

Agostino De Marco
Domenico P. Coiro

Elementi
di
Dinamica e simulazione di volo

Quaderno 17
La virata

Luglio 2017
ver. 2017.b

Dichiarazione di Copyright

- Questo testo è fornito per uso personale degli studenti. Viene reso disponibile in forma preliminare, a supporto della preparazione dell'esame di *Dinamica e simulazione di volo*.
- Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.
- Non è consentito l'impiego di detto materiale a scopi commerciali se non previo accordo.
- È gradita la segnalazione di errori o refusi.

Copyright 2010–2017 Agostino De Marco e Domenico P. Coiro,
Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Industriale

(Legge italiana sul Copyright 22.04.1941 n. 633)

Evoluzione in un piano orizzontale

Make everything as simple as possible, but not simpler.

– Albert Einstein

Indice

17.1 Generalità	3
17.2 Equazioni alla traslazione	7
17.3 Virata piatta	10
17.4 Virata corretta a quota costante	13
17.5 Integrazione delle equazioni della virata corretta	18
17.6 Punto di manovra	49
17.7 Virata a quota non costante	49

17.1 Generalità

Il moto lungo una traiettoria curvilinea con il quale i velivoli cambiano rotta è denominato *virata*. Manovre di virata possono effettuarsi in generale lungo traiettorie in salita o in discesa, con piccoli o moderati angoli di rampa γ . Qui si considererà il caso particolare di *virata a quota costante*, caratterizzata dalla condizione

$$\gamma(t) \equiv \gamma_0 = 0 \tag{17.1}$$

Un velivolo in virata a quota costante è rappresentato nella figura 17.1 nella pagina seguente. Il moto, che serve a realizzare una variazione graduale dell'angolo di rotta $\delta \equiv \psi_{GT}$, può avvenire in generale ad angolo di inclinazione $\nu(t)$ variabile, a velocità $V(t)$ variabile lungo la traiettoria e ad angoli di derapata $\beta(t)$ e d'attacco $\alpha_B(t)$ variabili. Ricaveremo l'analisi della virata esprimendo le leggi di equilibrio dinamico in assi aerodinamici in termini di queste cinque funzioni del tempo.

La virata a quota costante è infatti un moto a cinque gradi di libertà: le tre variabili di stato dinamiche (V, α_B, β) e le due variabili cinematiche (δ, ν) . Di queste ultime l'angolo di virata δ , essendo $\gamma \equiv 0$, è l'unico angolo di Eulero non nullo a fornire l'orientamento

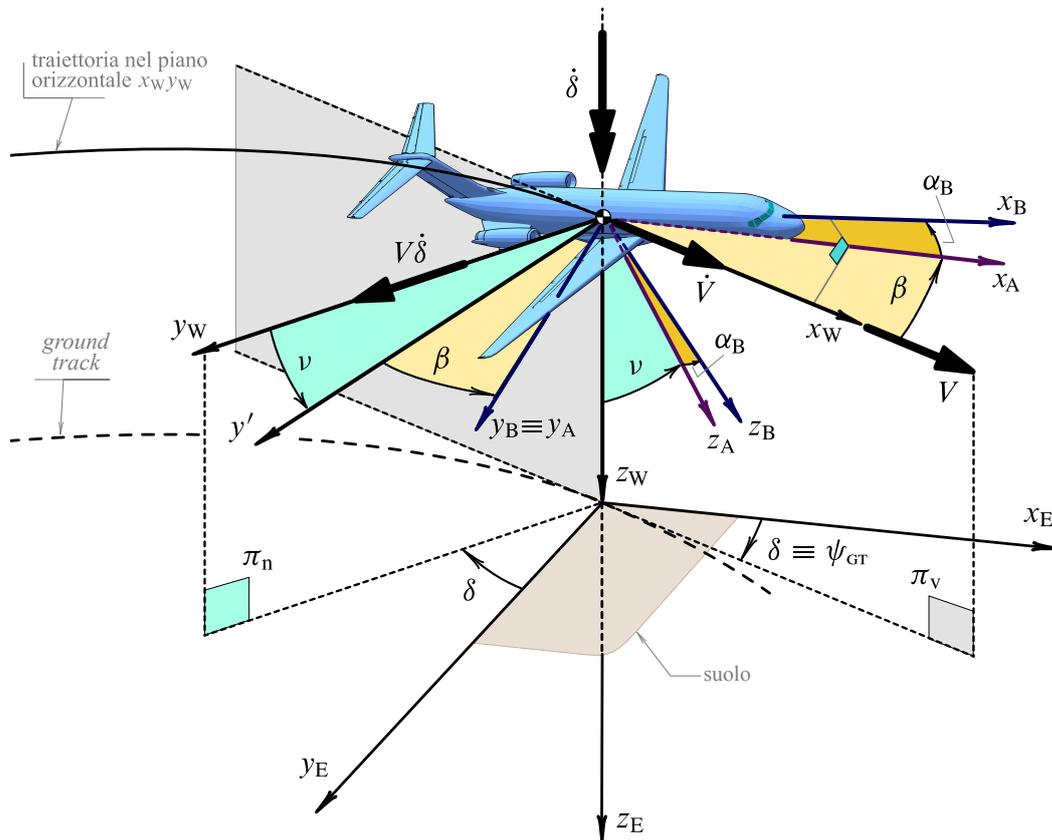


Figura 17.1 Un velivolo in virata a quota costante.

degli assi vento $\mathcal{T}_W = \{x_W, y_W, z_W\}$ (assi traiettoria) rispetto agli assi terra \mathcal{T}_E ; la variabile cinematica ν è invece l'angolo di cui l'asse aerodinamico z_A (appartenente al piano di simmetria del velivolo) si presenta ruotato intorno all'asse orizzontale x_W (cioè intorno al vettore orizzontale V). In pratica, come si ricorderà dalle definizioni dei vari sistemi di riferimento, con gli angoli δ , ν , β ed α_B si realizza la trasformazione dagli assi terra agli assi velivolo passando per gli assi vento e gli assi aerodinamici. Nel caso particolare della virata si ha dunque

$$\mathcal{T}_E \xrightarrow{\delta, \gamma=0} \mathcal{T}_W \xrightarrow{\nu, -\beta} \mathcal{T}_A \xrightarrow{\alpha_B} \mathcal{T}_B \quad (17.2)$$

cioè la sequenza di rotazioni: dell'angolo δ intorno al versore verticale $k_W \equiv k_E$, dell'angolo ν intorno all'asse orizzontale x_W , dell'angolo $-\beta$ intorno all'asse z_A e infine dell'angolo α_B intorno all'asse $y_A \equiv y_B$.

Dalle considerazioni precedenti consegue che le componenti

$$\{\Omega_B\}_A = [\Omega_{B,x_A}, \Omega_{B,y_A}, \Omega_{B,z_A}]^T \quad (17.3)$$

in assi aerodinamici della velocità angolare Ω_B del velivolo saranno esprimibili in termini degli angoli su menzionati e delle loro derivate temporali. Per giungere a tali espressioni va ricordata la definizione di *vettore evoluzione* E coincidente con la velocità angolare istantanea degli assi vento rispetto agli assi terra, per il quale vale la (1.1) che qui riscriviamo

$$\Omega_W \equiv E = -\dot{\delta} \sin \gamma i_W + \dot{\gamma} j_W + \dot{\delta} \cos \gamma k_W \quad (1.1)$$

Per la (17.1) — per la quale $\mathbf{k}_E \equiv \mathbf{k}_W$ — la formula precedente diventa

$$\mathbf{E} = \dot{\delta} \mathbf{k}_E = \dot{\delta} \mathbf{k}_W \quad (17.4)$$

corrispondente alla prima delle trasformazioni (17.2). La (17.4) è il motivo per cui la virata a quota costante è detta ‘evoluzione nel piano orizzontale’: la velocità angolare \mathbf{E} si mantiene verticale e il moto di \mathcal{T}_W è un moto piano, cioè il piano contenente la traiettoria del baricentro del velivolo.

Si ricorda inoltre che vale la (1.6) che fornisce la velocità angolare degli assi aerodinamici

$$\boldsymbol{\Omega}_A = \mathbf{E} + \dot{\nu} \mathbf{i}_W - \dot{\beta} \mathbf{k}_A \quad (1.6)$$

corrispondente alla seconda delle trasformazioni (17.2). Infine la velocità angolare del velivolo è data dalla

$$\boldsymbol{\Omega}_B = \boldsymbol{\Omega}_A + \dot{\alpha} \mathbf{j}_A \quad (1.7)$$

corrispondente alla terza delle trasformazioni (17.2). Le (1.6)-(1.7) definiscono il vettore aggiustamento $\mathbf{A} = \dot{\nu} \mathbf{i}_W - \dot{\beta} \mathbf{k}_A + \dot{\alpha} \mathbf{j}_A$ tale che

$$\boldsymbol{\Omega}_B = \mathbf{E} + \dot{\nu} \mathbf{i}_W - \dot{\beta} \mathbf{k}_A + \dot{\alpha} \mathbf{j}_A = \mathbf{E} + \mathbf{A} \quad (1.9)$$

cioè un vettore che rappresenta la combinazione della seconda e terza delle trasformazioni (17.2), che ‘aggiusta’ la terna \mathcal{T}_W portandola direttamente a sovrapporsi alla \mathcal{T}_B .

A questo punto, a partire dalla (1.9), è possibile esplicitare le (17.3) in termini delle cinque variabili del moto esprimendo le componenti dei vettori \mathbf{E} ed \mathbf{i}_W in assi aerodinamici. A tale scopo si osserva che la trasformazione $\mathcal{T}_W \rightarrow \mathcal{T}_A$ è data dalla combinazione delle due matrici di rotazione

$$[R(1, \nu)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\nu & S_\nu \\ 0 & -S_\nu & C_\nu \end{bmatrix}, \quad [R(3, -\beta)] = \begin{bmatrix} C_\beta & -S_\beta & 0 \\ S_\beta & C_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17.5)$$

I versori degli assi aerodinamici si esprimono in termini dei versori degli assi vento attraverso le relazioni

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{j}_A \\ \mathbf{k}_A \end{Bmatrix} = [R(3, -\beta)][R(1, \nu)] \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_W \\ \mathbf{j}_W \\ \mathbf{k}_W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\beta & -C_\nu S_\beta & -S_\nu S_\beta \\ S_\beta & C_\nu C_\beta & S_\nu C_\beta \\ 0 & -S_\nu & C_\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_W \\ \mathbf{j}_W \\ \mathbf{k}_W \end{Bmatrix} \quad (17.6)$$

che hanno per inverse le seguenti

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_W \\ \mathbf{j}_W \\ \mathbf{k}_W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\beta & S_\beta & 0 \\ -C_\nu S_\beta & C_\nu C_\beta & -S_\nu \\ -S_\nu S_\beta & S_\nu C_\beta & C_\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{j}_A \\ \mathbf{k}_A \end{Bmatrix} \quad (17.7)$$

ottenute semplicemente trasponendo la matrice ortogonale $[T_{AW}] = [R(3, -\beta)][R(1, \nu)]$.

Pertanto, essendo per la (17.4)

$$\{E\}_W = [0, 0, \dot{\delta}]^T \quad (17.8)$$

dalla (17.6) si ottengono le componenti

$$\{E\}_A = \begin{Bmatrix} E_{x_A} \\ E_{y_A} \\ E_{z_A} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\beta & -C_\nu S_\beta & -S_\nu S_\beta \\ S_\beta & C_\nu C_\beta & S_\nu C_\beta \\ 0 & -S_\nu & C_\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -S_\nu S_\beta \\ S_\nu C_\beta \\ C_\nu \end{Bmatrix} \dot{\delta} \quad (17.9)$$

di E in assi aerodinamici. Per le (17.7) il versore i_W si esprime invece come segue:

$$i_W = C_\beta i_A + S_\beta j_A \quad (17.10)$$

In definitiva, le (17.9)-(17.10), ottenute per la virata a quota costante, permettono di riscrivere le (1.9) nella forma

$$\{\Omega_B\}_A = \begin{Bmatrix} -S_\nu S_\beta \\ S_\nu C_\beta \\ C_\nu \end{Bmatrix} \dot{\delta} + \begin{Bmatrix} C_\beta \\ S_\beta \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\nu} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dot{\beta} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\alpha}_B = \begin{Bmatrix} -S_\nu S_\beta \dot{\delta} + C_\beta \dot{\nu} \\ S_\nu C_\beta \dot{\delta} + S_\beta \dot{\nu} + \dot{\alpha}_B \\ C_\nu \dot{\delta} - \dot{\beta} \end{Bmatrix} \quad (17.11)$$

cioè in termini delle componenti di Ω_B in assi aerodinamici. Pertanto nelle equazioni di equilibrio espresse in assi aerodinamici si utilizzeranno le seguenti espressioni

$$\begin{cases} p^A \triangleq \Omega_{B,x_A} = \dot{\nu} \cos \beta - \dot{\psi}_{GT} \sin \nu \sin \beta \\ q^A \triangleq \Omega_{B,y_A} = \dot{\nu} \sin \beta + \dot{\psi}_{GT} \sin \nu \cos \beta + \dot{\alpha} \\ r^A \triangleq \Omega_{B,z_A} = \dot{\psi}_{GT} \cos \nu - \dot{\beta} \end{cases} \quad (17.12)$$

Sostituendo le (17.1) e le (17.12) nelle equazioni del moto ricavate nei capitoli precedenti — ad esempio le (6.60) espresse in assi aerodinamici — ed esplicitando le forze e i momenti esterni che figurano a secondo membro si può ottenere un sistema di cinque equazioni differenziali nelle cinque funzioni incognite V , $\psi_{GT} \equiv \delta$, ν , β ed α_B . Tali equazioni permettono di determinare il moto del velivolo una volta fissate le condizioni iniziali e la legge di manovra che — impegnando l'evoluzione in esame simultaneamente tutti i comandi principali di volo — è definita dalle tre leggi di input: $\delta_a(t)$, $\delta_e(t)$ e $\delta_r(t)$.

Lo studio della virata può essere semplificato osservando che in pratica interessa analizzare le caratteristiche evolutive solamente per assegnate leggi della *sopportazione* $f_{z_A}(t)$ o della *sostentazione* $C_L(t)$ e non per prestabilite leggi di variazione delle escursioni angolari dei comandi di volo. Ciò anche in relazione alle difficoltà inerenti la definizione di leggi di manovra relative a ciascuna delle tre superfici di governo e tali da dar luogo ad un'evoluzione in un piano orizzontale — le leggi di δ_a , δ_e e δ_r che servono a soddisfare la costanza della quota non sono fra di loro indipendenti né univoche.

Per assegnate leggi della sopportazione o della sostentazione, le tre equazioni alla rotazione conducono alla determinazione delle corrispondenti leggi di manovra che il pilota deve impartire per effettuare la virata. Poiché anche questa determinazione è di

scarso interesse pratico, si suole far riferimento solamente alle equazioni alla traslazione assumendo in ogni caso soddisfatti gli equilibri alla rotazione a mezzo di adeguata manovra delle superfici di governo.

17.2 Equazioni alla traslazione

Dovendo considerare solo gli equilibri alla traslazione conviene far riferimento alla figura 17.2 nella pagina successiva. La prima equazione esprimerà l'equilibrio secondo l'asse vento x_W (figura 17.2a e 17.2c), la seconda secondo l'asse ausiliario y' (figura 17.2b e 17.2c) e la terza secondo l'asse aerodinamico z_A (figura 17.2b).

Nell'equilibrio lungo x_W le azioni esterne sono le seguenti:

- (a) la forza d'inerzia tangenziale $-m\dot{V}$ lungo la direzione della velocità (nel senso opposto al vettore V) — figura 17.2a;
- (b) la proiezione $-D \cos \beta = -\bar{q} S C_D \cos \beta$ lungo la direzione della velocità della resistenza aerodinamica (agente nel senso opposto a V) — figura 17.2c;
- (c) la proiezione $Y_A \sin \beta = \bar{q} S C_Y \sin \beta$ lungo la direzione della velocità della forza aerodinamica laterale ($Y_A < 0$ per $\beta > 0$) — figura 17.2c;
- (d) la componente della spinta $T_{x_W} = T_{x_A} \cos \beta = T \cos(\alpha_B + \mu_T) \cos \beta$ lungo la direzione della velocità (nello stesso senso di V) — figura 17.2c.

La loro somma è istantaneamente nulla e si arriva alla prima delle equazioni cercate:

$$-m\dot{V} - D \cos \beta + Y_A \sin \beta + T \cos(\alpha_B + \mu_T) \cos \beta = 0 \quad (17.13)$$

Nell'equilibrio lungo y' le azioni esterne sono le seguenti:

- (a) la proiezione $-mV\dot{\delta} \cos \nu$ della forza d'inerzia centrifuga (opposta al senso dell'accelerazione centripeta $V\dot{\delta}$ e al verso positivo dell'asse y') — figura 17.2a e 17.2b;
- (b) la componente del peso $W_{y'} = mg \sin \nu$ — figura 17.2b;
- (c) la proiezione $D \sin \beta = \bar{q} S C_D \sin \beta$ della resistenza aerodinamica (dello stesso segno di β) — figura 17.2c;
- (d) la proiezione $Y_A \cos \beta = \bar{q} S C_Y \sin \beta$ della forza aerodinamica laterale — figura 17.2c;
- (e) la componente della spinta $T_{y'} = -T_{x_A} \sin \beta = -T \cos(\alpha_B + \mu_T) \sin \beta$ (di segno opposto a β per $T > 0$) — figura 17.2c.

Esse forniscono la seconda equazione di equilibrio dinamico:

$$-mV\dot{\delta} \cos \nu + mg \sin \nu + D \sin \beta + Y_A \cos \beta - T \cos(\alpha_B + \mu_T) \sin \beta = 0 \quad (17.14)$$

Nell'equilibrio lungo z_A le azioni esterne sono le seguenti:

- (a) la proiezione $mV\dot{\delta} \sin \nu$ della forza d'inerzia centrifuga (opposta al senso dell'accelerazione centripeta $V\dot{\delta}$, sempre diretta nel verso delle z_A positive, essendo normalmente in virata i segni di $\dot{\delta}$ e ν sempre concordi) — figura 17.2b;
- (b) la proiezione $W_{z_A} = mg \cos \nu$ del peso — figura 17.2b;
- (c) la portanza cambiata di segno $-L$;
- (d) la componente della spinta $T_{z_A} = -T \sin(\alpha_B + \mu_T)$.

Esse forniscono la terza equazione di equilibrio dinamico:

$$mV\dot{\delta} \sin \nu + mg \cos \nu - L - T \sin(\alpha_B + \mu_T) = 0 \quad (17.15)$$

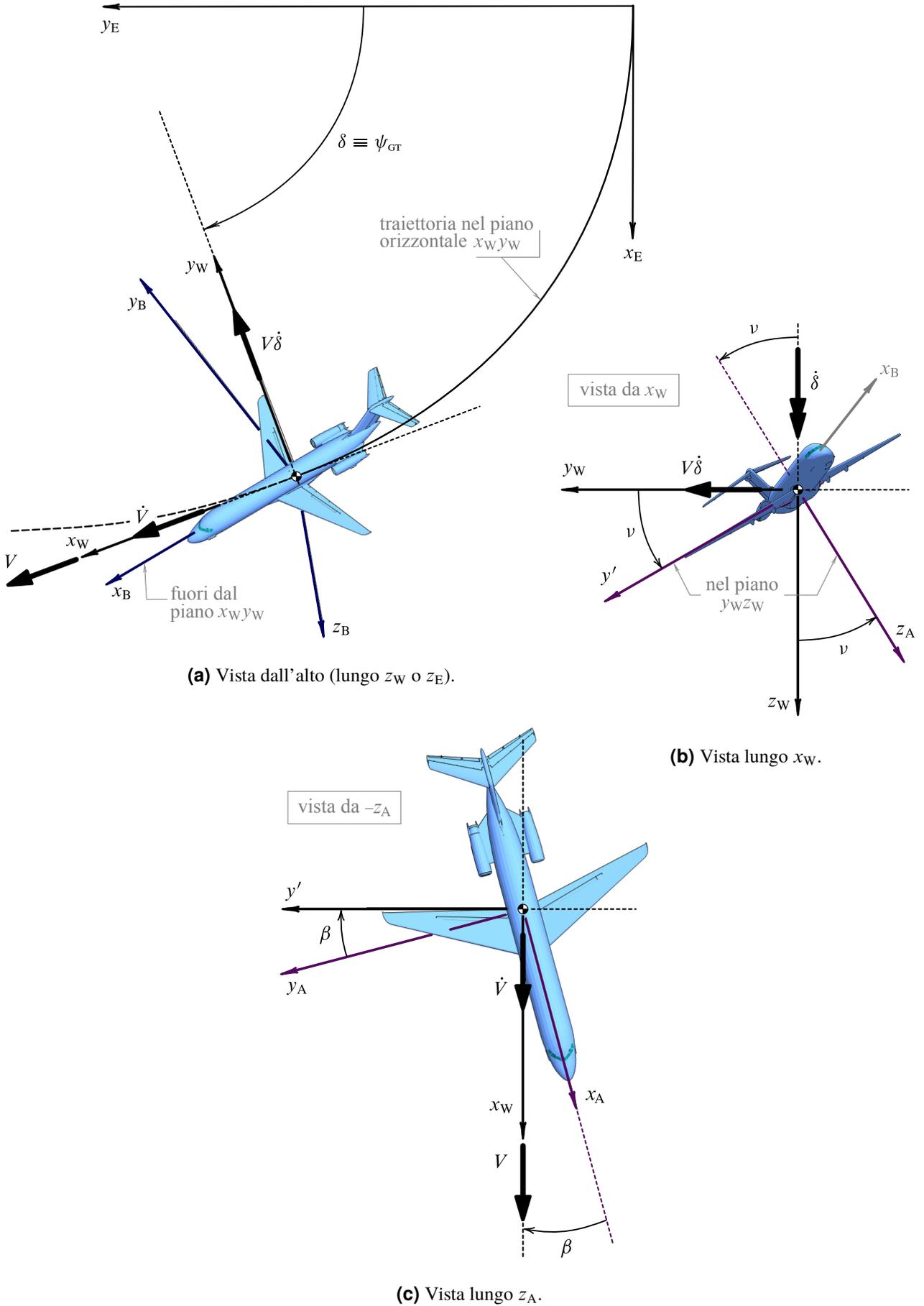


Figura 17.2 Un velivolo in virata a quota costante.

