Agostino De Marco
Domenico P. Coiro

Elementi

di

Dinamica e simulazione di volo

Quaderno 2

Orientamento del velivolo
e trasformazione di assi

Marzo 2017
ver. 2017.a

Quaderno 2

Orientamento del velivolo e trasformazione di assi

If you think it's simple, then you have misunderstood the problem.

– Bjarne Stroustrup

Indice

2.1 Introduzione

Lo studio della Dinamica del volo atmosferico è interamente basato sulle leggi di Newton. Da queste discendono le equazioni generali del moto vario di un velivolo rigido, che hanno una valenza vettoriale. Nelle analisi ingegneristiche e, in generale, nelle teorie del volo, le equazioni del moto vengono proiettate su un sistema di coordinate *in moto* con il velivolo e riscritte come sistema di equazioni differenziali scalari.

L'adozione di un tale approccio, se da una parte richiede di formulare opportunamente gli operatori di derivazione temporale ed esprimere correttamente le leggi del moto per un osservatore non inerziale, dall'altra semplifica spesso le equazioni. Ad esempio, nelle equazioni generali del moto di rotazione intorno al baricentro gli operatori di derivazione temporale sono da applicarsi a dei prodotti fra i momenti d'inerzia del velivolo rispetto agli assi del riferimento mobile per le componenti della velocità angolare. Quando il riferimento mobile scelto è quello degli assi velivolo i momenti d'inerzia sono indipendenti dal tempo perché riferiti ad assi solidali al corpo rigido considerato, dunque le equazioni del moto risultano semplificate.

Si osservi inoltre che gli strumenti di bordo si servono dell'acquisizione di parametri di volo, tra i quali le velocità lineari ed angolari misurate rispetto ad un sistema di coordinate solidale al velivolo. Pertanto sembra ragionevole descrivere il moto del velivolo attraverso delle variabili direttamente confrontabili con quelle che vengono misurate in volo. Ma l'aspetto decisivo nella scelta di un riferimento mobile per proiettare le leggi di Newton applicate al moto dell'aeromobile sta nel fatto che sia le azioni aerodinamiche esterne che quelle propulsive vengono convenientemente modellate proprio in un riferimento solidale al velivolo.

L'adozione di un riferimento mobile come la terna di assi velivolo $\mathcal{T}_{\mathrm{B}}$ si dimostra dunque di grande utilità nello studio della Dinamica del volo. Sfortunatamente questo sistema di coordinate, la cui posizione varia con l'evoluzione del moto, non implica un semplice trattamento della posizione e dell'orientamento istantanei del velivolo, che necessariamente devono essere espressi in un riferimento inerziale. Quest'ultimo, nell'ipotesi di Terra piatta, può essere spesso rappresentato da una terna terrestre come la terna $\mathcal{T}_{\mathrm{E}}$. La posizione di un velivolo rispetto alla Terra, che normalmente viene espressa in termini di latitudine, longitudine ed altitudine, nell'analisi di moti di breve durata viene convenientemente descritta da una terna di coordinate cartesiane, essendo le distanze percorse trascurabili rispetto al raggio medio terrestre.

Nei paragrafi seguenti verranno trattate le due formulazioni più diffuse nella comunità aeronautica per la descrizione dell'orientamento di un velivolo rispetto ad un generico riferimento fisso: quella basata sugli angoli di Eulero e quella basata sul quaternione dell'orientamento (*Euler-Rodrigues symmetric parameters*).

2.2 Formulazione con angoli di Eulero

2.2.1 Definizione di angoli di Eulero per l'orientamento di un velivolo

Come visto nel paragrafo 1.9, l'orientamento nello spazio può essere descritto attraverso gli angoli di Eulero. La definizione comunemente accettata nella comunità aeronautica è la seguente.

Siano dette genericamente $\mathcal{T}_{\mathrm{f}} \equiv \{O_{\mathrm{f}}, x_{\mathrm{f}}, y_{\mathrm{f}}, z_{\mathrm{f}}\}$ una terna fissa e $\mathcal{T}_{\mathrm{m}} \equiv \{O_{\mathrm{m}}, x_{\mathrm{m}}, y_{\mathrm{m}}, z_{\mathrm{m}}\}$ una terna mobile, quest'ultima con origine solidale al velivolo. Ad ogni dato istante del moto, gli angoli di Eulero della terna $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$ non sono altro che quei tre scalari corrispondenti alle entità di tre rotazioni *ordinate* e *consecutive*. Tali rotazioni sono quelle che un sistema di coordinate immaginario $\mathcal{T}_0$, con origine posta nell'origine del sistema mobile $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$ ed avente inizialmente gli assi allineati a quelli del riferimento fisso $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$, deve compiere per trovarsi infine completamente sovrapposto a quello mobile.

Dall'esame della figura 2.1, nella quale per semplicità si è supposto che il punto $O_{\mathrm{m}} \equiv C$ solidale al velivolo fosse coincidente con l'origine di $\mathcal{T}_{\mathrm{f}}$, si deduce che le tre rotazioni in questione sono descritte come segue:

1. una rotazione del sistema $\{C, x_0, y_0, z_0\} \equiv \{C, x_{\mathrm{f}}, y_{\mathrm{f}}, z_{\mathrm{f}}\}$ intorno a $z_{\mathrm{f}} \equiv z_0$ dell'angolo ψ per portarsi nella posizione individuata dalla terna $\{C, x_1, y_1, z_1\}$ (avente $z_1 \equiv z_0$);

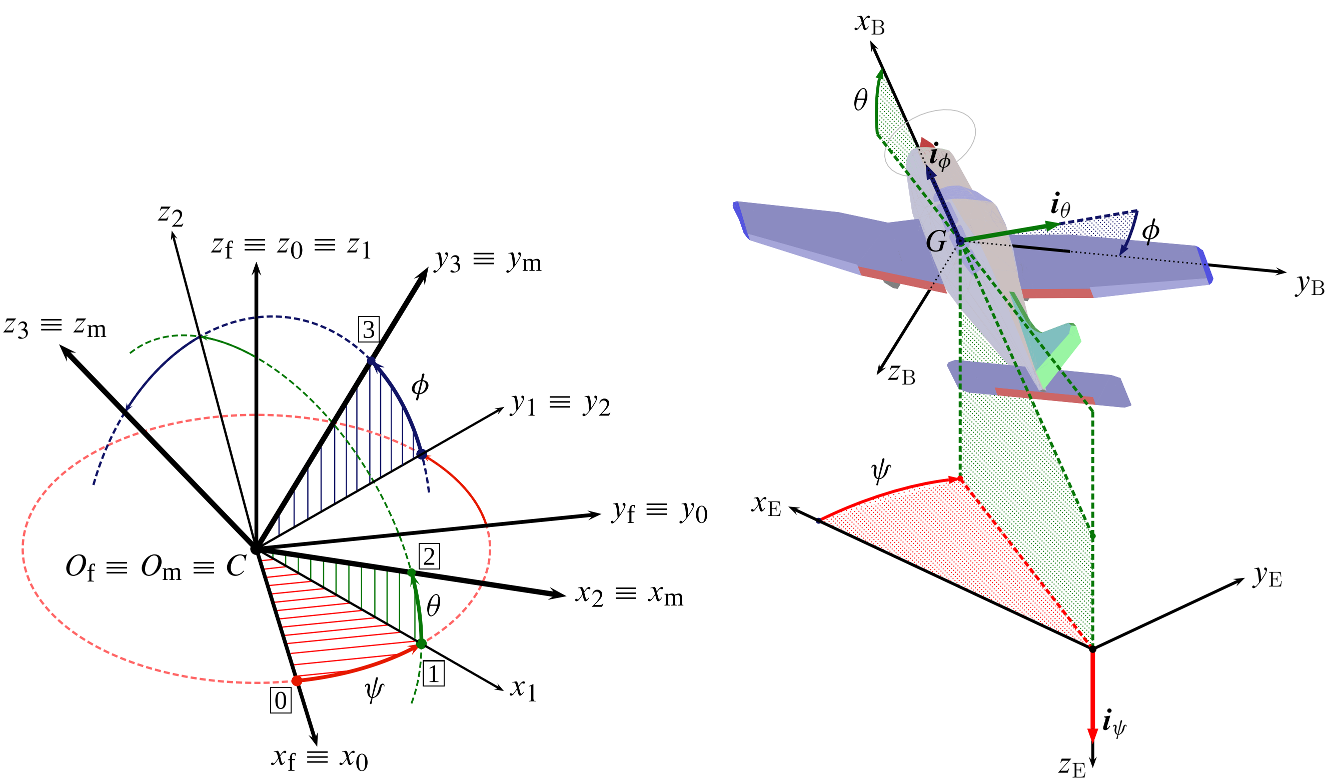


Figura 2.1 Sequenza delle rotazioni nella definizione degli angoli di Eulero di un velivolo.

2. una rotazione del sistema $\{C, x_1, y_1, z_1\}$ intorno ad y_1 dell'angolo θ per portarsi nella posizione individuata dalla terna $\{C, x_2, y_2, z_2\}$ (avente $y_2 \equiv y_1$);
3. una rotazione del sistema $\{C, x_2, y_2, z_2\}$ intorno ad x_2 dell'angolo ϕ per portarsi nella posizione finale individuata dalla terna $\{C, x_3, y_3, z_3\} \equiv \{C, x_m, y_m, z_m\}$ (avente $x_2 \equiv x_3 \equiv x_m$); in questa situazione la terna iniziale si è venuta a sovrapporre a quella mobile.

L'ordine delle rotazioni è molto importante. In generale se le rotazioni avvenissero con ordine diverso, a parità di angoli, l'orientamento finale al quale perverrebbe la terna $\mathcal{T}_0$ sarebbe diverso.

Quando la terna mobile è quella degli assi velivolo, $\mathcal{T}_m \equiv \mathcal{T}_B$, gli angoli di Eulero definiti in questo modo sono gli *angoli di Eulero del velivolo* e vengono denominati: *angolo di azimuth* o di angolo *di rotta* ψ (*heading*), *angolo di elevazione* θ (*elevation*) ed *angolo di inclinazione laterale* ϕ (*bank*). Quando la terna mobile è, ad esempio, quella degli assi aerodinamici, $\mathcal{T}_m \equiv \mathcal{T}_A$, allora si parlerà di *angoli di Eulero della terna aerodinamica*, $(\psi_A, \theta_A, \phi_A)$. Analogamente, si potrà parlare di angoli di Eulero della terna degli assi vento, $(\psi_W, \theta_W, \phi_W)$.

