

Agostino De Marco  
Domenico P. Coiro

**Elementi**  
**di**  
**Dinamica e simulazione di volo**

---

**Quaderno 7**  
**Equazioni del moto**  
**di un velivolo rigido**

Aprile 2018  
ver. 2018.a

### Dichiarazione di Copyright

- Questo testo è fornito per uso personale degli studenti. Viene reso disponibile in forma preliminare, a supporto della preparazione dell'esame di *Dinamica e simulazione di volo*.
- Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.
- Non è consentito l'impiego di detto materiale a scopi commerciali se non previo accordo.
- È gradita la segnalazione di errori o refusi.

Copyright 2010–2017 Agostino De Marco e Domenico P. Coiro  
Università degli Studi di Napoli Federico II  
Dipartimento di Ingegneria Industriale

(Legge italiana sul Copyright 22.04.1941 n. 633)

## Equazioni del moto di un velivolo rigido

*Le idee si assomigliano in modo incredibile, quando si conoscono.*

– Samuel Beckett

### Indice

7.1	Introduzione . . . . .	3
7.2	Momento della quantità di moto di un sistema rigido . . . . .	4
7.3	Equazioni nel sistema degli assi velivolo . . . . .	7
7.4	Equazioni traslazionali esplicite nei parametri $\dot{V}$ , $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$ . . . . .	8
7.5	Sorgenti di non linearità . . . . .	15
7.6	Equazioni del moto longitudinal-simmetrico . . . . .	26

### 7.1 Introduzione

La definizione (6.46) a pagina 14 del momento della quantità di moto relativa  $\mathcal{K}_r$  che figura nell'equilibrio alla rotazione (6.53) ne evidenzia la dipendenza dalla posizione occupata da ciascun punto  $P$  sede della massa elementare  $dm$ , rispetto ad un qualsiasi altro punto  $C$  dell'aeromobile. Nelle varie fasi di moto vario le distanze relative dei vari punti materiali costituenti il velivolo risultano sottoposte a continue variazioni in conseguenza: (i) delle escursioni angolari delle superfici di governo, (ii) del movimento di rotazione delle masse dei propulsori e (iii) delle deformazioni elastiche della struttura sotto l'azione dei carichi agenti. Queste cause, ad eccezione della seconda, provocano inoltre una variazione della forma del velivolo che si traduce in una variazione delle forze aerodinamiche e dei relativi momenti che figurano a secondo membro delle equazioni generali del moto (6.52)-(6.53).

Lo studio del moto dei velivoli viene affrontato seguendo due diversi orientamenti, a seconda che vengano ignorate o meno le deformazioni elastiche della struttura. In questo testo si riterrà valida l'ipotesi di *velivolo rigido* e nel ricavarne le equazioni del moto in

un dato riferimento si terrà conto solamente delle escursioni angolari delle superfici di governo e della rotazione delle masse del gruppo moto-propulsore.

Per quanto concerne l'escursione delle superfici di governo, si potranno formulare tre diverse ipotesi di velivolo: “a comandi bloccati” (*stick fixed*), “a comandi liberi” (*stick free*) ed “a comandi automatici” (*automatic controls*). Nel primo caso i carichi esterni agenti sulle superfici di governo vengono contrastati da forze interne derivanti dall'azione esercitata dal pilota sui comandi di volo, per impedire ogni escursione angolare. Nel secondo caso, invece, i carichi esterni provocano movimenti di rotazione intorno ai rispettivi assi di cerniera in conseguenza dell'ipotizzato abbandono dei comandi da parte del pilota. Nel terzo caso, infine, la risposta del velivolo all'azione del pilota sui comandi o alla perturbazione esterna avviene per mezzo del movimento delle superfici di comando secondo leggi prestabilite ed operate da un sistema di retroazione.

Il movimento di rotazione delle masse del propulsore provoca l'insorgere di azioni giroscopiche durante le fasi di volo caratterizzate da componenti non nulle di  $\Omega_B$  normali al relativo asse di rotazione. Le azioni giroscopiche dovute ai propulsori saranno evidenziate più avanti andando ad esprimere la variazione di quantità di moto dell'aeromobile e si constaterà che il movimento delle masse dei propulsori, a differenza di quello delle superfici di governo, *non* altera i gradi di libertà del sistema.

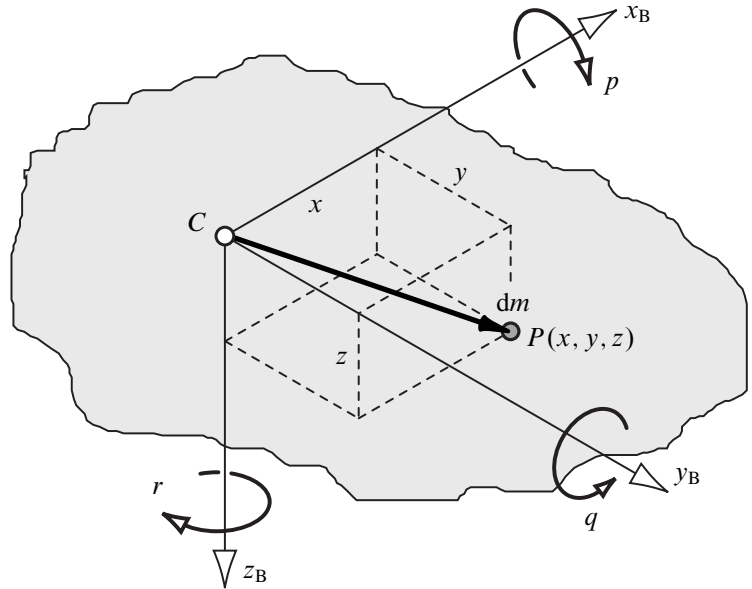
Risulta quindi che il volo di un'aeromobile, supposto rigido ed a comandi bloccati, è caratterizzato da sei gradi di libertà. Esso è perciò univocamente determinato da sei parametri le cui leggi di variazione nel tempo vengono ottenute attraverso l'integrazione del sistema (6.60) di sei equazioni differenziali. Il volo del velivolo rigido a comandi liberi o automatici è invece caratterizzato da nove gradi di libertà: ai sei gradi di libertà di corpo rigido si aggiungono le tre incognite date dalle escursioni angolari degli alettoni, dell'equilibratore e del timone di direzione presenti in una configurazione tradizionale a tre assi. La determinazione del moto a nove gradi di libertà comporta dunque la necessità di risolvere un sistema di nove equazioni differenziali. Come vedremo più avanti, esso è costituito dalle sei equazioni (6.60) relative al moto globale del velivolo e da altre tre equazioni che esprimono le condizioni di equilibrio dinamico alla rotazione delle tre superfici di governo.

La definizione delle equazioni di equilibrio alla rotazione, sia delle superfici di governo che del velivolo nel suo complesso, comporta la necessità di esplicitare le componenti del momento della quantità di moto relativa  $\mathcal{K}_r$  di un sistema rigido. In particolare, gli effetti dinamici della rotazione delle masse del gruppo moto-propulsore interverranno nella scrittura delle equazioni alla rotazione del velivolo nel suo complesso.

## 7.2 Momento della quantità di moto di un sistema rigido

Nel caso di un sistema materiale rigido i moduli dei vettori  $r = P - C$  che compaiono nell'espressione (6.46) del momento della quantità di moto relativa, per ogni fissato  $P$ , sono costanti nel tempo. Pertanto, il moto assoluto del punto  $P$ , sede della massa elementare  $dm$ , risulta da un movimento rigido del velivolo.

L'aeromobile, che si identifica con il sistema di riferimento degli assi velivolo, ha un moto di *roto-traslazione* nello spazio inerziale: il moto rigido sarà la sovrapposizione di un moto di traslazione di velocità istantanea  $dC/dt \equiv V_C(t)$  e di un atto di moto rotatorio intorno ad un asse passante per  $C(t)$  con velocità angolare istantanea  $\Omega(t)$ . Tale atto di



**Figura 7.1** Vettore posizione  $P(x, y, z) - C$  con  $P$  sede della massa elementare  $dm$  del velivolo.

moto è tale da conferire ai punti materiali del velivolo non coincidenti con  $C$  una velocità assoluta

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dC}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (P - C) \quad (7.1)$$

pari alla velocità di trascinamento [si confrontino la (6.9) e la (6.12) nelle pagine 6–7, con  $v_r \equiv 0$ ].

Si andrà a rappresentare la (7.1) nel sistema degli assi velivolo per il quale valgono le convenzioni usuali sui nomi dei versori e delle componenti di  $\boldsymbol{\Omega}$ . Si consideri a tal proposito la figura 7.1. Dette  $x$ ,  $y$  e  $z$  le componenti del generico punto  $P$ , la (7.1) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d(P - C)}{dt} \right\}_B &= [\tilde{\boldsymbol{\Omega}}]_B \{P - C\}_B = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qz - ry \\ rx - pz \\ py - qx \end{Bmatrix} \quad (7.2) \end{aligned}$$

La (7.2) fornisce il termine a destra del prodotto vettoriale presente nell'integrale (6.46) che definisce  $\mathcal{K}_r$ . Se, inoltre, si osserva che

$$\begin{aligned} \left\{ (P - C) \wedge \frac{d(P - C)}{dt} \right\}_B &= [\widetilde{(P - C)}]_B ([\tilde{\boldsymbol{\Omega}}]_B \{P - C\}_B) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qz - ry \\ rx - pz \\ py - qx \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} p(z^2 + y^2) - qxy - rxz \\ q(x^2 + z^2) - pxy - ryz \\ r(x^2 + y^2) - pxz - qyz \end{Bmatrix} \quad (7.3) \end{aligned}$$

e si sostituisce quest'ultima espressione nella (6.46) si ottiene

$$\begin{aligned} \{\mathcal{K}_r\}_B &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ (P - C) \wedge \frac{d(P - C)}{dt} \right\}_B dm = \\ &= \int_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} p(y^2 + z^2) - qxy - rxz \\ q(x^2 + z^2) - pxy - ryz \\ r(x^2 + y^2) - pxz - qyz \end{pmatrix} dm = \begin{pmatrix} pI_{xx} - qI_{xy} - rI_{xz} \\ qI_{yy} - pI_{xy} - rI_{yz} \\ rI_{zz} - pI_{xz} - qI_{yz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.4)$$

La (7.4) si ottiene osservando che le componenti  $p$ ,  $q$  ed  $r$  della velocità angolare istantanea del velivolo possono essere portate fuori dall'integrale. Pertanto, si riconosce che in un termine come  $(y^2 + z^2) dm$  la parentesi tonda rappresenta la distanza della massa elementare dall'asse baricentrale  $x$  e che l'integrale esteso a tutti i punti materiali costituenti il velivolo ne fornisce il *momento d'inerzia*  $I_x$ . Analogamente, si osserva che un termine come  $xy dm$  fornisce per integrazione il *prodotto d'inerzia*  $I_{xy}$ . In base a queste osservazioni si può porre la (7.4) nella forma compatta seguente

$$\{\mathcal{K}_r\}_B = [I]_B \{\Omega\}_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

che esprime il vettore momento della quantità di moto relativa del velivolo rigido, dove

$$[I]_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad [I]_B^{-1} = \frac{1}{\det [I]_B} \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_2 & I_4 & I_5 \\ I_3 & I_5 & I_6 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

sono la *matrice delle inerzie* rispetto agli assi velivolo e la sua inversa, ed

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2, & I_2 &= I_{xy}I_{zz} + I_{yz}I_{xz}, & I_3 &= I_{xy}I_{yz} + I_{yy}I_{xz} \\ I_4 &= I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2, & I_5 &= I_{xx}I_{yz} + I_{xy}I_{xz} \\ I_6 &= I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 \\ \det [I]_B &= I_{xx}I_{yy}I_{zz} - I_{xx}I_{yz}^2 - I_{zz}I_{xy}^2 - I_{yy}I_{xz}^2 - 2I_{yz}I_{xz}I_{xy} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Si noti come per un velivolo rigido la scelta del riferimento coincidente con quello degli assi velivolo permetta di ottenere una rappresentazione semplice del vettore  $\mathcal{K}_r$ , data dalla (7.5) come prodotto di una matrice di costanti per un vettore di incognite del moto.

A questo punto siamo in grado di particolarizzare le ultime tre equazioni del sistema (6.60) a pagina 16 ovvero la loro forma matriciale (6.62), nelle quali poniamo  $C \equiv G$  ed  $(\cdot)_m \equiv (\cdot)_B$ . Si ottiene

$$\{\dot{\mathcal{K}}_r\}_B + [\tilde{\Omega}]_B \{\mathcal{K}_r\}_B = \{\mathcal{M}\}_B \quad (7.8)$$

ovvero

$$[I]_B \{\dot{\Omega}\}_B + [\tilde{\Omega}]_B ([I]_B \{\Omega\}_B) = \{\mathcal{M}\}_B \quad (7.9)$$

### 7.3 Equazioni nel sistema degli assi velivolo

Le equazioni scalari del moto di un velivolo rigido proiettate nella terna degli assi velivolo sono date dalle

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \frac{g}{W} \begin{pmatrix} X_G + X_A + X_T \\ Y_G + Y_A + Y_T \\ Z_G + Z_A + Z_T \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det[I]_B} \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_2 & I_4 & I_5 \\ I_3 & I_5 & I_6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_T \\ \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T \\ \mathcal{N}_A + \mathcal{N}_T \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

La (7.10) corrisponde alla (6.61) con l'opportuno cambiamento di simboli. La (7.11) è praticamente la (7.9) in forma espansa, dove si è tenuto conto del fatto che l'azione del peso dell'aeromobile dà un contributo nullo al momento baricentrale risultante.

Il sistema di sei equazioni differenziali scalari (7.10)-(7.11) esprime la dinamica del moto del velivolo nel suo complesso. A questo punto va constatato che tale sistema *non* è sufficiente alla determinazione del moto stesso. Il motivo risiede nel fatto che le sei equazioni scalari sono ottenute proiettando le leggi della Dinamica su una terna la cui posizione ed il cui orientamento sono a loro volta delle incognite.

Si osservi come nel sistema (7.10)-(7.11) compaiano esplicitamente le incognite *dinamiche*

$$\{x_d\} = [u, v, w, p, q, r]^T \quad (7.12)$$

ed implicitamente le incognite *cinematiche*

$$\{x_k\} = [x_{E,G}, y_{E,G}, z_{E,G}, \phi, \theta, \psi]^T \quad (7.13)$$

date dalle coordinate istantanee del baricentro nel riferimento fisso e dagli angoli di Eulero del velivolo. Per convincersi di ciò si considerino, ad esempio, le componenti  $(X_G, Y_G, Z_G)$  della forza peso  $\mathbf{F}_G = W\mathbf{k}_E$  nella terna mobile. Esse sono esprimibili in termini delle rispettive componenti  $(0, 0, W)$  nella terna fissa come

$$\{F_G\}_B = \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} = [T]_{BE} \{F_G\}_E = [T]_{BE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W \sin \theta \\ W \sin \phi \cos \theta \\ W \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

essendo

$$[T]_{EB} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & (\sin \phi \sin \theta \cos \psi & (\cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ & - \cos \phi \sin \psi) & + \sin \phi \sin \psi) \\ \cos \theta \sin \psi & (\sin \phi \sin \theta \sin \psi & (\cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ & + \cos \phi \cos \psi) & - \sin \phi \cos \psi) \\ - \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

$$[T]_{BE} = [T]_{EB}^{-1} \equiv [T]_{EB}^T$$

le matrici di trasformazione delle componenti, diretta ed inversa, dal riferimento degli assi velivolo a quello degli assi Terra. Come si constata esaminando le espressioni (7.14) delle componenti del peso, esiste certamente una dipendenza del secondo membro delle equazioni alla traslazione (7.10) dall'orientamento del velivolo nello spazio. Tale dipendenza introduce le incognite aggiuntive:  $\phi$  e  $\theta$  (si noti che le componenti del peso non dipendono dall'angolo di prua  $\psi$  del velivolo).