Le equazioni (17.13)-(17.14)-(17.15) formano il sistema

$$\begin{cases} m \dot{V} = -[D - T \cos(\alpha_B + \mu_T)] \cos \beta + Y_A \sin \beta \\ mV \dot{\delta} \cos \nu = mg \sin \nu + [D - T \cos(\alpha_B + \mu_T)] \sin \beta + Y_A \cos \beta \\ mV \dot{\delta} \sin \nu = -mg \cos \nu + L + T \sin(\alpha_B + \mu_T) \end{cases} \quad (17.16)$$

di equazioni del moto di virata a quota costante. La seconda e terza delle equazioni (17.16) possono essere ulteriormente manipolate per arrivare ad una conveniente forma finale. Ad esempio, moltiplicando la seconda per $\sin \nu$, la terza per $\cos \nu$ e sommando membro a membro si ottiene una prima equazione alternativa in cui non compaiono termini contenenti il peso $W = mg$. Inoltre, moltiplicando la seconda per $\sin \nu$, la terza per $\cos \nu$ e dividendo membro a membro si ottiene un primo membro unitario; moltiplicando per il denominatore del secondo membro si ottiene una seconda equazione alternativa. Dopo alcune fattorizzazioni atte a far comparire nelle espressioni i tipici rapporti T/W , W/S e i coefficienti aerodinamici, si arriva pertanto alla forma definitiva

$$\begin{cases} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) \cos \beta - \frac{\bar{q}}{W/S} (C_D \cos \beta - C_Y \sin \beta) \\ \frac{V \dot{\delta}}{g} = -\frac{T}{W} [\cos(\alpha_B + \mu_T) \sin \beta \cos \nu - \sin(\alpha_B + \mu_T) \sin \nu] \\ \quad + \frac{\bar{q}}{W/S} [(C_D \sin \beta + C_Y \cos \beta) \cos \nu + C_L \sin \nu] \\ 1 = \frac{T}{W} [\cos(\alpha_B + \mu_T) \sin \beta \sin \nu + \sin(\alpha_B + \mu_T) \cos \nu] \\ \quad - \frac{\bar{q}}{W/S} [(C_D \sin \beta + C_Y \cos \beta) \sin \nu - C_L \cos \nu] \end{cases} \quad (17.17)$$

I coefficienti aerodinamici che figurano nelle equazioni della virata (17.17) risultano espressi dalle

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = C_{D_0} + k C_L^m \quad (7.53)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha_B + (C_{L_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + C_{L_q} q) \frac{\bar{c}}{2V} + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s \quad (7.56)$$

$$C_Y = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho V^2 S} = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r + (C_{Y_{\dot{\beta}}} \dot{\beta} + C_{Y_p} p + C_{Y_r} r) \frac{b}{2V} \quad (17.18)$$

Nelle (7.53)-(7.56)-(17.18) le grandezze (p, q, r) vanno interpretate in generale come le componenti di Ω_B nel sistema di assi in cui sono espresse le equazioni del moto. Per il moto in esame è opportuno operare le sostituzioni

$$p \longleftarrow p^A = \Omega_{B,x_A}, \quad q \longleftarrow q^A = \Omega_{B,y_A}, \quad r \longleftarrow r^A = \Omega_{B,z_A} \quad (17.19)$$

che in base alle (17.12) forniscono

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha_B + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s + \left[C_{L_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + C_{L_q} \left(\dot{v} \sin \beta + \dot{\psi}_{GT} \sin \nu \cos \beta + \dot{\alpha} \right) \right] \frac{\bar{c}}{2V} \quad (17.20)$$

$$C_Y = C_{Y_\beta} \beta + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r + \left[C_{Y_{\dot{\beta}}} \dot{\beta} + C_{Y_p} \left(\dot{v} \cos \beta - \dot{\psi}_{GT} \sin \nu \sin \beta \right) + C_{Y_r} \left(\dot{\psi}_{GT} \cos \nu - \dot{\beta} \right) \right] \frac{b}{2V} \quad (17.21)$$

Infine, è possibile ricavare per la virata le espressioni particolarizzate dei fattori di carico. Si ricorda che in assi aerodinamici essi restano definiti dalle

$$f_{x_A} = \frac{g_{x_A} - a_{x_A}}{g}, \quad f_{y_A} = \frac{g_{y_A} - a_{y_A}}{g}, \quad f_{z_A} = \frac{g_{z_A} - a_{z_A}}{g} \quad (8.5)$$

Dall'esame della figura 17.2 si deducono le componenti dell'accelerazione di gravità \mathbf{g} date dalle

$$g_{x_A} = -g \sin \nu \sin \beta, \quad g_{y_A} = g \sin \nu \cos \beta, \quad g_{z_A} = g \cos \nu \quad (17.22)$$

e le componenti dell'accelerazione del baricentro \mathbf{a} date dalle

$$a_{x_A} = \dot{V} \cos \beta - V \dot{\psi}_{GT} \cos \nu \sin \beta, \quad a_{y_A} = \dot{V} \sin \beta + V \dot{\psi}_{GT} \cos \nu \cos \beta, \quad a_{z_A} = -V \dot{\psi}_{GT} \sin \nu \quad (17.23)$$

Le (17.22)-(17.23) sostituite nelle (8.5) forniscono

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{x_A} = -\frac{\dot{V} \cos \beta - V \dot{\psi}_{GT} \cos \nu \sin \beta}{g} - \sin \nu \sin \beta \\ f_{y_A} = -\frac{\dot{V} \sin \beta + V \dot{\psi}_{GT} \cos \nu \cos \beta}{g} + \sin \nu \cos \beta \\ f_{z_A} = \frac{V \dot{\psi}_{GT} \sin \nu}{g} + \cos \nu \end{array} \right. \quad (17.24)$$

Le (17.24) sono le espressioni generali dei fattori di carico in assi aerodinamici per la virata a quota costante.

17.3 Virata piatta

L'evoluzione effettuata mantenendo costantemente

$$\nu(t) \equiv \nu_0 = 0 \quad (17.25)$$

è detta *virata piatta* o *a sbandamento nullo*. In conseguenza le equazioni del moto (17.17) si semplificano nelle seguenti:

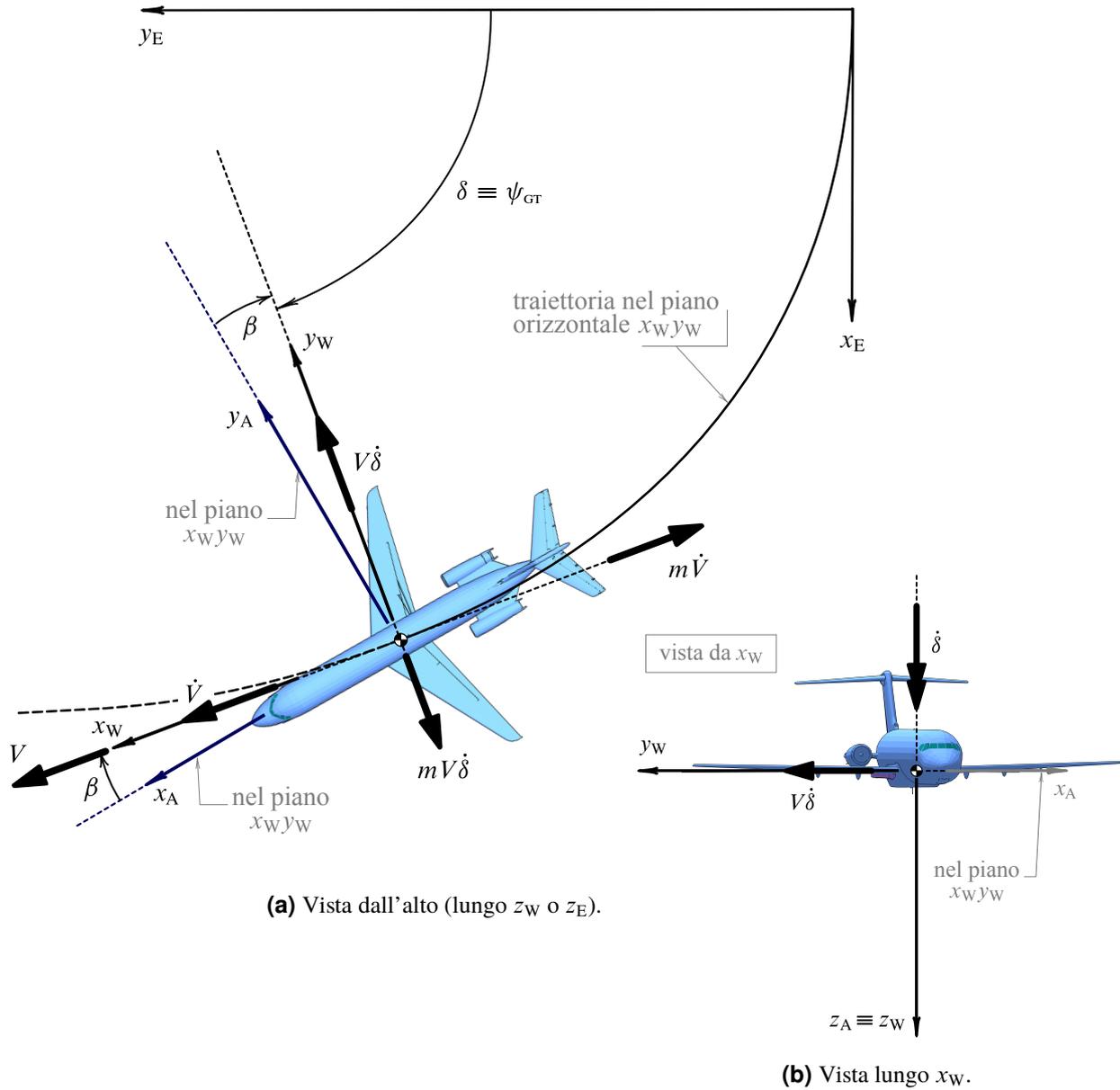


Figura 17.3 Un velivolo in virata piatta.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) \cos \beta - \frac{\bar{q}}{W/S} (C_D \cos \beta - C_Y \sin \beta) \\ \frac{V \dot{\psi}_{GR}}{g} = -\frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) \sin \beta + \frac{\bar{q}}{W/S} (C_D \sin \beta + C_Y \cos \beta) \\ 1 = \frac{T}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\bar{q}}{W/S} C_L \end{array} \right. \quad (17.26)$$

alle quali si perviene con l'ausilio della figura 17.3.

Si osservi che in virata piatta le componenti (17.12) della velocità angolare in assi

aerodinamici diventano

$$\begin{cases} p^A \triangleq \Omega_{B,x_A} = 0 \\ q^A \triangleq \Omega_{B,y_A} = \dot{\alpha} \\ r^A \triangleq \Omega_{B,z_A} = \dot{\psi}_{GT} - \dot{\beta} \end{cases} \quad (17.27)$$

Dalla seconda delle equazioni (17.26) si deduce che — nel caso della virata piatta — la forza centrifuga

$$\frac{W}{g} V \dot{\psi}_{GT} = m V \dot{\delta}$$

che tenderebbe a far derapare il velivolo è equilibrata da una componente della forza aerodinamica laterale Y_A e da un'aliquota della componente della spinta; forze che nascono entrambe dall'esistenza di una deriva β diversa da zero. Nelle figure 17.3a e 17.3b è rappresentato schematicamente un velivolo in virata piatta con un angolo di derapata β positivo per fissare le idee. D'altra parte si deve osservare che, una volta instaurato un regime di moto uniforme di virata piatta a destra ($\dot{\delta} > 0$, $\dot{V} = 0$) e trascurando l'aliquota della spinta, tale regime viene mantenuto equilibrando la forza centrifuga con una $Y_A > 0$, cioè volando ad un angolo $\beta < 0$ (realizzato tipicamente con una deflessione del timone $\delta_r < 0$).

Dalla seconda delle (17.26) si ricava anche la seguente espressione del raggio di curvatura $V/\dot{\delta} = V/\dot{\psi}_{GT}$ della virata piatta

$$R_{\text{Turn}}^{v=0} \triangleq \frac{V}{\dot{\psi}_{GT}} = \frac{2W/S}{\rho g \left[C_D \sin \beta + C_Y \cos \beta - \frac{T/S}{\bar{q}} \cos(\alpha_B + \mu_T) \sin \beta \right]} \quad (17.28)$$

dove il coefficiente di forza aerodinamica laterale C_Y , in virtù della (17.21), è dato dalla

$$C_Y = C_{Y\beta} \beta + C_{Y\delta_a} \delta_a + C_{Y\delta_r} \delta_r + \left[C_{Y\dot{\beta}} \dot{\beta} + C_{Yr} (\dot{\psi}_{GT} - \dot{\beta}) \right] \frac{b}{2V} \quad (17.29)$$

Secondo la (17.28) il raggio di curvatura della virata piatta cresce col carico alare e con la quota. A parità di tali elementi, poiché i termini relativi alla spinta propulsiva ed alla resistenza aerodinamica sono dello stesso ordine di grandezza, il raggio di curvatura risulta minimo quando β è massimo. I valori estremi dell'angolo di derapata raggiungibili in volo sono dell'ordine di $10 \div 15$ deg; ad essi corrispondono raggi minimi molto elevati. Per tale ragione la virata piatta può servire solamente per piccole correzioni di rotta e non può quindi essere considerata una effettiva evoluzione.

Le espressioni dei fattori di carico nella virata piatta si possono ricavare dalle (17.24) tenendo presente la condizione espressa dalla (17.25). Si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{x_A} = -\frac{\dot{V} \cos \beta - V \dot{\psi}_{GT} \sin \beta}{g} \\ f_{y_A} = -\frac{\dot{V} \sin \beta + V \dot{\psi}_{GT} \cos \beta}{g} \\ f_{z_A} = 1 \end{array} \right. \quad (17.30)$$

dalle prime due delle quali si deduce la seguente espressione del raggio della virata piatta in funzione dei fattori di carico:

$$R_{\text{Turn}}^{v=0} = \frac{V^2}{g (f_{x_A} \sin \beta - f_{y_A} \cos \beta)} \quad (17.31)$$

17.4 Virata corretta a quota costante

Se la deriva β viene costantemente annullata durante l'evoluzione, l'espressione (17.21) del coefficiente di forza aerodinamica laterale si particolarizza come segue:

$$C_Y = C_{Y_\beta} \cdot 0 + C_{Y_{\delta_a}} \delta_a + C_{Y_{\delta_r}} \delta_r + \left(C_{Y_p} \dot{v} + C_{Y_r} \dot{\psi}_{GT} \cos v \right) \frac{b}{2V} \quad (17.32)$$

I valori del C_Y calcolabili con la (17.32) risultano praticamente trascurabili rispetto ai valori assunti dai coefficienti delle altre forze in atto. Le equazioni del moto (17.17), sotto la duplice ipotesi:

$$\beta = 0, \quad C_Y = 0 \quad (17.33)$$

diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) - \frac{\bar{q}}{W/S} C_D \\ \frac{V \dot{\delta}}{g} = \left[\frac{T}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\bar{q}}{W/S} C_L \right] \sin v \\ 1 = \left[\frac{T}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\bar{q}}{W/S} C_L \right] \cos v \end{array} \right. \quad (17.34)$$

alle quali si perviene anche direttamente con l'ausilio della figura 17.4 nella pagina successiva.

Le figure 17.4, 17.5 a pagina 15 e 17.6 a pagina 16 mettono anche in evidenza i diversi assetti della fusoliera e dei vari assi di riferimento, in ogni caso per $\beta = 0$, ma in condizioni di volo, rispettivamente, a moderati e piccoli angoli d'attacco. Si osserva che in virata a deriva nulla l'asse aerodinamico x_A coincide con l'asse vento x_W (e $y' \equiv y_A$) e che a moderati o grandi angoli d'attacco α_B l'asse velivolo x_B non giace nel piano della traiettoria per via dell'ultima delle trasformazioni (17.2); al contrario, per piccoli angoli d'attacco la fusoliera è praticamente orizzontale (anche se ruotata di v intorno al suo asse longitudinale) e anche x_B è praticamente coincidente con x_A e x_W .

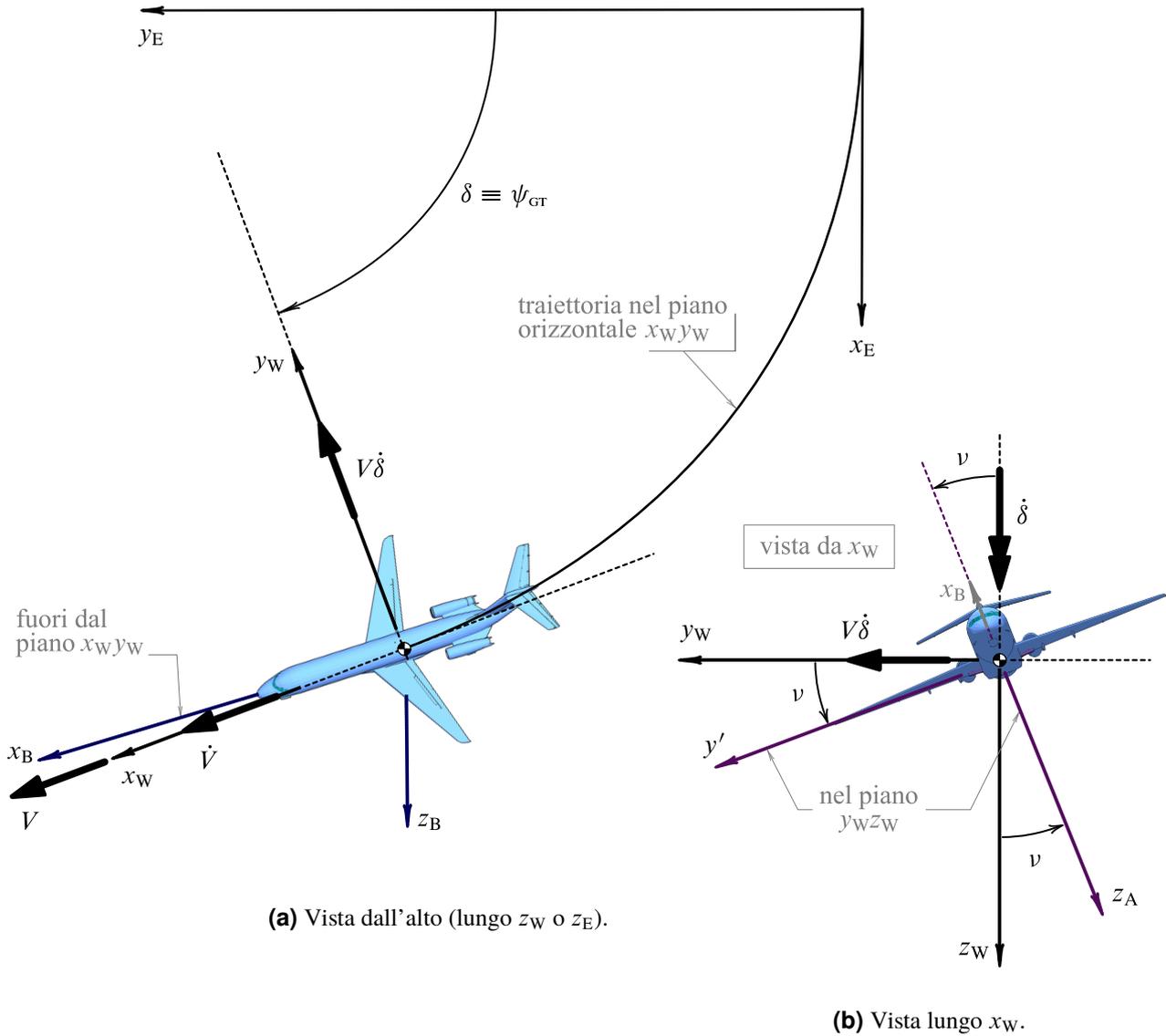


Figura 17.4 Un velivolo in virata corretta.

Si osservi che per $\beta = 0$ le componenti (17.12) della velocità angolare Ω_B in assi aerodinamici diventano

$$\begin{cases} p^A \triangleq \Omega_{B,x_A} = \dot{\nu} \\ q^A \triangleq \Omega_{B,y_A} = \dot{\psi}_{GT} \sin \nu + \dot{\alpha} \\ r^A \triangleq \Omega_{B,z_A} = \dot{\psi}_{GT} \cos \nu \end{cases} \quad (17.35)$$

Dividendo membro a membro la seconda e terza equazione del sistema (17.34) si ottiene

$$\tan \nu = \frac{V \dot{\psi}_{GT}}{g} \quad (17.36)$$

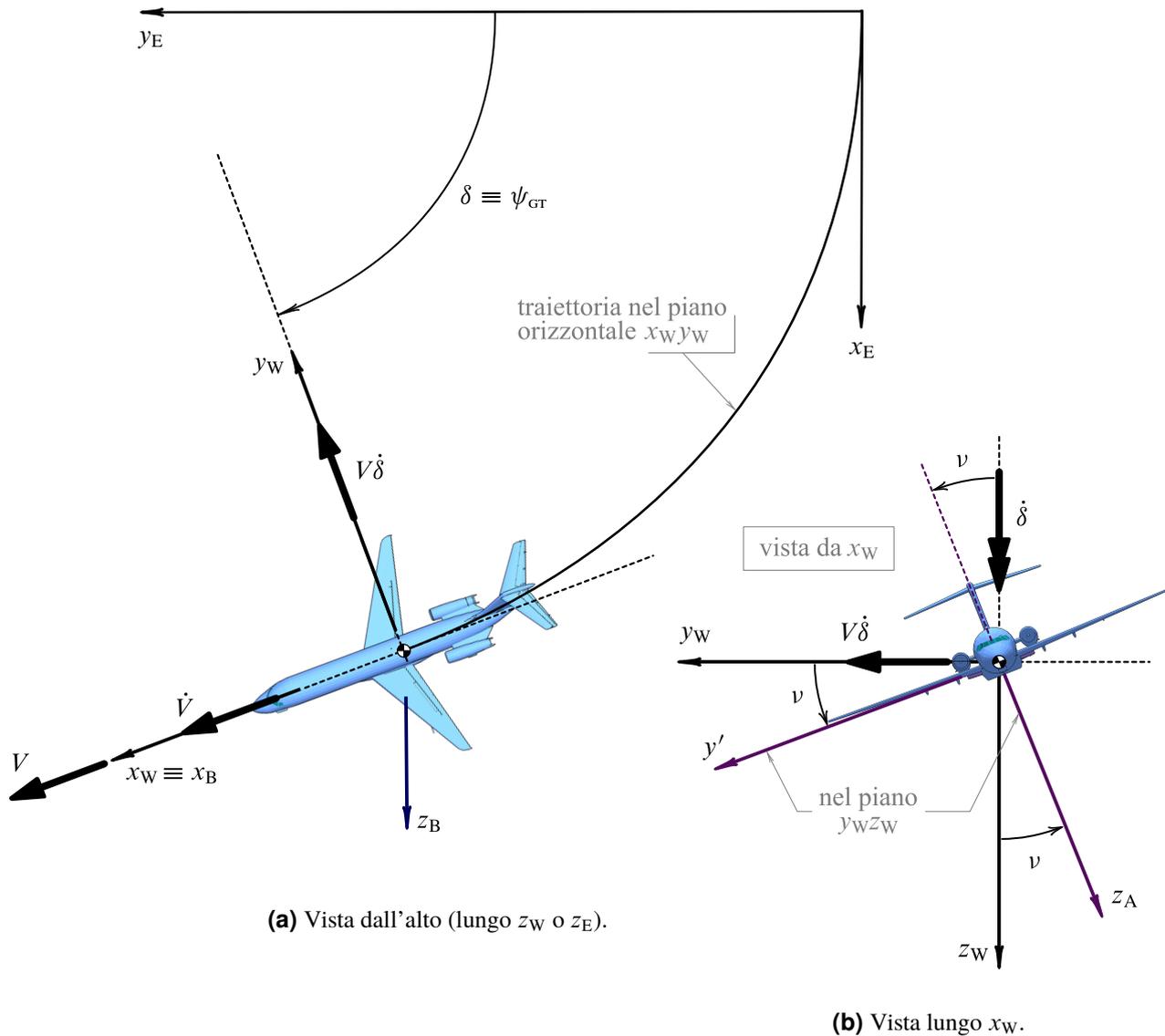


Figura 17.5 Un velivolo in virata corretta (piccolo angolo d'attacco).

da cui discende che la risultante delle azioni di massa

$$\sqrt{W^2 + \left(\frac{W}{g} V \dot{\psi}_{GT}\right)^2}$$

giace nel piano di simmetria del velivolo. Per questa ragione l'evoluzione in esame viene denominata *virata corretta*. Durante tale manovra la *verticale apparente* (la direzione dell'accelerazione percepita dal pilota) giace costantemente nel piano di simmetria del velivolo e quindi la pallina dello sbandometro rimane centrata.