Si osservi che spesso i nomi con cui tali angoli vengono chiamati sono fuorvianti: angolo di "imbardata", di "beccheggio" e di "rollio". Questi nomi corrispondono alla traduzione dei termini inglesi *yaw*, *pitch* e *roll*. C'è infatti una sottile ma importante differenza tra gli angoli di Eulero e gli angoli di *yaw*, *pitch* e *roll*. L'angolo di azimuth rappresenta una rotazione intorno all'asse fisso $z_f \equiv z_E$ mentre lo *yaw*, l'imbardata, è una rotazione intorno alla posizione istantanea di $z_m \equiv z_B$. Analogamente, l'angolo di elevazione rappresenta una rotazione intorno all'asse ausiliario y_1 mentre il *pitch*, il beccheggio, è una rotazione intorno all'asse velivolo $y_m \equiv y_B$. Infine, come si può vedere dalle figure 1.17 e 1.19 e dalla formula vettoriale (1.13), i vettori rotazione o, ugualmente,

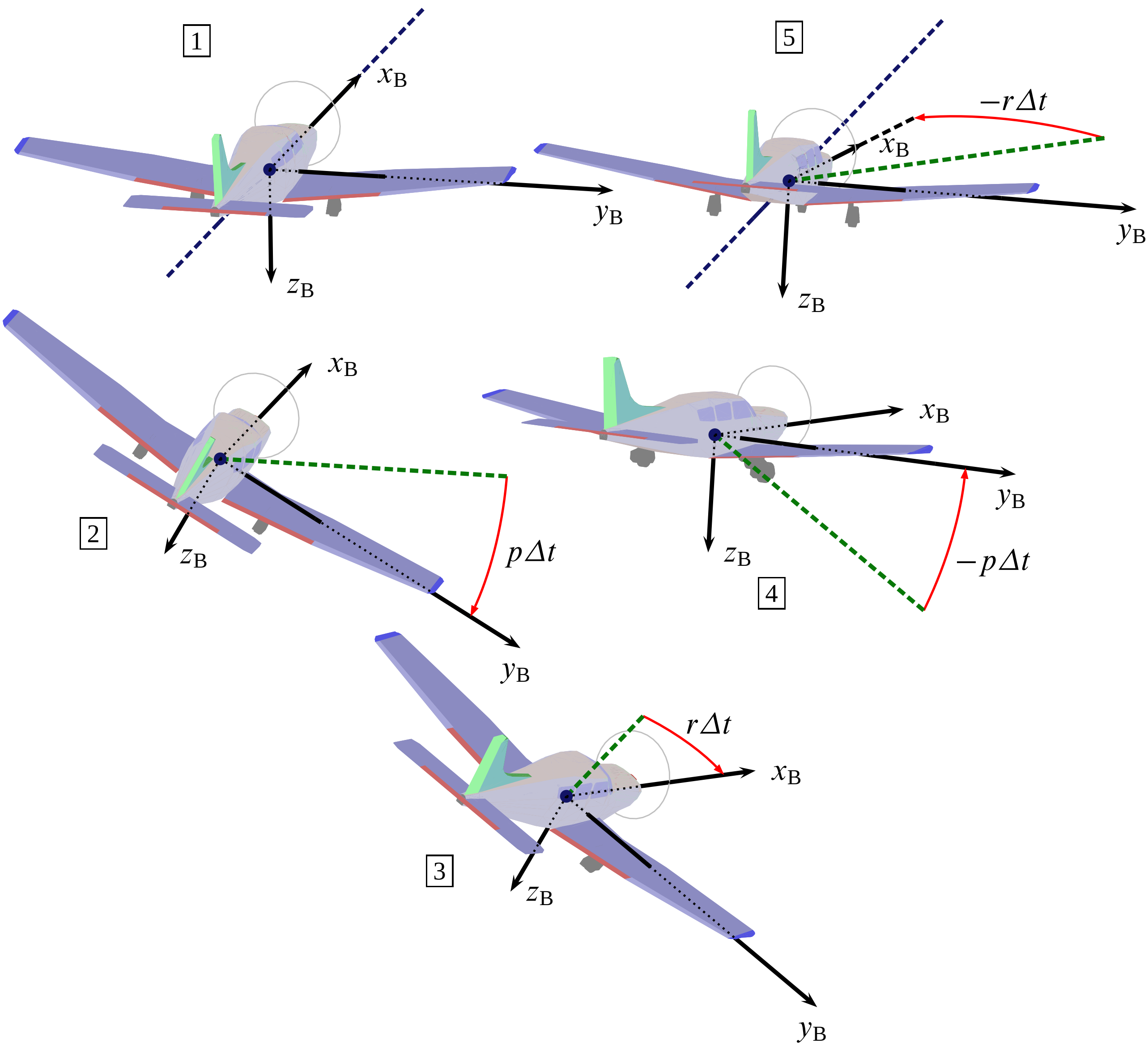


Figura 2.2 Effetto della combinazione di soli moti di puro rollio e pura imbardata sull'orientamento finale del velivolo. Per rotazioni finite, $p\Delta t \rightarrow r\Delta t \rightarrow -p\Delta t \rightarrow -r\Delta t$, l'angolo di elevazione finale θ è diverso da quello iniziale.

i corrispondenti vettori velocità di rotazione $\dot{\psi}\boldsymbol{i}_\psi \equiv \dot{\psi}\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$, $\dot{\theta}\boldsymbol{i}_\theta \equiv \dot{\theta}\,\boldsymbol{j}_1$, $\dot{\phi}\boldsymbol{i}_\phi \equiv \dot{\phi}\boldsymbol{i}_\mathrm{B}$ non sono in generale ortogonali tra di loro mentre i vettori di *yaw*, *pitch* e *roll* ovviamente lo sono.

A partire da un dato istante t del moto e considerando un intervallo di tempo elementare $\mathrm{d}t$, gli angoli di *yaw*, *pitch* e *roll* si possono immaginare come le rotazioni elementari $r\mathrm{d}t$, $q\mathrm{d}t$ e $p\mathrm{d}t$, rispettivamente, che determinano una variazione di orientamento del velivolo. Si osservi che trattandosi di rotazioni elementari l'ordine non ha importanza, cosa che non è più vera nel caso di rotazioni di entità finita. Le storie temporali degli angoli di Eulero, e quindi le storie degli assetti di un velivolo, sono evidentemente legate ai moti di imbardata, beccheggio e rollio, ma tale relazione non è biunivoca. Ad esempio, nella figura 2.2 è rappresentata una situazione in cui una combinazione di soli moti di puro rollio ed imbardata determinano una variazione di angolo di elevazione θ, senza necessariamente avere un moto di beccheggio.

A ciascuna terna di angoli di Eulero deve corrispondere un unico orientamento degli

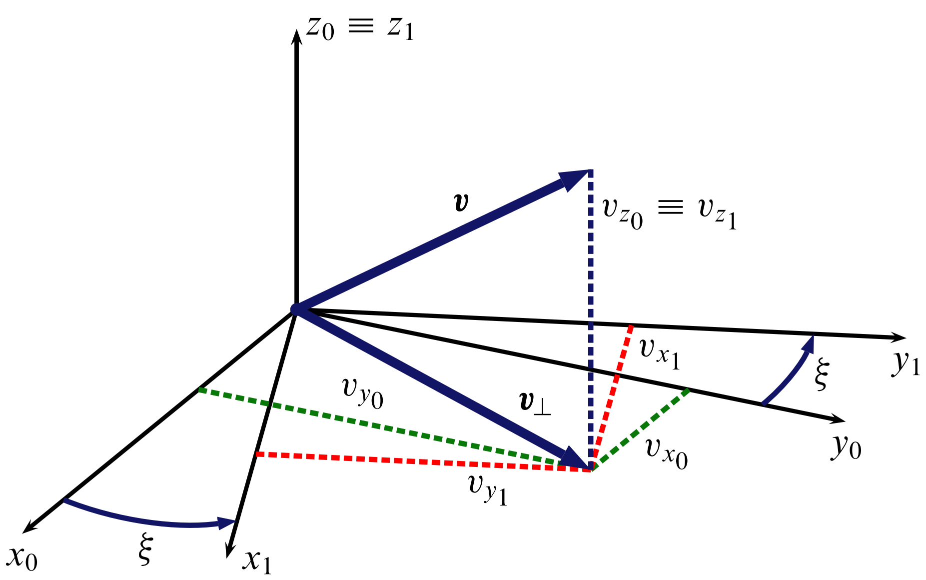


Figura 2.3 Componenti del generico vettore $\boldsymbol{v}$ nel riferimento iniziale $\mathcal{T}_0$ e nel riferimento $\mathcal{T}_1$, ottenuto dal primo mediante rotazione di un angolo ξ intorno a z_0.

assi velivolo, cioè a due orientamenti diversi del riferimento mobile devono corrispondere due terne diverse di valori degli angoli di Eulero. Inoltre, seppure ad assegnati valori degli angoli di Eulero corrispondono secondo la definizione tre rotazioni consecutive che porterebbero un ipotetico sistema di coordinate ad orientarsi come il sistema di assi velivolo, tale orientamento non deve dipendere in alcun modo da come il velivolo è pervenuto a quell'assetto nella storia del suo moto fino all'istante considerato. Si osservi pertanto che, trattandosi di angoli, l'assetto del velivolo dovrebbe essere una funzione periodica di ciascun angolo di Eulero. Per evitare la complicazione di trattare questa forma di periodicità, che porterebbe ad una mancata biunivocità tra orientamento e terne di angoli di Eulero, sono universalmente accettati nel campo aeronautico gli intervalli di variazione definiti dalle (1.12).

2.2.2 Rotazioni notevoli e matrici di trasformazione

A questo punto vengono richiamate alcune nozioni di base della geometria analitica. Come si deduce dalla figura 2.3, se $\{v\}_0 = \big[v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}\big]^{\mathrm{T}}$ è una matrice colonna che rappresenta un vettore $\boldsymbol{v}$ nella terna di riferimento $\mathcal{T}_0$ e se $\mathcal{T}_1$ è una nuova terna ottenuta dalla prima attraverso una rotazione intorno all'asse z_0 (asse 3) di un angolo ξ, allora lo stesso vettore espresso nella nuova terna è dato dalla

$$\begin{Bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 \\ -\sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_0} \\ v_{y_0} \\ v_{z_0} \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

ovvero

$$\{v\}_1 = \big[R(3,\xi)\big]\{v\}_0 \tag{2.2}$$

Generalizzando, la legge di trasformazione delle componenti di un vettore da un riferimento ad un altro, ottenuta per rotazione di un angolo ξ intorno ad uno degli assi coordinati è espressa, rispettivamente, dalle matrici ortogonali seguenti

$$\big[R(1,\xi)\big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi & \sin\xi \\ 0 & -\sin\xi & \cos\xi \end{bmatrix} \qquad \big[R(2,\xi)\big] = \begin{bmatrix} \cos\xi & 0 & -\sin\xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\xi & 0 & \cos\xi \end{bmatrix}$$

$$\big[R(3,\xi)\big] = \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 \\ -\sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

La generica matrice di trasformazione, $[R(k,\xi)]$, ha l'elemento diagonale k-mo pari ad 1, gli elementi diagonali rimanenti uguali al $\cos\xi$, gli elementi rimanenti della colonna e della riga k-me nulli; infine, gli elementi rimanenti corrispondono al $\sin\xi$ o al $-\sin\xi$ a seconda se questi si trovano al di sotto o al di sopra (in senso ciclico) della riga contenente l'elemento 1. Tali matrici godono dell'importante proprietà di essere *ortogonali*, cioè tali che $[R(k,\xi)]^{-1} = [R(k,\xi)]^{\mathrm{T}}$. Coincidendo l'inversa con la trasposta, il passaggio di componenti inverso dalla terna $\mathcal{T}_1$ alla $\mathcal{T}_0$ è immediato: $\{v\}_0 = [R(k,\xi)]^{\mathrm{T}}\{v\}_1$.

Dall'esame della figura 2.1 si deducono le seguenti relazioni di trasformazione

$$\begin{Bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{E}} \\ v_{y_\mathrm{E}} \\ v_{z_\mathrm{E}} \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{E}} \\ v_{y_\mathrm{E}} \\ v_{z_\mathrm{E}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

valide per la trasformazione $\mathcal{T}_\mathrm{E} \to \mathcal{T}_1$ e per la sua inversa;

$$\begin{Bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{z_1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

per la trasformazione $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ e la sua inversa; infine

$$\begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{B}} \\ v_{y_\mathrm{B}} \\ v_{z_\mathrm{B}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\begin{Bmatrix} v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{z_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{B}} \\ v_{y_\mathrm{B}} \\ v_{z_\mathrm{B}} \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

per la trasformazione $\mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_\mathrm{B}$ e la sua inversa.