Inoltre, osservando che tanto le forze aerodinamiche e propulsive quanto i rispettivi momenti baricentrali dipendono almeno dalla quota istantanea di volo, cioè dalla grandezza  $h \equiv -z_{E,G}$  che interviene nell'espressione della pressione dinamica di volo, si può rendere più generale il discorso della dipendenza funzionale dei secondi membri del sistema (7.10)-(7.11) ammettendo che essi introducano le sei incognite aggiuntive (7.13). La scelta delle incognite del moto e l'adozione di opportuni modelli di velivolo verranno approfonditi nel prossimo capitolo. Alla luce delle varie forme di equazioni del moto, il velivolo verrà discusso in quanto sistema dinamico e verrà presentato il problema generale della modellazione delle azioni aerodinamiche e propulsive.

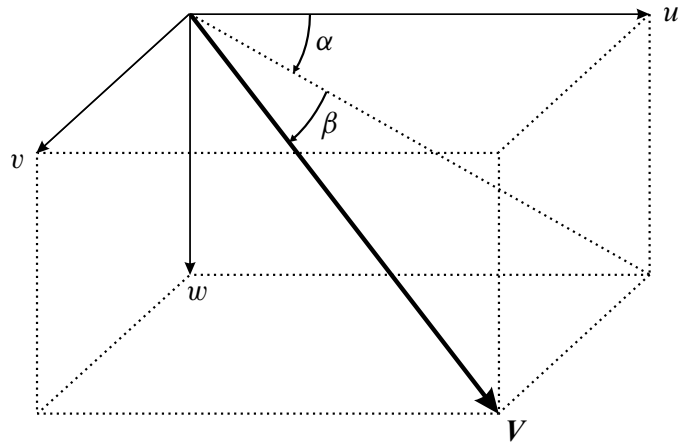
Si osservi che l'aver scelto come terna di proiezione quella degli assi velivolo rappresenta comunque un vantaggio dal punto di vista della modellazione delle forze e dei momenti esterni. Infatti, se da una parte le componenti di una forza di direzione costante come il peso diventano variabili, cioè hanno espressioni date dalle (7.14), dall'altra le componenti di forze e momenti dovute alle azioni aerodinamica e propulsiva saranno più efficacemente espresse in un sistema solidale al velivolo.

## 7.4 Equazioni traslazionali esplicite nei parametri $\dot{V}$ , $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$

Le tre equazioni alla traslazione espresse in forma matriciale dalla (7.10) sono esplicitate nei parametri  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  e  $\dot{w}$ , che hanno le dimensioni di un'accelerazione e rappresentano le derivate temporali delle componenti di  $V$  negli assi velivolo. Queste equazioni possono essere sostituite da tre equazioni equivalenti esplicitate nei parametri  $\dot{V}$ ,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$ . Nelle relazioni che ricaveremo tra breve porremo per semplicità  $\alpha \equiv \alpha_B$ . Quando sarà poi necessario esplicitare un modello aerodinamico del velivolo sarà ripristinata la convenzione di riferire le incidenze ad una direttrice significativa come ad esempio la retta di portanza nulla del velivolo parziale ( $\alpha \equiv \alpha_B + \mu_x = \alpha_B - \alpha_{0L,WB}$ ).

Si osservi che, in assenza di moti dell'atmosfera rispetto al riferimento fisso, l'opposto della velocità del baricentro del velivolo rispetto all'osservatore fisso coincide con la velocità asintotica della corrente che investe l'aeromobile:  $V_\infty = -V$ . Pertanto, si





**Figura 7.2** Legame tra le componenti del vettore velocità del vento relativo negli assi velivolo ed angoli aerodinamici (si è posto per semplicità  $\alpha \equiv \alpha_B$ ).

possono mettere in relazione le componenti  $(u, v, w)$  con i due angoli aerodinamici  $\alpha$  e  $\beta$  secondo le formule seguenti:

$$\begin{cases} u = V \cos \beta \cos \alpha \\ v = V \sin \beta \\ w = V \cos \beta \sin \alpha \end{cases} \quad (7.16)$$

che possono dedursi dalla figura 7.2, con

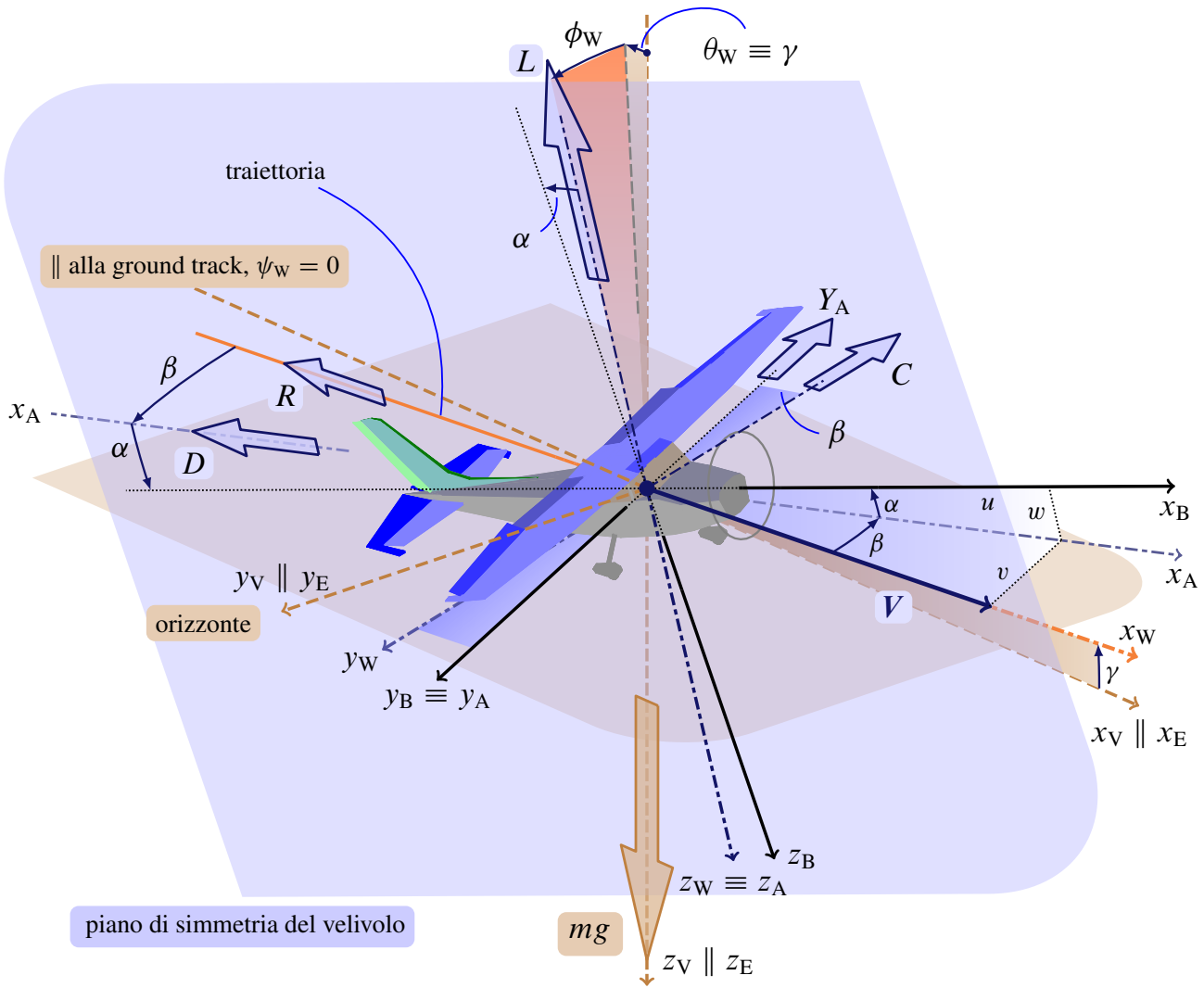
$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (7.17)$$

Gli angoli d'attacco e di derapata, note le componenti di  $V$ , possono essere ricavati invertendo le (7.16) e ottenendo:

$$\begin{cases} \alpha = \tan^{-1} \frac{w}{u} \\ \beta = \sin^{-1} \frac{v}{V} = \sin^{-1} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \end{cases} \quad (7.18)$$

La formulazione alternativa delle equazioni del moto che andiamo a ricavare in questo paragrafo permetterà di esprimere l'azione aerodinamica, costituita dalla risultante  $F_A$  e dal momento baricentrico  $\mathcal{M}_A$ , direttamente in termini delle variabili aerodinamiche  $V$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Infatti, per quanto riguarda le forze, è naturale per gli sperimentatori esprimere l'azione che il fluido esercita su un velivolo attraverso la resistenza  $R$ , la devianza aerodinamica  $C$  (*cross-force*, positiva per derapata positiva) e la portanza  $L$ . L'esame della figura 7.3 nella pagina seguente chiarisce la definizione di queste componenti, che a rigore sono riferite alla terna di assi vento nella convenzione americana:  $\mathcal{T}_W = \{G, x_W, y_W, z_A\}$  (in cui  $y_W$  si ricava da  $y_A$  attraverso la rotazione di un angolo  $\beta$  intorno a  $z_A$ ). In ogni caso, la figura 7.3 mostra che la portanza è sempre valutata nel piano di simmetria del velivolo e che la  $F_A$ , quando proiettata sulla terna degli assi aerodinamici  $\mathcal{T}_A$  è rappresentata, per  $\beta$  piccoli, dalla terna  $(-D \approx -R, -C \approx Y_A, -L)$ . Con il termine 'componente di forza laterale' si indica in questo contesto la  $Y_A$  in quanto riferita all'asse velivolo (e aerodinamico)  $y_B$ . Allo stesso tempo, la resistenza  $D$  è riferita all'asse aerodinamico  $x_A$  (per definizione appartenente al piano di simmetria).

Per apprezzare la convenienza di esprimere dipendenze in termini di  $D$ ,  $Y_A$  ed  $L$  si



**Figura 7.3** Terna di riferimento degli assi velivolo  $\mathcal{T}_B$ , degli assi aerodinamici  $\mathcal{T}_A$ , degli assi vento  $\mathcal{T}_W$  (convenzione americana) e riferimento verticale locale  $\mathcal{T}_V$  (parallelo al riferimento Terra  $\mathcal{T}_E$ ). Volo in direzione Nord,  $\psi_W = 0$ . Scomposizione della forza aerodinamica risultante nelle componenti  $(-D, Y_A, -L)$  secondo gli assi aerodinamici, con  $Y_A \equiv -C$  (la prima è dotata di segno, la seconda è positiva come nel disegno). Si osservi che si è posto per semplicità  $\alpha \equiv \alpha_B$ .

pensi alla situazione in cui si dispone delle curve sperimentali dei coefficienti  $C_D$ ,  $C_Y$  e  $C_L$  del velivolo in esame. Tipicamente, tali curve sono ricavate da prove in galleria del vento, nelle varie configurazioni (varie posizioni dei *flap*, posizioni dei carrelli, condizioni di funzionamento dei motori), per diversi numeri di Mach e di Reynolds della corrente, ai vari angoli d'incidenza e per diverse deflessioni delle superfici di governo. Tali coefficienti, opportunamente moltiplicati per la pressione dinamica della corrente (funzione di  $V$  e della quota di volo  $-z_{E,G}$ ) e per la superficie alare, forniscono direttamente le forze aerodinamiche negli assi vento. Tale convenienza permane anche se si dispone di modelli aerodinamici approssimati, ad esempio, lineari in  $\alpha$ ,  $\beta$  e nelle deflessioni dei comandi. Quest'ultima circostanza si può verificare sia nelle fasi preliminari di progetto dell'aeromobile, in mancanza di dati sperimentali per il mancato congelamento della configurazione, sia quando il velivolo in esame è stato già realizzato ma si hanno a disposizione i coefficienti di un modello linearizzato provenienti da misure effettuate in volo.

Per quanto riguarda il momento aerodinamico risultante, gli sperimentatori a volte preferiscono esprimerne le componenti negli assi aerodinamici. In questi casi deve essere precisato che, ad esempio, il momento di rollio  $\mathcal{L}_A$  è una coppia intorno all'asse  $x_A$  piuttosto che intorno all'asse  $x_B$  (osservazioni analoghe valgono per le altre componenti del momento). Tuttavia, nella pratica sperimentale risulta spesso conveniente misurare direttamente le componenti del momento intorno a degli assi solidali al velivolo.

Dalle osservazioni precedenti si possono dedurre le espressioni delle componenti della risultante aerodinamica sugli assi velivolo che compaiono a secondo membro del sistema di equazioni (7.10):

$$X_A = -D \cos \alpha + L \sin \alpha \quad (7.19a)$$

$$Y_A = -C \quad (7.19b)$$

$$Z_A = -D \sin \alpha - L \cos \alpha \quad (7.19c)$$

Inoltre, le componenti del peso del velivolo nel riferimento  $\mathcal{T}_B$  sono date dalle:

$$X_G = -mg \sin \theta \quad (7.20a)$$

$$Y_G = mg \sin \phi \cos \theta \quad (7.20b)$$

$$Z_G = mg \cos \phi \cos \theta \quad (7.20c)$$

Infine, dette  $(X_T, Y_T, Z_T)$  le componenti della spinta, la risultante delle forze esterne avrà componenti:

$$X = X_T - D \cos \alpha + L \sin \alpha - mg \sin \theta \quad (7.21a)$$

$$Y = Y_T + Y_A + mg \sin \phi \cos \theta \quad (7.21b)$$

$$Z = Z_T - D \sin \alpha - L \cos \alpha + mg \cos \phi \cos \theta \quad (7.21c)$$

### 7.4.1 L'equazione in $\dot{V}$

L'equazione esplicita in  $\dot{V}$  può essere ricavata osservando che dalle (7.16)-(7.17) può scriversi:

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} \quad (7.22)$$

Questa espressione, dopo aver applicato le regole di derivazione e semplificato i termini che si elidono, diventa:

$$\dot{V} = \frac{1}{V} (u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}) \quad (7.23)$$

Sostituendo le relazioni (7.16) nella (7.23) si ottiene

$$\dot{V} = \dot{u} \cos \alpha \cos \beta + \dot{v} \sin \beta + \dot{w} \sin \alpha \cos \beta \quad (7.24)$$

A questo punto si possono sostituire nella (7.24) le espressioni di  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  e  $\dot{w}$  date dalle equazioni (7.10) ottenendo:

$$\begin{aligned}\dot{V} = & \frac{\cos \alpha \cos \beta}{m} (X_G + X_A + X_T) + \cos \alpha \cos \beta (rv - qw) \\ & + \frac{\sin \beta}{m} (Y_G + Y_A + Y_T) + \sin \beta (pw - ru) \\ & + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{m} (Z_G + Z_A + Z_T) + \sin \alpha \cos \beta (qu - pv) \quad (7.25)\end{aligned}$$

La (7.25) può essere ulteriormente sviluppata esplicitando le componenti del peso e della risultante aerodinamica. Pertanto, sostituendovi le (7.19a)-(7.20c) si perviene alla seguente espressione

$$\begin{aligned}\dot{V} = & \frac{1}{m} \left[ -D \cos \beta + Y_A \sin \beta + X_T \cos \alpha \cos \beta + Y_T \sin \beta + Z_T \sin \alpha \cos \beta \right. \\ & \left. - mg (\cos \alpha \cos \beta \sin \theta - \sin \beta \sin \phi \cos \theta - \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \cos \theta) \right] \quad (7.26) \\ & + rv \cos \alpha \cos \beta - qw \cos \alpha \cos \beta + pw \sin \beta - ru \sin \beta \\ & + qu \sin \alpha \cos \beta - pv \sin \alpha \cos \beta\end{aligned}$$