Dalla seconda delle (17.34) si deduce la seguente espressione del raggio di virata in virata corretta:

$$R_{\text{Turn}}^{\beta=0} \triangleq \frac{V}{\dot{\psi}_{GT}} = \frac{2W/S}{\rho g \left[C_L + \frac{T/S}{\bar{q}} \sin(\alpha_B + \mu_T) \right] \sin \nu} \quad (17.37)$$

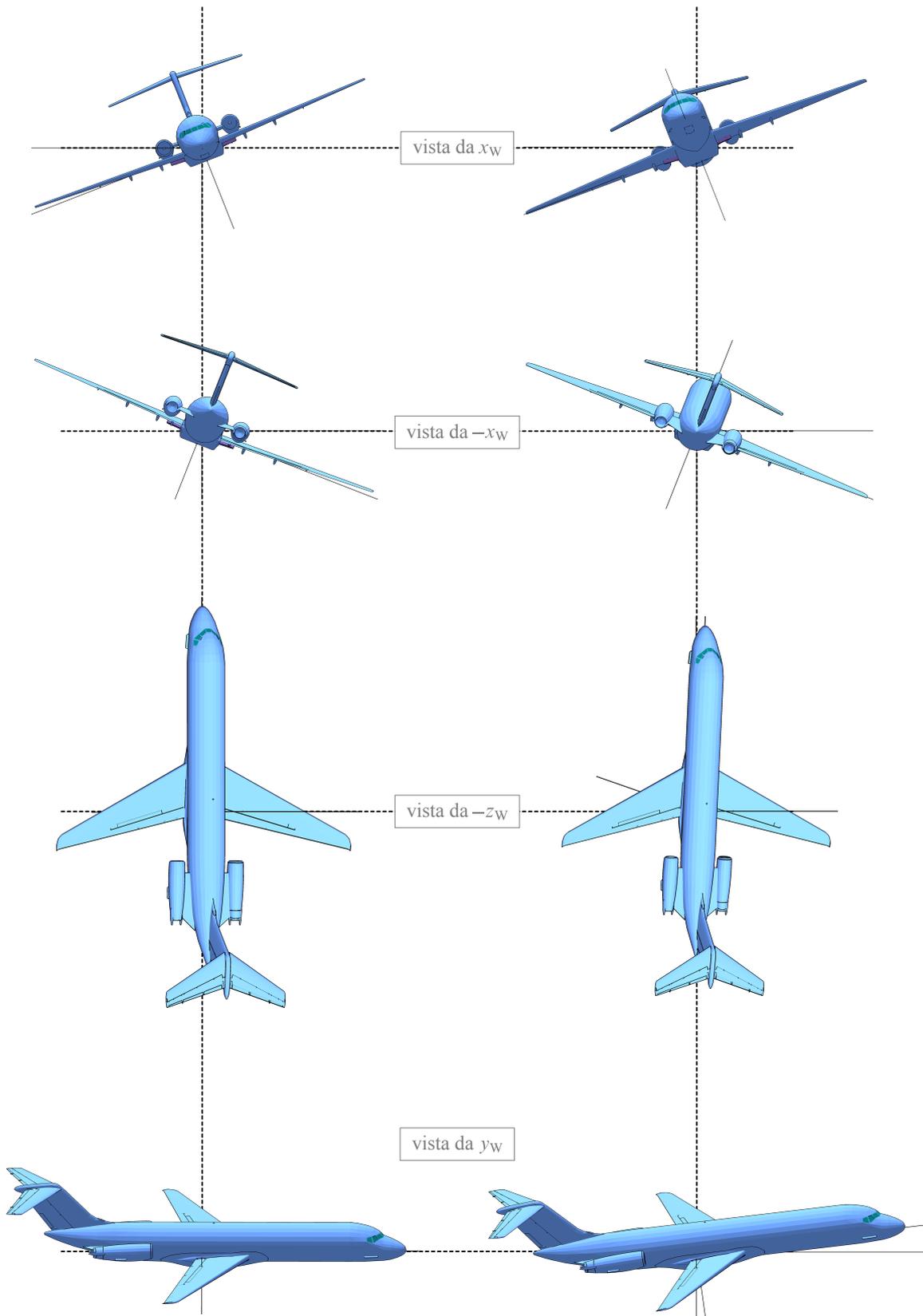


Figura 17.6 Un velivolo in virata corretta, a piccolo (figura 17.5) o moderato angolo d'attacco (figura 17.4).

Il termine relativo alla spinta propulsiva è in genere molto piccolo, di contro il coefficiente di portanza può assumere valori elevati, di gran lunga maggiori di quelli conseguibili col coefficiente di forza laterale in derapata non nulla e ad ali livellate. Dal confronto fra la (17.28) che fornisce $R_{\text{Turn}}^{\nu=0}$ e l'espressione (17.37) di $R_{\text{Turn}}^{\beta=0}$ risulta quindi ben evidente il motivo per cui la virata corretta — e, in genere, la virata con sbandamento — costituisce la manovra più efficiente per l'evoluzione dei velivoli in un piano orizzontale.

Le espressioni dei fattori di carico nella virata corretta si possono ricavare dalle (17.24) ponendo $\beta = 0$. Si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{x_A} = -\frac{\dot{V}}{g} \\ f_{y_A} = -\frac{V \dot{\psi}_{\text{GT}} \cos \nu}{g} + \sin \nu \\ f_{z_A} = \frac{V \dot{\psi}_{\text{GT}} \sin \nu}{g} + \cos \nu \end{array} \right. \quad (17.38)$$

Esse, per la (17.36), possono anche scriversi come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{x_A} = -\frac{\dot{V}}{g} \\ f_{y_A} = 0 \\ f_{z_A} = \frac{1}{\cos \nu} \end{array} \right. \quad (17.39)$$

dall'ultima delle quali si deduce che nella virata corretta il fattore di carico normale f_{z_A} è una funzione univoca dell'angolo di sbandamento ν secondo cui l'evoluzione viene eseguita e risulta quindi del tutto indipendente dalle caratteristiche del velivolo. I valori della sopportazione sono relativamente modesti per angoli di sbandamento inferiori a 60° (cui corrisponde $f_{z_A} = 2$) e crescono rapidamente oltre tale valore ($f_{z_A} = 8$ per $\nu = 83^\circ$).

Un'altra utile espressione del fattore di carico normale

$$f_{z_A} = \sqrt{1 + \left(\frac{V \dot{\psi}_{\text{GT}}}{g} \right)^2} \quad (17.40)$$

viene ottenuta quadrando e sommando la seconda e terza equazione del sistema (17.24) e tenendo in conto le ultime delle (17.38) e (17.39). Da essa si deduce la seguente espressione alternativa del raggio della virata corretta:

$$R_{\text{Turn}}^{\beta=0} = \frac{V^2}{g \sqrt{f_{z_A}^2 - 1}} \quad (17.41)$$

che, a differenza del fattore di carico normale, dipende dalle caratteristiche del velivolo in quanto, a parità di sopportazione f_{z_A} , varia col quadrato della velocità di volo. La (17.41) mostra che un raggio di virata minimo si ottiene massimizzando il fattore di carico normale (cioè l'angolo di sbandamento) e minimizzando la velocità di volo. Quest'ultima

circostanza è legata all'entità del $C_{L,max}$ del velivolo nelle varie configurazioni — cioè alle velocità di stallo — e all'effettiva possibilità di raggiungere in manovra valori dell'angolo d'attacco prossimi all'incidenza critica.

Le (17.34), in virtù delle (17.38), conducono alle seguenti espressioni dei fattori di carico della virata corretta in funzione delle azioni propulsive ed aerodinamiche:

$$\begin{cases} f_{x_A} = -\frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\bar{q}}{W/S} C_D \\ f_{y_A} = 0 \\ f_{z_A} = \frac{T}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\bar{q}}{W/S} C_L \end{cases} \quad (17.42)$$

Infine, la velocità angolare di beccheggio in assi aerodinamici per la *virata corretta stabilizzata* — cioè per V costante lungo la traiettoria — può essere espressa in funzione del fattore di carico normale. A partire dalla seconda delle (17.35)

$$q^A \triangleq \Omega_{B,y_A} = \dot{\psi}_{GT} \sin \nu + \dot{\alpha} \quad (17.43)$$

si può sostituire in primo luogo

$$\dot{\psi}_{GT} \sin \nu = \frac{g}{V} \left(f_{z_A} - \frac{1}{f_{z_A}} \right) \quad (17.44)$$

ricavabile dalle (17.38)-(17.39). In secondo luogo, per $\dot{V} = \dot{T} = \dot{\delta}_s = 0$ e assumendo $\dot{\delta}_e \approx 0$, derivando l'ultima delle (17.42) rispetto al tempo ed esplicitando rispetto ad $\dot{\alpha}_B$ si può porre

$$\dot{\alpha}_B = \frac{\dot{f}_{z_A}}{\frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_{L\alpha}} \quad (17.45)$$

L'espressione a cui si perviene combinando le (17.43), (17.44) e (17.45) è dunque la seguente:

$$q^A = \frac{g}{V} \left(f_{z_A} - \frac{1}{f_{z_A}} \right) + \frac{\dot{f}_{z_A}}{\frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_{L\alpha}} \quad (17.46)$$

valida per virata corretta, a quota costante, per velocità costante lungo la traiettoria. Essa differisce dall'analoga espressione di q valida per il moto di beccheggio ad ali livellate per il valore del termine moltiplicativo di g/V ; termine pari ad $(f_{z_A} - 1/f_{z_A})$ per la virata stabilizzata e ad $(f_{z_A} - \cos \gamma)$ per la richiamata stabilizzata.

17.5 Integrazione delle equazioni della virata corretta

Lo studio della virata corretta per un'assegnata legge di variazione del coefficiente di portanza — si veda la (7.56) — o del fattore di carico normale — si veda la terza delle (17.39) — può esser condotto, come precedentemente illustrato, a partire dal sistema

(17.34) costituito da due equazioni differenziali ed un'equazione algebrica. A questo scopo è necessario eliminare una delle quattro funzioni incognite che vi compaiono: $V(t)$, $\alpha_B(t)$, $\psi_{GT}(t)$ e $\nu(t)$. Il ché può essere agevolmente fatto sostituendo alla seconda delle (17.34) l'espressione

$$\frac{V\dot{\psi}_{GT}}{g} = \sqrt{f_{z_A}^2 - 1} \quad (17.47)$$

deducibile dalla (17.40), e tenendo conto della terza delle (17.39) per cui $f_{z_A} = 1/\cos \nu$.

Si perviene così al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) - \frac{\rho V^2}{2W/S} C_D \\ \frac{V\dot{\psi}_{GT}}{g} = \sqrt{f_{z_A}^2 - 1} \\ f_{z_A} = \frac{T}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L \end{array} \right. \quad (17.48)$$

di equazioni algebrico-differenziali valido in generale per la virata corretta.

Le (17.48) possono essere ulteriormente manipolate introducendo le approssimazioni

$$\sin \alpha_B \simeq \alpha_B \quad \cos \alpha_B \simeq 1$$

accettabili quando si considerano normali situazioni di volo caratterizzate da modesti valori delle incidenze. Pertanto si arriva alla forma seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} (\cos \mu_T - \alpha_B \sin \mu_T) - \frac{\rho V^2}{2W/S} C_D \\ \frac{V\dot{\psi}_{GT}}{g} = \sqrt{f_{z_A}^2 - 1} \\ f_{z_A} = \frac{T}{W} (\alpha_B \cos \mu_T + \sin \mu_T) + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L \end{array} \right. \quad (17.49)$$

Se si considerano le (17.49) è possibile esprimere i coefficienti aerodinamici che vi compaiono attraverso le (7.53) e (17.20). Quest'ultima — in cui la dipendenza lineare da α_B è accettabile dal momento che si considerano condizioni di volo a piccole incidenze — nel caso della virata corretta diventa:

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha_B + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s + \left[C_{L_{\dot{\alpha}_B}} \dot{\alpha}_B + C_{L_q} (\dot{\psi}_{GT} \sin \nu + \dot{\alpha}_B) \right] \frac{\bar{c}}{2V} \quad (17.50)$$

Più in generale, sia per il C_D che per il C_L , si può immaginare di avere a disposizione un database aerodinamico e delle funzioni interpolanti (*lookup tables*) che forniscono i valori dei coefficienti per una determinata combinazione dei parametri: numero di Mach, angolo d'attacco, deflessione delle superfici di governo e velocità angolare di beccheggio.

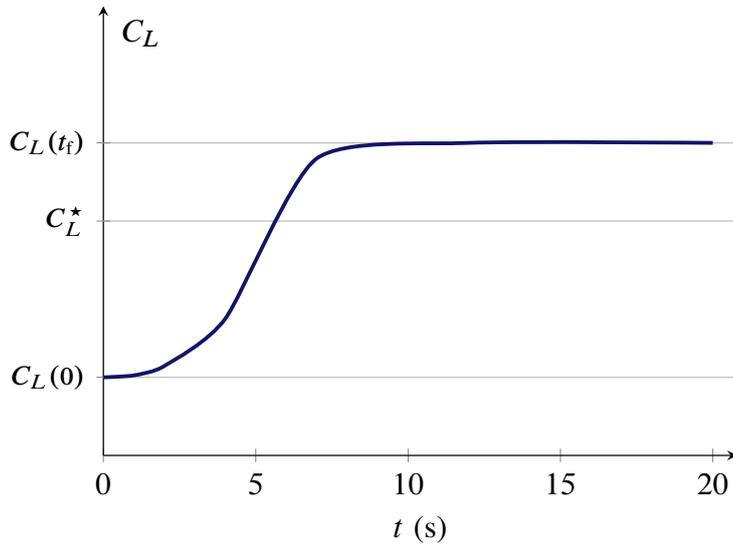


Figura 17.7 Esempio di legge della sustentazione assegnata in un intervallo temporale $[0, t_f]$ con $t_f = 20$ s.

17.5.1 Integrazione delle equazioni della virata corretta per assegnata legge della sustentazione

Per semplicità si consideri il sistema (17.49) e vi si sostituisca al posto del C_D la (7.53) e al posto di α_B l'espressione

$$\alpha_B = \frac{C_L - (C_{L_0} + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s)}{C_{L_\alpha}} \quad (17.51)$$

ottenuta dalla (17.50) trascurando gli effetti di $\dot{\alpha}$ e di q^A . Si ottiene il seguente sistema di equazioni algebrico-differenziali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \left[\cos \mu_T - \frac{C_L - (C_{L_0} + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s)}{C_{L_\alpha}} \sin \mu_T \right] - \frac{\rho V^2}{2W/S} (C_{D_0} + k C_L^m) \\ \frac{V \dot{\psi}_{GT}}{g} = \sqrt{f_{z_A}^2 - 1} \\ f_{z_A} = \frac{T}{W} \left[\frac{C_L - (C_{L_0} + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s)}{C_{L_\alpha}} \cos \mu_T + \sin \mu_T \right] + \frac{\rho V^2}{2W/S} C_L \end{array} \right. \quad (17.52)$$

L'integrazione numerica al passo delle (17.52) può essere effettuata, per una data quota di volo, assegnando una legge temporale $C_L(t)$ e assumendo per T , δ_e e δ_s opportuni valori costanti durante l'evoluzione. Più in generale, per quanto riguarda l'escursione dell'elevatore sarà possibile ricavare un'espressione di calcolo, da applicare passo per passo durante l'integrazione, basata su un'approssimazione dell'equazione di equilibrio alla rotazione di beccheggio. In tal modo si otterrà una legge temporale $\delta_e(t)$ coerente con quella assegnata della sustentazione.

La legge della sustentazione può essere definita ipotizzando un'evoluzione che parte al tempo $t = 0$ da condizioni iniziali di volo traslato in equilibrio ad ali livellate e prosegue con il velivolo che inclina le ali operando una manovra di virata a quota costante. Si

assume che in questa fase il pilota assicuri con opportune correzioni sui comandi latero-direzionali che la virata avvenga a deriva nulla. Come si osserva dalla figura 17.7 a fronte si avrà un progressivo aumento del C_L collegato a quello dello sbandamento. Si assume che la spinta T e la regolazione dello stabilizzatore δ_s siano costanti e pari ai valori $T(0)$ e $\delta_s(0)$ di *trim* alla quota considerata e alla velocità di equilibrio $V(0)$.

Per ricavare valori opportuni delle escursioni angolari δ_e durante l'integrazione al passo — dando cioè forma chiusa alle (17.52) — bisogna comunque far ricorso all'equilibrio alla rotazione intorno all'asse di beccheggio. Vanno qui ricordate le equazioni (7.11) che per velivoli con disposizione simmetrica delle masse ($I_{xy} = I_{yz} = 0$) riscriviamo come segue:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_T \\ \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T \\ \mathcal{N}_A + \mathcal{N}_T \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Queste non sono altro che le (16.1b), cioè il sistema di equazioni

$$\begin{cases} I_{xx} \dot{p} - I_{xz}(\dot{r} + pq) - (I_{yy} - I_{zz})qr = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_T \\ I_{yy} \dot{q} - I_{xz}(r^2 - p^2) - (I_{zz} - I_{xx})rp = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T \\ I_{zz} \dot{r} - I_{xz}(\dot{p} - qr) - (I_{xx} - I_{yy})pq = \mathcal{N}_A + \mathcal{N}_T \end{cases} \quad (16.1b)$$

delle quali interessa qui considerare la seconda, ovvero l'equazione di equilibrio dinamico alla rotazione intorno a $y_A \equiv y_B$, dopo aver operato le sostituzioni (17.19). Trascurando l'accelerazione angolare di beccheggio, $\dot{q}^A \approx 0$, ipotizzando piccole velocità angolari di sbandamento $\dot{\nu}$, tali da poter ammettere che $p^A \approx 0$, e assumendo $\mathcal{M}_T \ll \mathcal{M}_A$ la seconda delle (16.1b) fornisce le seguenti due uguaglianze equivalenti:

$$-I_{xz} \dot{\psi}_{GT}^2 \cos^2 \nu = \mathcal{M}_A \quad \text{oppure} \quad -I_{xz} \dot{\psi}_{GT}^2 = f_{zA}^2 \mathcal{M}_A \quad (17.53)$$

dove si è tenuto conto della terza delle (17.35) per cui $r^A = \dot{\psi}_{GT} \cos \nu$ e della terza delle (17.39) per cui $\cos \nu = 1/f_{zA}$.