La composizione delle trasformazioni precedenti permette di esprimere la relazione che lega le componenti di uno stesso vettore nel sistema di assi Terra e nel sistema degli assi velivolo. Per la trasformazione diretta $\mathcal{T}_{\mathrm{E}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{B}}$, detta *earth-to-body*, si ha

$$\begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{B}} \\ v_{y_\mathrm{B}} \\ v_{z_\mathrm{B}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{E}} \\ v_{y_\mathrm{E}} \\ v_{z_\mathrm{E}} \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

Per la sua inversa, *body-to-earth*,

$$\begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{E}} \\ v_{y_\mathrm{E}} \\ v_{z_\mathrm{E}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{B}} \\ v_{y_\mathrm{B}} \\ v_{z_\mathrm{B}} \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

Quest'ultima, dopo aver esplicitato i prodotti riga per colonna, diventa

$$\begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{E}} \\ v_{y_\mathrm{E}} \\ v_{z_\mathrm{E}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta\, C_\psi & S_\phi\, S_\theta\, C_\psi - C_\phi\, S_\psi & C_\phi\, S_\theta\, C_\psi + S_\phi\, S_\psi \\ C_\theta\, S_\psi & S_\phi\, S_\theta\, S_\psi + C_\phi\, C_\psi & C_\phi\, S_\theta\, S_\psi - S_\phi\, C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi\, C_\theta & C_\phi\, C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{B}} \\ v_{y_\mathrm{B}} \\ v_{z_\mathrm{B}} \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

ovvero, come espressione formalmente compatta

$$\{v\}_\mathrm{E} = [T]_\mathrm{EB}\{v\}_\mathrm{B} \tag{2.13}$$

dove

$$[T]_\mathrm{EB} = \big[R(3,\psi)\big]^\mathrm{T}\big[R(2,\theta)\big]^\mathrm{T}\big[R(1,\phi)\big]^\mathrm{T} \tag{2.14}$$

è la *matrice di trasformazione inversa*. La trasformazione diretta è dunque data dalla

$$\begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{B}} \\ v_{y_\mathrm{B}} \\ v_{z_\mathrm{B}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta\, C_\psi & C_\theta\, S_\psi & -S_\theta \\ S_\phi\, S_\theta\, C_\psi - C_\phi\, S_\psi & S_\phi\, S_\theta\, S_\psi + C_\phi\, C_\psi & S_\phi\, C_\theta \\ C_\phi\, S_\theta\, C_\psi + S_\phi\, S_\psi & C_\phi\, S_\theta\, S_\psi - S_\phi\, C_\psi & C_\phi\, C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{x_\mathrm{E}} \\ v_{y_\mathrm{E}} \\ v_{z_\mathrm{E}} \end{Bmatrix} \tag{2.15}$$

ovvero dalla

$$\{v\}_\mathrm{B} = [T]_\mathrm{BE}\{v\}_\mathrm{E} \tag{2.16}$$

dove

$$[T]_\mathrm{BE} = \big[R(1,\phi)\big]\big[R(2,\theta)\big]\big[R(3,\psi)\big] \tag{2.17}$$

è la *matrice di trasformazione diretta*. Le matrici di trasformazione (2.14) e (2.17) sono anche dette *matrici dei coseni direttori* (*direction cosine matrices*, DCM).

In relazione alla definizione di angoli di Eulero, si osservi la successione delle moltiplicazioni delle matrici di rotazione nelle espressioni (2.17) e (2.14) che definiscono le matrici di trasformazione tra le terne $\mathcal{T}_{\mathrm{E}}$ e $\mathcal{T}_{\mathrm{B}}$. Nella (2.17), osservando il secondo membro da destra verso sinistra, le matrici di rotazione compaiono nello stesso ordine in cui si susseguono le rotazioni che definiscono gli angoli di Eulero. Nella (2.14) che esprime la rotazione inversa dal sistema di assi corpo a quello di assi Terra le matrici di rotazione compaiono nell'ordine inverso e nella forma inversa (trasposta).

2.2.3 Componenti del peso

Un esempio di applicazione della formula (2.15) si ha quando si vogliono determinare, istante per istante, le componenti della forza peso dell'aeromobile, $\boldsymbol{W} = W\boldsymbol{k}_{\mathrm{E}}$, nella terna degli assi velivolo. È immediato dedurre che il vettore peso $\boldsymbol{W}$ è esprimibile nel riferimento degli assi Terra come

$$\{W\}_{\mathrm{E}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{Bmatrix} = W \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

dove m è la massa del velivolo, g è l'accelerazione gravitazionale (da considerarsi costante nello studio del volo atmosferico, $g \equiv g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$) e $W = m\,g$.

Se si esaminano le equazioni alla traslazione del moto velivolo, scritte nel riferimento ad esso solidale, si deduce che il contributo alla risultante delle forze esterne dovuto all'azione del peso è dato da

$$\{W\}_{\mathrm{B}} = [T]_{\mathrm{BE}}\{W\}_{\mathrm{E}} \qquad \begin{Bmatrix} W_{x_{\mathrm{B}}} \\ W_{y_{\mathrm{B}}} \\ W_{z_{\mathrm{B}}} \end{Bmatrix} = W \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \sin\phi\,\cos\theta \\ \cos\phi\,\cos\theta \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

La (2.19) si giustifica osservando che l'unico elemento non nullo di $\{W\}_{\mathrm{E}}$ è il terzo, cioè la componente di $\boldsymbol{W}$ secondo z_{E}. In pratica la moltiplicazione di $[T]_{\mathrm{BE}}$ per $\{W\}_{\mathrm{E}}$ estrae la terza colonna della matrice di trasformazione, come si può verificare esaminando la (2.15). Si noti che le componenti del peso sugli assi velivolo non dipendono dall'angolo di azimuth ψ.

2.3 Derivate temporali degli angoli di Eulero e *Gimbal equations*

Un'altra applicazione importante delle formule di trasformazione (2.4)-(2.9) riguarda la relazione che esprime i ratei di variazione degli angoli di Eulero in termini delle componenti del vettore velocità di rotazione istantanea del velivolo nel riferimento $\mathcal{T}_{\mathrm{B}}$, $\{\Omega\}_{\mathrm{B}} = [p, q, r]^{\mathrm{T}}$. Tale legame è riconducibile all'espressione (1.13), che è stata ricavata mediante una somma vettoriale.

Alla luce del significato delle matrici di rotazione $\big[R(k,\xi)\big]$ è possibile ottenere la relazione desiderata a mezzo di una composizione di matrici colonna costruite in base alle definizioni degli angoli di Eulero. Se si osserva che l'angolo di *bank* ϕ è definito come rotazione di base nel riferimento $\mathcal{T}_2$, l'angolo di elevazione θ come una rotazione di base nel riferimento $\mathcal{T}_1$ e l'angolo di azimuth ψ come rotazione di base nel riferimento

$\mathcal{T}_0 \equiv \mathcal{T}_\mathrm{E}$, ne consegue che

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & -S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & S_\psi & 0 \\ -S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

ovvero, in forma compatta,

$$\begin{aligned} \{\Omega\}_\mathrm{B} = {} & \big[R(1,\phi)\big]\{\dot{\phi}\}_2 + \\ & \big[R(1,\phi)\big]\big[R(2,\theta)\big]\{\dot{\theta}\}_1 + \\ & \big[R(1,\phi)\big]\big[R(2,\theta)\big]\big[R(3,\psi)\big]\{\dot{\psi}\}_\mathrm{E} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Esplicitando i termini dei prodotti nella (2.3) si ottiene

$$\begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

cioè, in forma compatta,

$$\{\Omega\}_\mathrm{B} = [G] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad \text{dove} \quad [G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Si osservi che nelle (2.22)-(2.23) la matrice colonna $[\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^\mathrm{T}$, al contrario della $\{\Omega\}_\mathrm{B} = [p, q, r]^\mathrm{T}$, *non* rappresenta un'entità vettoriale ma una collezione di ratei di variazione angolare. Infatti i suoi singoli elementi sono componenti di tre diversi vettori in tre diverse terne di riferimento. Pertanto la matrice $[G]$ che caratterizza la trasformazione (2.23) *non* è una matrice ortogonale.

È facile verificare che l'inversa di $[G]$ è la matrice che compare nella trasformazione inversa

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & \dfrac{C_\phi S_\theta}{C_\theta} \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & \dfrac{S_\phi}{C_\theta} & \dfrac{C_\phi}{C_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

cioè, in forma compatta,

$$[G]^{-1}\{\Omega\}_\mathrm{B} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad \text{dove} \quad [G]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & \dfrac{C_\phi S_\theta}{C_\theta} \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & \dfrac{S_\phi}{C_\theta} & \dfrac{C_\phi}{C_\theta} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Le (2.23) o (2.25) vengono denominate *gimbal equations*. Infatti, come si intuisce dalla figura 2.1, tali equazioni determinano le variazioni di posizione angolare dei riferimenti rispetto ai quali si definiscono istante per istante gli angoli di Eulero. Questi, corrispondono agli anelli (*gimbals*) della sospensione cardanica rappresentata nella figura 1.19 e la loro posizione corrisponde all'orientamento corrente del velivolo.

2.3.1 Relazioni cinematiche ausiliarie

Si considerino noti ad un generico istante i vettori velocità del baricentro $\boldsymbol{V}$ e velocità di rotazione istantanea $\boldsymbol{\Omega}$. Se si sceglie come terna mobile la terna degli assi velivolo, $\mathcal{T}_\mathrm{m} \equiv \mathcal{T}_\mathrm{B}$, e nelle consuete ipotesi di Terra piatta ed inerziale, come terna fissa la terna degli assi Terra, $\mathcal{T}_\mathrm{f} \equiv \mathcal{T}_\mathrm{E}$, ciò significa che si conoscono le componenti dei vettori colonna $\{V\}_\mathrm{B}$ e $\{\Omega\}_\mathrm{B}$, ovvero i sei elementi scalari della matrice colonna $\big[[u,v,w]^\mathrm{T},[p,q,r]^\mathrm{T}\big]^\mathrm{T}$.

Dalle relazioni di trasformazione (2.12) e (2.24) si ottiene

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{\mathrm{E},G} \\ \dot{y}_{\mathrm{E},G} \\ \dot{z}_{\mathrm{E},G} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta\, C_\psi & S_\phi\, S_\theta\, C_\psi - C_\phi\, S_\psi & C_\phi\, S_\theta\, C_\psi + S_\phi\, S_\psi \\ C_\theta\, S_\psi & S_\phi\, S_\theta\, S_\psi + C_\phi\, C_\psi & C_\phi\, S_\theta\, S_\psi - S_\phi\, C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi\, C_\theta & C_\phi\, C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & \dfrac{C_\phi S_\theta}{C_\theta} \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & \dfrac{S_\phi}{C_\theta} & \dfrac{C_\phi}{C_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \tag{2.27}$$

un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine che mettono in relazione le incognite fondamentali delle equazioni del moto, ovvero le componenti della velocità del baricentro e di rotazione istantanea nel sistema di assi velivolo, con le variazioni temporali della posizione del baricentro e dell'orientamento del velivolo rispetto agli assi del riferimento Terra.

Le (2.26)-(2.27) costituiscono delle *relazioni cinematiche ausiliarie* la cui integrazione nel tempo permette di determinare la traiettoria del baricentro e la storia degli orientamenti successivi del velivolo.