Infine, l'equazione (7.26) può essere semplificata osservando che gli addendi in cui compaiono i termini  $p$ ,  $q$  ed  $r$  si elidono tutti. Si lascia al lettore il compito di verificare questa circostanza, sostituendo le espressioni (7.16) nell'equazione precedente ed applicando le eguaglianze trigonometriche notevoli. Pertanto, la forma finale dell'equazione cercata è la seguente:

$$\begin{aligned}\dot{V} = & \frac{1}{m} \left[ -D \cos \beta + Y_A \sin \beta + X_T \cos \alpha \cos \beta + Y_T \sin \beta + Z_T \sin \alpha \cos \beta \right. \\ & \left. - mg (\cos \alpha \cos \beta \sin \theta - \sin \beta \sin \phi \cos \theta - \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \cos \theta) \right] \quad (7.27)\end{aligned}$$

### 7.4.2 L'equazione in $\dot{\alpha}$

L'equazione esplicita in  $\dot{\alpha}$  può essere ricavata a partire dalla prima delle espressioni (7.18):

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w}{u} \quad (7.28)$$

Derivando rispetto al tempo il secondo membro della (7.28) si ha:

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \tan^{-1} \frac{w}{u} \right) \quad (7.29)$$

e dopo aver applicato le regole di derivazione si perviene all'espressione:

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{u^2 + w^2} (u\dot{w} - \dot{u}w) \quad (7.30)$$

La (7.30), tenuto conto delle (7.16)-(7.17), fornisce:

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{w} \cos \alpha - \dot{u} \sin \alpha}{V \cos \beta} \quad (7.31)$$

A questo punto le espressioni di  $\dot{u}$  e  $\dot{w}$  fornite dalla prima e terza delle (7.10) si possono andare a sostituire nella (7.31) che, dopo aver manipolato e semplificato i vari termini, diventa:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = & \frac{1}{mV \cos \beta} \left[ -L + Z_T \cos \alpha - X_T \sin \alpha + mg(\cos \alpha \cos \phi \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \right] \\ & + \frac{1}{V \cos \beta} (qu \cos \alpha - pv \cos \alpha - rv \sin \alpha + qw \sin \alpha)\end{aligned}\quad (7.32)$$

Infine, sostituendo nell'equazione precedente i termini  $u$ ,  $v$  e  $w$  con le espressioni (7.16), si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = & \frac{1}{mV \cos \beta} \left[ -L + Z_T \cos \alpha - X_T \sin \alpha + mg(\cos \alpha \cos \phi \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \right] \\ & + q - \tan \beta (p \cos \alpha + r \sin \alpha)\end{aligned}\quad (7.33)$$

cioè un'equazione differenziale espressa in termini del nuovo insieme di incognite aerodinamiche  $(V, \alpha, \beta)$ , oltre che delle incognite  $(p, q, r)$  associate al moto intorno al baricentro.

### 7.4.3 L'equazione in $\dot{\beta}$

L'equazione esplicita in  $\dot{\beta}$  si ricava a partire dalla seconda delle espressioni (7.18):

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \quad (7.34)$$

Derivando rispetto al tempo il secondo membro della (7.34),

$$\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sin^{-1} \frac{v}{V} \right) \quad (7.35)$$

ed applicando le regole di derivazione, si perviene all'espressione:

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{v}V - v\dot{V}}{V\sqrt{u^2 + w^2}} \quad (7.36)$$

Sostituendo le (7.16)-(7.17) nella (7.36) e tenendo conto della (7.24) si ottiene:

$$\dot{\beta} = \frac{1}{V} \left( -\dot{u} \cos \alpha \sin \beta + \dot{v} \cos \beta - \dot{w} \sin \alpha \sin \beta \right) \quad (7.37)$$

A questo punto, sostituendo nella formula precedente le  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  e  $\dot{w}$  date dalle (7.10), si passa all'espressione:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & \frac{1}{mV} \left[ -\cos \alpha \sin \beta (-D \cos \alpha + L \sin \alpha + X_T - mg \sin \theta) \right. \\ & + \cos \beta (Y_A + Y_T + mg \sin \phi \cos \theta) \\ & \left. - \sin \alpha \sin \beta (-D \sin \alpha - L \cos \alpha + Z_T + mg \cos \phi \cos \theta) \right] \\ & + \frac{1}{V} \left[ -\cos \alpha \sin \beta (rv - qw) + \cos \beta (pw - ru) - \sin \alpha \sin \beta (qu - pv) \right] \end{aligned} \quad (7.38)$$

Infine, sostituendo ancora ad  $u$ ,  $v$  e  $w$  le espressioni (7.16) si perviene all'equazione finale:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & \frac{1}{mV} \left[ D \sin \beta + Y_A \cos \beta - X_T \cos \alpha \sin \beta + Y_T \cos \beta - Z_T \sin \alpha \sin \beta \right. \\ & \left. + mg (\cos \alpha \sin \beta \sin \theta + \cos \beta \sin \phi \cos \theta - \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \cos \theta) \right] \\ & + p \sin \alpha - r \cos \alpha \end{aligned} \quad (7.39)$$

riscritta in termini del nuovo insieme di incognite  $(V, \alpha, \beta, p, q, r)$ .

★   ★   ★

Le (7.27), (7.33), e (7.39) costituiscono il sistema di equazioni differenziali:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m} \left[ -D \cos \beta + Y_A \sin \beta + X_T \cos \alpha \cos \beta + Y_T \sin \beta + Z_T \sin \alpha \cos \beta \right. \\ & \quad \left. - mg (\cos \alpha \cos \beta \sin \theta - \sin \beta \sin \phi \cos \theta - \sin \alpha \cos \beta \cos \phi \cos \theta) \right] \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{mV \cos \beta} \left[ -L + Z_T \cos \alpha - X_T \sin \alpha + mg (\cos \alpha \cos \phi \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) \right. \\ & \quad \left. + q - \tan \beta (p \cos \alpha + r \sin \alpha) \right] \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{mV} \left[ D \sin \beta + Y_A \cos \beta - X_T \cos \alpha \sin \beta + Y_T \cos \beta - Z_T \sin \alpha \sin \beta \right. \\ & \quad \left. + mg (\cos \alpha \sin \beta \sin \theta + \cos \beta \sin \phi \cos \theta - \sin \alpha \sin \beta \cos \phi \cos \theta) \right] \\ & \quad + p \sin \alpha - r \cos \alpha \end{aligned} \right. \quad (7.40)$$

che è del tutto equivalente al sistema (7.10). Il sistema (7.40) ha senso qualora si voglia scegliere come insieme delle incognite *dinamiche* quello costituito dagli elementi della matrice:

$$\{x_d\} = [V, \alpha, \beta, p, q, r]^T \quad (7.41)$$

In tal caso la matrice colonna delle incognite cinematiche (7.13) dovrà accordarsi alla matrice colonna (7.41), anziché alla (7.12), ai fini della descrizione del moto. Come osservato in precedenza, ciò facilita la valutazione dei contributi ai secondi membri delle (7.40) in cui compaiono le forze aerodinamiche. Al contempo, è necessario esprimere i contributi propulsivi in termini dei suddetti parametri incogniti. Anche questa circostanza

presenta una certa convenienza dal momento che le caratteristiche del motore sono note in funzione della quota e della velocità di volo.

Si osservi, inoltre, che le (7.40) possono essere convenientemente manipolate al fine di indagare quelle condizioni di volo in cui sono prescritti valori assegnati delle derivate  $\dot{V}$ ,  $\dot{\alpha}$  e  $\dot{\beta}$ . Si pensi ad esempio alle condizioni stazionarie, in cui le derivate delle grandezze dinamiche sono tutte nulle. Un altro esempio è dato da quelle condizioni di regime per le quali, oltre che alla condizione di stazionarietà, è assegnata la velocità angolare del velivolo. Ricade in questo caso la virata corretta di regime a quota costante.

## 7.5 Sorgenti di non linearità

Le equazioni della dinamica del velivolo (7.10)-(7.11), o nella forma alternativa (7.40)-(7.11), contengono termini non lineari provenienti da effetti di natura diversa:

*Accoppiamenti cinematici* — Sono rappresentati dai prodotti  $rv$ ,  $qw$ ,  $pw$ ,  $ru$  e così via nelle equazioni traslazionali (7.10), e dai prodotti  $p \sin \alpha$ ,  $p \cos \alpha$ ,  $r \cos \alpha$  e così via nelle equazioni rotazionali (7.40). Ad esempio, dalla terza delle (7.40) si vede che quando gli aeromobili sono in volo ad un certo angolo d'attacco  $\alpha$  e hanno un moto di rollio  $p$  si ha un effetto di conversione dell'angolo d'attacco in angolo di derapata ( $p \sin \alpha \rightarrow \dot{\beta}$ ). Viceversa, dalla seconda delle (7.40) si osserva che in presenza di un angolo di derapata non nullo il moto di rollio determina una conversione di angolo di derapata in angolo d'attacco ( $p \tan \beta \cos \alpha \rightarrow \dot{\alpha}$ ). In questa interpretazione si dice che gli accoppiamenti cinematici rendono interdipendenti le dinamiche dell'angolo d'attacco e dell'angolo di derapata in presenza di velocità angolare.

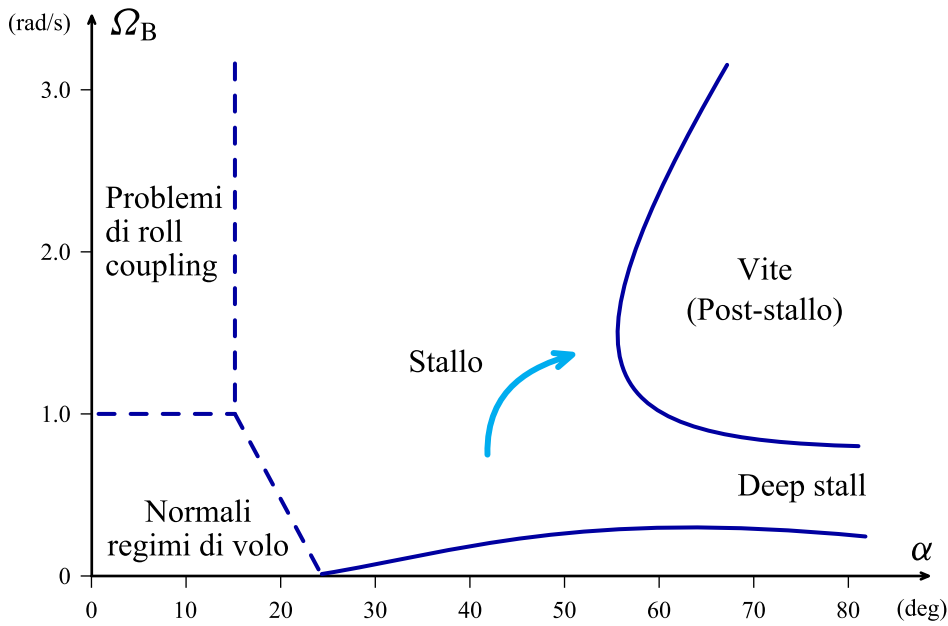
*Accoppiamenti inerziali* — Sono rappresentati dai prodotti  $qr$ ,  $pr$ ,  $pq$  nelle equazioni alla rotazione (7.11). Questi effetti sono trattati più in dettaglio nel capitolo 8 – si vedano le equazioni (8.12), (8.16), (8.19) e (8.20) – e sono anche noti come termini giroscopici.

*Gravità* — Sono termini non lineari i prodotti dell'accelerazione di gravità  $g$  per funzioni trigonometriche degli angoli di Eulero nelle equazioni dinamiche traslazionali.

*Aerodinamica* — Le forze e i momenti aerodinamici sono funzioni del quadrato della velocità  $V$  e della quota tramite la dipendenza da essa della densità  $\rho$  dell'aria. Inoltre i coefficienti di forza e di momento sono in generale funzioni non lineari dell'angolo d'attacco e dell'angolo di derapata. Per velocità di volo nell'alto subsonico e in regime transonico le azioni aerodinamiche sono funzioni non lineari del numero di Mach.

*Propulsione* — L'azione propulsiva, in particolare la spinta  $T$ , è in generale una funzione non lineare della velocità di volo (o del numero di Mach) e della quota di volo (si veda l'esercizio 7.20 e la figura 7.12).

Le non linearità nella modellazione della dinamica dei velivoli hanno una corrispondenza nei diversi fenomeni osservabili in volo. La figura 7.4 nella pagina successiva riporta una classificazione dei diversi regimi di volo basata sull'angolo d'attacco e sul modulo della velocità angolare. Nel piano  $(\alpha, \Omega_B)$  si distinguono i punti che individuano i normali regimi di volo dai regimi critici, ad esempio il volo stallato ad angoli d'attacco superiori ai 25–30 deg. Al variare dell'incidenza o della velocità angolare un velivolo



**Figura 7.4** Regimi di volo dei velivoli.

può passare da un regime normale a un regime critico in seguito a una perdita di stabilità, moderata o improvvisa. Il moto in regime di volo critico può risultare controllabile o incontrollabile ed è anche possibile osservare risposte dinamiche anomale all'azione sui comandi. Le osservazioni sperimentali e l'esperienza dei piloti hanno portato a definire svariati tipi di comportamenti non lineari, connessi tanto al moto longitudinale che al moto latero-direzionale (ad esempio il 'pitch up', il 'wing drop', il 'wing rock', il 'nose slice' e così via). Nella regione di volo in post-stallo, ad angoli d'attacco moderati o elevati, sono dominanti i fenomeni di avvitemento post-stallo ('post-stall gyrations') di vite stabilizzata o di 'deep stall'. D'altra parte, a piccoli angoli d'attacco ma ad elevate velocità di rollio sono ben noti i fenomeni di 'roll coupling' che portano alla perdita di stabilità e di controllabilità.

★ ★ ★

### Esercizio 7.1: Equazioni del moto a 6-DoF in assi velivolo



Questo esercizio propone una formulazione completa e la successiva codifica in Matlab delle equazioni della dinamica del volo a 6 gradi di libertà per un velivolo reale, l'aeromobile F/A-18 *High Angle-of-attack Research Vehicle* (HARV). Il modello aerodinamico proposto è un esempio di modello non lineare ricavato da sperimentazioni di volo [62]. L'accoppiamento delle equazioni della dinamica rototraslatoria del velivolo rigido al modello aerodinamico e ad un modello propulsivo semplificato porterà alla scrittura in forma chiusa di un sistema di equazioni di evoluzione nello spazio degli stati. Esse potranno essere risolte numericamente con tecniche d'integrazione al passo.

Si considerino le equazioni della dinamica proiettate in assi velivolo, rappresentate dal sistema (7.10)-(7.11). Esso va accoppiato alle equazioni cinematiche ausiliarie che propagano nel tempo i valori delle coordinate del baricentro (*navigation equations*)

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_{E,G} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$





**Figura 7.5** Il velivolo F/A-18 *High Angle-of-attack Research Vehicle* (HARV).

e degli angoli di Eulero (*gimbal equations*)

$$\begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_\phi S_\theta}{C_\theta} & \frac{C_\phi S_\theta}{C_\theta} \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & \frac{S_\phi}{C_\theta} & \frac{C_\phi}{C_\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

I secondi membri delle (7.10)-(7.11) devono essere riformulati assumendo dei modelli matematici — cioè delle opportune dipendenze funzionali — che esprimono le forze e le coppie aerodinamiche e propulsive  $(D, Y_A, L)$ ,  $(\mathcal{L}_A, \mathcal{M}_A, \mathcal{N}_A)$ ,  $(X_T, Y_T, Z_T)$ , e  $(\mathcal{L}_T, \mathcal{M}_T, \mathcal{N}_T)$  in funzione delle variabili di stato (7.12)-(7.13), o in alternativa (7.41)-(7.13), e di input del sistema (cioè i comandi di volo). Si deve tenere poi conto delle (7.21) per assemblare i contributi alle componenti  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  della forza risultante istantanea in assi velivolo.