Nelle (17.53) si può esprimere il momento baricentrico di beccheggio dell'azione aerodinamica come

$$\mathcal{M}_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_M \quad (7.59a)$$

con

$$C_M = C_{M_0} + C_{M_\alpha} \alpha_B + \left(C_{M_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha}_B + C_{M_q} q^A \right) \frac{\bar{c}}{2V} + C_{M_{\delta_e}} \delta_e + C_{M_{\delta_s}} \delta_s \quad (7.59b)$$

La (7.59b) assume un'espressione conveniente se vi si sostituisce la (17.51) e, data l'ipotesi di piccole incidenze di volo, si assume anche che $\dot{\alpha}_B \approx 0$. In tal caso si ha per la (17.46) che

$$q^A \approx \frac{g}{V} \left(f_{zA} - \frac{1}{f_{zA}} \right) \quad (17.54)$$

e la (7.59b) diventa:

$$C_{\mathcal{M}} = C_{\mathcal{M}_0} + C_{\mathcal{M}_\alpha} \frac{C_L - (C_{L_0} + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s)}{C_{L_\alpha}} + C_{\mathcal{M}_{\delta_e}} \delta_e + C_{\mathcal{M}_{\delta_s}} \delta_s + C_{\mathcal{M}_q} \frac{g}{V} \left(f_{z_A} - \frac{1}{f_{z_A}} \right) \frac{\bar{c}}{2V} \quad (17.55)$$

La (17.55), in cui si è evidenziata la grandezza δ_e da esplicitare, può sostituirsi nella seconda delle (17.53) per ottenere dopo alcuni passaggi:

$$\begin{aligned} -I_{xz} \left(\frac{g}{V} \right)^2 (f_{z_A}^2 - 1) - \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} f_{z_A}^2 \left[C_{\mathcal{M}_0} + C_{\mathcal{M}_\alpha} \frac{C_L - C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} + \left(C_{\mathcal{M}_{\delta_s}} - C_{\mathcal{M}_\alpha} \frac{C_{L_{\delta_s}}}{C_{L_\alpha}} \right) \delta_s \right. \\ \left. + C_{\mathcal{M}_q} \frac{g}{V} \left(f_{z_A} - \frac{1}{f_{z_A}} \right) \frac{\bar{c}}{2V} \right] = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} \left(C_{\mathcal{M}_{\delta_e}} - C_{\mathcal{M}_\alpha} \frac{C_{L_{\delta_e}}}{C_{L_\alpha}} \right) \delta_e \end{aligned}$$

avendo tenuto conto della seconda delle (17.52) ed eliminato la $\dot{\psi}_{\text{GT}}^2$ a primo membro. In definitiva l'espressione precedente fornisce la formula

$$\begin{aligned} \delta_e = \frac{1}{C_{\mathcal{M}_\alpha} \frac{C_{L_{\delta_e}}}{C_{L_\alpha}} - C_{\mathcal{M}_{\delta_e}}} \left[\frac{2I_{xz} g^2}{\rho S \bar{c}} \left(1 - \frac{1}{f_{z_A}^2} \right) \frac{1}{V^4} + C_{\mathcal{M}_0} + C_{\mathcal{M}_\alpha} \frac{C_L - C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} \right. \\ \left. + \left(C_{\mathcal{M}_{\delta_s}} - C_{\mathcal{M}_\alpha} \frac{C_{L_{\delta_s}}}{C_{L_\alpha}} \right) \delta_s + \frac{1}{2} C_{\mathcal{M}_q} g \bar{c} \left(f_{z_A} - \frac{1}{f_{z_A}} \right) \frac{1}{V^2} \right] \quad (17.56) \end{aligned}$$

tramite la quale si conosce al generico istante dell'evoluzione di virata corretta l'escursione angolare del comando longitudinale corrispondente alla legge di sustentazione assegnata e in grado di garantire (in ipotesi di piccole incidenze, piccole velocità angolari e accelerazioni angolari trascurabili) l'equilibrio istantaneo al beccheggio.

La (17.56) accoppiata con le (17.52) permette di porre il seguente problema di valori iniziali:

$$\begin{cases} \dot{V} = \Phi_1(V) \\ \dot{\psi}_{\text{GT}} = \Phi_2(V) \end{cases} \quad \text{con } V(0) = V_0, \psi_{\text{GT}}(0) = 0 \quad (17.57)$$

nelle funzioni incognite $V(t)$ e $\psi_{\text{GT}}(t)$, con $C_L(t)$ nota per $0 \leq t \leq t_f$. I secondi membri Φ_1 e Φ_2 delle equazioni precedenti sono evidentemente funzioni della velocità di volo ottenute dalla prima equazione del sistema (17.52) e combinandone la seconda e terza equazione con la (17.56). Esse restano definite come funzioni della sola V se si assegnano i valori di T e δ_s come detto in precedenza. La risoluzione del problema fornisce anche i valori delle funzioni $f_{z_A}(t)$ e $\delta_e(t)$ in un numero discreto di istanti nell'intervallo $[0, t_f]$.

Per semplicità il problema (17.57) può risolversi anche fissando ingegneristicamente un valore

$$\delta_e = \delta_e^* \quad (17.58)$$

ottenuto valutando la (17.56) in corrispondenza di un prescelto valore intermedio del coefficiente di portanza C_L^* compreso fra $C_L(0)$ e $C_L(t_f)$ — si veda la figura 17.7 — e per un valore (plausibile) dello sbandamento ν^* associato al C_L^* . Infatti, avendosi per la terza delle (17.39)

$$f_{z_A}^* = \frac{1}{\cos \nu^*} \quad (17.59)$$

Tabella 17.1 Caratteristiche di massa del velivolo assegnato nell'esercizio 17.1.

massa, $m = W/g$	1247 kg
momento d'inerzia, I_{xx}	1421 kg m ²
momento d'inerzia, I_{yy}	4067 kg m ²
momento d'inerzia, I_{zz}	4786 kg m ²
prodotto d'inerzia, I_{xz}	-400 kg m ²

Tabella 17.2 Caratteristiche geometriche del velivolo assegnato nell'esercizio 17.1.

superficie alare, S	17,1 m ²
apertura alare, b	10,18 m
corda media aerodinamica, \bar{c}	1,74 m
distanza adimensionale del baricentro G dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica ^a , $\hat{X}_G = X_G/\bar{c}$	0,290
distanza adimensionale del punto neutro N dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica, $\hat{X}_N = X_N/\bar{c}$	0,450

^a Il senso positivo delle X è verso il bordo d'uscita.

e dalla terza delle (17.52), trascurando gli effetti della spinta

$$f_{z_A}^* W \approx C_L^* \frac{1}{2} \rho V^{*2} S \quad (17.60)$$

si potrà valutare il secondo membro della (17.56) per l'assegnata terna di valori: (C_L^* , $f_{z_A}^*$, V^*). L'errore che si commette con l'approssimazione (17.56)-(17.58)-(17.60) è in genere modesto.

Esercizio 17.1: Virata corretta per assegnata legge $C_L(t)$



Si consideri il velivolo Ryan Navion (figura 17.8) le cui caratteristiche sono riportate nelle tabelle seguenti: la tabella 17.1 definisce i dati di massa e inerziali, la tabella 17.2 fornisce i dati geometrici, la tabella 17.3 definisce il modello aerodinamico, la 17.4 riporta i dati propulsivi.

In via preliminare, secondo il procedimento mostrato nell'esempio 7.2, si trovi una condizione di volo traslato in equilibrio ad ali livellate. Nell'istante $t = 0$ si assegnino le seguenti condizioni iniziali:

- o volo a una quota $h(0) \equiv -z_{E,G}(0) = 1524$ m (*above mean sea level*),
- o a una velocità $V(0) = 59,8$ m/s = 215 km/h = 116 kn,
- o moto traslatorio, $q(0) = 0$,
- o con traiettoria orizzontale, $\gamma(0) = 0$ deg.

Si assuma inoltre una costante $g = 9,81$ m/s² ed un modello di atmosfera standard (ISA), per il quale $\rho(0) = \rho(h(0)) = 1,056$ kg/m³.

Tabella 17.3 Caratteristiche aerodinamiche del velivolo assegnato nell'esercizio 17.1. Si vedano i modelli costitutivi (7.57), (7.58) e (7.59).

coefficiente C_{D_0}	0,051
fattore k	0,055
esponente m	2
gradiente $C_{L\alpha}$	4,54 rad ⁻¹
gradiente di controllo $C_{L\delta_e}$	0,355 rad ⁻¹
gradiente di controllo $C_{L\delta_s}$	0,500 rad ⁻¹
coefficiente instazionario $C_{L\dot{\alpha}}$	2 rad ⁻¹
coefficiente di smorzamento C_{Lq}	4 rad ⁻¹
coefficiente C_{M_0}	-0,035
gradiente $C_{M\alpha}$	-0,726 rad ⁻¹
gradiente di controllo $C_{M\delta_e}$	-1,400 rad ⁻¹
gradiente di controllo $C_{M\delta_s}$	-2 rad ⁻¹
coefficiente instazionario $C_{M\dot{\alpha}}$	-5 rad ⁻¹
coefficiente di smorzamento C_{Mq}	-9,50 rad ⁻¹

Tabella 17.4 Caratteristiche propulsive del velivolo assegnato nell'esercizio 17.1.

spinta massima, T_{\max}	3277,5 N
calettamento della spinta, μ_T	0 deg
contributo al coefficiente di momento di beccheggio, $C_{M,T}$	0

Successivamente si assegni una legge temporale della sustentazione in un intervallo di durata $t_f = 30$ s con $C_L(0)$ pari al coefficiente di portanza in volo equilibrato ad ali livellate.

Seguendo il procedimento illustrato in questo capitolo si trovi numericamente la soluzione del problema (17.57) riportando in grafico, insieme a quella del C_L , le storie temporali delle seguenti grandezze: velocità di volo, angolo di virata e di sbandamento, fattore di carico, angolo d'attacco, deflessione dell'equilibratore e raggio di virata.

Suggerimenti per lo svolgimento

Accoppiando le (17.52) — scritte esplicitando a primo membro le derivate temporali — alla (17.56) e imponendo un insieme di condizioni iniziali per le funzioni incognite si pone un problema algebrico-differenziale (DAEs, *Differential-Algebraic Equations*) di valori iniziali che assume la forma seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\psi}_{\text{GT}} \\ \dot{f}_{z_A} \\ \dot{\delta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(V, \dots, f_{z_A}, \delta_e, C_L(t)) \\ \Phi_2(V, \dots, f_{z_A}, \delta_e, C_L(t)) \\ \Phi_3(V, \dots, f_{z_A}, \delta_e, C_L(t)) \\ \Phi_4(V, \dots, f_{z_A}, \delta_e, C_L(t)) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (17.52)_1 \\ \leftarrow (17.52)_2 \\ \leftarrow (17.52)_3 \\ \leftarrow (17.56) \end{matrix} \begin{pmatrix} V(0) = V_{\text{eq}} \\ \psi_{\text{GT}}(0) = 0 \\ f_{z_A}(0) = 1 \\ \delta_e(0) = \delta_{e,\text{eq}} \end{pmatrix} \quad (17.61)$$

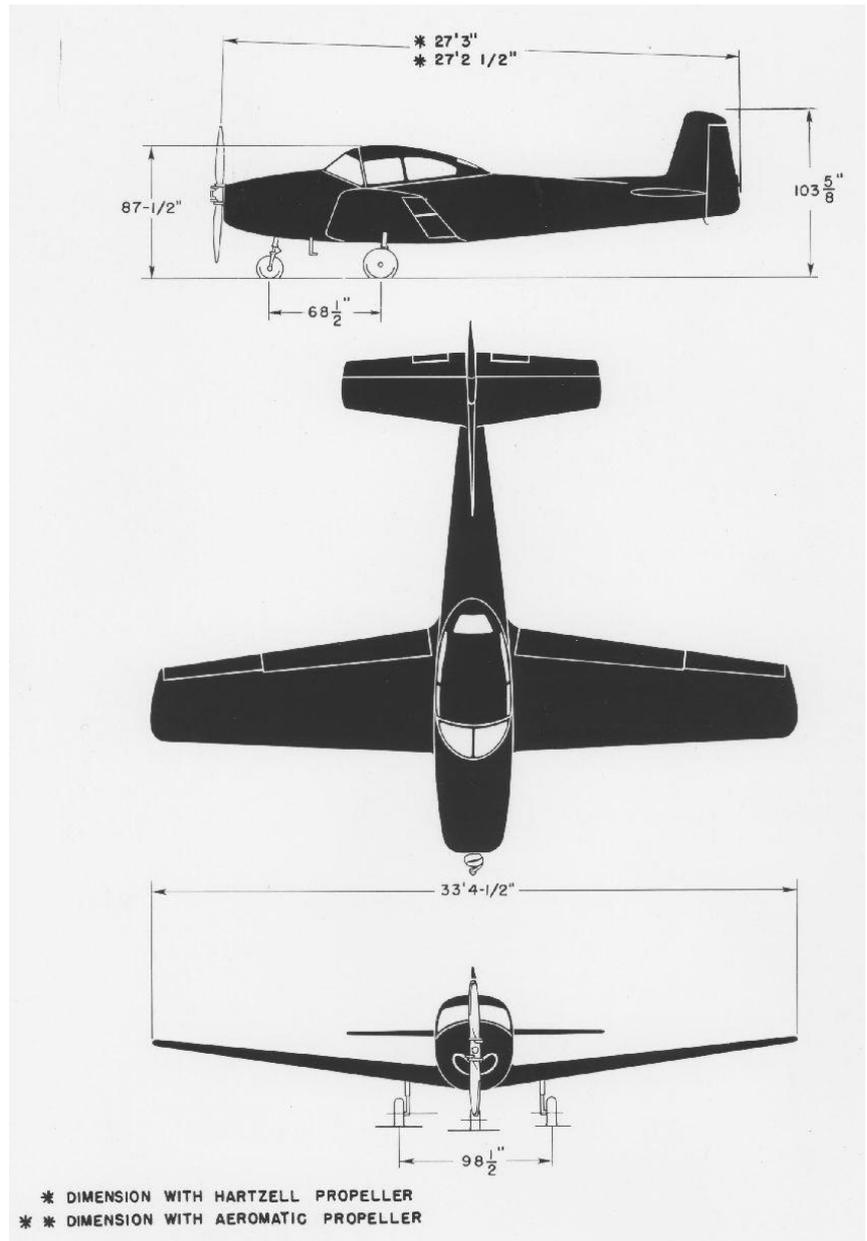


Figura 17.8 Viste del velivolo Ryan Navion.

dove la ‘matrice di massa’ $[M]$ a primo membro che moltiplica il vettore colonna delle derivate temporali è singolare; le righe nulle identificano le equazioni algebriche mentre le righe con elementi diagonali unitari individuano le equazioni differenziali. In particolare, le funzioni Φ_3 e Φ_4 sono ricavate dalla terza delle (17.52) e dalla (17.56) portando tutti i termini a secondo membro ottenendo così dei primi membri nulli (corrispondenti agli elementi diagonali della $[M]$). La soluzione del problema (17.61) permette di conoscere le funzioni incognite V , ψ_{GT} , f_{zA} e δ_e nell’intervallo $[0, t_f]$ dove è nota la legge del C_L .

La forma delle equazioni (17.61) si presta all’uso in ambiente Matlab della funzione di libreria `ode15s` (*Stiff differential equations and DAEs solver*). Pertanto una possibile via per risolvere il problema assegnato è data dal codice seguente.

```
%% Declaring global variables
global ...
g ... % gravity acceleration
rho_0 ... % air density at z_0
delta_T_0 delta_s_0 ...
vTime_bp vCL_bp ...
myAC % the aircraft object, populated outside this func.
```

```

%% Solve the trim problem first, wings-level and zero R/C
% load trim results
load 'trim_results_h_1524m.mat'

(cfr. esempio 7.2)

% Data read from file:
% V_0, alpha_0_deg, alpha_0, delta_e_0_deg, delta_e_0
% delta_s_0_deg, delta_s_0, delta_T_0

% initial heading
psiGT_0 = convang(0.0, 'deg', 'rad');
% initial load factor
fza_0 = 1.0;
% initial CL
CL_eq = f_CL(alpha_0, 0.0, 0.0, delta_e_0, delta_s_0);

%% Setting up the manoeuver
t_fin = 30.0; % Simulation final time
% Breakpoints in time law of CL
vTime_bp = [0, t_fin*(1/10), t_fin*(1/4), t_fin*(2/4), t_fin*(2/3), t_fin];
vCL_bp = [CL_eq, CL_eq+0.01, CL_eq+0.10, CL_eq+0.38, CL_eq+0.395, CL_eq+0.4];

%% Solve the problem (17.61)

% Mass matrix
M = diag([1,1,0,0]');

%-- initial state vector
x0 = [
    V_0;          ... % x1 <-- V
    psiGT_0;     ... % x2 <-- psiGT
    fza_0;       ... % x3 <-- fza
    delta_e_0]; ... % x4 <-- delta_e

options_ODE = odeset('AbsTol',1e-7,'Mass',M);

[vTime, vX] = ode15s(@correctedTurnCLAssigned, [0 t_fin], x0, options_ODE);

%% auxiliary variables
vY(:,1) = ... % bank angle
    acos(1./vX(:,3));
vY(:,2) = ... % turn radius
    (vX(:,1).^2)./(g.*sqrt(vX(:,3).^2 - 1));
vY(:,3) = ... % Angle of Attack
    f_AoA( ...
        interp1(vTime_bp,vCL_bp,vTime,'pchip'), ...
        vX(:,4), ...
        delta_s_0*ones(length(vX(:,4)),1) ...
    );
vY(:,4) = ... % CD
    f_CD_Polar( ...
        interp1(vTime_bp,vCL_bp,vTime,'pchip') ...
    );

```

La funzione `correctedTurnCLAssigned` che viene passata alla `ode15s` definisce le funzioni Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 e Φ_4 . Il codice seguente ne rappresenta una possibile implementazione.

```

function dx = correctedTurnCLAssigned(t,x)
% pass this to ode15s

%% Declaring global variables
global ...
    g ... % gravity acceleration
    rho_0 ... % air density at z_0
    delta_T_0 delta_s_0 ...
    vTime_bp vCL_bp ...
    myAC % the aircraft object, populated outside this func.

%% Give the state vector components proper names
V = x(1);
psiGT = x(2);

```

```

fza      = x(3);
delta_e  = x(4);

% give dimensions to the return vector
dx = zeros(4,1);

%% Right-hand-sides of equations of motion

rho = rho_0;
delta_T = delta_T_0;
delta_s = delta_s_0;
CL = interp1(vTime_bp,vCL_bp,t,'pchip');

ToW = delta_T*myAC.T/myAC.W;
WoS = myAC.W/myAC.S;
a_ = ...
    (CL - myAC.CL_delta_e*delta_e ...
      - myAC.CL_delta_s*delta_s ...
    )/myAC.CL_alpha;

b_ = (rho*V^2)/(2*(myAC.W/myAC.S));

dx(1,1) = g*( ... ←  $\Phi_1$ 
    ToW*( cos(myAC.mu_T) - a_*sin(myAC.mu_T) ) ...
    - b_*( myAC.CD_0 + myAC.K*CL^myAC.m ) ...
    );
% (cfr. eq. (17.52)1 e (17.61)1)

dx(2,1) = (g/V)*sqrt(fza^2 - 1); ←  $\Phi_2$ 
% (cfr. eq. (17.52)2 e (17.61)2)

dx(3,1) = -fza ... ←  $\Phi_3$ 
    + ToW*( a_*cos(myAC.mu_T) + sin(myAC.mu_T) ) ...
    + b_*CL;
% (cfr. eq. (17.52)3 e (17.61)3)

c_ = 1/( myAC.Cm_alpha*(myAC.CL_delta_e/myAC.CL_alpha) - myAC.Cm_delta_e );
d_ = 2*myAC.Ixz*(g^2)/(rho*myAC.S*myAC.mac);

e_ = myAC.Cm_0 ...
    + myAC.Cm_alpha * CL / myAC.CL_alpha ...
    + ( ...
      myAC.Cm_delta_s ...
      - myAC.Cm_alpha*(myAC.CL_delta_s/myAC.CL_alpha) ...
    )*delta_s;

f_ = myAC.Cm_q*g*myAC.mac/2;

dx(4,1) = -delta_e ... ←  $\Phi_4$ 
    + c_*( ...
      d_*(1 - 1/fza^2)/(V^4) ...
      + e_ + f_*(fza - 1/fza)/(V^2) ...
    );
% (cfr. eq. (17.56) e (17.61)4)

end

```

La soluzione del problema numerico impostato sopra è memorizzata negli array vX e vY . Il loro contenuto è diagrammato nelle figure 17.9 e 17.10 in funzione dei tempi discreti dell'array $vTime$.

Si riportano per completezza anche alcune funzioni richiamate nel codice precedente. La funzione che calcola il valore di equilibrio $C_L(0)$ è la seguente.

```

function res = f_CL(alpha, alpha_dot_hat, q_hat, delta_e, delta_s)
global myAC
res = myAC.CL_alpha.*alpha ...
    + myAC.CL_delta_e.*delta_e ...
    + myAC.CL_delta_s.*delta_s ...
    + myAC.CL_alpha_dot.*alpha_dot_hat ...
    + myAC.CL_q.*q_hat;
end

```

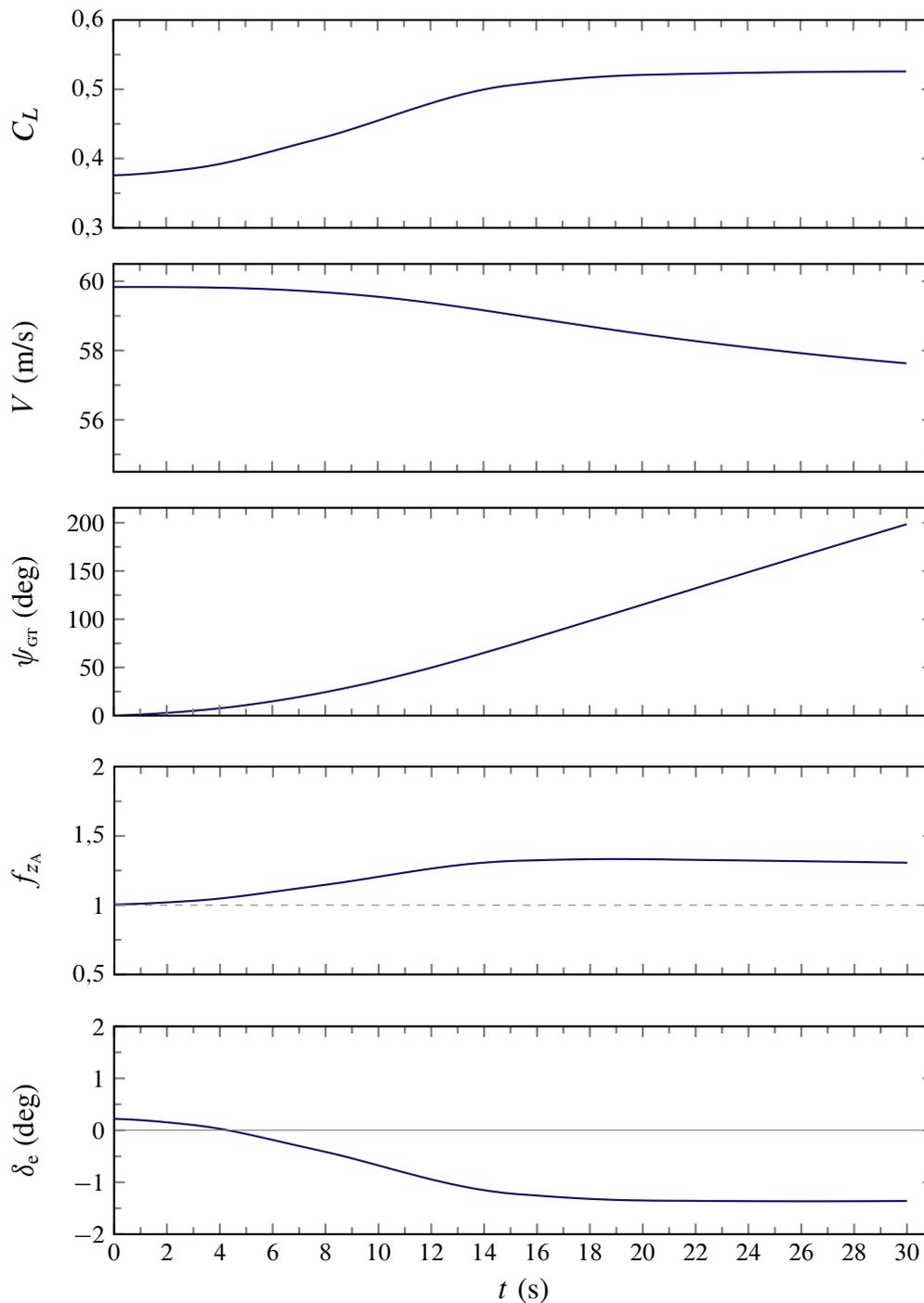


Figura 17.9 Soluzione del problema della virata corretta per assegnata legge della sustentazione. Si veda l'esercizio 17.1.