Le (2.27) presentano una singolarità, in particolare nei termini in cui il $\cos\theta$ compare al denominatore nella prima ed ultima riga della matrice $[G]^{-1}$. Quando l'assetto del velivolo è tale che l'angolo θ tende a $+\frac{\pi}{2}$ (figura 2.4) o a $-\frac{\pi}{2}$ la trasformazione data dalle (2.27) perde significato, essendo indeterminata in tali condizioni l'integrazione nel tempo degli angoli di Eulero. Questa singolarità è comunemente nota come *gimbal lock* e, per via della sua esistenza, praticamente nessun software di simulazione commerciale o di applicazione generale, che risolve numericamente le equazioni del moto di un velivolo a sei gradi di libertà (*6-DOF*, *degrees of freedom*), adotta una formulazione delle equazioni cinematiche ausiliarie basata sugli angoli di Eulero. Esistono infatti delle formulazioni alternative, prive di singolarità, come ad esempio quelle basate sul *quaternione* dell'orientamento o sulle trasformazioni dei *coseni direttori*.

Gli angoli di Eulero si prestano comunque ad una conveniente trattazione di diversi problemi della dinamica del volo dove il raggiungimento di angoli di elevazione elevati non si verifica. Un esempio è la derivazione delle equazioni linearizzate del moto. Inoltre, molti aeroplani in condizioni operative normali mantengono orientamenti tali da poter opportunamente adottare le (2.26)-(2.27) come relazioni cinematiche ausiliarie. Al contrario, la formulazione basata sugli angoli di Eulero non si addice alla simulazione del volo di velivoli acrobatici, militari o aeromobili a lancio verticale.

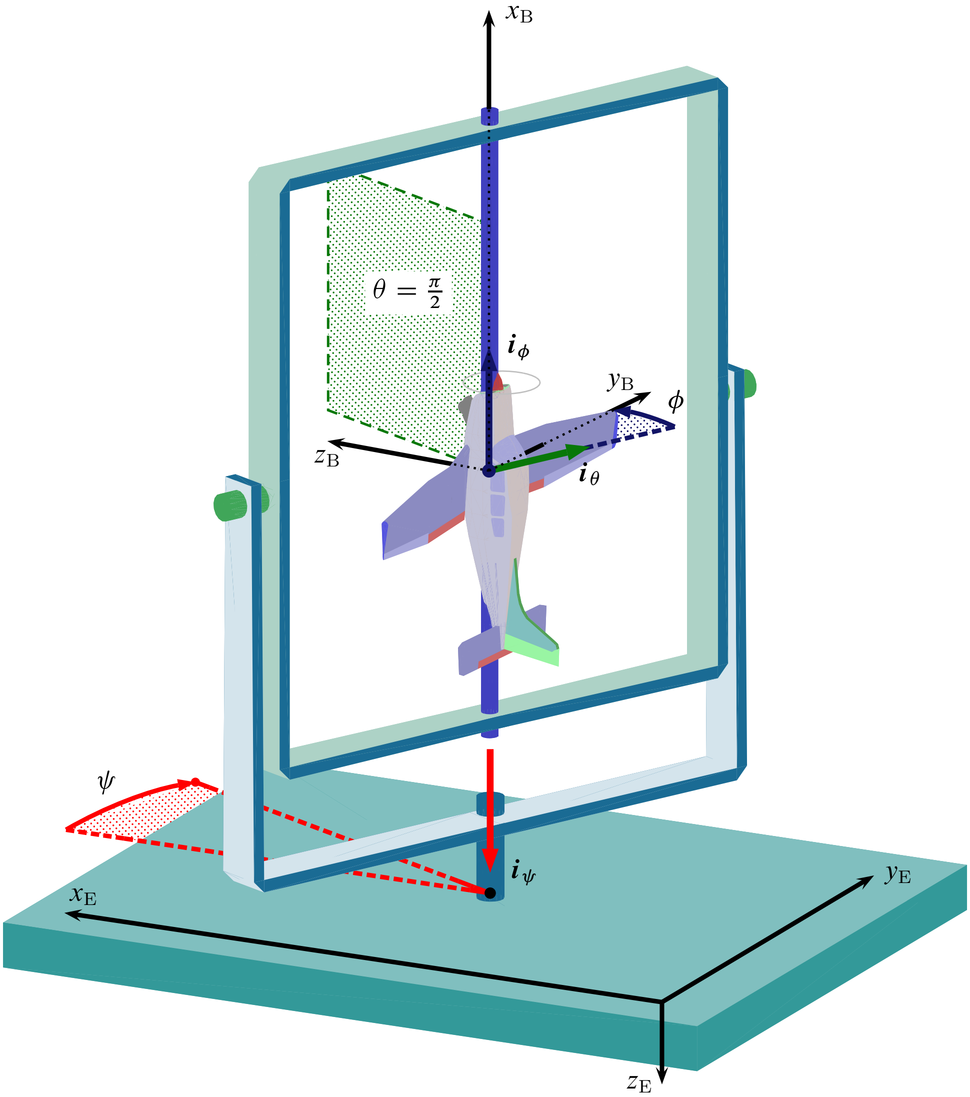


Figura 2.4 Esempio di orientamento del velivolo per il quale si verifica il *gimbal lock*. In tale situazione, $\theta = 90\,\text{deg}$, il medesimo orientamento può essere dato anche da altre combinazioni di angoli ψ e ϕ.

Esercizio 2.1: *Orientamento di un velivolo in assi terra*

Per una data posizione del baricentro e un'assegnata terna di angoli di Eulero in assi terra si produca una rappresentazione visuale in ambiente Matlab del modello tridimensionale di un velivolo.

Esempio di svolgimento

Il problema assegnato può essere risolto preparando preliminarmente un modello geometrico tridimensionale della forma esterna del velivolo nel formato standard STL (*STereo Lithography interface format*). Un file STL contiene una o più tassellazioni superficiali, ciascuna costituita da elementi triangolari. Quando è salvato in forma testuale esso può essere importato agevolmente nel workspace di Matlab, ottenendo un array con le coordinate dei vertici dei triangoli insieme a delle di matrici con le informazioni di interconnessione delle facce triangolari. Si consideri il codice seguente.

```
clear all; close all; clc

%% Load aircraft 3D model
%  see http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/aircraft_models.zip
shapeScaleFactor = 1.0;
[V, F, C] = loadAircraftSTL('aircraft_pa24-250.stl', shapeScaleFactor); ❶
% save shape in .mat format for future use
shape.V = V; shape.F = F; shape.C = C;
save('aircraft_pa24-250.mat', 'shape'); ❷
```

(continua)

Si evidenzia la chiamata ❶ alla funzione **loadAircraftSTL** (il cui sorgente è contenuto nell'archivio scaricabile dal link indicato) che restituisce le matrici V, F e C. Esse descrivono la tassellazione della forma esterna di un aeromobile i cui assi $\{x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B}\}$ coincidono con gli assi terra $\{x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E}, z_\mathrm{E}\}$. Nell'esempio viene caricata la forma di un velivolo simile a un Piper PA-24 Comanche, che viene poi immagazzinata in una variabile `shape` e salvata ❷ in un MAT-file in formato binario.

Successivamente è possibile impostare la rappresentazione del velivolo in una figura di Matlab come segue.

(continua dal listato precedente)

```
%% Setup the figure/scene
h_fig1 = figure(1);
grid on
hold on
light('Position',[1 0 -2],'Style','local');
% Trick to have Ze pointing downward and correct visualization
set(gca,'XDir','reverse');
set(gca,'ZDir','reverse'); ❸

%% Display aircraft shape
p = patch('faces', shape.F, 'vertices', shape.V); ❹
set(p, 'facec', [1 0 0]);
set(p, 'EdgeColor','none');
theView = [-125 30];
view(theView); ❺
axis equal;
lighting phong
hold on
```

(continua)

Si crea una figura con un'opportuna illuminazione della scena e si impostano i versi degli assi ❸ in modo da avere delle coordinate z_E crescenti verso il basso. La chiamata ❹ al comando `patch` e le successive istruzioni realizzano la visualizzazione della superficie esterna del velivolo. In particolare, la chiamata ❺ imposta l'orientamento dell'osservatore all'interno della scena (si veda la documentazione del comando `view`).

Infine, si disegnano gli assi terra impostando opportunamente i valori massimi e minimi delle coordinate da rappresentare. Il codice seguente esegue queste operazioni.

(continua dal listato precedente)

```
%% Plot axes
xMax = 1.8*max(abs(shape.V(:,1)));
yMax = 1.8*max(abs(shape.V(:,2)));
zMax = 0.5*xMax;
quiver3(0,0,0,xMax,0,0, ... ❻
    'r','linewidth',2.5 ...
);
hold on
quiver3(0,0,0,0,yMax,0, ...
    'g','linewidth',2.5 ...
);
hold on
quiver3(0,0,0,0,0,zMax, ...
    'b','linewidth',2.5 ...
);
```

La chiamata ❻ alla funzione `quiver3` è un esempio con cui si disegna un vettore applicato in un punto dello spazio e di cui sono note le tre componenti cartesiane. L'ultimo frammento di codice può essere utilizzato per definire una funzione **plotEarthAxes** che disegna gli assi terra, eventualmente spostandone l'origine e modificandone l'estensione come si conviene (si veda il materiale software fornito).

Eseguendo lo script su riportato si ottiene la figura 2.5 nella pagina seguente. A questo punto il codice precedente può essere rifattorizzato e adattato in modo da collocare la geometria del velivolo in un qualsiasi punto e con un orientamento desiderato. Il seguente Matlab script è basato sul codice precedente e produce la figura 2.6 a pagina 17.

```
clear all; close all; clc
%% Setup the figure/scene
h_fig1 = figure(1);
light('Position',[1 0 -2],'Style','local');
% Trick to have Ze pointing downward and correct visualization
set(gca,'XDir','reverse'); set(gca,'ZDir','reverse');
grid on; hold on;

%% Load aircraft shape
shapeScaleFactor = 1.0;
shape = loadAircraftMAT('aircraft_pa24-250.mat', shapeScaleFactor); ❶

%% Set the aircraft in place
% Posision in Earth axes
vXYZe = [2,2,-2]; ❷
% psi, theta, phi -> 'ZYX'
vEulerAngles = convang([20,10,0],'deg','rad'); ❸
% Observer point-of-view
theView = [105 15];
% body axes settings
bodyAxesOptions.show = true; ❹
bodyAxesOptions.magX = 2.0*shapeScaleFactor;
bodyAxesOptions.magY = 2.0*shapeScaleFactor;
bodyAxesOptions.magZ = 1.5*shapeScaleFactor;
bodyAxesOptions.lineWidth = 2.5;
plotBodyE(h_fig1, shape, ... ❺
    vXYZe, vEulerAngles, ... ❻
    bodyAxesOptions, theView);

%% Plot Earth axes
hold on;
xMax = max([abs(vXYZe(1)),5]);
yMax = max([abs(vXYZe(2)),5]);
zMax = 0.3*xMax; % max([abs(max(vXYZe(1))),0.18*xMax]);
vXYZ0 = [0,0,0];
vExtent = [xMax,yMax,zMax];
plotEarthAxes(h_fig1, vXYZ0, vExtent); ❼
```