Com'è noto le forze e le coppie aerodinamiche baricentrali sono fornite dalle seguenti formule convenzionali:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D, \quad Y_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_Y, \quad L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (7.42a)$$

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{\mathcal{L}}, \quad \mathcal{M}_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_{\mathcal{M}}, \quad \mathcal{N}_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_{\mathcal{N}} \quad (7.42b)$$

Per il velivolo considerato si assume un vettore spinta baricentrico ( $e_T = 0$ ) ed allineato con l'asse  $x_B$  ( $\mu_T = 0$ ), pertanto

$$X_T = T(V, -z_{E,G}, \delta_T), \quad Y_T = 0, \quad Z_T = 0 \quad (7.43a)$$

$$\mathcal{L}_T = 0, \quad \mathcal{M}_T = 0, \quad \mathcal{N}_T = 0 \quad (7.43b)$$

I modelli proposti in questo esercizio sono validi per volo al livello del mare. In

generale si avrebbe una spinta disponibile  $T_{\max}$  variabile con la quota  $h = -z_{E,G}$  e con la velocità di volo  $V$ . La spinta istantanea effettivamente erogata in volo è esprimibile come

$$T = \delta_T T_{\max}(h, V) \quad (7.43c)$$

dove il grado di ammissione  $\delta_T(t)$  è un parametro di input regolabile dal pilota e variabile nell'intervallo  $[0, 1]$ . Al *sea level* si assume una massima spinta disponibile costante e pari a  $T_{\max} = 11200$  lbf.

Le (7.42)-(7.43) costituiscono già delle equazioni modello, che introducono dipendenze dalla quota (anche per la presenza in esse della densità  $\rho$ , espressa dal modello ISA) e dalla velocità. Le costanti caratteristiche principali del velivolo F/A-18 HARV sono riportate nelle tabelle 7.1 e 7.2 a fronte.

Le (7.42)-(7.43) si completano assumendo il seguente modello aerodinamico.

Coefficiente di resistenza:

$$C_D = \begin{cases} 0,1423 - 0,00438 \alpha + 0,0013 \alpha^2 & -5 \text{ deg} \leq \alpha \leq 20 \text{ deg} \\ -0,3580 + 0,0473 \alpha - 0,0000348 \alpha^2 & 20 \text{ deg} < \alpha \leq 40 \text{ deg} \end{cases} \quad (7.44a)$$

Coefficiente di forza laterale:

$$C_Y = -0,0186 \beta + \frac{\delta_a}{25} (0,039 - 0,00227 \alpha) + \frac{\delta_r}{30} (0,141 - 0,00265 \alpha) \quad (7.44b)$$

Coefficiente di portanza:

$$C_L = \begin{cases} 0,732 + 0,0751 \alpha + 0,0144 \delta_e & -5 \text{ deg} \leq \alpha \leq 10 \text{ deg} \\ 0,569 + 0,106 \alpha - 0,00148 \alpha^2 + 0,0144 \delta_e & 10 \text{ deg} < \alpha \leq 40 \text{ deg} \end{cases} \quad (7.44c)$$

Coefficiente di momento di rollio:

$$C_{\mathcal{L}} = C_{\mathcal{L}}^0(\alpha, \beta) - 0,0315 p + 0,0126 r + \frac{\delta_a}{25} (-0,0628 + 0,00121 \alpha) - \frac{\delta_r}{30} (-0,0124 + 0,000351 \alpha) \quad (7.44d)$$

con

$$C_{\mathcal{L}}^0(\alpha, \beta) = \begin{cases} (-0,00092 - 0,00012 \alpha) \beta & -5 \text{ deg} \leq \alpha \leq 15 \text{ deg} \\ (-0,006 + 0,00022 \alpha) \beta & 15 \text{ deg} < \alpha \leq 25 \text{ deg} \end{cases} \quad (7.44e)$$

Coefficiente di momento di beccheggio:

$$C_{\mathcal{M}} = -0,1885 - 0,00437 \alpha - 0,123 q - 0,0196 \delta_e \quad (7.44f)$$

**Tabella 7.1** Caratteristiche di massa e inerziali (in assi *body*) del velivolo F/A-18 HARV assegnato nell'esercizio 7.1.

massa, $m = W/g$	1036 slug
Momento d'inerzia, $I_{xx}$	23000 slug ft <sup>2</sup>
Momento d'inerzia, $I_{yy}$	151293 slug ft <sup>2</sup>
Momento d'inerzia, $I_{zz}$	169945 slug ft <sup>2</sup>
Prodotto d'inerzia, $I_{xz}$	0 slug ft <sup>2</sup>

**Tabella 7.2** Caratteristiche geometriche del velivolo F/A-18 HARV assegnato nell'esercizio 7.1.

superficie alare, $S$	400 ft <sup>2</sup>
apertura alare, $b$	37,42 ft
corda media aerodinamica, $\bar{c}$	11,52 ft

Coefficiente di momento d'imbardata:

$$C_{\mathcal{N}} = C_{\mathcal{N}}^0(\alpha, \beta) - 0,0142 r + \frac{\delta_a}{25}(0,00128 + 0,000213 \alpha) + \frac{\delta_r}{30}(-0,0474 + 0,000804 \alpha) \quad (7.44g)$$

con

$$C_{\mathcal{N}}^0(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0,00125 \beta & -5 \text{ deg} \leq \alpha \leq 10 \text{ deg} \\ (0,00342 - 0,00022 \alpha) \beta & 10 \text{ deg} < \alpha \leq 25 \text{ deg} \\ -0,00201 \beta & 25 \text{ deg} < \alpha \leq 35 \text{ deg} \end{cases} \quad (7.44h)$$

Nelle (7.44), funzioni continue nelle loro variabili indipendenti, tutti gli angoli e le deflessioni angolari sono da considerarsi espresse in gradi e tutte le velocità angolari in rad/s.

Per quanto riguarda le deflessioni delle superfici di governo, si assumano i seguenti limiti:

$$\delta_a \in [-25 \text{ deg}, 25 \text{ deg}], \quad \delta_e \in [-24 \text{ deg}, 10,5 \text{ deg}], \quad \delta_r \in [-30 \text{ deg}, 30 \text{ deg}] \quad (7.45)$$

Infine, per la risoluzione del problema di valori iniziali associato alle equazioni del moto espresse in forma chiusa, si assumano le seguenti condizioni iniziali al tempo  $t = 0$ :

$$M(0) = 0,20, \quad \alpha(0) = 9,96 \text{ deg}, \quad \theta(0) = 4,46 \text{ deg}, \quad (7.46a)$$

$$\delta_e(0) = -11,86 \text{ deg}, \quad \delta_T(0) = 0,254 \quad (7.46b)$$

con  $\beta(0) = p(0) = q(0) = r(0) = \psi(0) = \phi(0) = \delta_a(0) = \delta_r(0) = 0$ . Queste condizioni corrispondono al volo equilibrato ad ali livellate, al livello del mare, lungo una traiettoria rettilinea ad angolo di rampa  $\gamma_0 = -5,50 \text{ deg}$ .

*Esempio di svolgimento*

Il problema assegnato può essere risolto in Matlab. Si consideri il codice seguente.

```
clear all; close all; clc

%% 6-DoF eqns. of motion of a rigid aircraft, in body axes, and in Euler angles.

% Aero/propulsion model valid for the F/A-18 HARV

% Variable "state" is the state vector of 12 components:
% [u, v, q, p, r, xe, ye, ze, phi, theta, psi]

%% Input properties

g = 9.81; % acceleration of gravity (m/s^2)
m = convmass(1036, 'slug', 'kg');
W = m*g; % weight (N)
T_max = convforce(11200, 'lbf', 'N'); % (N)
S = convlength(convlength(400, 'ft', 'm'), 'ft', 'm');
b = convlength(37.42, 'ft', 'm');
c = convlength(11.52, 'ft', 'm');

% Vehicle's moments and products of inertia (kg*m^2)
Ixx = 23000; % (slug*ft^2)
Ixx = convmass(Ixx, 'slug', 'kg');
Ixx = convlength(Ixx, 'ft', 'm');
Ixx = convlength(Ixx, 'ft', 'm'); % (kg*m^2)
Iyy = 151293; % (slug*ft^2)
Iyy = convmass(Iyy, 'slug', 'kg');
Iyy = convlength(Iyy, 'ft', 'm');
Iyy = convlength(Iyy, 'ft', 'm'); % (kg*m^2)
Izz = 169945; % (slug*ft^2)
Izz = convmass(Izz, 'slug', 'kg');
Izz = convlength(Izz, 'ft', 'm');
Izz = convlength(Izz, 'ft', 'm'); % (kg*m^2)
Ixy = 0; % by symmetry
Ixz = 0; % approximately
Iyz = 0; % by symmetry

%% Initial conditions & state vector

% Airflow
alpha0 = convang(9.96, 'deg', 'rad');
beta0 = convang(0, 'deg', 'rad');
Mach0 = 0.20;

% Position
x0 = 0; % (m)
y0 = 0; % (m)
z0 = 0; % (m) ==> S.L

[temp0, sound0, press0, dens0] = atmosisa(-z0);

% Velocity modulus
V0 = Mach0 * sound0; % (m/s)

% Velocity components in body axes
u0 = V0*cos(beta0)*cos(alpha0); % (m/s)
v0 = V0*sin(beta0);
w0 = V0*cos(beta0)*sin(alpha0);

% Angular velocity components in body axes
p0 = 0; % (rad/s)
q0 = 0;
r0 = 0;

% Euler angles
theta0 = convang(4.46, 'deg', 'rad'); % <==> gamma0 = theta0 - alpha0
psi0 = 0;
phi0 = 0;

% Initial inputs
```

```

delta_e0 = -11.86; % (deg)
delta_a0 = 0; % (deg)
delta_r0 = 0; % (deg)
delta_t0 = 0.254; % [0,1]

% State vector
state_0 = [u0,v0,w0,p0,q0,r0,x0,y0,z0,phi0,theta0,psi0];

```

(continua)

Il frammento di script Matlab fin qui riportato assegna le costanti del velivolo, le condizioni e i valori iniziali dei parametri di comando. Nella parte riportata di seguito si vanno a definire alcune funzioni anonime fondamentali in termini delle componenti della variabile `state`.

```

%% Matrices involved in equations of motion

% Matrix of inertias → see Eqn. (7.6)
I = [ Ixx, -Ixy, -Ixz;...
      -Ixy, Iyy, -Iyz;...
      -Ixz, -Iyz, Izz ];

% Angular velocity matrix p,q,r → see Eqn. (6.63)
omegatilde = @(state)...
    [ 0, -state(6), state(5);...
      state(6), 0, -state(4);...
      -state(5), state(4), 0 ];

% Rotation matrix from earth to body axes → see Eqn. (7.15)
T_EB = @(state) angle2dcm(state(10),state(11),state(12));

% Rotation matrix from body to earth axes
T_BE = @(state) T_EB(state)';

% Gimbal matrix for Euler angles propagation → see Eqn. (2.27)
T_gimb = @(state)...
    [ 1, sin(state(10))*sin(state(11))/cos(state(11)),...
      cos(state(10))*sin(state(11))/cos(state(11));...
      0, cos(state(10)), -sin(state(10));...
      0, sin(state(10))/cos(state(11)), cos(state(10))/cos(state(11))];

% Velocity, angle of attack and sideslip → see Eqns. (7.17)-(7.18)
V = @(state) state(1)^2 + state(2)^2 + state(3)^2; % (m/s)
alpha = @(state) convang(atan(state(3)/state(1)), 'rad', 'deg'); % (deg)
beta = @(state) convang(asin(state(2)/V(state)), 'rad', 'deg'); % (deg)
rho = @(state) density(-state(9));

```

(continua)

```

%% Forces and torques - aerodynamic model
% Forces and torques in body axes, here declared as anonymous functions;
% the forces acting on the aircraft are weight, thrust and aerodynamic
% forces, function of the state vector and time.

% Control parameters; deflections of control surfaces in [deg] and throttle

% Limits:
% delta_e [-24,10.5] deg
% delta_a [-25,25] deg
% delta_r [-30,30] deg
% delta_t [0,1]

% Simulation time
t_fin = 5; % (s)

% delta_e = @(t)...
%     interp1( ...
%         [0,t_fin], ...
%         [delta_e0,delta_e0], ...
%         t, 'spline');
delta_e = @(t)...
    interp1( ...

```

```

[0,t_fin/10,2*t_fin/10,3*t_fin/10,4*t_fin/10,t_fin], ...
[delta_e0,delta_e0,2*delta_e0,delta_e0,0,delta_e0], ...
t, 'pchip');
% delta_a = @(t)...
%   interp1( ...
%       [0,t_fin/10,2*t_fin/10,3*t_fin/10,4*t_fin/10,t_fin], ...
%       [0,delta_a0,2*delta_a0,2*delta_a0,2*delta_a0,2*delta_a0], ...
%       t, 'pchip');
delta_a = @(t)...
    interp1( ...
        [0,t_fin], ...
        [delta_a0,delta_a0], ...
        t, 'spline');
delta_r = @(t)...
    interp1( ...
        [0,t_fin], ...
        [delta_r0,delta_r0], ...
        t, 'spline');
delta_t = @(t)...
    interp1( ...
        [0,t_fin], ...
        [delta_t0,delta_t0], ...
        t, 'spline');

% Thrust and aerodynamic forces (aerodynamic axes) → see Eqns. (7.42)-(7.43)
T = @(t) delta_t(t)*T_max;
L = @(t,state) 0.5*rho(state)*(V(state)^2)*S*CL(alpha(state),delta_e(t));
D = @(t,state) 0.5*rho(state)*(V(state)^2)*S*CD(alpha(state));
Y_a = @(t,state) 0.5*rho(state)*(V(state)^2)*S*...
    CY(alpha(state),beta(state),delta_a(t),delta_r(t));

% Forces in body axes → see Eqns. (7.21)
X = @(t,state) T(t) - D(t,state)*cos(alpha(state)) + ...
    L(t,state)*sin(alpha(state)) - W*sin(state(11));
Y = @(t,state) Y_a(t,state) + W*sin(state(10))*cos(state(11));
Z = @(t,state) - D(t,state)*sin(alpha(state)) - ...
    L(t,state)*cos(alpha(state)) + W*cos(state(11))*cos(state(10));

% Aerodynamic Torques in body axes → see Eqns. (7.42b)
L_roll = @(t,state) 0.5*rho(state)*V(state)^2*S*b*...
    Croll(alpha(state),beta(state),delta_a(t),delta_r(t),state(4),state(6));
M_pitch = @(t,state) 0.5*rho(state)*V(state)^2*S*c*...
    Cpitch(alpha(state),delta_e(t),state(5));
N_yaw = @(t,state) 0.5*rho(state)*V(state)^2*S*b*...
    Cyaw(alpha(state),beta(state),delta_a(t),delta_r(t),state(6));

```

(continua)

```

% A block matrix 3x3 of zeros
zero= zeros(3);

%% ODE solution → assembling the system of Eqns. (7.10)-(7.11)-(2.26)-(2.27)

% Right-hand-sides of the ODE system;
% - rows 1-6 are the equations of traslational and rotational motion of a rigid
%   body;
% - rows 7-12 are the navigation and gimbal equations, to calculate CG coordinates
%   and Euler angles in the Earth frame (ECEF)

DstateDt= @(t,state)...
    [omegatilde(state), zero, zero, zero; ...
      zero, (I)\(omegatilde(state)*I), zero, zero; ...
      T_BE(state), zero, zero, zero; ...
      zero, T_gimb(state), zero, zero] * ...
    [state(1);state(2);state(3); ...
      state(4);state(5);state(6); ...
      state(7);state(8);state(9); ...
      state(10);state(11);state(12)] + ...
    [g/W*X(t,state); g/W*Y(t,state); g/W*Z(t,state);...
      (I)\[L_roll(t,state);M_pitch(t,state);N_yaw(t,state)]; zeros(6,1)];

% Options