Segue la funzione che calcola il valore C_D secondo il modello della polare di resistenza.

```
function res = f_CD_Polar(CL)
global myAC
res = myAC.CD_0 + myAC.K .* CL.^myAC.m;
end
```

Infine la funzione che valuta $\alpha_B + \mu_x = \alpha_B + C_{L0}/C_{L\alpha}$ secondo la (17.51).

```
function res = f_AoA(CL, delta_e, delta_s)
global myAC
res = ...
    (1./myAC.CL_alpha) ...
    *(CL - myAC.CL_delta_s.*delta_s - myAC.CL_delta_e.*delta_e);
end
```



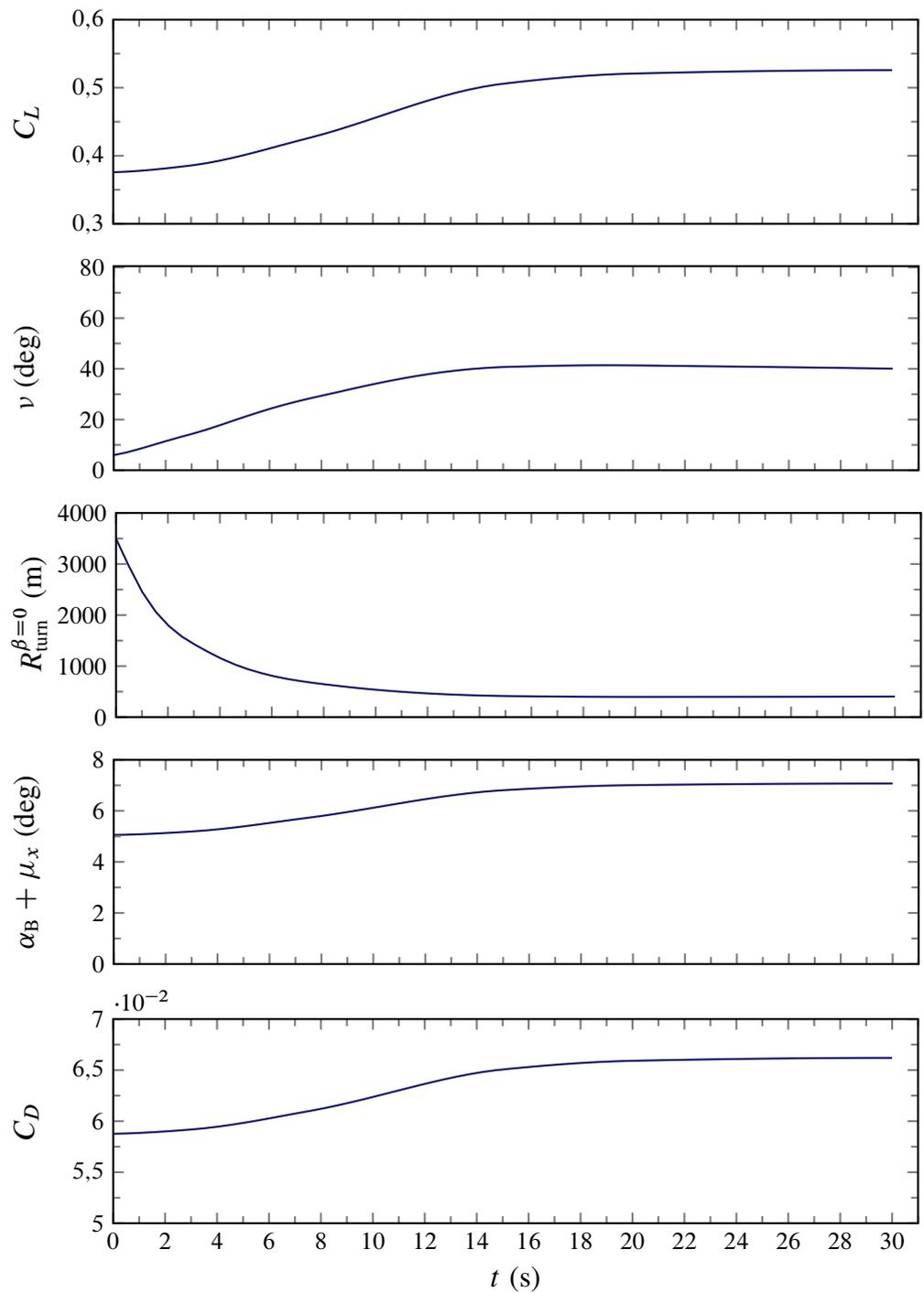


Figura 17.10 Soluzione del problema della virata corretta per assegnata legge della sustentazione. Si veda l'esercizio 17.1.

Esercizio 17.2: *Traiettoria di virata corretta per assegnata legge $C_L(t)$*



A partire dai risultati dell'esercizio 17.1 si ricostruisca la traiettoria piana della virata corretta in base alle equazioni (1.5). Di queste ultime — in questo caso particolare in cui la quota non varia — vanno considerate le prime due:

$$x_{E,G}(t) = x_{E,G}(0) + \int_0^t V_{x_E}(\tau) d\tau \quad (1.5a)$$

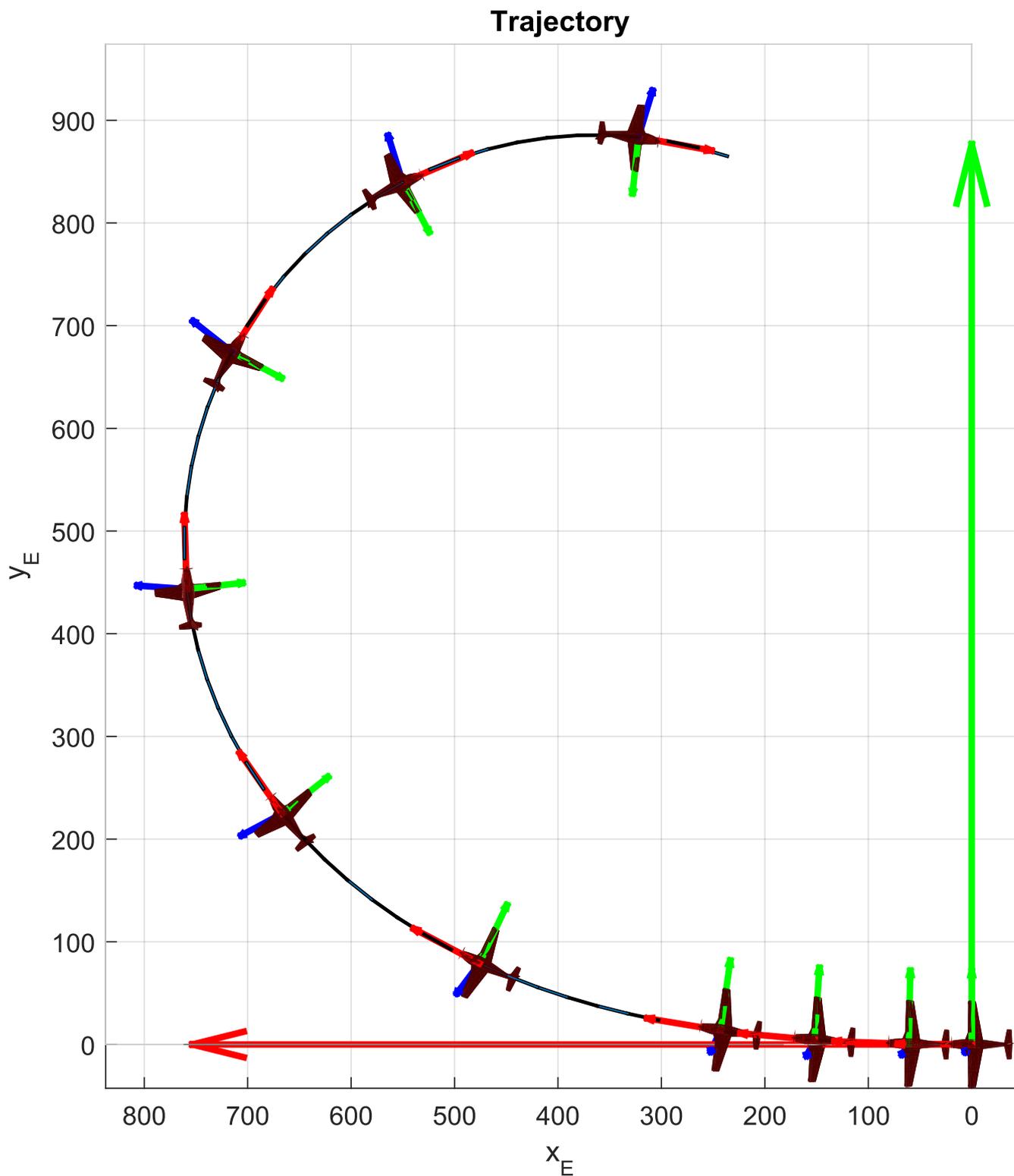


Figura 17.11 Traiettoria di virata corretta per assegnata legge della sustentazione. Per la decelerazione e l'aumento del fattore di carico durante la manovra si ha una progressiva diminuzione del raggio di virata. Si vedano gli esercizi 17.1 e 17.2. Il velivolo è ingrandito per chiarezza di rappresentazione.

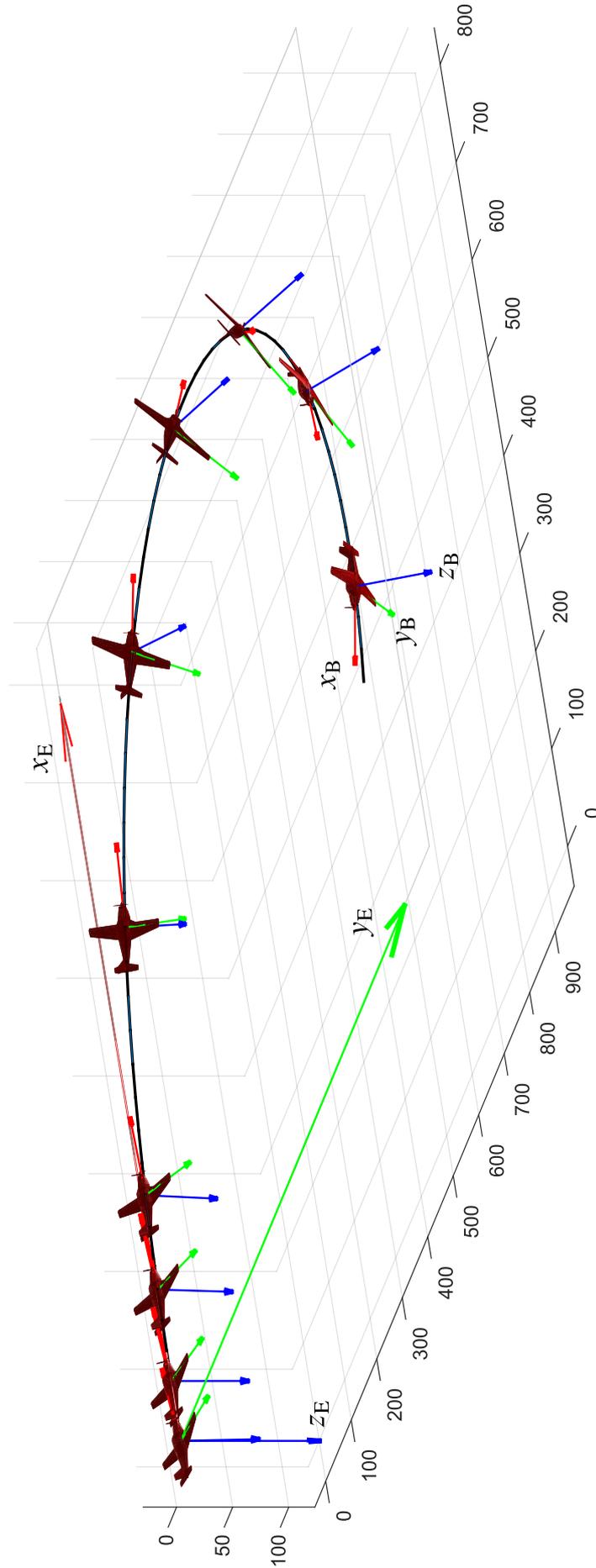


Figura 17.12 Vista assonometrica della traiettoria e degli orientamenti successivi del velivolo in manovra di virata corretta per assegnata legge della sustentazione. Si vedano gli esercizi 17.1, 17.2 e 17.3. Il velivolo è ingrandito per chiarezza di rappresentazione.

e

$$y_{E,G}(t) = y_{E,G}(0) + \int_0^t V_{y_E}(\tau) d\tau \quad (1.5b)$$

che propagano nel tempo le coordinate $x_{E,G}$ e $y_{E,G}$ del baricentro del velivolo. Le componenti di velocità $V_{x_E}(t)$ e $V_{y_E}(t)$ in assi Terra sono date dalle

$$V_{x_E}(t) = V(t) \cos \psi_{GR}(t), \quad V_{y_E}(t) = V(t) \sin \psi_{GR}(t) \quad (1.4)$$

Le (1.4) si otterranno in forma tabulare dall'integrazione numerica per un numero discreto di istanti nell'intervallo $[0, t_f]$. Converrà pertanto risolvere numericamente il seguente problema differenziale ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x}_{E,G} = V_{x_E}(t) \\ \dot{y}_{E,G} = V_{y_E}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad x_{E,G}(0) = y_{E,G}(0) = 0 \quad (17.62)$$

dove le funzioni a secondo membro sono da intendersi come le funzioni interpolanti associate alle suddette funzioni tabulari trovate numericamente.

Una possibile implementazione che risolve il problema assegnato è la seguente.

```
%% trajectory - Solution of navigation equations

% RHS of navigation equations
dPosEdt = @(t,Pos) ...
    [ ...
      interp1(vTime,vX(:,1).*cos(vX(:,2)),t); ... ← (1.5a)
      interp1(vTime,vX(:,1).*sin(vX(:,2)),t); ... ← (1.5b)
      0]; ←  $\gamma \equiv 0$ 

options = odeset( ...
    'RelTol', 1e-3, ...
    'AbsTol', 1e-3*ones(3,1) ...
    );
PosE0 = [0;0;-h_0];
[vTime2, vPosE] = ode45(dPosEdt, vTime, PosE0, options);
```

La traiettoria così ottenuta è rappresentata nella figura 17.11 a pagina 30.



Esercizio 17.3: Angoli di Eulero in virata corretta



A partire dai risultati dell'esercizio 17.1 si ricostruiscano le storie degli angoli di Eulero della manovra di virata.

Il problema è risolvibile tenendo conto delle trasformazioni (17.2). Una possibile implementazione in Matlab è la seguente.

```
%% Euler angles

% Rotation of angle a about 3rd axis
Rot3 = @(a) ...
    [ cos(a), sin(a), 0; ...
      -sin(a), cos(a), 0; ...
      0, 0, 1];

% Rotation of angle a about 2nd axis
Rot2 = @(a) ...
    [ cos(a), 0, -sin(a); ...
      0, 1, 0; ...
      sin(a), 0, cos(a)];
```

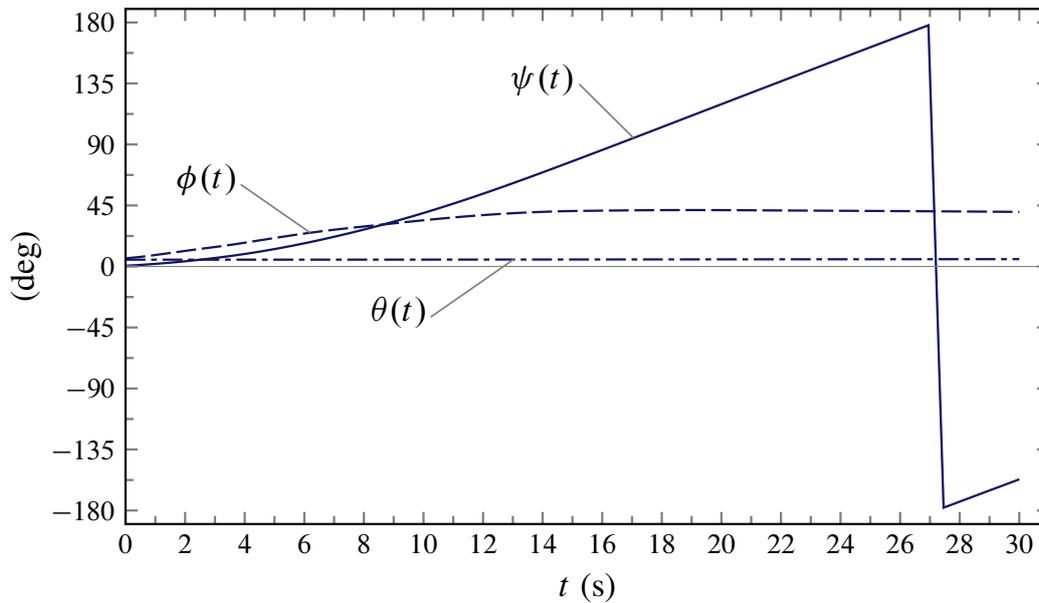


Figura 17.13 Angoli di Eulero in una manovra di virata. Si veda l'esercizio 17.3.

```
% Rotation of angle a about 1st axis
Rot1 = @(a) ...
    [ 1,      0,      0; ...
      0,  cos(a), sin(a); ...
      0, -sin(a), cos(a)];

% Pre-assign Euler angles arrays
vPsi = zeros(length(vTime),1);
vTheta = zeros(length(vTime),1);
vPhi = zeros(length(vTime),1);

% Apply transformations (17.2) from known ( $\psi_{GT}, v, \alpha_B$ )
for k=1:length(vTime)
    psigt = vX(k,2); nu = vY(k,1); alpha = vY(k,3);
    % Rotation sequence: 3-1-2
    Tbe = Rot2(alpha)*Rot1(nu)*Rot3(psigt);
    [psi,theta,phi] = dcm2angle(Tbe);
    vPsi(k) = psi; vTheta(k) = theta; vPhi(k) = phi;
end

% Time sequence of aircraft orientation quaternion
vQuat = angle2quat(vPsi,vTheta,vPhi);
```

Le storie degli angoli di Eulero (ϕ, θ, ψ) nella manovra di virata assegnata sono diagrammate nella figura 17.13.

La traiettoria e la sequenza di orientamenti del velivolo nello spazio sono rappresentate nelle figure 17.11 e 17.12. Esse sono state ottenute avendo determinato anche la storia temporale del quaternion dell'orientamento dell'aeromobile e utilizzando la funzione Matlab `plotTrajectoryAndBody` sviluppata appositamente e introdotta nel Quaderno 3.

Esercizio 17.4: Componenti della velocità angolare in virata corretta



Per la manovra di virata corretta dei precedenti esercizi si calcolino le storie temporali delle componenti p, q ed r della velocità angolare in assi velivolo e delle componenti p^A, q^A ed r^A in assi aerodinamici.

17.5.2 Integrazione delle equazioni della virata corretta per assegnata legge della sopportazione

Se dall'ultima delle (17.52) si esplicita il C_L in termini delle altre grandezze che vi compaiono si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\dot{V}}{g} = \frac{T}{W} \left[\cos \mu_T - \frac{C_L - (C_{L_0} + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s)}{C_{L_\alpha}} \sin \mu_T \right] - \frac{\rho V^2}{2W/S} (C_{D_0} + k C_L^m) \\ \frac{V \dot{\psi}_{GR}}{g} = \sqrt{f_{z_A}^2 - 1} \\ C_L = \frac{f_{z_A} + \frac{T}{W} \left(\frac{C_{L_0} + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s}{C_{L_\alpha}} \cos \mu_T - \sin \mu_T \right)}{\frac{\rho V^2}{2W/S} + \frac{T}{W} \frac{\cos \mu_T}{C_{L_\alpha}}} \end{array} \right. \quad (17.63)$$

Assumendo per T e δ_s dei valori costanti e per δ_e i valori espressi dalla (17.56) — relativi all'equilibrio al beccheggio in assenza di accelerazione angolare — il sistema (17.63), per assegnata legge della sopportazione f_{z_A} , fornisce le funzioni $V(t)$, $\psi_{GR}(t)$, $C_L(t)$ e $\delta_e(t)$ al variare della velocità di volo.

In pratica, analogamente a quanto mostrato nel paragrafo precedente, si perviene al problema algebrico-differenziale di valori iniziali:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\psi}_{GR} \\ \dot{C}_L \\ \dot{\delta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t)) \\ \Gamma_2(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t)) \\ \Gamma_3(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t)) \\ \Gamma_4(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t)) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (17.63)_1 \\ \leftarrow (17.63)_2 \\ \leftarrow (17.63)_3 \\ \leftarrow (17.56) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} V(0) = V_{eq} \\ \psi_{GR}(0) = 0 \\ C_L(0) = C_{L,eq} \\ \delta_e(0) = \delta_{e,eq} \end{pmatrix} \quad (17.64)$$

dove la $f_{z_A}(t)$ è assegnata nell'intervallo $[0, t_f]$ e, in particolare, $f_{z_A}(0) = 1$ — essendo $C_{L,eq}$ e $\delta_{e,eq}$ i valori di *trim* in volo traslato a quota costante e ad ali livellate.

Esercizio 17.5: Virata corretta per assegnata legge $f_{z_A}(t)$



Per il medesimo velivolo considerato nell'esercizio 17.1 si risolva numericamente il problema (17.64) assegnando una legge crescente col tempo del fattore di carico fino a un valore stabilizzato di 2,5 in un intervallo temporale della durata $t_f = 30$ s.

Si consideri una condizione iniziale di volo traslato in equilibrio ad ali livellate alla quota $h(0) \equiv -z_{E,G}(0) = 1524$ m e alla velocità $V(0) = 69,5$ m/s.