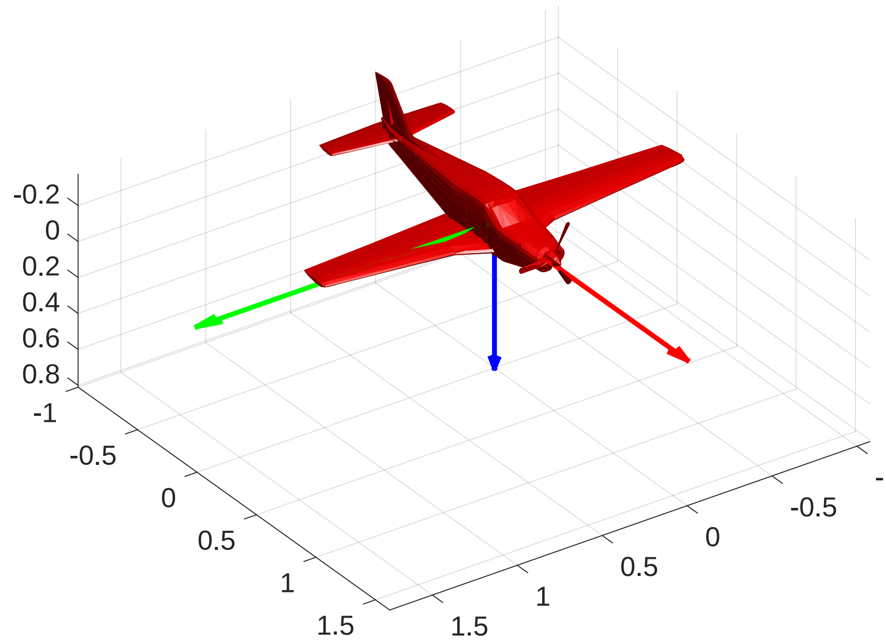


Figura 2.5 Modello tridimensionale di un velivolo. Rappresentazione ottenuta in Matlab con il codice proposto nell'esercizio 2.1.

```
%% draw CoG coordinate helper lines
hold on;
plotPoint3DHelperLines(h_fig1, vXYZe); ❽
```

La chiamata ❶ alla funzione **`loadAircraftMAT`** importa il file binario contenente la tassellazione della forma del velivolo (ricavata precedentemente dal corrispondente file in formato STL testuale) e definisce la variabile strutturata `shape`. Le istruzioni ❷ e ❸ definiscono le variabili `vXYZe` e `vEulerAngles`, cioè, rispettivamente, la terna $(x_{E,G}, y_{E,G}, z_{E,G})$ di coordinate del baricentro in assi terra e la terna di angoli di Eulero (ψ, θ, ϕ). Questi ultimi sono forniti nell'ordine delle rotazioni consecutive discusse in questo capitolo e indicate con la stringa `'ZYX'` nella documentazione della funzione `angle2dcm` (si veda l'Aerospace Toolbox). L'istruzione ❹ e successive impostano i parametri di disegno degli assi velivolo.

La chiamata ❺ alla funzione **`plotBodyE`** è quella che realizza il posizionamento della geometria del velivolo nello spazio (si veda il sorgente fornito per approfondimenti). Essa accetta le variabili `shape`, `vXYZe` e `vEulerAngles` ❻. In pratica, tramite la funzione `angle2dcm` si costruisce la matrice $[T_{BE}]$ con la quale tutti i vertici della tassellazione vengono trasformati (ruotati intorno al baricentro inizialmente coincidente con l'origine degli assi terra) secondo la (2.16). Successivamente tutti i punti vengono traslati in modo da far capitare il baricentro nel punto desiderato.

Le chiamate ❼ e ❽ alle funzioni **`plotEarthAxes`** e **`plotPoint3DHelperLines`** servono a disegnare gli assi terra e ad evidenziare la posizione del baricentro (linee tratteggiate).

Lo script precedente si presta ad una facile rifattorizzazione se si vuole definire una funzione che accetta una sequenza di posizioni del baricentro e una sequenza di altrettante terne di angoli di Eulero. Il risultato è un utile strumento per la visualizzazione del volo di un aeromobile in assi terra.

❖

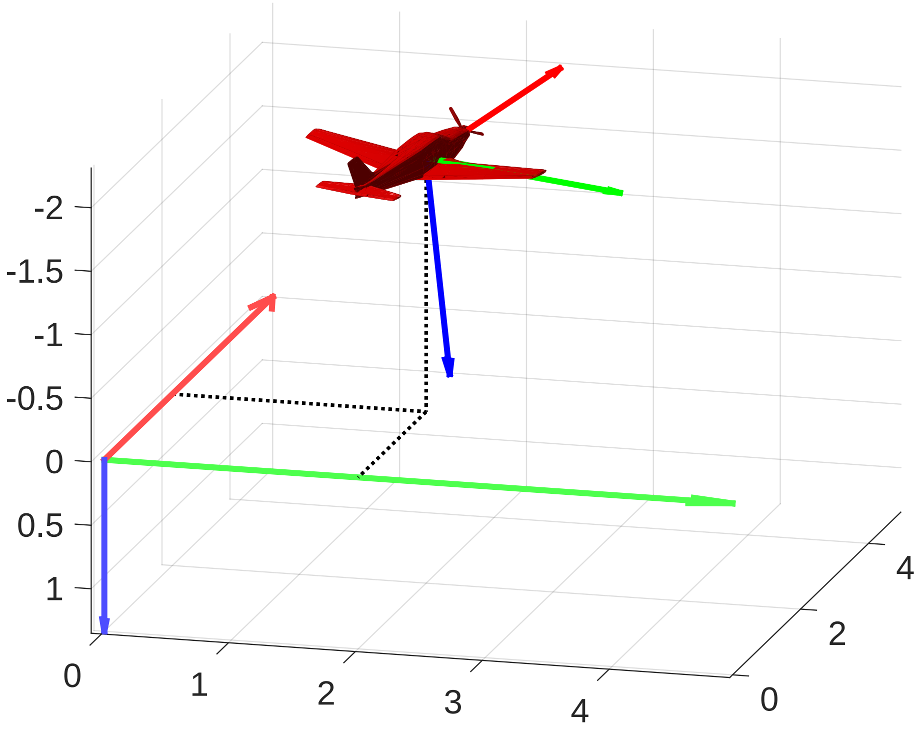


Figura 2.6 Posizionamento e orientamento di un velivolo nello spazio (assi terra). Rappresentazione ottenuta in Matlab con il codice proposto nell'esercizio 2.1.

Esercizio 2.2: *Componenti della forza peso in assi velivolo*

Con riferimento all'esercizio 2.1, calcolare le componenti della forza peso in assi velivolo di del tipo Piper PA-24 Comanche, di una massa $m = 1200\,\text{kg}$ e orientato nello spazio secondo la terna $(\psi, \theta, \phi) = (20\,\text{deg}, 10\,\text{deg}, 0\,\text{deg})$.

Esempio di svolgimento

Il problema assegnato può essere risolto come segue.

(eseguire preliminarmente lo script dell'esercizio 2.1)

```
%% Mass data
mass = 1200.0; % kg
g = 9.81; % m/s^2

%% Euler angles
psi = vEulerAngles(1); theta = vEulerAngles(2); phi = vEulerAngles(3);

%% DCM
% Transf. matrix from Earth- to body-axes
Tbe = angle2dcm(psi, theta, phi, 'ZYX') ❶
vWeight_E = [0;0;mass*g] % N ❷
vWeight_B = Tbe*vWeight_E ❸
```

Il codice precedente produce il seguente output.

```
Tbe =
    0.9254    0.3368   -0.1736
   -0.3420    0.9397         0
    0.1632    0.0594    0.9848

vWeight_E =
           0
           0
       11772
```

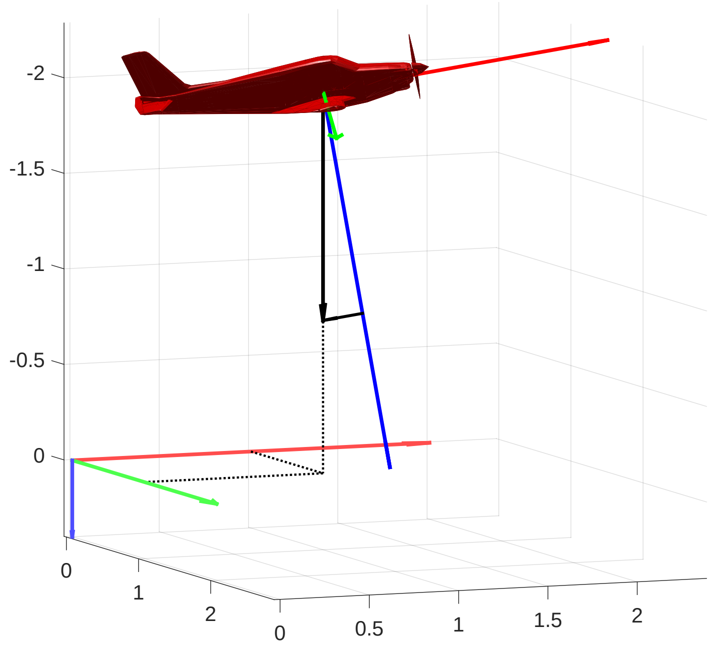


Figura 2.7 Vettore peso del velivolo nell'esercizio 2.2.

```
vWeight_B = 1.0e+04 *
   -0.2044
         0
    1.1593
```

Un vettore verticale rivolto verso il basso e rappresentante il peso del velivolo è disegnato nella figura 2.7. Si osserva che, essendo le ali livellate, la componente del peso $W_{y_\mathrm{B}} = 0$. Come è noto dalle (2.19) le altre due componenti non dipendono dall'angolo ψ e per un'inclinazione $\theta = 10\,\mathrm{deg}$ si ha

$$W_{x_\mathrm{B}} = -2044\,\mathrm{N}\,, \qquad W_{z_\mathrm{B}} = 11593\,\mathrm{N}$$

Esse si ottengono costruendo inizialmente la matrice $[T_\mathrm{BE}]$ con l'istruzione ❶ e il vettore colonna $\{W\}_\mathrm{E}$ con la ❷. La trasformazione $[T_\mathrm{BE}]\{W\}_\mathrm{E}$ è infine realizzata tramite l'istruzione ❸.

❖

Esercizio 2.3: *Rappresentazione delle componenti del peso*

Verificare che i vettori $W\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$ e $W_{x_\mathrm{B}}\boldsymbol{i}_\mathrm{B}$ disegnati nella figura 2.7 sono dati dal codice seguente.