```

```
options = odeset( ...
    'RelTol', 1e-9, ...
    'AbsTol', 1e-9*ones(1,12) ...
);

%ODE solver
[Time_vect, State_vect] = ode45(DstateDt, [0 t_fin], state_0, options);
```

### Funzioni per il modello aerodinamico

```
function [C_D] = CD(alpha)

% CD Drag coefficient
% F/A-18 High-Angle-of-attack Research Vehicle (HARV)

if alpha >= -5 && alpha <= 20
    C_D = 0.1423 - 0.00438*alpha + 0.0013*alpha^2;
elseif alpha > 20 && alpha <= 40
    C_D = -0.358 - 0.0473*alpha + 0.0000348*alpha^2;
else
    disp(['A.o.A \alpha exceeds limits...terminating']);
    return
end
end
```

```
function [C_D] = CD(alpha)

% CD Drag coefficient
% F/A-18 High-Angle-of-attack Research Vehicle (HARV)

if alpha >= -5 && alpha <= 20
    C_D = 0.1423 - 0.00438*alpha + 0.0013*alpha^2;
elseif alpha > 20 && alpha <= 40
    C_D = -0.358 - 0.0473*alpha + 0.0000348*alpha^2;
else
    disp(['A.o.A \alpha exceeds limits...terminating']);
    return
end
end
```

```
function [C_Y] = CY(alpha,beta,delta_a,delta_r)

% CY Lateral force coefficient
% F/A-18 High-Angle-of-attack Research Vehicle (HARV)

C_Y = -0.0186*beta + delta_a/25*(0.039 - 0.00227*alpha) + ...
    delta_r/30*(0.141 - 0.00265*alpha);

end
```

```
function [C_L] = CL(alpha,delta_e)

% CL Lift coefficient
% F/A-18 High-Angle-of-attack Research Vehicle (HARV)

if alpha >= -5 && alpha <= 10
    C_L = 0.732 + 0.0751*alpha + 0.0144*delta_e;
elseif alpha > 10 && alpha <= 40
    C_L = 0.569 + 0.106*alpha - 0.00148*alpha^2 + 0.0144*delta_e;
else
    disp(['A.o.A \alpha exceeds limits...terminating']);
    return
end
end
```

```
function [rho] = density(h)

[T,a,p,dens]=atmosisa(h);
```



```
rho = dens;
end
```

```
function [C_roll] = Croll(alpha,beta,delta_a,delta_r,p,r)

% C_l Roll moment coefficient
% F/A-18 High-Angle-of-attack Research Vehicle (HARV)

if alpha >= -5 && alpha <= 15
    C_roll0 = (-0.00092 - 0.00012*alpha)*beta;
elseif alpha > 15 && alpha <= 25
    C_roll0 = (-0.006 + 0.00022*alpha)*beta;
else
    disp(['A.o.A \alpha exceeds limits...terminating']);
    return
end

C_roll = C_roll0 - 0.315*p + 0.0126*r + ...
          delta_a/25*(-0.0628 + 0.00121*alpha) - ....
          delta_r/30*(-0.00124 + 0.000351*alpha);

end
```

```
function [C_pitch] = Cpitch(alpha,delta_e,q)

% C_m Pitch moment coefficient
% F/A-18 High-Angle-of-attack Research Vehicle (HARV)

C_pitch = -0.1885 - 0.00437*alpha - 0.123*q - 0.0196*delta_e;

end
```

```
function [C_yaw] = Cyaw(alpha,beta,delta_a,delta_r,r)

% C_n Yaw moment coefficient
% F/A-18 High-Angle-of-attack Research Vehicle (HARV)

if alpha >= -5 && alpha <= 10
    C_yaw0 = 0.00125*beta;
elseif alpha > 10 && alpha <= 25
    C_yaw0 = (0.00342 - 0.00022*alpha)*beta;
elseif alpha > 25 && alpha <= 35
    C_yaw0 = -0.00201*beta;
else
    disp(['A.o.A \alpha exceeds limits...terminating']);
    return
end

C_yaw = C_yaw0 - 0.0142*r + ...
          delta_a/25*(0.00128 + 0.00213*alpha) + ....
          delta_r/30*(-0.0474 + 0.000804*alpha);

end
```



### Esercizio 7.2: *Equazioni del moto a 6-DoF in assi velivolo con quaternioni*



Si sviluppi un codice di calcolo per la soluzione delle equazioni del moto a sei gradi di libertà del velivolo con formulazione dell'orientamento basata sul quaternioni. Si parta dal sistema (7.10)-(7.11) accoppiato alle equazioni cinematiche ausiliarie dell'evoluzione



delle coordinate del baricentro (*navigation equations*)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{E,G} \\ \dot{y}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_z q_x + q_0 q_y) \\ 2(q_x q_y + q_0 q_z) & q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_y q_z + q_0 q_x) & q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

e delle equazioni di evoluzione dei parametri simmetrici di Eulero-Rodrigues

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_0 & -q_z & q_y \\ q_z & q_0 & -q_x \\ -q_y & q_x & q_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Per fissare le idee si consideri anche qui il modello di velivolo F/A-18 HARV e le medesime condizioni di volo dell'esercizio 7.1.



### Esercizio 7.3: Equazioni del moto a 6-DoF in $V$ , $\alpha$ e $\beta$



Si risolvano le equazioni del moto a sei gradi di libertà del velivolo, scegliendo una data condizione di volo iniziale ed assegnando delle leggi orarie dei parametri di input che determinino una manovra plausibile (ad esempio, un volo livellato, una salita, una virata o una combinazione di queste).

Si scelga se trattare l'orientamento del velivolo con gli angoli di Eulero oppure con il quaternioni dell'orientamento.

Analogamente agli esercizi 7.1 e 7.2 si consideri la dinamica del velivolo F/A-18 HARV.



## 7.6 Equazioni del moto longitudinal-simmetrico

Andiamo a considerare un caso particolare delle equazioni del moto del velivolo, in cui i gradi di libertà di corpo rigido si riducono da sei a tre (*3-Degrees-of-Freedom*, 3-DoF). A tale scopo si assuma l'ipotesi di velivolo simmetrico — cioè che sia simmetrica la sua geometria rispetto al piano longitudinale e che ad esso appartenga la risultante della spinta propulsiva — ipotizzando inoltre che il volo si svolga costantemente ad ali livellate,

$$\phi(t) = 0 \quad (7.47a)$$

Il moto sarà detto longitudinal-simmetrico e l'aeromobile, stanti le predette condizioni, manterrà il suo piano di simmetria  $x_B z_B$  costantemente verticale. Ciò implica che l'angolo di prua sarà anch'esso fissato per l'intera durata del moto, potendo porsi per semplicità

$$\psi(t) = 0 \quad (7.47b)$$

Si avrà, evidentemente:

$$v(t) = \beta(t) = 0, \quad p(t) = r(t) = 0, \quad Y(t) = \mathcal{L}(t) = \mathcal{N}(t) = 0 \quad (7.47c)$$

ovvero:

$$\dot{\beta} = \dot{p} = \dot{r} = \dot{\psi} = \dot{\phi} = \dot{y}_{G,E} = 0 \quad (7.47d)$$

Per quanto appena dedotto sarà consentito trascurare:

- la seconda equazione del sistema di equazioni di equilibrio alla traslazione (7.10),
- in alternativa, se si scelgono come incognite ( $V, \alpha, \beta$ ) al posto di ( $u, v, w$ ), la terza equazione del sistema (7.40),
- la prima e la terza del sistema di equazioni di equilibrio alla rotazione (7.11) — quest'ultimo, nella sua forma matriciale, può essere convenientemente moltiplicato a primo e secondo membro per la matrice  $[I]_B$ ; l'unico elemento di  $[I]_B$  a risultare d'interesse nel caso a 3-DoF è dato da  $I_y$ , che è anche un momento centrale d'inerzia,
- la seconda equazione del sistema di equazioni della navigazione (2.26),
- la prima e la terza equazione del sistema delle *gimbal equations* (2.27).

Sia i primi che i secondi membri in ciascuna delle suddette equazioni sono identicamente nulli grazie alle ipotesi introdotte con le (7.47a)-(7.47d).

Se si sceglie come vettore delle variabili dinamiche quello dato dalle (7.41), nel caso di moto a tre gradi di libertà le variabili di stato si riducono come segue:

$$\{x_d\}_{3\text{-DoF}} = [V, \alpha, q]^T \quad \{x_k\}_{3\text{-DoF}} = [x_{E,G}, z_{E,G}, \theta]^T \quad (7.48)$$

Si osserva dunque che nel passaggio da un moto a sei gradi di libertà (6-DoF) a un moto a tre gradi di libertà (3-DoF), stanti le equazioni del moto ricavate nei paragrafi precedenti, si passa da un vettore di stato di dodici componenti (per una parametrizzazione dell'orientamento basata sugli angoli di Eulero) ad un vettore a sei componenti. Essi sono i parametri di volo incogniti le cui storie temporali permetteranno di ricostruire il volo longitudinal-simmetrico del velivolo.

Va notato, peraltro, che affinché le ipotesi di moto longitudinal-simmetrico restino soddisfatte si deve assumere che il pilota non agisca sui comandi determinando una

asimmetria delle azioni esterne, sia aerodinamiche che propulsive. Ciò significa che, ad esempio, gli alettoni e il timone di direzione vengono mantenuti in posizione neutra,

$$\delta_a(t) = \delta_r(t) = 0 \quad (7.49)$$

e che, nel caso di velivoli plurimotore, non si realizza mai un'asimmetria dell'erogazione della spinta. Ad esempio, per un velivolo bimotore dovrà essere

$$\delta_{T,\text{left}}(t) = \delta_{T,\text{right}}(t) = \delta_T(t) \quad (7.50)$$

Pertanto, affinché un moto longitudinal-simmetrico resti tale si deve assumere che il pilota agirà soltanto sui comandi di volo simmetrici, oltre che sulla manetta variando il grado di ammissione  $\delta_T$ . Si ammetterà una legge di comando dell'elevatore  $\delta_e(t)$  non identicamente nulla e, eventualmente, delle leggi non nulle  $\delta_s(t)$  — stabilizzatore o regolazione del calettamento dell'impennaggio orizzontale —,  $\delta_{\text{can}}(t)$  — regolazione simmetrica delle alette canard —,  $\delta_{\text{spoil}}(t)$  — azionamento simmetrico degli spoiler —,  $\delta_{\text{flap}}(t)$  e così via. Per semplicità ci limiteremo a considerare d'ora in avanti le sole leggi di comando dell'equilibratore e della manetta.

A questo punto è possibile andare a particolarizzare le equazioni generali ricavate ai paragrafi precedenti, valide per un velivolo rigido a massa costante, al caso del volo longitudinal-simmetrico. Si dovranno considerare le equazioni di equilibrio relative alle variabili simmetriche. Queste vanno scelte tra quelle che compaiono nel sistema formato dalle (7.40), (7.11), (2.26) e (2.27). In esse si sostituiscano le condizioni (7.47a)–(7.47c).

Si otterrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = \frac{1}{m} \left[ -D + X_T \cos \alpha_B + Z_T \sin \alpha_B - mg (\cos \alpha_B \sin \theta - \sin \alpha_B \cos \theta) \right] \\ \dot{\alpha}_B = \frac{1}{mV} \left[ -L + Z_T \cos \alpha_B - X_T \sin \alpha_B + mg (\cos \alpha_B \cos \theta + \sin \alpha_B \sin \theta) \right] + q \\ I_y \dot{q} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T \end{array} \right. \quad (7.51)$$

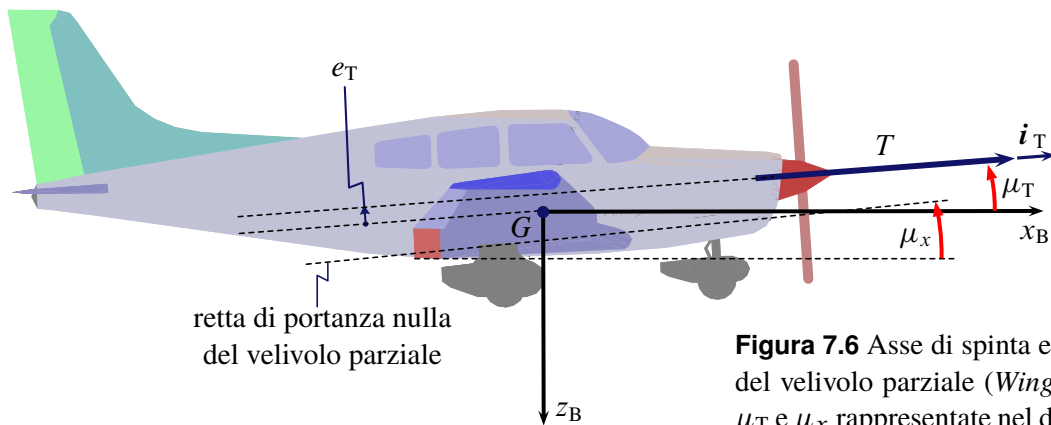
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{E,G} = (V \cos \alpha_B) \cos \theta + (V \sin \alpha_B) \sin \theta \\ \dot{z}_{E,G} = -(V \cos \alpha_B) \sin \theta + (V \sin \alpha_B) \cos \theta \\ \dot{\theta} = q \end{array} \right. \quad (7.52)$$

Nelle equazioni così ricavate si è tenuto conto delle (7.16) che per le ipotesi fatte diventano:

$$u = V \cos \alpha_B, \quad w = V \sin \alpha_B \quad (7.53)$$

essendo il vettore velocità  $V_G$  del baricentro del velivolo contenuto nel suo piano longitudinale. Inoltre, si osservi che il momento d'inerzia  $I_y$  che compare nella terza equazione del sistema (7.51) coincide, per le ipotesi di simmetria introdotte, con un momento centrale d'inerzia. L'asse velivolo  $y_B$  coincide infatti con l'asse centrale d'inerzia  $\eta$  e si può porre  $I_y \equiv I_\eta$ , detto anche  $B = m\kappa_\eta^2$ , dove  $\kappa_\eta$  è il raggio d'inerzia corrispondente.

Le (7.51)–(7.52) possono essere ulteriormente trasformate con l'ausilio della figura 7.6,



**Figura 7.6** Asse di spinta e retta di portanza nulla del velivolo parziale (*Wing-Body*). Le grandezze  $\mu_T$  e  $\mu_x$  rappresentate nel disegno sono per definizione positive mentre l'eccentricità  $e_T$  è negativa.

potendo porre:

$$X_T = T \cos \mu_T, \quad Z_T = -T \sin \mu_T, \quad \mathcal{M}_T = T e_T + \mathcal{M}_T^* \quad (7.54)$$

dove  $\mu_T$  è l'angolo formato dalla risultante della spinta con l'asse  $x_B$  (positivo se il vettore di spinta è in posizione cabrata rispetto all'asse longitudinale) ed  $e_T$  è l'eccentricità nel piano  $x_B z_B$  dell'asse di spinta rispetto al baricentro (distanza orientata di  $G$  dalla direttrice della spinta, negativa se è tale l'intercetta dell'asse di spinta con l'asse  $z_B$ ). Per un'eccentricità  $e_T = 0$  si ha un velivolo con spinta baricentrica; per un calettamento  $\mu_T = 0$  si ha un vettore spinta agente lungo l'asse baricentrico  $x_B$ .