Suggerimenti per lo svolgimento

Lo script principale in linguaggio Matlab che imposta la risoluzione del problema è molto simile a quello dell'esercizio 17.1. Nel presente esercizio si dovrà definire la legge di sopportazione anziché quella della sustentazione e si avrà un diverso vettore di stato. Un esempio di implementazione è il seguente.

```

                                                    (si veda anche il codice dell'esercizio 17.1)
% ...
% initial heading
psiGT_0 = convang(0.0, 'deg', 'rad');
% initial load factor
fza_0 = 1.0;
% initial CL
CL_eq = f_CL(alpha_0, 0.0, 0.0, delta_e_0, delta_s_0);

%% Setting up the manoeuver
t_fin = 30.0; % Simulation final time
% Breakpoints in time law of fza
vTime_bp = [0, t_fin*(1/10), t_fin*(1/4), t_fin*(1.5/4), t_fin*(1/2), t_fin];
vFza_bp = [1, 1.05, 1.75, 2.3, 2.5, 2.5];

%% Solve the problem (17.64)

% Mass matrix
M = diag([1,1,0,0]');

%-- initial state vector
x0 = [
    ...
    V_0; ... % x1 <-- V
    psiGT_0; ... % x2 <-- psiGT
    CL_eq; ... % x3 <-- CL
    delta_e_0]; ... % x4 <-- delta_e

options_ODE = odeset('AbsTol',1e-7,'Mass',M);
[vTime, vX] = ode15s(@correctedTurnFzaAssigned, [0 t_fin], x0, options_ODE);

```

La funzione `correctedTurnFzaAssigned` che viene passata alla `ode15s` definisce le funzioni Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 e Γ_4 che rappresentano i secondi membri del sistema (17.64). Il codice seguente ne rappresenta una possibile implementazione.

```

function dx = correctedTurnFzaAssigned(t,x)
% pass this to ode15s

%% Declaring global variables
global ...
    g ... % gravity acceleration
    rho_0 ... % air density at z_0
    delta_T_0 delta_s_0 ...
    vTime_bp vFza_bp ...
    myAC % the aircraft object, populated outside this func.

%% Give the state vector components proper names
V = x(1);
psiGT = x(2);
CL = x(3);
delta_e = x(4);

% give dimensions to the return vector
dx = zeros(4,1);

%% Right-hand-sides of equations of motion

rho = rho_0;
delta_T = delta_T_0;
delta_s = delta_s_0;
fza = interp1(vTime_bp,vFza_bp,t,'pchip');

ToW = delta_T*myAC.T/myAC.W;
WoS = myAC.W/myAC.S;
a_ = ...
    (CL - myAC.CL_delta_e*delta_e ...
     - myAC.CL_delta_s*delta_s ...
    )/myAC.CL_alpha;

b_ = (rho*V^2)/(2*(myAC.W/myAC.S));

```

```

dx(1,1) = g*( ... ← Γ1
    ToW*( cos(myAC.mu_T) - a_*sin(myAC.mu_T) ) ...
    - b_*( myAC.CD_0 + myAC.K*CL^myAC.m ) ...
);
(dx(2,1) = (g/V)*sqrt(fza^2 - 1); ← Γ2
(dx(3,1) = -CL + CL1; ← Γ3
c_ = 1/( myAC.Cm_alpha*(myAC.CL_delta_e/myAC.CL_alpha) - myAC.Cm_delta_e );
d_ = 2*myAC.Ixz*(g^2)/(rho*myAC.S*myAC.mac);
e_ = myAC.Cm_0 ...
+ myAC.Cm_alpha * CL / myAC.CL_alpha ...
+ ( ...
    myAC.Cm_delta_s ...
    - myAC.Cm_alpha*(myAC.CL_delta_s/myAC.CL_alpha) ...
)*delta_s;
f_ = myAC.Cm_q*g*myAC.mac/2;
dx(4,1) = -delta_e ... ← Γ4
+ c_*( ...
    d_*(1 - 1/fza^2)/(V^4) ...
    + e_ + f_*(fza - 1/fza)/(V^2) ...
);
end

```

(cfr. eq. (17.63)₁ e (17.64)₁)

(cfr. eq. (17.63)₂ e (17.64)₂)

(cfr. eq. (17.63)₃ e (17.64)₃)

(cfr. eq. (17.56) e (17.64)₄)

La funzione su riportata limita i valori del C_L a non superare 0,85, ch , per volo in decelerazione a spinta costante, equivale ad impedire alla procedura numerica di raggiungere valori troppo alti dell'angolo d'attacco, tali da inficiare la validit  del modello lineare in α_B della sustentazione aerodinamica.

Le funzioni determinate con la soluzione del problema numerico impostato sopra sono diagrammate nelle figure 17.14 e 17.15.

Si osservi che la limitazione imposta alla sustentazione   coerente con il modello semplificato di dinamica della virata fornito in questo capitolo: le uniche funzioni incognite che sottostanno a delle equazioni differenziali sono V e ψ_{GT} ; le altre soddisfano delle uguaglianze algebriche e possono essere convenientemente scelte — come funzioni costanti o variabili nel tempo. Nell'esercizio qui considerato la funzione f_{z_A} svolge il ruolo di variabile di input (analoga a una legge di comando) e $C_L(t)$ viene determinata in base alla legge

$$C_L = \begin{cases} \tilde{C}_L := \text{valore dato dalla (17.63)}_3 & \text{se } \tilde{C}_L \leq 0,85, \\ 0,85 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (17.65)$$

La (17.65)   anch'essa una legge di comando e rappresenta la circostanza in cui il pilota

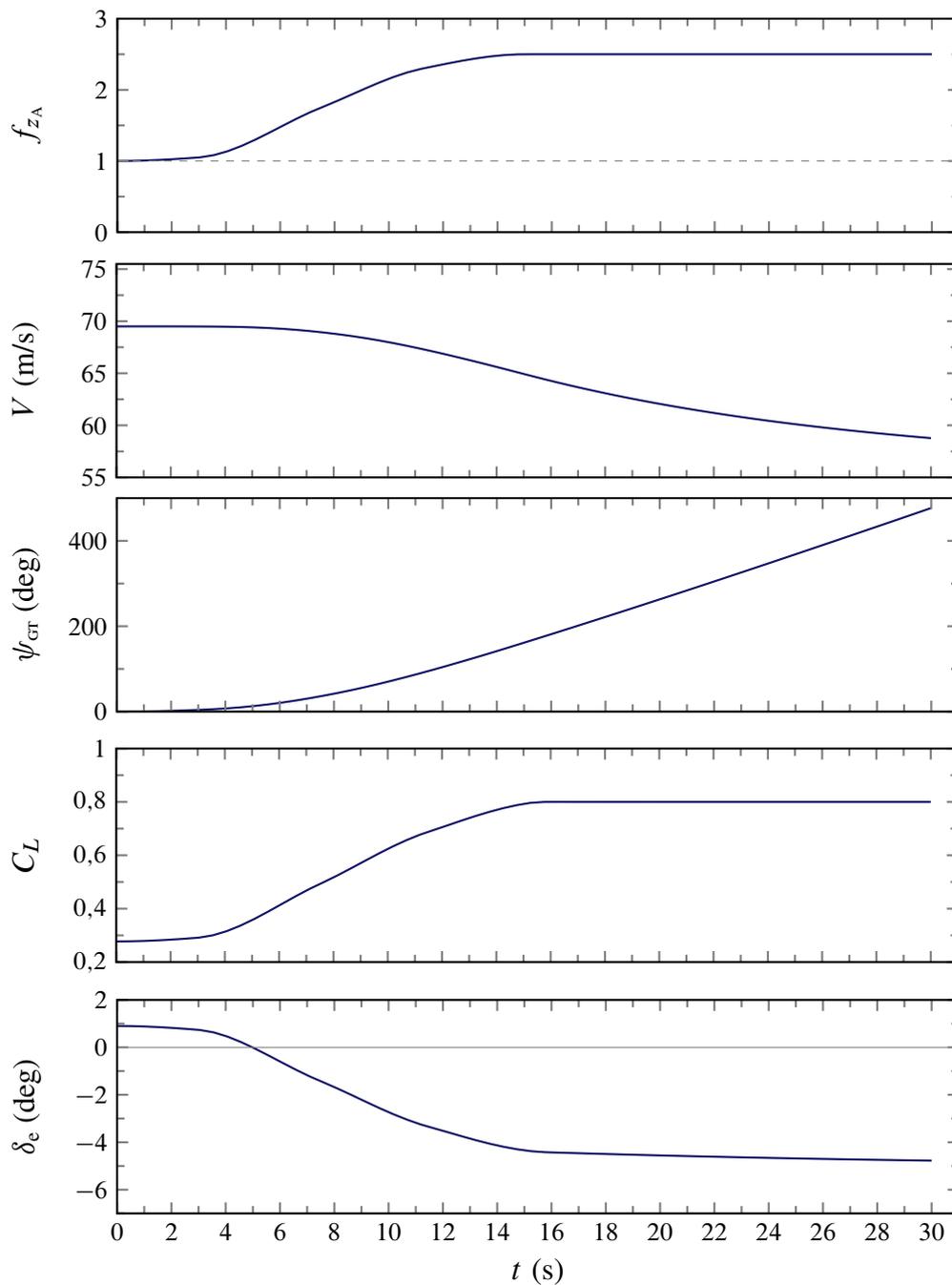


Figura 17.14 Soluzione del problema della virata corretta per assegnata legge della soportazione. Manovra eseguita in decelerazione (spinta costante) con limitazione a 0,85 del valore massimo raggiungibile del C_L . Si veda l'esercizio 17.5.

limita l'assetto longitudinale per non raggiungere incidenze troppo vicine a quella critica. Ciò è confermato dalla curva di δ_e nella figura 17.14 che si appiattisce intorno a una deflessione di -5° .

Le storie degli angoli di Eulero (ϕ , θ , ψ) nella virata assegnata sono diagrammate nella figura 17.16 a pagina 39. Dall'andamento dell'angolo di azimuth ψ si osserva che il velivolo compie quasi due giri. Confrontando la curva dell'angolo di rollio ϕ con quella dello sbandamento della figura 17.15 si ha conferma che questi due angoli, per definizione, differiscono quando il vettore velocità V e l'asse velivolo x_B non sono sovrapposti. La loro differenza è dovuta principalmente ad un angolo di elevazione θ non nullo.

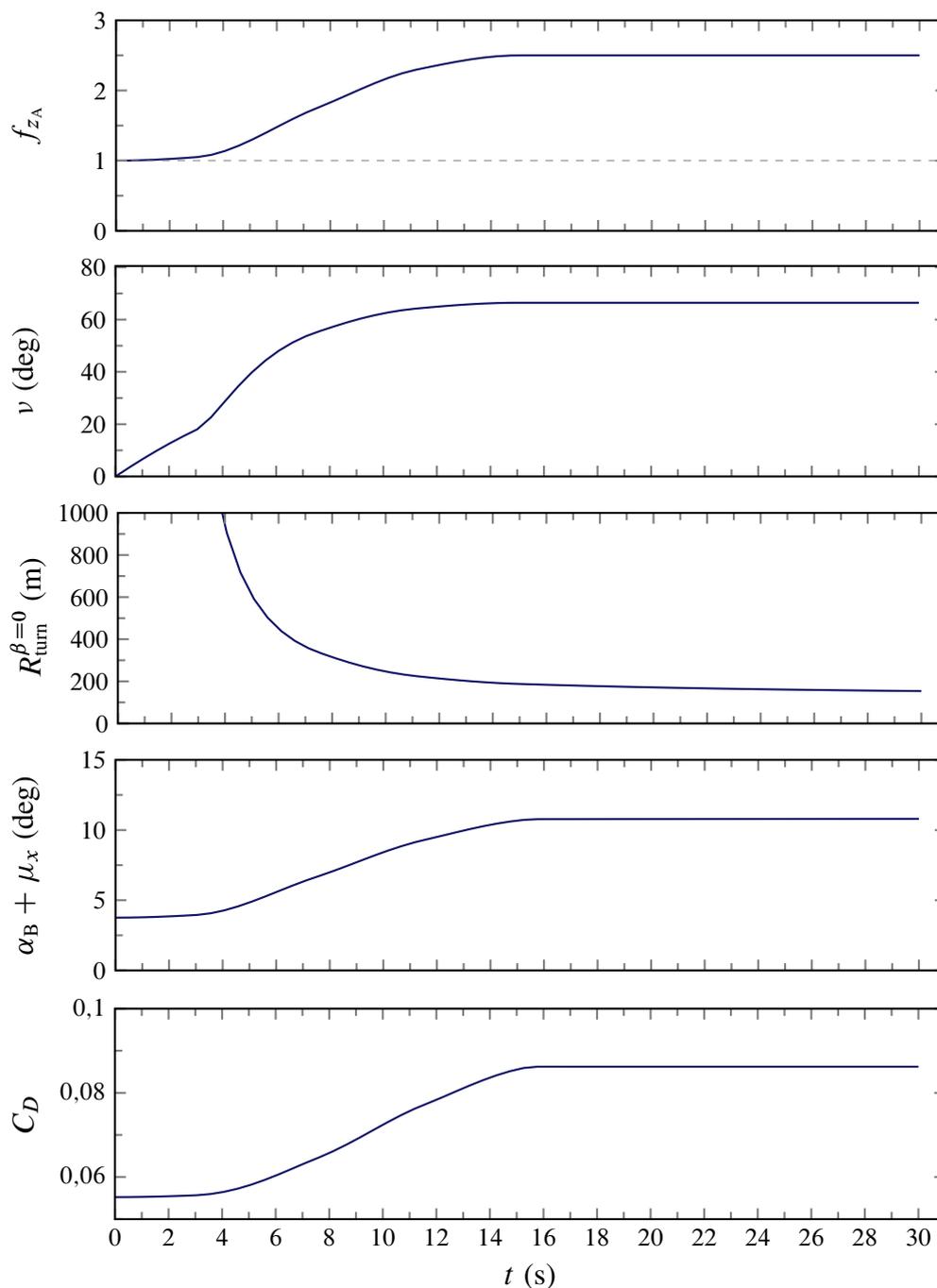


Figura 17.15 Soluzione del problema della virata corretta per assegnata legge della sopportazione. Manovra eseguita in decelerazione (spinta costante) con limitazione a 0,85 del valore massimo raggiungibile del C_L . Si veda l'esercizio 17.5.

La traiettoria piana ottenuta dalla risoluzione del problema assegnato è rappresentata nella figura 17.17 a pagina 40. La vista dall'alto con gli orientamenti successivi è invece riportata nella figura 17.18. Si osserva che nella fase in cui si stabilizza il fattore di carico normale intorno ad un valore costante si ha anche uno sbandamento costante. Inoltre, il volo in decelerazione fa registrare una diminuzione del raggio di virata fino a circa 200 m.



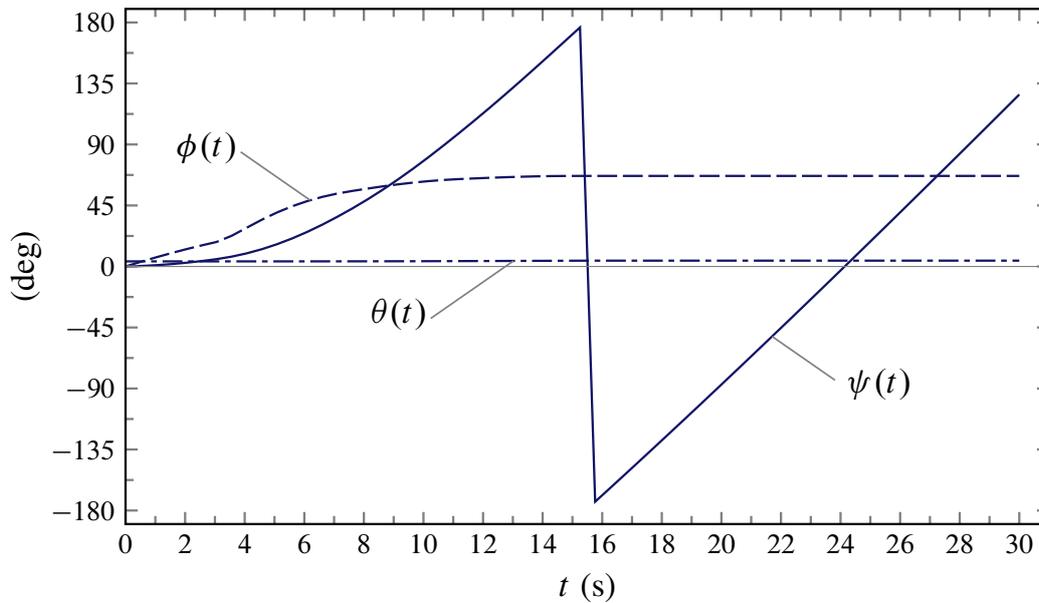


Figura 17.16 Angoli di Eulero in una manovra di virata per assegnata legge della sopportazione.

17.5.3 Virata isogonale

È detta *virata isogonale* la virata corretta eseguita a sbandamento costante. Dall'ultima delle (17.39) e dalla (17.41) risulta che la virata isogonale è caratterizzata dalla costanza del fattore di carico normale ed è *circolare*, cioè il raggio $R_{\text{turn}}^{\beta=0} = V/\dot{\psi}_{\text{GT}}$ è costante, solo se il moto è uniforme (V costante).

La virata isogonale a velocità costante è detta anche *virata sostenuta*. Infatti, la spinta necessaria per tale manovra è tale da dover equagliare la resistenza aerodinamica alla incidenza di volo corrispondente al fattore di carico normale in atto e determinare al tempo stesso un valore stabilizzato della velocità. Diversamente la traiettoria di virata isogonale si presenta come una spirale a raggio crescente se il velivolo accelera ed a raggio decrescente se il velivolo decelera durante il moto.

Nelle virate sostenute ad alti angoli di sbandamento — cioè in condizioni di elevate spinte richieste —, per i valori tipici di spinta propulsiva disponibile dei velivoli, normalmente si riescono a raggiungere fattori di carico normali f_{z_A} non così alti come il fattore di contingenza n . La virata eseguita a fattore di carico normale $f_{z_A} = n$ risulta quindi, nella maggior parte dei casi, in decelerazione (si veda anche l'esercizio 17.5).

La virata isogonale, a differenza di quella circolare uniforme, consente quindi, entro certi limiti, di sfruttare al massimo le caratteristiche strutturali del velivolo e le possibilità fisiologiche del pilota. Così un velivolo inizialmente in volo orizzontale uniforme ($f_{z_A} = 1$) alla velocità massima di regime relativa alla quota di volo, eseguendo una virata isogonale a fattore di carico uguale al coefficiente di contingenza ($f_{z_A} = n$), decelera gradualmente senza perdere quota e può continuare l'evoluzione fino al raggiungimento di incidenze di volo prossime a quella critica.

Lo studio della virata isogonale viene condotto sulla base del metodo di calcolo esposto nell'esercizio 17.5 ed assumendo come legge di manovra

$$f_{z_A}(t) = \text{cost} \quad (17.66)$$

In alternativa si può generalizzare quel metodo di risoluzione prevedendo anche una legge

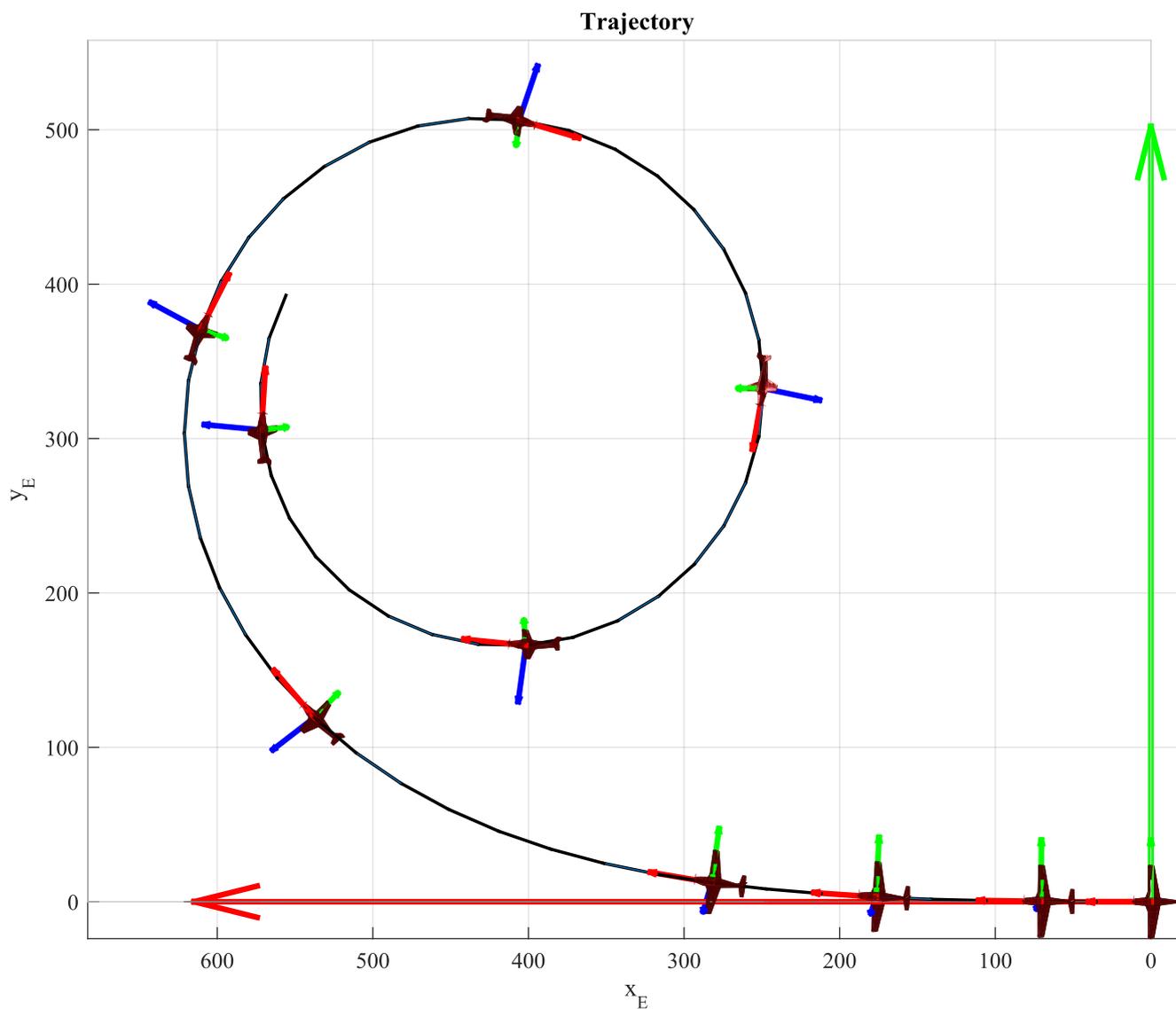


Figura 17.17 Traiettorie di virata corretta per assegnata legge della soportazione. Per la decelerazione e l'aumento del fattore di carico durante la manovra si ha una progressiva diminuzione del raggio di virata. Si veda l'esercizio 17.5. Il velivolo è ingrandito per chiarezza di rappresentazione.