(eseguire preliminarmente gli script degli esercizi 2.1-2.2)

```
%% Draw Weight pointing downward
hold on
scale_weight = 0.0001;
weightVecMag = scale_weight*mass*g;
quiver3( ...
    vXYZe(1),vXYZe(2),vXYZe(3), ...
    0, 0, weightVecMag, ...
    'AutoScale', 'off', 'Color', [0 0 0], 'LineWidth', 2.5 ...
);
```

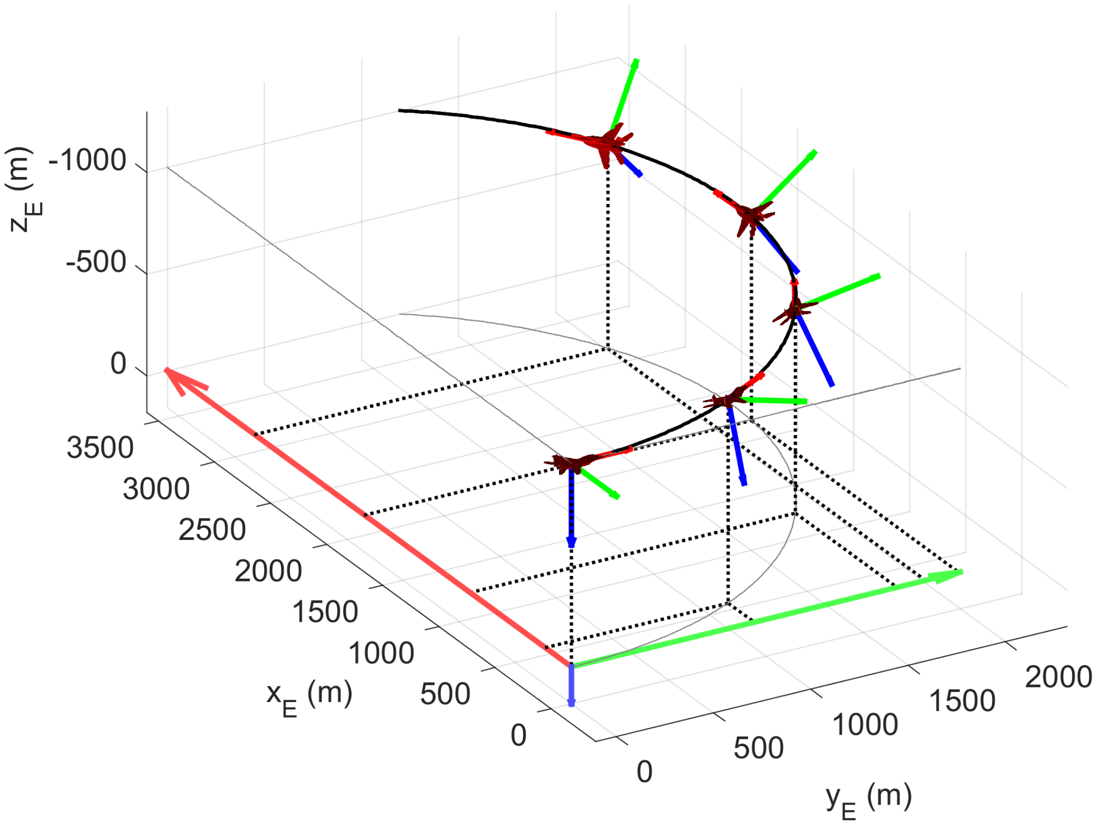


Figura 2.8 Evoluzione di virata a sinistra proposta nell'esercizio 2.4. La direzione iniziale del moto è verso Est e la prua iniziale è $\psi_0 = 90\,\mathrm{deg}$. La geometria del velivolo è ingrandita di 200 volte per chiarezza.

```
%% Vector W_XB * i_B
% application point along z_B
pWZB_B = scale_weight.*[0;0;vWeight_B(3)];
pWZB_E = vXYZe' + Teb*pWZB_B;
% Vector W_XB * i_B (body-components)
vWeight_XB_B = scale_weight.*[vWeight_B(1);0;0];
% Vector W_XB * i_B (Earth-components)
vWeight_XB_E = Teb*vWeight_XB_B;
quiver3( ...
    pWZB_E(1), pWZB_E(2), pWZB_E(3), ...
    vWeight_XB_E(1), vWeight_XB_E(2), vWeight_XB_E(3), ...
    'AutoScale', 'off', 'Color', [0 0 0], 'LineWidth', 2.0, ...
    'MaxHeadSize', 4.0 ...
);
```

❖

Esercizio 2.4: *Orientamenti successivi di un velivolo*

Rappresentare una successione di posizioni e orientamenti nello spazio in cui il velivolo passa da un assetto ad ali livellate e fusoliera orizzontale ad un assetto di volo in virata a sinistra con ali inclinate di un angolo $\phi = -60\,\mathrm{deg}$. Si veda la figura 2.8 e si utilizzi la funzione **plotTrajectoryAndBodyE** nell'archivio fornito.

❖

Esercizio 2.5: *Integrazione delle equazioni cinematiche*

Con riferimento alle equazioni cinematiche (2.26) e (2.27) si definiscano delle opportune leggi di variazione delle componenti di velocità lineare $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ ed angolare $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ in assi velivolo. Dopo aver assegnato le coordinate iniziali del baricentro e i valori iniziali degli angoli di Eulero si integrino numericamente le equazioni cinematiche. Infine si rappresentino le posizioni e gli orientamenti successivi del velivolo in assi terra.

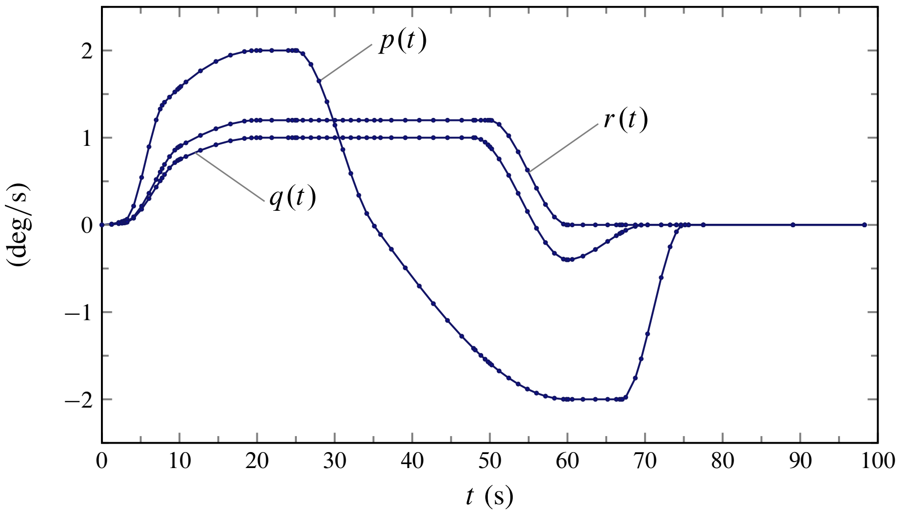
Esempio di svolgimento

Il problema assegnato può essere risolto in Matlab. Per approfondimenti, si rimanda ai quaderni 4 e 5. Si consideri il codice seguente.

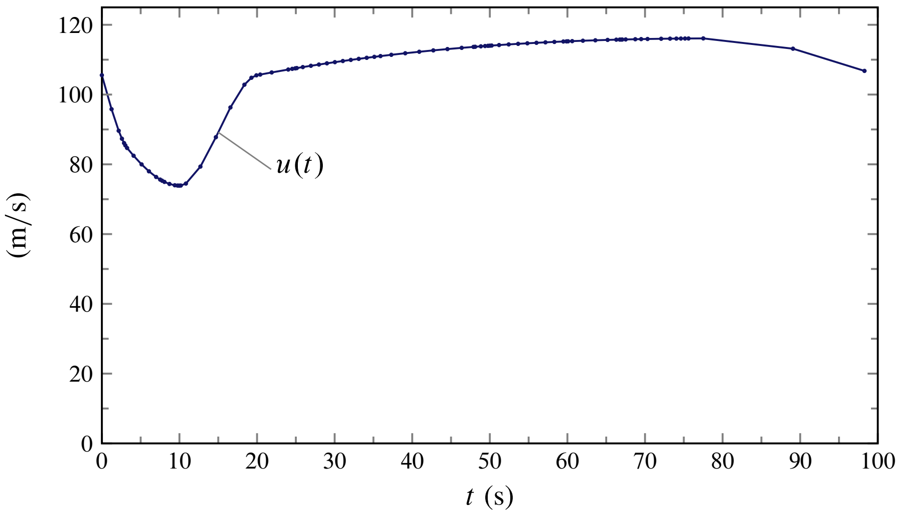
```
clear all; close all; clc
% Simulation final time
t_fin = 100.0;
% Initial conditions
psi0 = 0; theta0 = 0; phi0 = 0; % Euler angles
z0 = -1000; % altitude offset for visualization

% three appropriate time histories of p, q, r
p_max = convangvel(2.0,'deg/s','rad/s'); % rad/s
q_max = convangvel(1.0,'deg/s','rad/s'); % rad/s
r_max = convangvel(1.2,'deg/s','rad/s'); % rad/s

vBreakPointsP(1,:) = [0, 0.030*t_fin, 0.08*t_fin, 0.20*t_fin, 0.25*t_fin, ...
    0.35*t_fin, 0.60*t_fin,  0.67*t_fin, 0.75*t_fin,  t_fin];
vBreakPointsP(2,:) = [0, 0.025*p_max, 0.70*p_max, 1.00*p_max, 1.00*p_max, ...
    0,          -1.00*p_max, -1.00*p_max, 0,           0];
p = @(t) ...
    interp1( vBreakPointsP(1,:), vBreakPointsP(2,:), t, 'pchip' ); ❶

vBreakPointsQ(1,:) = [0, 0.030*t_fin, 0.10*t_fin, 0.20*t_fin, 0.48*t_fin, ...
    0.60*t_fin, 0.70*t_fin, t_fin];
vBreakPointsQ(2,:) = [0, 0.025*q_max, 0.75*q_max, 1.00*q_max, 1.00*q_max, ...
   -0.40*q_max, 0,          0];
q = @(t) ...
    interp1( vBreakPointsQ(1,:), vBreakPointsQ(2,:), t, 'pchip' ); ❶

vBreakPointsR(1,:) = [0, 0.030*t_fin, 0.10*t_fin, 0.20*t_fin, 0.50*t_fin, ...
    0.60*t_fin, t_fin];
vBreakPointsR(2,:) = [0, 0.025*r_max, 0.75*r_max, 1.00*r_max, 1.00*r_max, ...
    0,          0];
r = @(t) ...
    interp1( vBreakPointsR(1,:), vBreakPointsR(2,:), t, 'pchip' ); ❶

% three appropriate time histories of u, v, w
u0 = convvel(380.0,'km/h','m/s'); % m/s
v0 = convvel(  0.0,'km/h','m/s'); % m/s
w0 = convvel(  0.0,'km/h','m/s'); % m/s

vBreakPointsU(1,:) = [0, t_fin/30, t_fin/10, t_fin/5, 0.8*t_fin, t_fin];
vBreakPointsU(2,:) = [u0,  0.8*u0,   0.7*u0,      u0,    1.1*u0,    u0];
u = @(t) ...
    interp1( vBreakPointsU(1,:), vBreakPointsU(2,:), t, 'pchip' ); ❷
% assume alpha = beta = 0
v = @(t) 0;
w = @(t) 0;
```

(continua)

Per contenere tutto il codice in un unico script di Matlab sono state definite delle *funzioni anonime* della variabile temporale — si vedano le assegnazioni ❶ e ❷ in cui compare la sintassi `@(t)`. Esse utilizzano la funzione predefinita `interp1` ed esprimono le leggi $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ e $u(t)$ attraverso delle funzioni interpolanti opportunamente costruite (per semplicità si assumono funzioni v e w identicamente nulle). Tali funzioni sono riportate nella figura 2.9 nella pagina successiva. In particolare, le leggi di p, q ed r vanno utilizzate



(a) Componenti p, q ed r della velocità angolare.



(b) Componente u della velocità del baricentro.

Figura 2.9 Storie temporali delle componenti di velocità angolare e traslazionale assegnate nell'esercizio 2.5.

per definire le tre funzioni scalari che costituiscono i secondi membri del sistema (2.27). Essi sono delle funzioni del tempo t e dei tre angoli di Eulero ϕ, θ, ψ.

A questo punto va definita di una funzione anonima `dPhiThetaPsidt` da passare alla funzione predefinita `ode45`. Per l'integrazione del sistema di equazioni differenziali ordinarie (2.27) accoppiato alle condizioni iniziali

$$\phi(0) = \theta(0) = \psi(0) \tag{2.28}$$

la funzione `ode45` deve ricevere in input una terna `vPhiThetaPsi0` di valori iniziali e un intervallo temporale `[0 t_fin]`. Il codice di calcolo continua come segue.