Si osservi dalla terza delle (7.54) che, in generale, il sistema propulsivo esercita un momento di beccheggio che si compone di due contributi. Il primo,  $T e_T$ , è dovuto alla eventuale eccentricità dell'asse di spinta. Il secondo,  $\mathcal{M}_T^*$ , è una coppia pura la cui intensità è funzione dell'angolo  $\alpha_B + \mu_T$ . E esso è spesso trascurabile nelle normali condizioni di volo ma può divenire — anche in caso di asse di spinta baricentrico e a calettamento nullo — tanto più significativo quanto più è grande il valore  $|\alpha + \mu_T|$ , cioè quanto più la condizione di funzionamento dei propulsori si discosta da quella nominale di flusso assiale.

### Esempio 7.1: Un modello aerodinamico per il moto a 3-DoF



A partire dal sistema (7.51)-(7.52) valido per un moto a tre gradi di libertà si vanno a ricavare in questo esempio delle equazioni differenziali del moto in forma chiusa. Ad esse sarà possibile associare un insieme di condizioni iniziali e formulare un problema di valori iniziali.

Per semplicità si assume una spinta costante ed assegnata. Ciò può ritenersi accettabile qualora, ad esempio, non interessi osservare il fenomeno del moto vario per tempi lunghi e ci si focalizzi sull'analisi delle risposte del velivolo nel breve periodo — dell'ordine di qualche secondo — successivo all'istante iniziale.

Nota la spinta  $T$ , insieme con i dati geometrici  $\mu_T$  ed  $e_T$ , restano da esplicitare le espressioni che forniscono le azioni aerodinamiche:  $D$ ,  $L$  ed  $\mathcal{M}_A$ . Per quanto riguarda la resistenza aerodinamica si può porre

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad \text{con} \quad C_D = C_{D_0} + k C_L^m \quad (7.55)$$

Com'è noto, il coefficiente di resistenza di una superficie portante è costituito dalla somma di due termini, uno relativo al volo a portanza nulla e l'altro dipendente dalla portanza. Nel campo delle incidenze subcritiche si può assumere un'espressione come quella data dalla (7.55) con  $C_{D_0}$  e  $k$  funzioni note del numero di Mach. La sperimentazione condotta in galleria ha confermato la validità della (7.55), oltre che per le superfici portanti, anche per i velivoli completi a comandi bloccati. Per ciascun numero di Mach i valori di  $C_{D_0}$ ,  $k$  ed  $m$  sono desunti dalla polare sperimentale del velivolo. Com'è noto, ai numeri di Mach subcritici l'esponente  $m$  del coefficiente di resistenza indotta è uguale a 2 mentre il coefficiente  $k$  può essere espresso come

$$k = \frac{1}{\pi \mathcal{R}e} \quad (7.56)$$

dove  $\mathcal{R}$  è l'allungamento alare ed  $e$  è il fattore di Oswald globale del velivolo.

Il calcolo della resistenza aerodinamica istantanea può essere generalmente condotto trascurando gli effetti instazionari presenti nel moto vario. Ne consegue che la resistenza aerodinamica di un determinato velivolo, data appunto dalla (7.55), può essere riguardata come funzione della velocità, della quota, dell'incidenza di volo e delle escursioni angolari delle superfici di controllo longitudinali

$$D = D(V, z_{E,G}, \alpha, \delta_e, \delta_s) \quad (7.57)$$

Si avverte che da qui in avanti, dovendo andare a particolarizzare il modello di aerodinamica del velivolo sarà necessario definire con precisione un'opportuna retta di riferimento rispetto alla quale esprimere l'incidenza di volo  $\alpha$ . Si vedrà tra poco che per una questione di convenienza tale direttrice di riferimento è diversa dall'asse velivolo  $x_B$ .

Per quanto riguarda la portanza, per un velivolo completo alle normali incidenze di volo si può formulare la seguente espressione

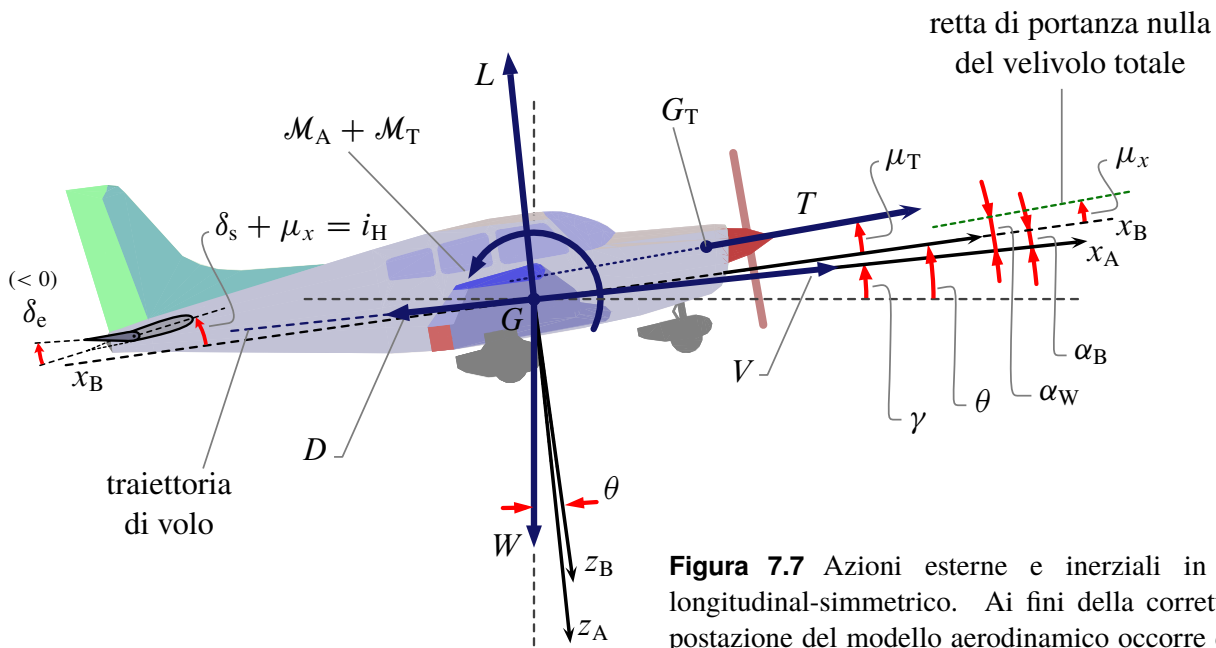
$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad \text{con} \quad C_L = C_{L\alpha} \alpha + (C_{L\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{Lq} q) \frac{\bar{c}}{2V} + C_{L\delta_e} \delta_e + C_{L\delta_s} \delta_s \quad (7.58)$$

È questa una tipica formulazione linearizzata del  $C_L$  di un velivolo che contiene un modello semplificato degli effetti instazionari e degli effetti legati al moto di rotazione intorno al baricentro. Alcuni autori chiamano l'insieme delle due espressioni precedenti il 'modello costitutivo' della portanza:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S \left[ C_{L\alpha} \alpha + (C_{L\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{Lq} q) \frac{\bar{c}}{2V} + C_{L\delta_e} \delta_e + C_{L\delta_s} \delta_s \right] \quad (7.59)$$

Nella (7.59) si è assunta come retta di riferimento delle incidenze la direzione di portanza nulla del velivolo totale con stabilizzatore ed equilibratore entrambi in posizione neutra ( $\delta_s = \delta_e = 0$ ). Pertanto, è  $\alpha \equiv \alpha_B + \mu_x$  con  $\mu_x = -\alpha_{0L,WBH}$ .

In altri termini, l'angolo d'attacco del modello aerodinamico qui introdotto è la cosiddetta *incidenza assoluta* della configurazione *Wing-Body-Horizontal tail* (WBH), detta anche  $\alpha_{a,WBH}$ . Questa assunzione sarà valida da qui in avanti per tutti gli esempi di questo capitolo. Nella figura 7.7 nella pagina seguente sono indicati i diversi angoli in gioco. Com'è noto, l'incidenza  $\alpha$  della corrente determina un contributo prevalente dell'ala alla forza portante totale. L'ala sarà posta ad un angolo d'attacco che può essere chiamato



**Figura 7.7** Azioni esterne e inerziali in moto longitudinale-simmetrico. Ai fini della corretta impostazione del modello aerodinamico occorre distinguere tra l'angolo  $\alpha_B$  e l'angolo  $\alpha \equiv \alpha_W = \alpha_B + \mu_x$ .

anche  $\alpha_W$ .

Se la (7.59) si particolarizza al caso di moto stazionario e traslatorio ( $\dot{\alpha} = q = 0$ ), si riconosce il parametro di controllo  $\delta_s + \mu_x \equiv i_H$  — ovvero la regolazione dell'incidenza dell'impennaggio orizzontale (si ricorda che  $i_H$  è il calettamento dell'impennaggio misurato rispetto ad  $x_B$ ) — e nell'escursione  $\delta_e$  dell'elevatore la genesi del termine  $C_{L_0} = C_{L_{\delta_s}} \delta_s + C_{L_{\delta_e}} \delta_e$ . Esso non è altro che l'intercetta sull'asse dei  $C_L$  della curva di portanza del velivolo completo a comandi bloccati, corrispondente ad un  $\alpha_{a,WBH} = 0$ .

Le costanti  $C_{D_0}$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $C_{L_\alpha}$ ,  $C_{L_{\dot{\alpha}}}$ ,  $C_{L_q}$ ,  $C_{L_{\delta_e}}$  e  $C_{L_{\delta_s}}$  fin qui introdotte sono da intendersi come dati dell'aeromobile (a rigore, i loro valori sono riferibili ad una determinata condizione di volo equilibrato iniziale). Com'è noto, per una data geometria esse possono essere predette con una certa approssimazione attraverso teorie aerodinamiche semplificate o attraverso formule semi-empiriche. Nei casi reali, valori numerici più attendibili dei suddetti coefficienti vengono stimati, per un determinato velivolo, con l'ausilio di prove in galleria del vento su modelli in scala. I valori corrispondenti al velivolo reale, in aria libera e con motori funzionanti, sono determinabili attraverso delle opportune prove di volo. Questo ambito di ricerca nel settore dell'ingegneria del volo va sotto il nome di *Aircraft System Identification* [21]. I dati di volo costituiscono l'input di procedimenti di identificazione parametrica volti alla determinazione di un modello linearizzato della dinamica del velivolo.

Dall'espressione del  $C_L$  formulata nella (7.58) può dedursi l'espressione definitiva del modello costitutivo della resistenza. La (7.55) e la (7.57) diventano dunque

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S \left[ C_{D_0} + k (C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s)^m \right] \quad (7.60)$$

nella quale sono stati trascurati gli effetti instazionari e legati al moto di rotazione del velivolo.

Per quanto riguarda il momento baricentrico di beccheggio di natura aerodinamica, si

procede a formulare un'equazione modello simile a quella della portanza. Si porrà

$$\mathcal{M}_A = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_M \quad (7.61a)$$

con

$$C_M = C_{M_0} + C_{M_\alpha} \alpha + (C_{M_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + C_{M_q} q) \frac{\bar{c}}{2V} + C_{M_{\delta_e}} \delta_e + C_{M_{\delta_s}} \delta_s \quad (7.61b)$$

La costante  $C_{M_0}$  è il coefficiente di momento del velivolo completo in moto traslatorio uniforme, per una corrente di incidenza  $\alpha_B = -\mu_x$ , con stabilizzatore ed equilibratore in posizione neutra.

Analogamente, il momento di beccheggio dovuto alla propulsione potrà essere espresso come segue:

$$\mathcal{M}_T = \frac{1}{2} \rho V^2 S \bar{c} C_{M,T} \quad \text{con} \quad C_{M,T} = \frac{T e_T}{\bar{q}_\infty S \bar{c}} \quad (7.62)$$

A questo punto possono essere sostituite le equazioni costitutive (7.59), (7.60), (7.61) e (7.62) nel sistema di equazioni di equilibrio (7.51). Nella figura 7.7 si riporta lo schema di un velivolo nel suo moto a 3-DoF con l'indicazione delle diverse grandezze che concorrono alla definizione delle azioni esterne. Tralasciando i passaggi matematici, è sufficiente qui fornire la forma finale delle equazioni a cui si perviene, dopo aver convenientemente messo a fattor comune i vari gruppi adimensionali ed aver isolato i termini che hanno dimensioni omogenee a quelle dei primi membri. Ne risulta il seguente sistema completo di equazioni differenziali ordinarie del moto longitudinal-simmetrico:

$$\dot{V} = g \left\{ \frac{T}{W} \cos(\alpha - \mu_x + \mu_T) - \sin(\theta + \mu_x - \alpha) - \frac{\rho V^2}{2(W/S)} \left[ C_{D_0} + k(C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s)^m \right] \right\} \quad (7.63a)$$

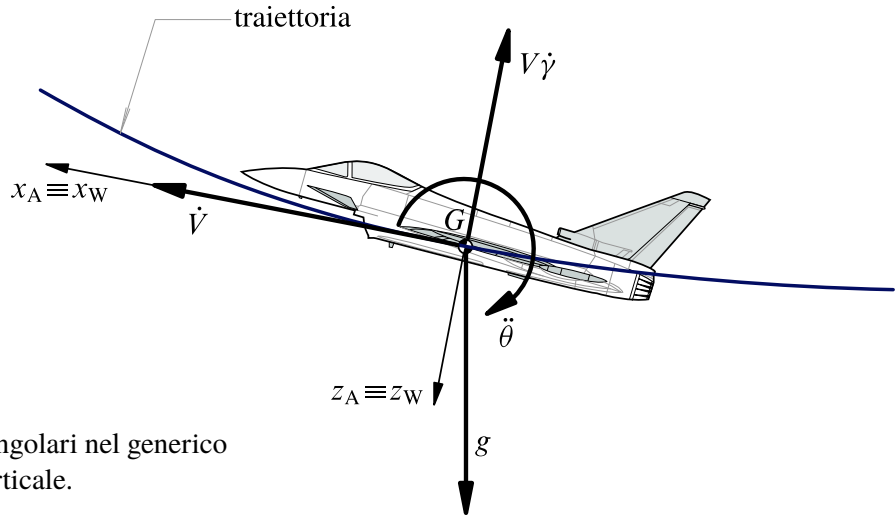
$$\dot{\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{c}/b}{4\mu} C_{L_{\dot{\alpha}}}} \left[ q \left( 1 - \frac{\bar{c}/b}{4\mu} C_{L_q} \right) - \frac{T}{W} \frac{g}{V} \sin(\alpha - \mu_x + \mu_T) + \frac{g}{V} \cos(\theta + \mu_x - \alpha) - \frac{\rho V^2}{2(W/S)} \frac{g}{V} (C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_{\delta_e}} \delta_e + C_{L_{\delta_s}} \delta_s) \right] \quad (7.63b)$$

$$\dot{q} = \frac{V^2 \bar{c}/b}{\kappa_y^2 2\mu} \left[ C_{M,T} + C_{M_0} + C_{M_\alpha} \alpha + C_{M_{\delta_e}} \delta_e + C_{M_{\delta_s}} \delta_s + \frac{\bar{c}}{2V} (C_{M_{\dot{\alpha}}} \dot{\alpha} + C_{M_q} q) \right] \quad (7.63c)$$

$$\dot{x}_{E,G} = V \cos(\theta + \mu_x - \alpha) \quad (7.63d)$$

$$\dot{z}_{E,G} = -V \sin(\theta + \mu_x - \alpha) \quad (7.63e)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (7.63f)$$



**Figura 7.8** Accelerazioni lineari ed angolari nel generico istante di un'evoluzione nel piano verticale.

nei parametri di volo incogniti  $V$ ,  $\alpha \equiv \alpha_W$ ,  $q$ ,  $x_{E,G}$ ,  $z_{E,G}$ ,  $\theta$  e nei parametri di controllo  $\delta_e$  e  $\delta_s$ . Essi sono rappresentati nella figura 7.7. Si lascia al lettore l'esercizio di verificare che le equazioni (7.63a)-(7.63f) effettivamente discendono da quelle generali ricavate ai paragrafi precedenti valide per il moto a 6-DoF (si veda ad esempio il testo di Calcara [18] e l'esercizio 7.4).