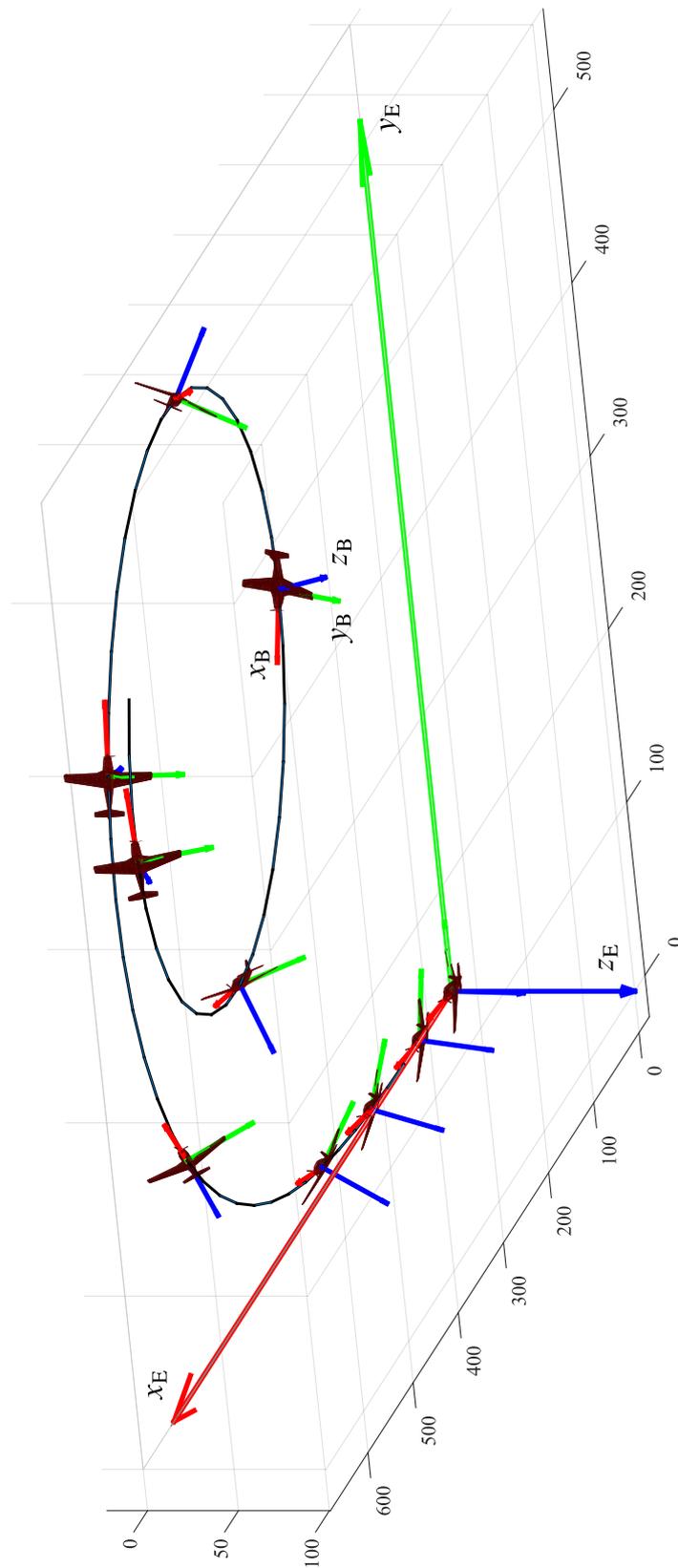


Figura 17.18 Vista assonometrica della traiettoria e degli orientamenti successivi del velivolo in manovra di virata corretta per assegnata legge della sopportazione. Si veda l'esercizio 17.5. Il velivolo è ingrandito per chiarezza di rappresentazione.

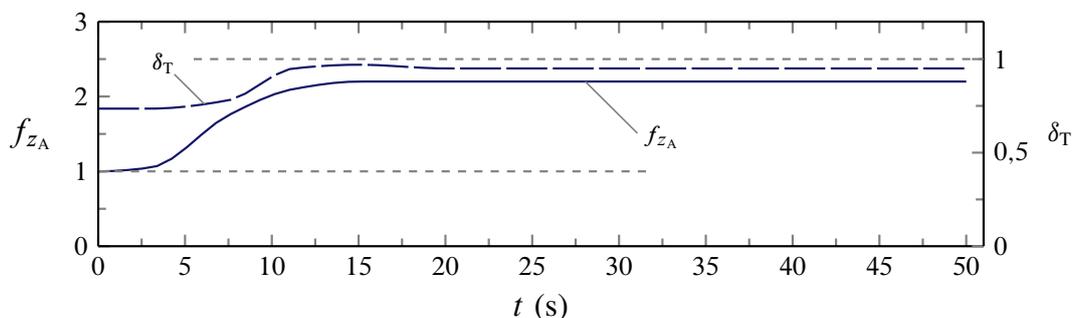


Figura 17.19 Leggi assegnate della sopportazione f_{z_A} e della manetta δ_T corrispondenti ad una virata sostenuta del velivolo Ryan Navion. Si veda l'esercizio 17.6.

di input $\delta_T(t)$ della manetta. Se nelle (17.63) si pone $T = \delta_T(t)T_{\max}$, dove T_{\max} è la spinta disponibile alla quota considerata, si ottiene un sistema di equazioni simile al (17.64) nella forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\psi}_{GT} \\ \dot{C}_L \\ \dot{\delta}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t), \delta_T(t)) \\ \Gamma_2(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t), \delta_T(t)) \\ \Gamma_3(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t), \delta_T(t)) \\ \Gamma_4(V, \dots, C_L, \delta_e, f_{z_A}(t), \delta_T(t)) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (17.63)_1 \\ \leftarrow (17.63)_2 \\ \leftarrow (17.63)_3 \\ \leftarrow (17.56) \end{matrix} \quad (17.67)$$

risolvibile numericamente in maniera del tutto simile a quella presentata nell'esercizio 17.5.

Esercizio 17.6: Virata sostenuta per assegnate leggi $f_{z_A}(t)$ e $\delta_T(t)$



A partire dallo svolgimento e dai risultati dell'esercizio 17.5, si sviluppi un codice di calcolo che preveda anche una variazione temporale della legge della manetta $\delta_T(t)$.

Si verifichi che le leggi della sopportazione e della manetta riportate nella figura 17.19 corrispondono a una virata sostenuta alla quota $h(0) \equiv -z_{E,G}(0) = 1524 \text{ m}$ e ad una velocità di circa $69 \text{ m/s} = 215 \text{ km/h}$.

Suggerimenti per lo svolgimento

Lo script principale in linguaggio Matlab che imposta la risoluzione del problema è molto simile a quello degli esercizi 17.1 e 17.5. Il frammento di codice Matlab che definisce per punti le curve della figura 17.19 è il seguente.

```
t_fin = 30.0;
vTime_bp = ...
    [0, t_fin*(1/10), t_fin*(1/4), t_fin*(1.5/4), t_fin*(1/2), t_fin*(2/3), t_fin];
vFza_bp = ...
    [1, 1.05, 1.75, 2.1, 2.2, 2.2, 2.2];
vDelta_T_bp = ...
    [delta_T_0, delta_T_0, 0.82, 0.95, 0.97, 0.95, 0.95];

t_fin = 50;
vTime_bp = [vTime_bp, t_fin];
vFza_bp = [vFza_bp, vFza_bp(end)];
vDelta_T_bp = [vDelta_T_bp, vDelta_T_bp(end)];
```

La funzione da passare alla ode15s deve essere modificata in modo da calcolare per interpolazione tramite la funzione predefinita `interp1` i valori $\delta_T(t)$ a partire dai vettori `vTime_bp` e `vDelta_T_bp`.

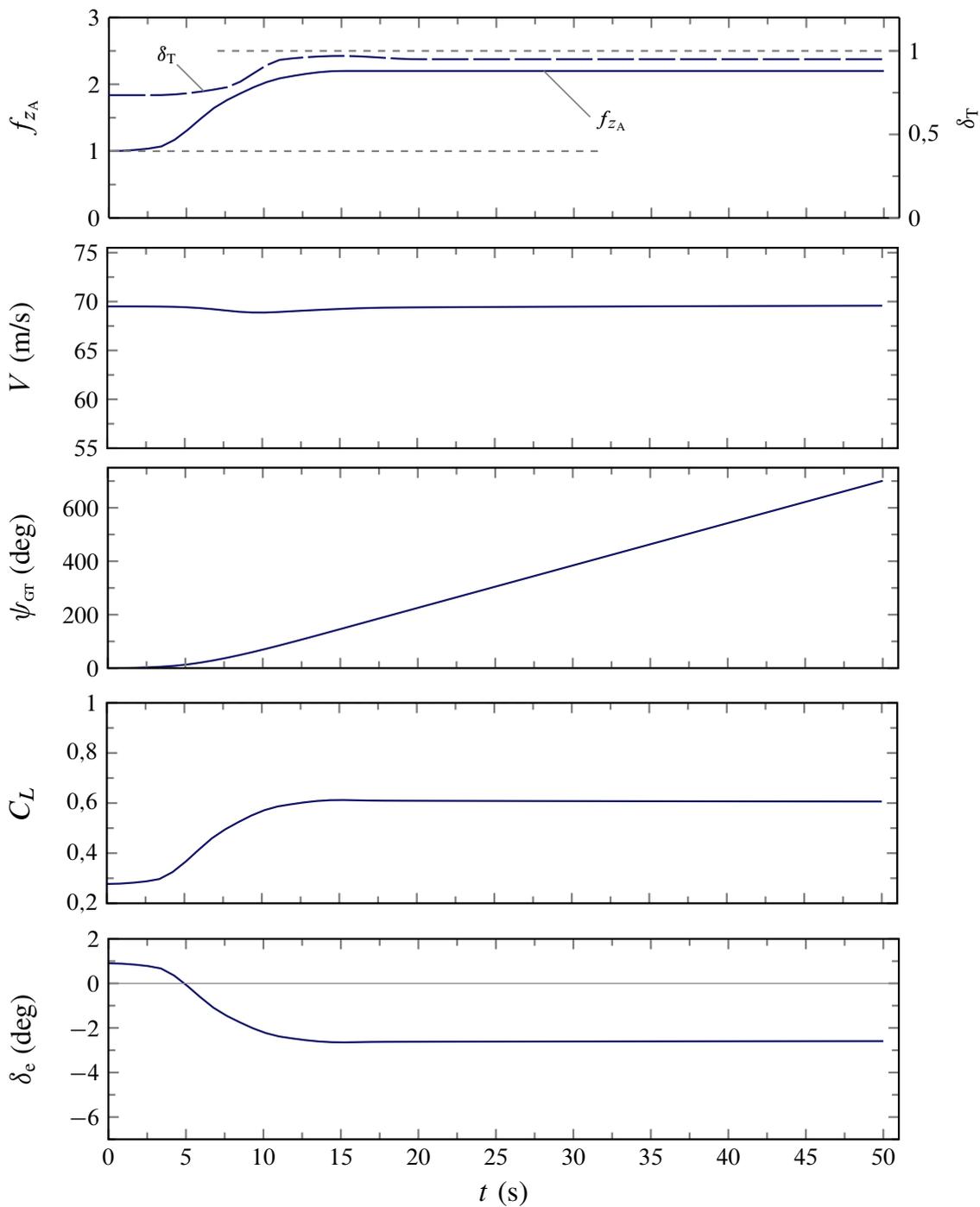


Figura 17.20 Virata che si stabilizza in una virata isogonale circolare. Soluzione del problema della virata corretta per assegnata legge della sopportazione e della manetta. Si veda l'esercizio 17.6.

Verificare che la soluzione del problema è quella riportata nelle figure 17.21 e 17.20. Si osserva che è necessario un aumento di spinta rispetto a quella disponibile di equilibrio ad ali livellate affinché la velocità in virata corretta si mantenga costante. In concomitanza di un fattore di carico normale che si stabilizza intorno a 2,2 e un angolo di sbandamento di poco superiore a 60° si ha un raggio di virata costante di circa 250 m.



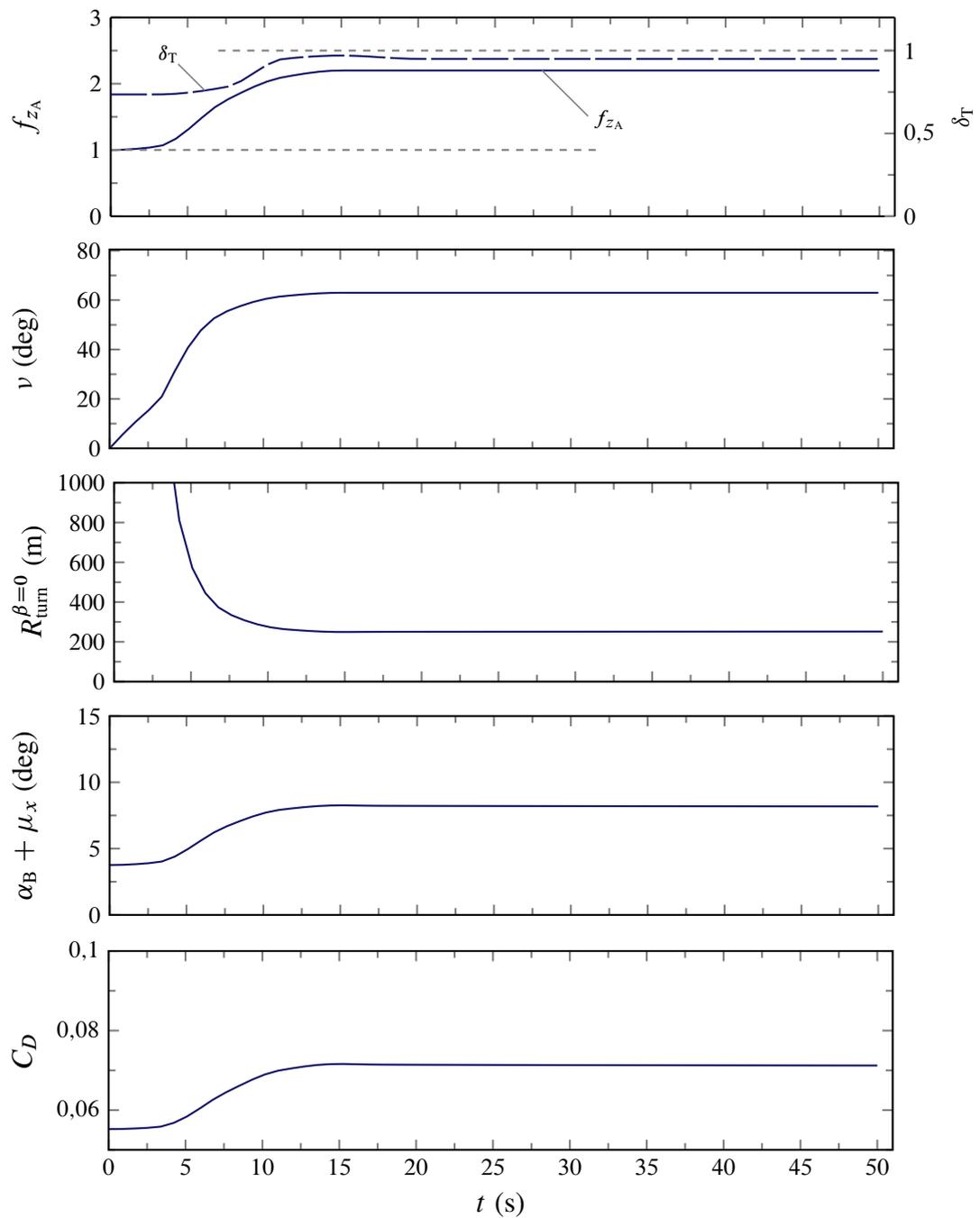


Figura 17.21 Virata che si stabilizza in una virata isogonale circolare. Soluzione del problema della virata corretta per assegnata legge della sopportazione e della manetta. Si veda l'esercizio 17.6.

Esercizio 17.7: *Virata isogonale per leggi $f_{z_A}(t)$ e $\delta_T(t)$ costanti*



Si risolva l'esercizio precedente assegnando semplicemente leggi costanti della sopportazione e della spinta.



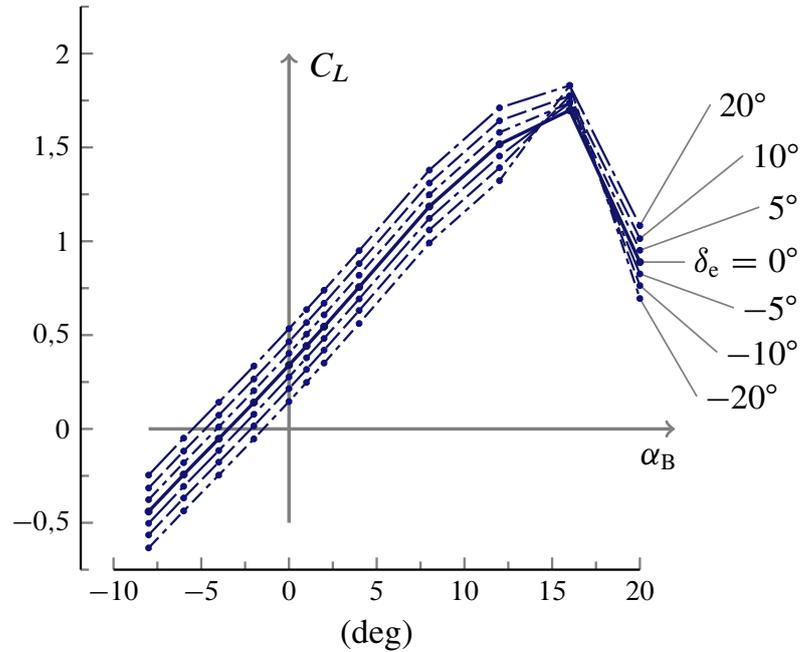


Figura 17.22 Valori del coefficiente di portanza del velivolo Ryan Navion al variare dell'angolo d'attacco e della deflessione dell'equilibratore ottenuti con il programma Digital Datcom per $\delta_s = 0^\circ$. Si veda anche la figura 17.25.

Esempio 17.1: Virata corretta ad elevata incidenza



Gli esercizi precedenti possono essere estesi al caso in cui le dipendenze di C_L e C_M dalle variabili (α_B, δ_e) sono non lineari. Ciò avviene com'è noto alle elevate incidenze di volo, in condizioni che corrispondono a raggi di virata prossimi a quello minimo. I metodi di integrazione numerica precedentemente illustrati devono essere adattati per tener conto delle non-linearità.

Focalizzando l'attenzione al caso di assegnata legge della sopportazione $f_{z_A}(t)$, il problema della virata corretta a quota costante è retto in generale dal seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = g \left[\frac{T}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) - \frac{\rho V^2}{2W/S} (C_{D_0} + k C_L^m) \right] \\ \dot{\psi}_{GT} = \frac{g}{V} \sqrt{f_{z_A}^2 - 1} \\ C_L = \frac{2W/S}{\rho V^2} \left[f_{z_A} - \frac{T}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) \right] \end{array} \right. \quad (17.68)$$

ricavato dalle (17.48). Dalle (17.68) si può eliminare la variabile C_L sostituendo la terza nel termine C_L^m a secondo membro della prima; si ottiene la coppia di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = g \left\{ \frac{\delta_T T_{\max}}{W} \cos(\alpha_B + \mu_T) - \frac{\rho V^2}{2W/S} C_{D_0} - k \left(\frac{\rho V^2}{2W/S} \right)^{1-m} \left[f_{z_A} - \frac{\delta_T T_{\max}}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) \right]^m \right\} \\ \dot{\psi}_{GT} = \frac{g}{V} \sqrt{f_{z_A}^2 - 1} \end{array} \right. \quad (17.69)$$

dove si è ipotizzata anche una legge nota $\delta_T(t)$ della manetta.