(continua dal listato precedente)

```
% RHS of Gimbal equations, see eq. (2.27)
dPhiThetaPsidt = @(t, x) ... % x -> (phi, theta, psi)
    [1, sin(x(1)).*sin(x(2))./cos(x(2)), ...
            cos(x(1)).*sin(x(2))./cos(x(2)); ...
     0, cos(x(1)), -sin(x(1)); ...
     0, sin(x(1))./cos(x(2)), cos(x(1))./cos(x(2))   ...
        ] * [p(t); q(t); r(t)];
```

```
%% Solution of Gimbal equations
options = odeset( ...
    'RelTol', 1e-9, ...
    'AbsTol', 1e-9*ones(1,3) ...
    );
vPhiThetaPsi0 = [phi0, theta0, psi0];
[vTime, vPhiThetaPsi] = ...
    ode45(dPhiThetaPsidt, [0 t_fin], vPhiThetaPsi0, options); ❶
```
(continua)

La chiamata ❶ risolve numericamente il problema di valori iniziali (2.27)-(2.28).

Noti gli orientamenti nel tempo bisogna ora risolvere il problema di valori iniziali

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{\mathrm{E},G} \\ \dot{y}_{\mathrm{E},G} \\ \dot{z}_{\mathrm{E},G} \end{Bmatrix} = \Big[T_{\mathrm{EB}}(\phi,\theta,\psi) \Big] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \\ x_{\mathrm{E},G}(0) = 0 \,, \quad y_{\mathrm{E},G}(0) = 0 \,, \quad z_{\mathrm{E},G}(0) = z_{\mathrm{E},G,0} \end{cases} \tag{2.29}$$

Sia le componenti di velocità che gli angoli di Eulero nelle equazioni del problema (2.29) sono trattabili a questo punto come delle funzioni note del tempo. Infatti, le funzioni $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$ sono un dato del problema mentre gli angoli di Eulero sono stati ricavati come funzioni tabulari. Esse sono espresse dalla matrice `[vTime,vPhiThetaPsi]` di dimensioni $N \times 5$, con N pari a `length(vTime)`. Le $\phi(t)$, $\theta(t)$, e $\psi(t)$ vengono quindi ricostruite attraverso funzioni anonime che forniscono i valori all'istante generico t per interpolazione a partire dai valori discreti contenuti in `vTime` e `vPhiThetaPsi`.

Si definisce così una funzione anonima `dPosEdt` con i secondi membri delle equazioni del problema (2.29). Tale funzione viene passata a `ode45` insieme al vettore `vTime` precedentemente ricavato e insieme al vettore `vPosE0` della posizione iniziale.

Il codice che ricava la traiettoria del baricentro è il seguente.

(continua dal listato precedente)
```
%% Arrays of velocity components
for i=1:numel(vTime)
    vU(i) = u(vTime(i)); % (anonymous functions evaluated)
    vV(i) = v(vTime(i));
    vW(i) = w(vTime(i));
end

% Time interpolation function for known Euler angles histories
fPhi = @(t) ...
    interp1(vTime,vPhiThetaPsi(:,1),t);
fTheta = @(t) ...
    interp1(vTime,vPhiThetaPsi(:,2),t);
fPsi = @(t) ...
    interp1(vTime,vPhiThetaPsi(:,3),t);
% RHS of navigation equations
dPosEdt = @(t,Pos) ...
    transpose(angle2dcm(fPsi(t),fTheta(t),fPhi(t),'ZYX'))*[u(t);v(t);w(t)];

%% Solution of navigation equations
options = odeset( ...
    'RelTol', 1e-3, ...
    'AbsTol', 1e-3*ones(3,1) ...
    );
vPosE0 = [0;0;0];
[vTime2, vPosE] = ode45(dPosEdt, vTime, vPosE0, options);

vXe = vPosE(:,1); vYe = vPosE(:,2); vZe = z0 + vPosE(:,3);
```
(continua)

Infine, il frammento di codice seguente disegna nello spazio tridimensionale la traiettoria del baricentro e la sequenza di modelli geometrici di un velivolo orientati secondo la successione delle terne di angoli di Eulero ottenute numericamente.

(continua dal listato precedente)

```
%% Setup the figure/scene for 3D visualization
h_fig1 = figure(1);
grid on;
hold on;
light('Position',[1 0 -4],'Style','local');
% Trick to have Ze pointing downward and correct visualization
set(gca,'XDir','reverse');
set(gca,'ZDir','reverse');
daspect([1 1 1]);

%% Load aircraft shape
shapeScaleFactor = 350.0;
shape = loadAircraftMAT('aircraft_mig29.mat', shapeScaleFactor);

mXYZe = [vPosE(:,1),vPosE(:,2),vPosE(:,3)+z0]; ❶
mEulerAngles = [vPhiThetaPsi(:,3),vPhiThetaPsi(:,2),vPhiThetaPsi(:,1)]; ❷

%% Settings
% General settings
options.samples = [1:50:numel(vTime)];
options.theView = [105 15];

% body axes settings
options.bodyAxes.show = true;
options.bodyAxes.magX = 1.5*shapeScaleFactor;
options.bodyAxes.magY = 2.0*shapeScaleFactor;
options.bodyAxes.magZ = 2.0*shapeScaleFactor;
options.bodyAxes.lineWidth = 2.5;

% helper lines
options.helperLines.show = true;
options.helperLines.lineStyle = ':';
options.helperLines.lineColor = 'k';
options.helperLines.lineWidth = 1.5;

% trajectory
options.trajectory.show = true;
options.trajectory.lineStyle = '-';
options.trajectory.lineColor = 'k';
options.trajectory.lineWidth = 1.5;

%% Plot body and trajectory
plotTrajectoryAndBodyE(h_fig1, shape, mXYZe, mEulerAngles, options); ❸

%% Plot Earth axes
hold on;
xMax = max([max(abs(mXYZe(:,1))),5]);
yMax = max([max(abs(mXYZe(:,2))),5]);
zMax = 0.05*xMax;
vXYZ0 = [0,0,0];
vExtent = [xMax,yMax,zMax];
plotEarthAxes(h_fig1, vXYZ0, vExtent);
xlabel('x_E (m)'); ylabel('y_E (m)'); zlabel('z_E (m)')
hold off
```

In quest'ultimo frammento di codice si assemblano le matrici `mXYZe` e `mEulerAngles` con le istruzioni ❶ e ❷. Esse vengono passate, insieme alle variabili `shape` e `options`, alla funzione **`plotTrajectoryAndBodyE`** che con la chiamata ❸ serve a disegnare la traiettoria e il velivolo nelle prescelte posizioni. Si veda la figura 2.10 nella pagina seguente. Il risultato numerico dell'esercizio, cioè l'insieme delle storie temporali dei 6 gradi di libertà del velivolo, è riportato infine nella figura 2.11 a pagina 25.

❖

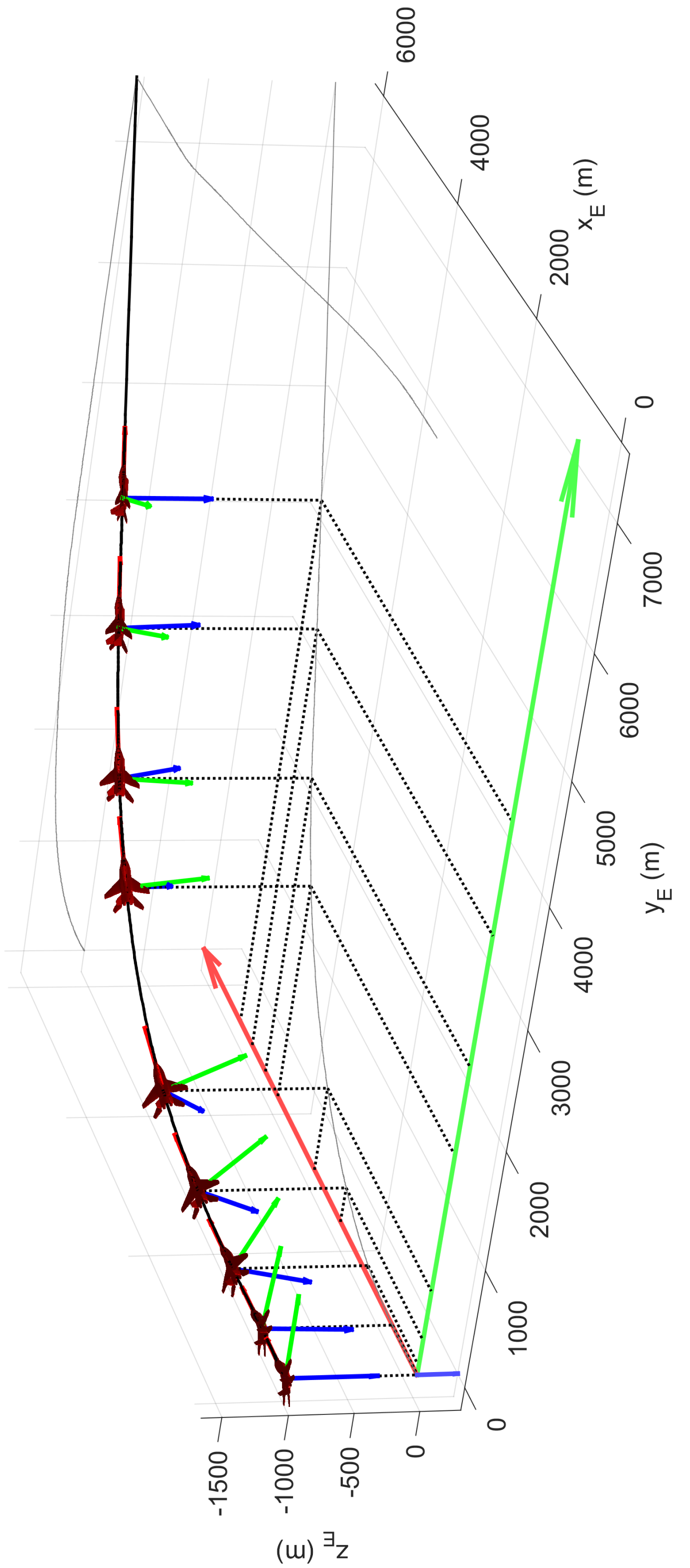
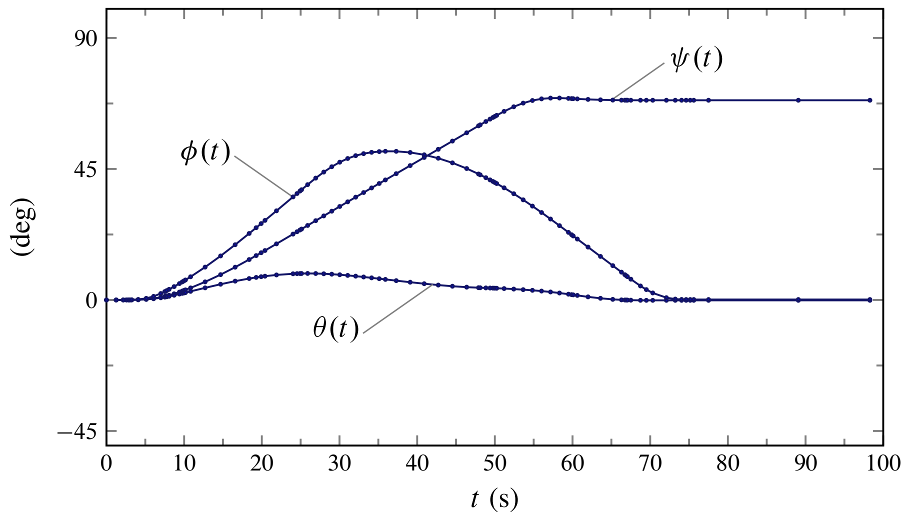
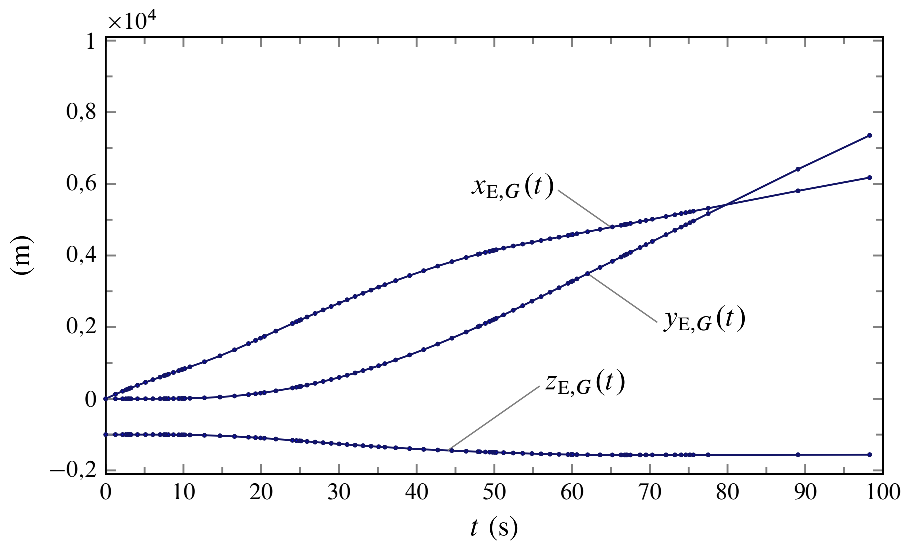


