model for Use in the High Angle of Attack Regime*. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1998.
- [68] Y. Fan, *Identification of an Unsteady Aerodynamic Model up to High Angle of Attack Regime*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [69] *MATLAB Users' Guide*. The Mathworks, 2003 ed edizioni successive.  
<http://www.mathworks.com/>  
<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.html>
- [70] V. Comincioli, *Analisi numerica: metodi, modelli, applicazioni*. McGraw-Hill, 1990, seconda edizione 1995.
- [71] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, seventh edition, 1993.
- [72] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.
- [73] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [74] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, 1988.
- [75] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.
- [76] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, 1994.
- [77] R. D. Finck, "USAF Stability and Control Datcom". AFWAL-TR-83-3048, October 1960, Revised 1978.
- [78] S. R. Vukelich, J. E. Williams, "The USAF Stability and Control Digital Datcom". AFFDL-TR-79-3032, Volume I, April 1979, Updated by Public Domain Aeronautical Software 1999.
- [79] W. B. Blake, "Prediction of Fighter Aircraft Dynamic Derivatives Using Digital Datcom". AIAA-85-4070, AIAA Applied Aerodynamics Conference, Colorado Springs, Colorado, 1985.
- [80] Autori Vari, Distribuzione ufficiale di Digital Datcom,  
 sito internet:  
<http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/Digital-Datcom-Package.zip>
- [81] B. Galbraith, "Digital Datcom+", Holy Cows, Inc.,  
 sito internet: <http://www.holycows.net/datcom/>