Al sistema precedente si andranno ad aggiungere due equazioni algebriche non lineari che forniscono ad ogni passo d'integrazione i valori di α_B e δ_e . A tale scopo si utilizza

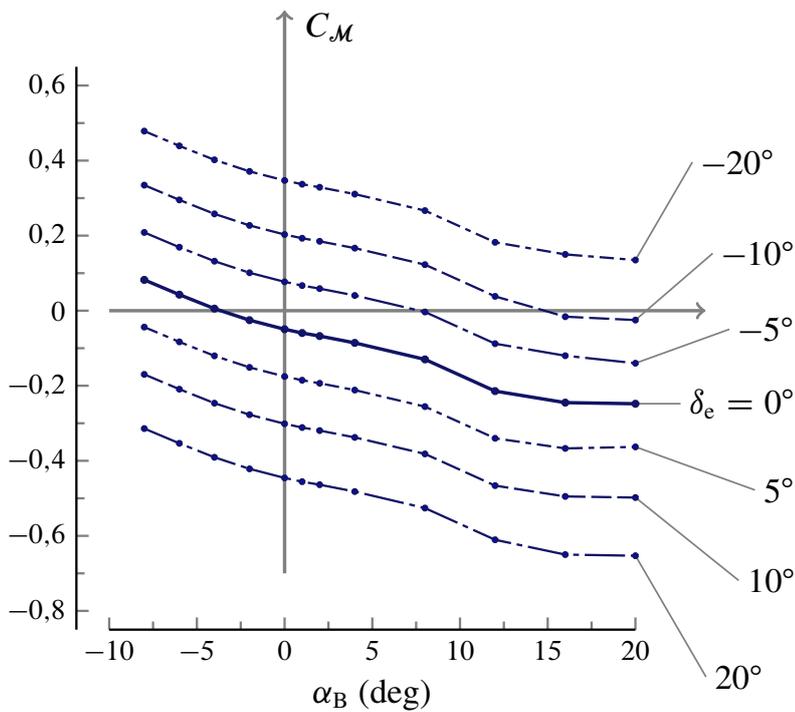


Figura 17.23 Valori del coefficiente di momento di beccheggio del velivolo Ryan Navion al variare dell'angolo d'attacco e della deflessione dell'equilibratore, ottenuti con il programma Digital Datcom per $\delta_s = 0^\circ$. Si veda anche la figura 17.25.

ancora la terza delle (17.68) sostituendovi a primo membro la seguente funzione

$$G_L(\alpha_B, \delta_e, \delta_s) = G_{L0}(\alpha_B, \delta_e) + C_{L\delta_s} \delta_s \quad (17.70)$$

Nella legge costitutiva G_L — che generalizza la legge (17.50) valida per piccole incidenze e piccole deflessioni dell'equilibratore — si accetta di modellare con un termine lineare in δ_s l'effetto aerodinamico della regolazione dello stabilizzatore e di trascurare gli effetti della velocità angolare di beccheggio e dell'instazionarietà dell'angolo d'attacco. La funzione G_{L0} restituisce per interpolazione il C_L del velivolo corrispondente ad una data coppia di valori dell'incidenza e della deflessione dell'equilibratore per $\delta_s = 0^\circ$. L'algoritmo di interpolazione si basa sulle funzioni tabulari diagrammate nella figura 17.22 nella pagina precedente. Pertanto, dalla terza delle (17.68) e dalla (17.70) discende l'equazione:

$$G_{L0}(\alpha_B, \delta_e) + C_{L\delta_s} \delta_s - \frac{2W/S}{\rho V^2} \left[f_{z_A} - \frac{\delta_T T_{\max}}{W} \sin(\alpha_B + \mu_T) \right] = 0 \quad (17.71)$$

Analogamente, alla (17.56) — che si ricava dalle (17.53) — si sostituisce la seguente equazione:

$$I_{xz} \left(\frac{g}{V} \right)^2 (f_{z_A}^2 - 1) + \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} f_{z_A}^2 G_M(\alpha_B, \delta_e, \delta_s, f_{z_A}) = 0 \quad (17.72)$$

La legge costitutiva G_M — che generalizza la (17.55) — assume la forma

$$G_M(\alpha_B, \delta_e, \delta_s, f_{z_A}) = G_{M0}(\alpha_B, \delta_e) + C_{M\delta_s} \delta_s + C_{Mq} \frac{g}{V} \left(f_{z_A} - \frac{1}{f_{z_A}} \right) \frac{\bar{c}}{2V} \quad (17.73)$$

in cui si accetta di modellare con termini lineari in δ_s e q^A gli effetti della regolazione dello stabilizzatore e della velocità angolare di beccheggio e di trascurare l'effetto di $\dot{\alpha}_B$. La funzione G_{M0} restituisce per interpolazione il C_M del velivolo corrispondente ad una data coppia di valori dell'incidenza e della deflessione dell'equilibratore per $\delta_s = 0^\circ$ ed

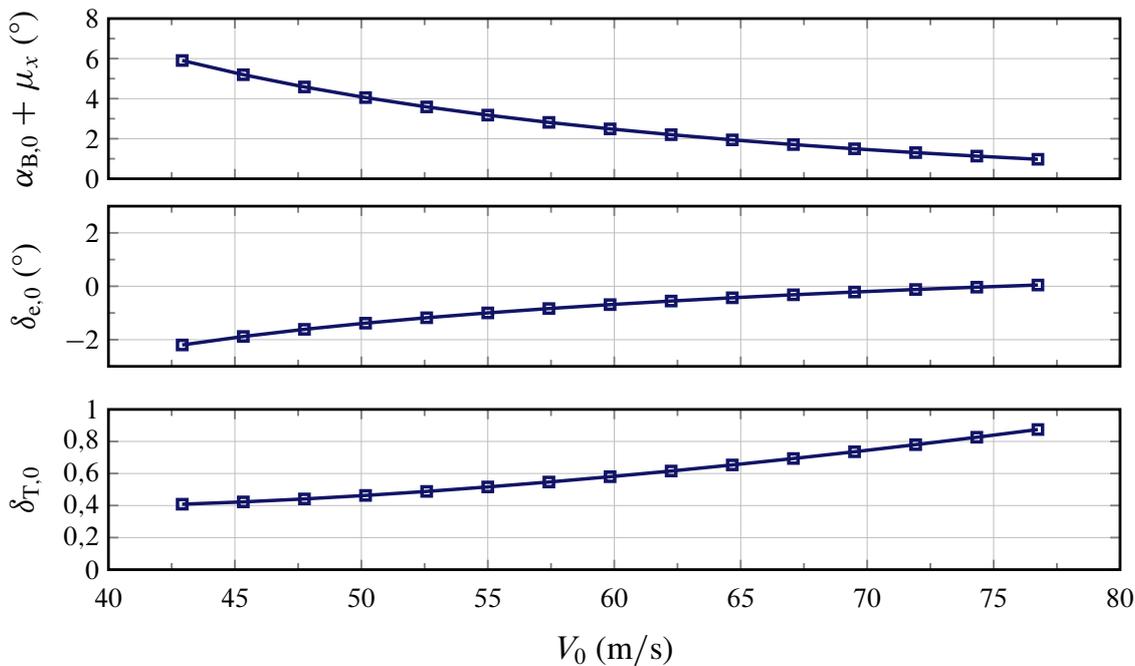


Figura 17.24 Velivolo Ryan Navion. Valori di equilibrio per volo ad ali livellate al variare della velocità di *trim* per $\delta_s = -1^\circ$. Si veda l'esempio 17.1.

$f_{z_A} = 1$. In questo caso l'algoritmo di interpolazione si basa sulle funzioni tabulari diagrammate nella figura 17.23 a fronte.

Le (17.69)-(17.71)-(17.72) poste nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = \mathcal{E}_1(V, \alpha_B, \delta_e, \delta_s, \delta_T, f_{z_A}) \\ \dot{\psi}_{GT} = \mathcal{E}_2(f_{z_A}) \\ 0 = \mathcal{E}_3(V, \alpha_B, \delta_e, \delta_s, \delta_T, f_{z_A}) \\ 0 = \mathcal{E}_4(V, \alpha_B, \delta_e, \delta_s, f_{z_A}) \end{array} \right. \quad (17.74)$$

e risolte numericamente, per un fissato δ_s , con un algoritmo d'integrazione al passo. In particolare, al generico istante t sono noti i valori $f_{z_A}(t)$ e $\delta_T(t)$ dalle leggi assegnate e i valori $V(t)$, $\alpha_B(t)$, e $\delta_e(t)$ dal passo precedente; i primi tre di essi, sostituiti nelle ultime due delle (17.74), definiscono un sistema algebrico nelle incognite α_B e δ_e . Esso può essere risolto attraverso la funzione `fsolve` di Matlab usando come valori di tentativo $\alpha_B(t)$, e $\delta_e(t)$. In altri termini le ultime due equazioni del sistema (17.74) possono interpretarsi come il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha_B - \bar{\alpha}_B \\ 0 = \delta_e - \bar{\delta}_e \end{array} \right. \quad (17.75)$$

con $(\bar{\alpha}_B, \bar{\delta}_e)$ la soluzione del sistema (17.71)-(17.72) al generico istante t .



Esercizio 17.8: Virata corretta ad elevata incidenza



Risolvere il sistema (17.74) con il metodo discusso nell'esempio 17.1 per il velivolo Navion in virata corretta ad incidenze prossime a quella critica.

alpha	CL(de -20)	CL(de -10)	CL(de -5)	CL(de 0)	CL(de 5)	CL(de 10)	CL(de 20)
-8.0	-6.34e-01	-5.65e-01	-5.03e-01	-4.400e-01	-3.770e-01	-3.150e-01	-2.460e-01
-6.0	-4.37e-01	-3.68e-01	-3.06e-01	-2.430e-01	-1.800e-01	-1.180e-01	-4.900e-02
-4.0	-2.46e-01	-1.77e-01	-1.15e-01	-5.200e-02	1.100e-02	7.300e-02	1.420e-01
-2.0	-5.30e-02	1.60e-02	7.80e-02	1.410e-01	2.040e-01	2.660e-01	3.350e-01
0.0	1.46e-01	2.15e-01	2.77e-01	3.400e-01	4.030e-01	4.650e-01	5.340e-01
1.0	2.48e-01	3.17e-01	3.79e-01	4.420e-01	5.050e-01	5.670e-01	6.360e-01
2.0	3.51e-01	4.20e-01	4.82e-01	5.450e-01	6.080e-01	6.700e-01	7.390e-01
4.0	5.62e-01	6.31e-01	6.93e-01	7.560e-01	8.190e-01	8.810e-01	9.500e-01
8.0	9.91e-01	1.06e+00	1.12e+00	1.185e+00	1.248e+00	1.310e+00	1.379e+00
12.0	1.32e+00	1.39e+00	1.45e+00	1.517e+00	1.580e+00	1.642e+00	1.711e+00
16.0	1.83e+00	1.77e+00	1.73e+00	1.698e+00	1.737e+00	1.774e+00	1.830e+00
20.0	6.95e-01	7.64e-01	8.26e-01	8.890e-01	9.520e-01	1.014e+00	1.083e+00

alpha	Cm(de -20)	Cm(de -10)	Cm(de -5)	Cm(de 0)	Cm(de 5)	Cm(de 10)	Cm(de 20)
-8.0	4.786e-01	3.346e-01	2.085e-01	8.210e-02	-4.370e-02	-1.698e-01	-3.141e-01
-6.0	4.392e-01	2.952e-01	1.691e-01	4.270e-02	-8.310e-02	-2.092e-01	-3.535e-01
-4.0	4.020e-01	2.580e-01	1.319e-01	5.500e-03	-1.203e-01	-2.464e-01	-3.907e-01
-2.0	3.712e-01	2.272e-01	1.011e-01	-2.530e-02	-1.511e-01	-2.772e-01	-4.215e-01
0.0	3.470e-01	2.030e-01	7.690e-02	-4.950e-02	-1.753e-01	-3.014e-01	-4.457e-01
1.0	3.370e-01	1.930e-01	6.690e-02	-5.950e-02	-1.853e-01	-3.114e-01	-4.557e-01
2.0	3.289e-01	1.849e-01	5.880e-02	-6.760e-02	-1.934e-01	-3.195e-01	-4.638e-01
4.0	3.107e-01	1.667e-01	4.060e-02	-8.580e-02	-2.116e-01	-3.377e-01	-4.820e-01
8.0	2.667e-01	1.227e-01	-3.400e-03	-1.298e-01	-2.556e-01	-3.817e-01	-5.260e-01
12.0	1.822e-01	3.820e-02	-8.790e-02	-2.143e-01	-3.401e-01	-4.662e-01	-6.105e-01
16.0	1.500e-01	-1.600e-02	-1.200e-01	-2.450e-01	-3.670e-01	-4.950e-01	-6.500e-01
20.0	1.350e-01	-2.500e-02	-1.400e-01	-2.480e-01	-3.630e-01	-4.980e-01	-6.530e-01

Figura 17.25 Velivolo Ryan Navion, risultati ottenuti con il programma Digital Datcom per $\delta_s = 0^\circ$. Valori tabulari di supporto per l'interpolazione del C_L e del C_M rispetto ad α_B e δ_c . Si vedano le figure 17.22 e 17.23.

Suggerimenti per lo svolgimento

Lo script principale in linguaggio Matlab che imposta la risoluzione del problema è molto simile a quello degli esercizi 17.1 e 17.5. Il frammento di codice Matlab che definisce per punti le curve della figura 17.19 è il seguente.

```
t_fin = 30.0;
vTime_bp = ...
[0, t_fin*(1/10), t_fin*(1/4), t_fin*(1.5/4), t_fin*(1/2), t_fin*(2/3), t_fin];
vFza_bp = ...
[1, 1.05, 1.75, 2.1, 2.2, 2.2, 2.2];
vDelta_T_bp = ...
[delta_T_0, delta_T_0, 0.82, 0.95, 0.97, 0.95, 0.95];

t_fin = 50;
vTime_bp = [vTime_bp, t_fin];
vFza_bp = [vFza_bp, vFza_bp(end)];
vDelta_T_bp = [vDelta_T_bp, vDelta_T_bp(end)];
```



Esercizio 17.9: Virata corretta di un velivolo studiato con Digital Datcom



Si scelga un velivolo e se ne determinino le caratteristiche aerodinamiche simmetriche attraverso il software Digital Datcom.

In particolare, si ottengano le curve del C_D , C_L e C_M in funzione di α_B , di δ_c , eventualmente per diversi valori del numero di Mach e della deflessione δ_f dei flap. Si ottengano anche i valori delle derivate C_{Lq} , C_{Mq} , $C_{L\dot{\alpha}}$ e $C_{M\dot{\alpha}}$.

Da eventuali dati di pubblico dominio sul velivolo scelto si assegnino le caratteristiche della propulsione.

Si trovi una condizione di volo equilibrato orizzontale risolvendo un problema di *trim* ad una data quota. Successivamente si determini per via numerica un'evoluzione di virata corretta alla quota considerata per assegnata legge della sustentazione e per assegnata legge della sopportazione. Si studi in particolare il caso della virata isogonale.



17.6 Punto di manovra

TO DO: Inserire discorso sui gradienti di comando rispetto al fattore di carico di equilibrio e sul punto di manovra.

17.7 Virata a quota non costante

TO DO: Effetti dell'angolo $\gamma \neq 0$ sulle equazioni del moto. Per semplicità assumere $\dot{\gamma} \approx 0$.

$$\dot{\psi}_{\text{gr}} = \frac{V \cos \gamma}{R_{\text{turn}}} \quad (17.76)$$

$$R_{\text{Turn}}^{\beta=0} = \frac{V^2 \cos \gamma}{g \tan \nu} = \frac{V^2 \cos^2 \gamma}{g \sqrt{f_{z_A}^2 - \cos^2 \gamma}} \quad (17.77)$$

Bibliografia

- [1] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Hodges & Smith, 1853.
- [2] O. Rodrigues, “Des lois géométriques qui régissent les déplacements d’un système solide dans l’espace, et de la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1840.
- [3] E. Salamin, “Application of Quaternions to Computation with Rotations”, Working paper, Stanford AI Lab, 1979.
- [4] A. P. Yefremov, “Quaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories”, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, vol. 1, 2004.
- [5] Schwab A. L., “Quaternions, Finite Rotations and Euler Parameters”, Course notes on Applied Multibody Dynamics, Delft University of Technology, Laboratory for Engineering Mechanics, 2003.
<http://tam.cornell.edu/~als93/quaternion.pdf>.
- [6] AIAA/ANSI, *Recommended Practice for Atmospheric and Space Flight Vehicle Coordinate Systems*. R-004-1992, 1992.
- [7] G. H. Bryan, *Stability in Aviation: An Introduction to Dynamical Stability as Applied to the Motions of Aeroplanes*. Macmillan and Co., Limited, London, 1911.
- [8] D. J. Diston, *Computational Modelling of the Aircraft and the Environment. Volume 1, Platform Kinematics and Synthetic Environment*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [9] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [10] W. F. Phillips, “Phugoid Approximation for Conventional Airplanes”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, January-February 2000.
- [11] W. F. Phillips, “Improved Closed-Form Approximation for Dutch-Roll”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, May-June 2000.
- [12] R. Stengel, *Flight Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2004.
- [13] M. R. Napolitano, *Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation*. John Wiley, 2012.

- [14] D. K. Schmidt, *Modern Flight Dynamics*. McGraw-Hill, 2010.
- [15] B. Stevens, F. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [16] D. Stinton, *The Anatomy of the Airplane* (2nd edition). American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [17] B. Etkin, *Dynamics of Flight, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [18] M. Calcara, *Elementi di dinamica del velivolo*. Edizioni CUEN, Napoli, 1988.
- [19] L. V. Schmidt, *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. AIAA Education Series, 1998.
- [20] W. J. Duncan, *Control and Stability of Aircraft*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [21] R. Jategaonkar, *Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology*. Progress in Astronautics and Aeronautics Series, 2006.
- [22] C. D. Perkins, R. E. Hage, *Aircraft Performance, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [23] J. R. Wright, J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [24] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*. Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- [25] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*. Springer, Heidelberg, 2009.
- [26] P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. Second Edition. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2007.
- [27] J. D. Mattingly, *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2006.
- [28] K. Hünecke, *Jet Engines. Fundamentals of Theory, Design and Operation*. Motorbooks International, 1997.
- [29] A. Linke-Diesinger, *Systems of Commercial Turbofan Engines*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [30] F. R. Garza, E. A. Morelli, "A Collection of Nonlinear Aircraft Simulations with MATLAB". NASA-TM-2003-212145, January 2003.
- [31] Voce WGS84 su *Wikipedia*:
http://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System

- [32] Anonimo, *Department of Defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems*. NIMA TR8350.2, Third Edition, Amendment 2. National Imagery and Mapping Agency, US Department of Defense, 2004.
- [33] J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. DARcorporation, 2001.
- [34] H. T. Schlichting, E. A. Truckenbrodt, *Aerodynamics of the Aeroplane*. McGraw Hill Higher Education, 2nd edition, 1979.
- [35] M. M. Munk, “The aerodynamic forces on airship hulls”. NACA-TR-184, 1924.
- [36] A. Silverstein, S. Katzoff, “Aerodynamic characteristics of horizontal tail surfaces”. NACA-TR-688, 1940.
- [37] R. I. Sears, “Wind-tunnel data on the aerodynamic characteristics of airplane control surfaces”. NACA-WR-L-663, 1943.
- [38] E. Garner, “Wind-tunnel investigation of control-surface characteristics XX: plain and balanced flaps on an NACA 0009 rectangular semispan tail surface”. NACA-WR-L-186, 1944.
- [39] J. D. Brewer, M. J. Queijo, “Wind-tunnel investigation of the effect of tab balance on tab and control-surface characteristics”. NACA-TN-1403, 1947.
- [40] S. M. Crandall, H. E. Murray, “Analysis of available data on the effects of tabs on control-surface hinge moments”. NACA-TN-1049, 1946.
- [41] B. W. McCormick, *Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics*. John Wiley & Sons, 1979.
- [42] B. N. Pamadi, *Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, 1998.
- [43] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics. Modelling and Simulation with Matlab and Simulink*. Birkhäuser, Berlin, 2007.
- [44] D. Howe, *Aircraft Loading and Structural Layout*. AIAA Education Series, 2004.
- [45] P. Morelli, *Static Stability and Control of Sailplanes*. Levrotto & Bella, Torino, 1976.
- [46] L. Prandtl, O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. Dover, 1957.
- [47] R. K. Heffley, W. F. Jewell, “Aircraft Handling Qualities Data”. NASA-CR-2144, December 1972.
- [48] H. P. Stough III, J. M. Patton Jr, S. M. SliWa, “Flight Investigation of the Effect of Tail Configuration on Stall, Spin, and Recovery Characteristics of a Low-Wing General Aviation Research Airplane”. NASA-TP-1987-2644, February 1987.

- [49] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 3rd edition, New York, 2001.
- [50] J. J. Bertin, *Aerodynamics for Engineers*. Prentice-Hall, 4th edition, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [51] J. Katz, A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, England, U.K., 2001.
- [52] D. E. Hoak, *et al.*, “The USAF Stability and Control Datcom”. Air Force Wright Aeronautical Laboratories, TR-83-3048, 1960 (Revised 1978).
- [53] R. T. Jones, “A Note on the Stability and Control of Tailless Airplanes”. NACA Report 837, 1941.
- [54] D. P. Coiro, F. Nicolosi, A. De Marco, N. Genito, S. Figliolia, “Design of a Low Cost Easy-to-Fly STOL Ultralight Aircraft in Composite Material”. *Acta Polytechnica*, Vol. 45 no. 4, 2005, pp. 73-80; ISSN 1210-2709.
- [55] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Flight Tests, Performances and Flight Certification of a Twin-Engine Light Aircraft”. *Journal of Aircraft*, Vol 48, No. 1, January-February 2011.
- [56] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Parameter Estimation and Flying Qualities of a Twin-Engine CS23/FAR23 Certified Light Aircraft”. AIAA-2010-7947, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Toronto, 2010.
- [57] B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, Dover Publications, 2005.
- [58] L. Mangiacasale, *Flight Mechanics of a μ -Airplane*, Edizioni Libreria CLUP, Milano, 1998.
- [59] G. Mengali, *Elementi di Dinamica del Volo con Matlab*, Edizioni ETS, Pisa, 2001.
- [60] R. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1989.
- [61] Y. Li, M. Nahon, “Modeling and simulations of airship dynamics”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 30, No. 6, November-December 2007.
- [62] Y. Fan, F. H. Lutze, E. M. Cliff, “Time-Optimal Lateral Maneuvers of an Aircraft”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 18, No. 5, September-October 1995.
- [63] J. N. Nielsen, *Missile Aerodynamics*, AIAA, Cambridge, MA, 1988.
- [64] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean’s Vehicles*, Wiley, New York, 1998.
- [65] J. N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- [66] E. L. Duke, R. F. Antoniewicz, K. D. Krambeer, “Derivation and Definition of a Linear Aircraft Model”. Technical Report NASA Reference Publication RP-1207, Research Engineering, NASA Ames Research Center and NASA Dryden Flight Research Facility, 1988.

- [67] G. A. Stagg, *An Unsteady Aerodynamic Model for Use in the High Angle of Attack Regime*. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1998.
- [68] Y. Fan, *Identification of an Unsteady Aerodynamic Model up to High Angle of Attack Regime*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [69] *MATLAB Users' Guide*. The Mathworks, 2003 ed edizioni successive.
<http://www.mathworks.com/>
<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.html>
- [70] V. Comincioli, *Analisi numerica: metodi, modelli, applicazioni*. McGraw-Hill, 1990, seconda edizione 1995.
- [71] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, seventh edition, 1993.
- [72] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.
- [73] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [74] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, 1988.
- [75] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.
- [76] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, 1994.
- [77] R. D. Finck, "USAF Stability and Control Datcom". AFWAL-TR-83-3048, October 1960, Revised 1978.
- [78] S. R. Vukelich, J. E. Williams, "The USAF Stability and Control Digital Datcom". AFFDL-TR-79-3032, Volume I, April 1979, Updated by Public Domain Aeronautical Software 1999.
- [79] W. B. Blake, "Prediction of Fighter Aircraft Dynamic Derivatives Using Digital Datcom". AIAA-85-4070, AIAA Applied Aerodynamics Conference, Colorado Springs, Colorado, 1985.
- [80] Autori Vari, Distribuzione ufficiale di Digital Datcom,
 sito internet:
<http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/Digital-Datcom-Package.zip>
- [81] B. Galbraith, "Digital Datcom+", Holy Cows, Inc.,
 sito internet: <http://www.holycows.net/datcom/>