Figura 2.10 Una virata rapida a destra, risultato dell'integrazione delle equazioni cinematiche proposta nell'esercizio 2.5. La direzione iniziale del moto è verso Nord. La geometria del velivolo è ingrandita di 350 volte per chiarezza.



(a) Angoli di Eulero.



(b) Coordinate del baricentro in assi terra.

Figura 2.11 Storie temporali dei 6 gradi di libertà del velivolo determinate numericamente dalle componenti di velocità angolare e traslazionale assegnate nell'esercizio 2.5 (si veda la figura 2.9).

Bibliografia

[1] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Hodeges & Smith, 1853.

[2] O. Rodrigues, “Des lois géometriques qui régissent les désplacements d’un système solide dans l’espace, et de la variation des coordonnée provenant de ses désplacements considerées indépendamment des causes qui peuvent les produire”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1840.

[3] E. Salamin, “Application of Quaternions to Computation with Rotations”, Working paper, Stanford AI Lab, 1979.

[4] A. P. Yefremov, “Quaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories”, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, vol. 1, 2004.

[5] Schwab A. L., “Quaternions, Finite Rotations and Euler Parameters”, Course notes on Applied Multibody Dynamics, Delft University of Technology, Laboratory for Engineering Mechanics, 2003.
`http://tam.cornell.edu/~{}als93/quaternion.pdf`.

[6] AIAA/ANSI, *Recommended Practice for Atmospheric and Space Flight Vehicle Coordinate Systems*. R-004-1992, 1992.

[7] G. H. Bryan, *Stability in Aviation: An Introduction to Dynamical Stability as Applied to the Motions of Aeroplanes*. Macmillan and Co., Limited, London, 1911.

[8] D. J. Diston, *Computational Modelling of the Aircraft and the Environment. Volume 1, Platform Kinematics and Synthetic Environment*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.

[9] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[10] W. F. Phillips, “Phugoid Approximation for Conventional Airplanes”, Journal of Aircraft, Vol. 37, No. 1, January-February 2000.

[11] W. F. Phillips, “Improved Closed-Form Approximation for Dutch-Roll”, Journal of Aircraft, Vol. 37, No. 1, May-June 2000.

[12] R. Stengel, *Flight Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2004.

[13] M. R. Napolitano, *Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation*. John Wiley, 2012.

[14] D. K. Schmidt, *Modern Flight Dynamics*. McGraw-Hill, 2010.

[15] B. Stevens, F. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.

[16] D. Stinton, *The Anatomy of the Airplane* (2nd edition). American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.

[17] B. Etkin, *Dynamics of Flight, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1982.

[18] M. Calcara, *Elementi di dinamica del velivolo*. Edizioni CUEN, Napoli, 1988.

[19] L. V. Schmidt, *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. AIAA Education Series, 1998.

[20] W. J. Duncan, *Control and Stability of Aircraft*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[21] R. Jategaonkar, *Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology*. Progress in Astronautics and Aeronautics Series, 2006.

[22] C. D. Perkins, R. E. Hage, *Aircraft Performance, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1949.

[23] J. R. Wright, J.. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.

[24] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*. Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.

[25] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*. Springer, Heidelberg, 2009.

[26] P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. Second Edition. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2007.

[27] J. D. Mattingly, *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2006.

[28] K. Hünecke, *Jet Engines. Fundamentals of Theory, Design and Operation*. Motorbooks International, 1997.

[29] A. Linke-Diesinger, *Systems of Commercial Turbofan Engines*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[30] F. R. Garza, E. A. Morelli, "A Collection of Nonlinear Aircraft Simulations with MATLAB". NASA-TM-2003-212145, January 2003.

[31] Voce WGS84 su *Wikipedia*:
http://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System

[32] Anonimo, *Department of Defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems*. NIMA TR8350.2, Third Edition, Amendment 2. National Imagery and Mapping Agency, US Department of Defense, 2004.

[33] J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. DARcorporation, 2001.

[34] H. T. Schlichting, E. A. Truckenbrodt, *Aerodynamics of the Aeroplane*. McGraw Hill Higher Education, 2nd edition, 1979.

[35] M. M. Munk, "The aerodynamic forces on airship hulls". NACA-TR-184, 1924.

[36] A. Silverstein, S. Katzoff, "Aerodynamic characteristics of horizontal tail surfaces". NACA-TR-688, 1940.

[37] R. I. Sears, "Wind-tunnel data on the aerodynamic characteristics of airplane control surfaces". NACA-WR-L-663, 1943.

[38] E. Garner, "Wind-tunnel investigation of control-surface characteristics XX: plain and balanced flaps on an NACA 0009 rectangular semispan tail surface". NACA-WR-L-186, 1944.

[39] J. D. Brewer, M. J. Queijo, "Wind-tunnel investigation of the effect of tab balance on tab and control-surface characteristics". NACA-TN-1403, 1947.

[40] S. M. Crandall, H. E. Murray, "Analysis of available data on the effects of tabs on control-surface hinge moments". NACA-TN-1049, 1946.

[41] B. W. McCormick, *Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics*. John Wiley & Sons, 1979.

[42] B. N. Pamadi, *Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, 1998.

[43] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics. Modelling and Simulation with Matlab and Simulink*. Birkhäuser, Berlin, 2007.

[44] D. Howe, *Aircraft Loading and Structural Layout*. AIAA Education Series, 2004.

[45] P. Morelli, *Static Stability and Control of Sailplanes*. Levrotto & Bella, Torino, 1976.

[46] L. Prandtl, O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. Dover, 1957.

[47] R. K. Heffley, W. F. Jewell, "Aircraft Handling Qualities Data". NASA-CR-2144, December 1972.

[48] H. P. Stough III, J. M. Patton Jr, S. M. SliWa, "Flight Investigation of the Effect of Tail Configuration on Stall, Spin, and Recovery Characteristics of a Low-Wing General Aviation Research Airplane". NASA-TP-1987-2644, February 1987.

[49] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 3rd edition, New York, 2001.

[50] J. J. Bertin, *Aerodynamics for Engineers*. Prentice-Hall, 4th edition, Upper Saddle River, NJ, 2002.

[51] J. Katz, A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, England, U.K., 2001.

[52] D. E. Hoak, *et al.*, "The USAF Stability and Control Datcom". Air Force Wright Aeronautical Laboratories, TR-83-3048, 1960 (Revised 1978).

[53] R. T. Jones, "A Note on the Stability and Control of Tailless Airplanes". NACA Report 837, 1941.

[54] D. P. Coiro, F. Nicolosi, A. De Marco, N. Genito, S. Figliolia, "Design of a Low Cost Easy-to-Fly STOL Ultralight Aircraft in Composite Material". *Acta Polytecnica*, Vol. 45 no. 4, 2005, pp. 73-80; ISSN 1210-2709.

[55] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, "Flight Tests, Performances and Flight Certification of a Twin-Engine Light Aircraft". *Journal of Aircraft*, Vol 48, No. 1, January-February 2011.

[56] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, "Parameter Estimation and Flying Qualities of a Twin-Engine CS23/FAR23 Certified Light Aircraft". AIAA-2010-7947, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Toronto, 2010.

[57] B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, Dover Publications, 2005.

[58] L. Mangiacasale, *Flight Mechanics of a μ-Airplane*, Edizioni Libreria CLUP, Milano, 1998.

[59] G. Mengali, *Elementi di Dinamica del Volo con Matlab*, Edizioni ETS, Pisa, 2001.

[60] R. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1989.

[61] Y. Li, M. Nahon, "Modeling and simulations of airship dynamics", *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 30, No. 6, November-December 2007.

[62] Y. Fan, F. H. Lutze, E. M. Cliff, "Time-Optimal Lateral Maneuvers of an Aircraft", *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 18, No. 5, September-October 1995.

[63] J. N. Nielsen, *Missile Aerodynamics*, AIAA, Cambridge, MA, 1988.

[64] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean's Vehicles*, Whiley, New York, 1998.

[65] J. N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.

[66] E. L. Duke, R. F. Antoniewicz, K. D. Krambeer, "Derivation and Definition of a Linear Aircraft Model". Technical Report NASA Reference Publication RP-1207, Research Engineering, NASA Ames Research Center and NASA Dryden Flight Research Facility, 1988.

[67] G. A. Stagg, *An Unsteady Aerodynamic Model for Use in the High Angle of Attack Regime*. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1998.

[68] Y. Fan, *Identification of an Unsteady Aerodynamic Model up to High Angle of Attack Regime*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.

[69] *MATLAB Users' Guide*. The Mathworks, 2003 ed edizioni successive.
http://www.mathworks.com/
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.html

[70] V. Comincioli, *Analisi numerica: metodi, modelli, applicazioni*. McGraw-Hill, 1990, seconda edizione 1995.

[71] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, seventh edition, 1993.

[72] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.

[73] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.

[74] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, 1988.

[75] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.

[76] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, 1994.

[77] R. D. Finck, "USAF Stability and Control Datcom". AFWAL-TR-83-3048, October 1960, Revised 1978.

[78] S. R. Vukelich, J. E. Williams, "The USAF Stability and Control Digital Datcom". AFFDL-TR-79-3032, Volume I, April 1979, Updated by Public Domain Aeronautical Software 1999.

[79] W. B. Blake, "Prediction of Fighter Aircraft Dynamic Derivatives Using Digital Datcom". AIAA-85-4070, AIAA Applied Aerodynamics Conference, Colorado Springs, Colorado, 1985.

[80] Autori Vari, Distribuzione ufficiale di Digital Datcom,
sito internet:
http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/Digital-Datcom-Package.zip

[81] B. Galbraith, "Digital Datcom+", Holy Cows, Inc.,
sito internet: http://www.holycows.net/datcom/