Si noti nella (7.63c) la presenza a secondo membro della derivata temporale  $\dot{\alpha}$ . In altri termini, l'equazione di equilibrio alla rotazione non si riesce a porre in una forma in cui compaia esplicitamente la sola derivata  $\dot{q}$  a primo membro. In essa compaiono almeno due derivate di parametri incogniti. La (7.63c) può essere riguardata come un'equazione differenziale del tipo:

$$F(\dot{\alpha}, \dot{q}, V, \alpha, q, z_{E,G}, \delta_e, \delta_s) = 0 \quad (7.64)$$

La (7.64) è una dipendenza con la quale tipicamente viene scritta un'equazione differenziale in forma implicita. Questa circostanza mette in luce il carattere fortemente non lineare di queste equazioni qualora si voglia tener conto in generale degli effetti della non stazionarietà nei modelli costitutivi delle azioni aerodinamiche. Quando si modellano in maniera approssimata gli effetti instazionari, attraverso contributi proporzionali ad  $\dot{\alpha}$ , nella (7.64) comparirà semplicemente una combinazione lineare di  $\dot{q}$  e  $\dot{\alpha}$ .

Si osservi inoltre che nelle equazioni precedenti compare la quantità adimensionale  $\mu$ , detta *densità relativa* del velivolo,

$$\mu = \frac{W/g}{\rho S b} \quad (7.65)$$

Essa è una funzione  $\mu = \mu(z_{E,G})$  crescente con la quota di volo e corrisponde al rapporto tra la massa del velivolo e la massa di un volume d'aria proporzionale a quello da esso occupato.

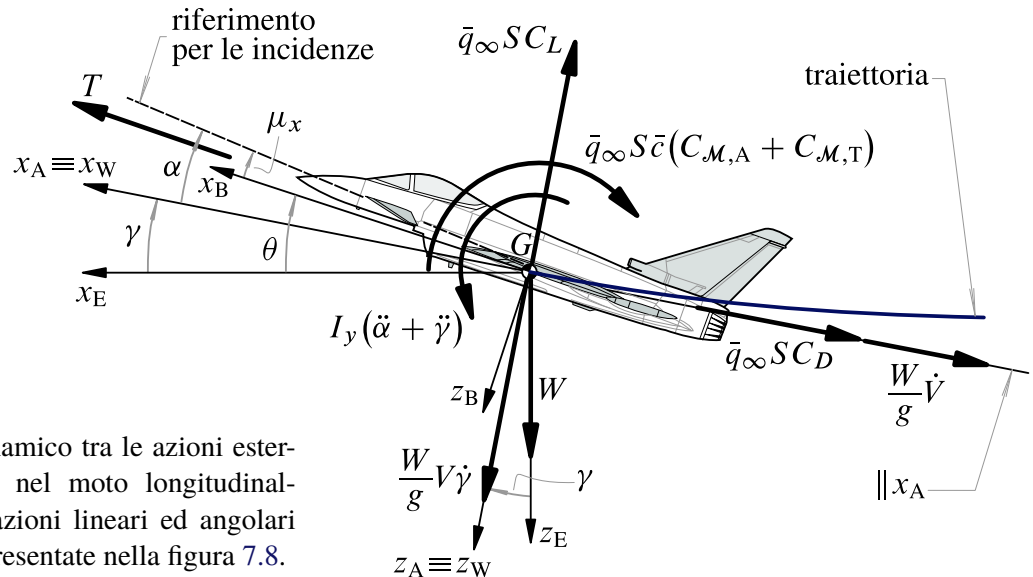


#### Esercizio 7.4: Equazioni del moto a 3-DoF in assi aerodinamici



Si ricavino le equazioni (7.63a)-(7.63f) impostando le equazioni di equilibrio lungo gli assi aerodinamici tra le azioni esterne e le azioni inerziali nel moto accelerato. Si faccia riferimento alle rappresentazioni schematiche riportate nelle figure 7.8 e 7.9. Si osservi





**Figura 7.9** Equilibrio dinamico tra le azioni esterne e le azioni inerziali nel moto longitudinal-simmetrico. Le accelerazioni lineari ed angolari corrispondenti sono rappresentate nella figura 7.8.

che in un moto longitudinal-simmetrico gli assi aerodinamici coincidono con gli assi vento, cioè  $x_W \equiv x_A$ ,  $z_W \equiv z_A$  ed  $y_W \equiv y_A \equiv y_B$ .

Le forze e le coppie inerziali si deducono dalle accelerazioni lineari ed angolari rappresentate nella figura 7.8. Durante l'evoluzione lungo una traiettoria curva del piano verticale il baricentro del velivolo è soggetto — oltre che all'accelerazione di gravità  $\mathbf{g} = g\mathbf{k}_E$  — all'accelerazione  $\dot{V}\mathbf{i}_A$ , tangenziale alla traiettoria e concorde con l'asse aerodinamico  $x_A$  per moto a velocità crescente. Al tempo stesso, trovandosi il punto  $G$  a percorrere una linea curva del piano verticale, il baricentro subisce anche un'accelerazione centripeta, diretta verso il centro del cerchio osculatore alla traiettoria. Tale accelerazione ha modulo  $V\dot{\gamma}$  ed è data dal vettore  $-V\dot{\gamma}\mathbf{k}_A$ .

D'altra parte, nell'istante considerato il velivolo possiede un moto di rotazione accelerato intorno all'asse di beccheggio. Per volo simmetrico, ad ali livellate si ha:

$$\theta + \mu_x = \gamma + \alpha \quad (7.66)$$

dunque l'accelerazione angolare è  $\ddot{\theta} = \ddot{\alpha} + \ddot{\gamma} = \dot{q}$ .

Dalle precedenti osservazioni si passa agevolmente ad interpretare il significato fisico delle forze e delle coppie rappresentate nella figura 7.9. Le azioni esterne sono le seguenti:

- la componente della spinta  $T_{x_A} = T \cos(\alpha - \mu_x + \mu_T)$  lungo la direzione della velocità (nello stesso senso di  $V$ );
- la componente della forza aerodinamica  $F_{Ax_A} = -D = -\bar{q}_\infty S C_D$  lungo la direzione della velocità (nel senso opposto a  $V$ );
- la componente del peso  $W_{x_A} = -W \sin \gamma$  lungo la direzione della velocità (nel senso opposto a  $V$  per volo in salita);
- la forza d'inerzia tangenziale  $-(W/g)\dot{V}$  lungo la direzione della velocità (nel senso opposto a  $V$  per volo accelerato);
- la componente della spinta  $T_{z_A} = -T \sin(\alpha - \mu_x + \mu_T)$  lungo la normale alla traiettoria (nel senso opposto a  $z_A$ );
- la componente della forza aerodinamica  $F_{Az_A} = -L = -\bar{q}_\infty S C_L$  lungo la normale alla traiettoria (nel senso opposto a  $z_A$  ai normali angoli d'attacco);
- la componente del peso  $W_{z_A} = W \cos \gamma$  lungo la normale alla traiettoria (nello stesso

senso di  $z_A$  per volo non rovescio);

- (h) la forza d'inerzia centrifuga  $(W/g)V\dot{\gamma}$  lungo la normale alla traiettoria (nello stesso senso di  $z_A$  per volo ad angolo di volta crescente);
- (i) la coppia di beccheggio  $\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T = \bar{q}_\infty S \bar{c} (C_{\mathcal{M},A} + C_{\mathcal{M},T})$  di natura aerodinamica e propulsiva; la coppia d'inerzia  $-I_y \ddot{\theta} = -I_y (\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma})$ , picchiante per accelerazioni angolari  $\dot{q}$  positive

Si osservi che  $I_y$  è il momento d'inerzia del velivolo rispetto all'asse aerodinamico  $y_A$  che, per le ipotesi fatte, è un asse centrale d'inerzia:  $I_{y_A} = I_{y_B} = B$ . Ne consegue che  $\dot{I}_{y_A} = 0$ , uguaglianza non vera in generale per moti qualsiasi.

Elencate le azioni esterne, si procede a scrivere le tre equazioni di equilibrio lungo gli assi aerodinamici:

$$T \cos(\alpha - \mu_x + \mu_T) - \bar{q}_\infty S C_D - W \sin \gamma - \frac{W}{g} \dot{V} = 0 \quad (7.67a)$$

$$-T \sin(\alpha - \mu_x + \mu_T) - \bar{q}_\infty S C_L + W \cos \gamma + \frac{W}{g} V \dot{\gamma} = 0 \quad (7.67b)$$

$$\bar{q}_\infty S \bar{c} (C_{\mathcal{M},A} + C_{\mathcal{M},T}) - I_y (\ddot{\alpha} + \ddot{\gamma}) = 0 \quad (7.67c)$$

A partire da queste tre equazioni si ritrovano agevolmente le equazioni (7.63c), (7.63b) e (7.63a), tenendo conto della (7.66). Da quest'ultima, inoltre, discende direttamente la (7.63f), mentre la (7.63d) e la (7.63e) si ricavano direttamente dalla definizione di  $\gamma$ .



### Esercizio 7.5: *Espressioni dei fattori di carico nel moto a 3-DoF*



Per il moto longitudinal-simmetrico si ricavino le espressioni delle componenti del fattore di carico

$$\mathbf{f} = \frac{1}{g} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (7.68)$$

lungo gli assi aerodinamici.

Nel caso considerato val la pena di considerare le sole due componenti

$$f_{x_A} = \frac{1}{g} (g_{x_A} - a_{x_A}) \quad \text{ed} \quad f_{z_A} = \frac{1}{g} (g_{z_A} - a_{z_A}) \quad (7.69)$$

Dalle osservazioni fatte nell'esercizio 7.4 sulle accelerazioni del moto vario in un piano verticale e dalla figura 7.8 si potrà scrivere:

$$f_{x_A} = \frac{1}{g} (-g \sin \gamma - \dot{V}) = - \left( \sin \gamma + \frac{\dot{V}}{g} \right) \quad (7.70)$$

ed

$$f_{z_A} = \frac{1}{g} [g \cos \gamma - (-V \dot{\gamma})] = \cos \gamma + \frac{V \dot{\gamma}}{g} \quad (7.71)$$

Quest'ultima relazione è di particolare importanza quando si studiano alcune evoluzioni in cui vi è una rapida variazione della deflessione  $\delta_e$ . Quando ciò accade, spesso

vale la pena assumere un andamento nel tempo di  $f_{z_A}$  più blando di quanto non accada per grandezze come  $\dot{q}$ , che tipicamente seguono quello di  $\delta_e(t)$ .



### Esempio 7.2: Impostazione del problema di valori iniziali del moto a 3-DoF



In questo esempio si perviene alla formulazione di un opportuno problema di valori iniziali per le equazioni del moto longitudinal-simmetrico di un velivolo.

Si consideri un velivolo le cui caratteristiche sono definite come segue. I dati di massa dell'aeromobile sono quelli riportati nella tabella 7.3 nella pagina successiva. I dati geometrici sono riportati nella tabella 7.4. I dati che definiscono il modello aerodinamico sono assegnati nella tabella 7.5. I dati del modello propulsivo sono riportati infine nella tabella 7.6.

In un istante  $t = 0$  si assegnino le seguenti condizioni iniziali:

- volo a una quota  $h(0) \equiv -z_{E,G}(0) = 4000$  m (*above mean sea level*),
- a una velocità  $V(0) = 257$  m/s,
- moto traslatorio,  $q(0) = 0$ ,
- con traiettoria orizzontale,  $\gamma(0) = 0$  deg.

Si assuma inoltre una costante  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> ed un modello di atmosfera standard (ISA), per il quale  $\rho(0) = \rho(h(0)) = 0,818$  kg/m<sup>3</sup>. La costanza della quota fissa anche il valore  $\mu_0 = \mu(h(0))$  della densità relativa del velivolo.

Si osservi che il sistema di equazioni (7.51)-(7.52) può essere riformulato come segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{x}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(V, \alpha, z_{E,G}, \theta, \delta_e, \delta_s) \\ f_2(V, \alpha, q, z_{E,G}, \theta, \delta_e, \delta_s) \\ f_3(V, \alpha, q, z_{E,G}, \delta_e, \delta_s) \\ f_4(V, \alpha, \theta) \\ f_5(V, \alpha, \theta) \\ f_6(q) \end{pmatrix} \quad (7.72a)$$

dove

$$M_{32} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\bar{c}^2}{\kappa_y^2} C_{M\dot{\alpha}} \frac{V}{b} \quad (7.72b)$$

si misura in s<sup>-1</sup> ed è uno degli elementi della matrice quadrata  $[M]$  di dimensioni  $6 \times 6$  che compare a primo membro della (7.72a), moltiplicata a sinistra per il vettore delle derivate delle variabili di stato. La  $[M]$  ha gli elementi diagonali tutti uguali a 1 ed un unico elemento non diagonale  $M_{32}$  diverso da zero: l'elemento di posto (3, 2) dato dalla (7.72b).

**Tabella 7.3** Caratteristiche di massa del velivolo assegnato nell'esempio 7.2.

massa, $m = W/g$	6000 kg
raggio d'inerzia longitudinale, $\kappa_y$	2,20 m

**Tabella 7.4** Caratteristiche geometriche del velivolo assegnato nell'esempio 7.2.

superficie alare, $S$	17,00 m <sup>2</sup>
apertura alare, $b$	6,90 m
corda media aerodinamica, $\bar{c}$	2,60 m
distanza adimensionale del baricentro $G$ dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica <sup>a</sup> , $\hat{X}_G = X_G/\bar{c}$	0,32
distanza adimensionale del punto neutro $N$ dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica, $\hat{X}_N = X_N/\bar{c}$	0,41

<sup>a</sup> Il senso positivo delle  $X$  è verso il bordo d'uscita.

È facile verificare che la matrice  $[M]$  ammette come inversa

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.72c)$$

Nella (7.72a) si sono lasciati in forma di dipendenze funzionali i secondi membri, evidenziando anche che alcune delle  $f_i$  (con  $i = 1, \dots, 6$ ) sono funzioni di tutti i parametri di volo e di controllo mentre altre solo di una parte di essi. Inoltre, dalla terza equazione del sistema (7.72a) si può notare che l'equazione differenziale espressa nella sua formulazione implicita (7.64) a pagina 32 si scrive come segue:

$$M_{32} \dot{\alpha} + \dot{q} = f_3(V, \alpha, q, z_{E,G}, \delta_e, \delta_s) \quad (7.73)$$

Moltiplicando a sinistra per  $[M]^{-1}$  entrambi i membri della (7.72a) e tenendo conto della (7.72c) è facile verificare che l'equazione (7.73) assume una forma più conveniente, che si scrive come segue:

$$\dot{q} = -M_{32} f_2(V, \alpha, q, z_{E,G}, \theta, \delta_e, \delta_s) + f_3(V, \alpha, q, z_{E,G}, \delta_e, \delta_s) \quad (7.74)$$

Nell'ultima equazione si è potuta esplicitare a primo membro la derivata  $\dot{q}$  grazie alla particolare semplicità con cui si sono incorporati nel modello aerodinamico gli effetti instazionari — per mezzo di un termine proporzionale al valore istantaneo di  $\dot{\alpha}$  [si veda la (7.61) a pagina 31]. La (7.74) può essere sostituita alla terza equazione del sistema (7.72a).

**Tabella 7.5** Caratteristiche aerodinamiche del velivolo assegnato nell'esempio 7.2. Si vedano i modelli costitutivi (7.59), (7.60) e (7.61).

coefficiente $C_{D_0}$	0,06
fattore $k$	0,35
esponente $m$	2
gradiente $C_{L\alpha}$	4,18 rad <sup>-1</sup>
gradiente di controllo $C_{L\delta_e}$	0,29 rad <sup>-1</sup>
gradiente di controllo $C_{L\delta_s}$	0,52 rad <sup>-1</sup>
coefficiente instazionario $C_{L\dot{\alpha}}$	2,27 rad <sup>-1</sup>
coefficiente di smorzamento $C_{Lq}$	4,72 rad <sup>-1</sup>
coefficiente $C_{M_0}$	-0,02
gradiente $C_{M\alpha} = -C_{L\alpha}(\hat{X}_N - \hat{X}_G)$	-0,38 rad <sup>-1</sup>
gradiente di controllo $C_{M\delta_e}$	-0,51 rad <sup>-1</sup>
gradiente di controllo $C_{M\delta_s}$	-0,92 rad <sup>-1</sup>
coefficiente instazionario $C_{M\dot{\alpha}}$	-4,00 rad <sup>-1</sup>
coefficiente di smorzamento $C_{Mq}$	-8,34 rad <sup>-1</sup>

**Tabella 7.6** Caratteristiche propulsive del velivolo assegnato nell'esempio 7.2.

spinta netta, $T(t) = T_0$	7530 kg <sub>f</sub>
calettamento della spinta, $\mu_T$	0 deg
contributo al coefficiente di momento di beccheggio, $C_{M,T}$	0

Pertanto, le equazioni del moto longitudinal-simmetrico assumono la forma finale:

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{x}_{E,G} \\ \dot{z}_{E,G} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -M_{32} f_2 + f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad (7.75)$$

dove le  $f_i$  (con  $i = 1, \dots, 6$ ) sono definite dai secondi membri delle equazioni (7.72a) ed  $M_{32}$  dato alla (7.72b).

A questo punto, ricavate le espressioni in forma chiusa (7.75) delle equazioni del moto longitudinal-simmetrico, esse possono essere associate a delle condizioni iniziali al fine di trovarne una soluzione particolare. Va osservato che le condizioni iniziali specificate all'inizio di questo esempio *non* assegnano completamente il vettore iniziale  $\mathbf{x}(0)$  delle variabili di stato *né* assegnano il valore iniziale  $\mathbf{u}(0)$  dei parametri di controllo.

Dalle informazioni note fin qui si può dire che la situazione di volo iniziale corrisponde ad una 'desiderata' condizione di volo equilibrato — detta anche *condizione di trim*. In altri termini, si ipotizza che il velivolo permanga fino all'istante  $t = 0$  (a partire da un imprecisato istante del passato) in un moto traslatorio uniforme, con un'assegnata pendenza della traiettoria del baricentro. Si assume implicitamente che i comandi siano

bloccati in determinate posizioni iniziali, tali da garantire il volo equilibrato ('trimmato'). Eppure le escursioni iniziali delle superfici di governo, così come l'angolo d'attacco e l'inclinazione della fusoliera iniziali non sono state assegnate esplicitamente. Ciò può riassumersi scrivendo:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} V(0) \\ \alpha(0) \\ q(0) \\ x_{E,G}(0) \\ z_{E,G}(0) \\ \theta(0) = \gamma(0) + \alpha_B(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ ? \\ q_0 \\ x_{E,G,0} \\ -h_0 \\ ? = \gamma_0 + ? \end{pmatrix} \quad (7.76a)$$

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} \delta_e(0) \\ \delta_s(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} \quad (7.76b)$$

con  $V_0 = 257 \text{ m/s}$ ,  $q_0 = 0 \text{ rad/s}$ ,  $h_0 = 4000 \text{ m}$ ,  $\gamma_0 = 0 \text{ deg}$  e, senza ledere la generalità,  $x_{E,G,0} = 0$ . Si noti come nella (7.76a) si sia utilizzata la relazione che lega l'angolo di volta  $\gamma$  agli angoli  $\alpha_B$  e  $\theta$  che per un moto longitudinal-simmetrico si particolarizza come segue:

$$\gamma = \theta - \alpha_B = \theta - \alpha + \mu_x \quad \text{cioè: } \theta = \gamma + \alpha_B \quad (7.77)$$

come è possibile verificare esaminando la figura 7.7 a pagina 30.

La ricerca dei valori non ancora assegnati nelle (7.76) richiede di risolvere uno specifico problema, prima ancora di accingersi a ricercare una soluzione delle equazioni del moto. Infatti — pur avendo a disposizione una definizione completa del velivolo, che comprende un suo modello aerodinamico ed un modello propulsivo — non è banale fornire, per una desiderata condizione di volo equilibrato ad assegnati valori  $V_0$ ,  $h_0$  e  $\gamma_0$ , i valori corrispondenti di  $\alpha_{B,0}$  [quindi, per la (7.77), di  $\theta_0$ ],  $\delta_{e,0}$  e  $\delta_{s,0}$ .

Il calcolo di un insieme completo di parametri di volo e di comando iniziali corrispondenti alla condizione di *trim* richiesta viene effettuato a partire dalle prime tre equazioni del sistema (7.75). Esse discendono dalle leggi di Newton e valgono in particolare per un moto stazionario, cioè tale che:

$$\dot{V} = \dot{\alpha} = \dot{q} = 0 \quad (7.78)$$

Imponendo le (7.78), cioè l'annullarsi delle derivate temporali delle variabili di stato dinamiche, alle prime tre equazioni del sistema (7.75) per  $t = 0$  si perviene al sistema di tre equazioni algebriche:

$$\begin{cases} f_1(V_0, \alpha_{B,0}, z_{E,G,0}, \gamma_0 + \alpha_{B,0}, \delta_{e,0}, \delta_{s,0}) = 0 \\ f_2(V_0, \alpha_{B,0}, q_0, z_{E,G,0}, \gamma_0 + \alpha_{B,0}, \delta_{e,0}, \delta_{s,0}) = 0 \\ -M_{32} f_2(V_0, \alpha_{B,0}, q_0, z_{E,G,0}, \gamma_0 + \alpha_{B,0}, \delta_{e,0}, \delta_{s,0}) \\ \quad + f_3(V_0, \alpha_{B,0}, q_0, z_{E,G,0}, \delta_{e,0}, \delta_{s,0}) = 0 \end{cases} \quad (7.79)$$

nelle tre incognite  $\alpha_{B,0}$ ,  $\delta_{e,0}$  e  $\delta_{s,0}$ . Si osserva che la terza delle (7.79) può semplificarsi

tenendo conto della seconda ( $f_2 = 0$ ), potendo riscrivere il sistema precedente come:

$$\begin{cases} f_1(V_0, \alpha_{B,0}, z_{E,G,0}, \gamma_0 + \alpha_{B,0}, \delta_{e,0}, \delta_{s,0}) = 0 \\ f_2(V_0, \alpha_{B,0}, q_0, z_{E,G,0}, \gamma_0 + \alpha_{B,0}, \delta_{e,0}, \delta_{s,0}) = 0 \\ f_3(V_0, \alpha_{B,0}, q_0, z_{E,G,0}, \delta_{e,0}, \delta_{s,0}) = 0 \end{cases} \quad (7.80)$$

La soluzione di questo sistema porta a fissare definitivamente le condizioni iniziali di equilibrio corrispondenti alla condizione di *trim* richiesta.

Si osservi che in questo caso il numero di incognite da determinare è pari al numero di equazioni a disposizione. Il numero di incognite cambia se si considera un velivolo con un insieme di comandi di volo diversi. Ad esempio si potrebbe dover tenere conto anche dell'eventuale presenza di alette canard, di spoiler o flap. In questi casi la possibilità di regolazione delle molteplici superfici di governo determina un problema matematico che avrebbe infinite soluzioni — avendo a disposizione solo tre equazioni algebriche ed un numero di incognite superiore a tre.

D'altro canto, anche nel caso in cui si considerano le sole escursioni  $\delta_e$  e  $\delta_s$  potrebbe verificarsi il caso in cui il problema (7.80) non ammette alcuna soluzione. Si pensi, ad esempio, alla circostanza in cui si richiede un volo equilibrato alla quota  $h_0$  ad una velocità  $V_0$  troppo elevata per le capacità di erogazione di spinta da parte del propulsore.

Si osservi infine che la particolare condizione di *trim* richiesta in questo esempio si riferisce a un volo traslatorio,  $q_0 = 0$ , e a quota costante,  $\gamma_0 = 0$ . Pertanto, le (7.80) si particolarizzano nel seguente sistema

$$0 = \frac{T_0}{W} \cos(\alpha_0 - \mu_x + \mu_T) - \frac{\rho_0 V_0^2}{2(W/S)} \left[ C_{D_0} + k \left( C_{L_\alpha} \alpha_0 + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e,0} + C_{L_{\delta_s}} \delta_{s,0} \right)^m \right] \quad (7.81a)$$

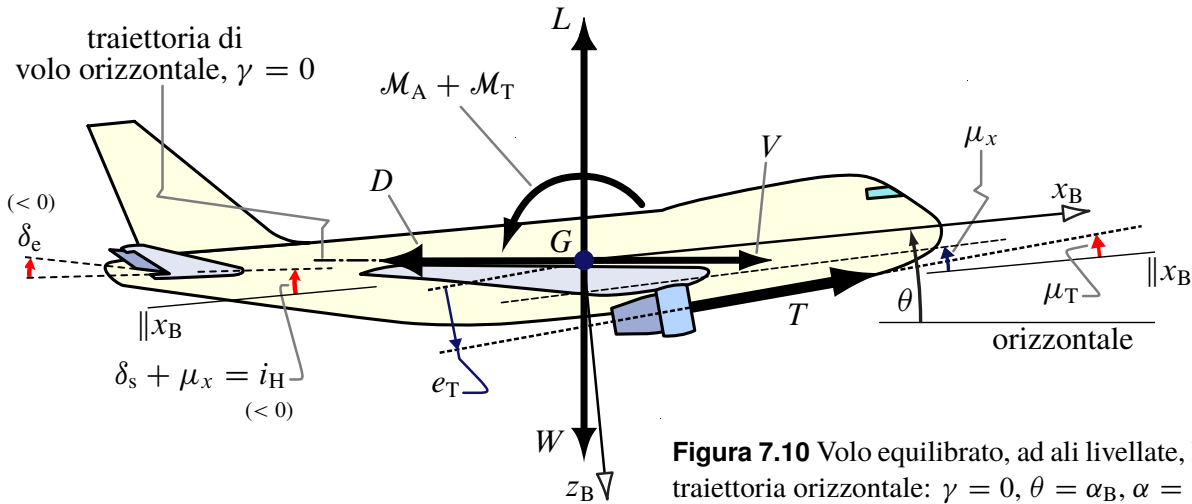
$$0 = -\frac{T_0}{W} \frac{g}{V_0} \sin(\alpha_0 - \mu_x + \mu_T) + \frac{g}{V_0} - \frac{\rho_0 V_0^2}{2(W/S)} \frac{g}{V_0} \left( C_{L_\alpha} \alpha_0 + C_{L_{\delta_e}} \delta_{e,0} + C_{L_{\delta_s}} \delta_{s,0} \right) \quad (7.81b)$$

$$0 = C_{\mathcal{M}_T} + C_{\mathcal{M}_0} + C_{\mathcal{M}_\alpha} \alpha_0 + C_{\mathcal{M}_{\delta_e}} \delta_{e,0} + C_{\mathcal{M}_{\delta_s}} \delta_{s,0} \quad (7.81c)$$

nelle incognite  $\alpha_0$ ,  $\delta_{e,0}$  e  $\delta_{s,0}$ , dove si è posto  $\alpha_0 \equiv \alpha_{B,0} + \mu_x$ . Si noti come nella (7.81a) sia scomparso il termine  $g \sin \gamma_0$  e come nella (7.81b) si sia semplificato il termine  $(g/V) \cos \gamma_0$ .

Le (7.81) sono le equazioni che reggono il moto equilibrato rappresentato nella figura 7.10 nella pagina successiva. In questa situazione di volo  $\alpha_{B,0} = \theta_0$  e l'incidenza assoluta del velivolo parziale è  $\alpha_0 = \theta_0 + \mu_x$ . Pertanto, la (7.81a) equivale all'uguaglianza:  $D = T \cos(\alpha_{B,0} + \mu_T)$ , cioè  $-D + X_T = 0$ ; la (7.81b) equivale all'uguaglianza:  $L + T \sin(\alpha_{B,0} + \mu_T) = W$ , cioè  $-L + Z_T + W = 0$ ; infine la (7.81c) equivale all'uguaglianza:  $\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T = 0$ .

I valori iniziali  $\alpha_0$ ,  $\delta_{e,0}$  e  $\delta_{s,0}$ , che vanno determinati risolvendo il sistema alge-



**Figura 7.10** Volo equilibrato, ad ali livellate, lungo una traiettoria orizzontale:  $\gamma = 0$ ,  $\theta = \alpha_B$ ,  $\alpha = \theta + \mu_x$ .

brico (7.81), insieme con quelli designati dalla condizione di *trim* desiderata, sono rappresentativi di una situazione di volo equilibrato a quota costante.

Si lascia al lettore l'esercizio di verificare che un volo equilibrato, in generale ad una velocità angolare di beccheggio assegnata  $q_0 = \Omega_{y_E,0}$ , in un istante in cui la tangente alla traiettoria è inclinata di un angolo  $\gamma_0$ , è retto dal sistema di equazioni seguente:

$$0 = \frac{T_0}{W} \cos \left( \boxed{\alpha_0} - \mu_x + \mu_T \right) - \sin \gamma_0 - \frac{\rho V_0^2}{2(W/S)} \left[ C_{D_0} + k \left( C_{L\alpha} \boxed{\alpha_0} + C_{L\delta_e} \boxed{\delta_{e,0}} + C_{L\delta_s} \boxed{\delta_{s,0}} \right)^m \right] \quad (7.82a)$$

$$0 = q_0 \left( 1 - \frac{\bar{c}/b}{4\mu} C_{Lq} \right) - \frac{T_0}{W} \frac{g}{V_0} \sin \left( \boxed{\alpha_0} - \mu_x + \mu_T \right) + \frac{g}{V_0} \cos \gamma_0 - \frac{\rho V_0^2}{2(W/S)} \frac{g}{V_0} \left( C_{L\alpha} \boxed{\alpha_0} + C_{L\delta_e} \boxed{\delta_{e,0}} + C_{L\delta_s} \boxed{\delta_{s,0}} \right) \quad (7.82b)$$

$$0 = C_{M,T} + C_{M_0} + C_{M\alpha} \boxed{\alpha_0} + C_{Mq} \frac{q_0 \bar{c}}{2V_0} + C_{M\delta_e} \boxed{\delta_{e,0}} + C_{M\delta_s} \boxed{\delta_{s,0}} \quad (7.82c)$$

Le (7.82) generalizzano le (7.81) e sono valide se si trascurano gli effetti delle variazioni di quota, cioè assegnando un valore costante  $\rho_0$  alla densità e  $\mu_0$  alla densità relativa del velivolo. Per  $q_0 = 0$  le (7.82) descrivono un volo traslatorio equilibrato lungo una traiettoria rettilinea come quello rappresentato nella figura 7.11.

◆

### Esempio 7.3: Ricerca di condizioni di trim per un moto a 3-DoF



In questo esempio risolviamo il problema della ricerca di un insieme completo di valori iniziali

$$\{x_d\}_{3\text{-DoF}}|_{t=0} = [V_0, \alpha_0, q_0]^T, \quad \{x_k\}_{3\text{-DoF}}|_{t=0} = [x_{E,G,0}, z_{E,G,0}, \theta_0]^T \quad (7.83)$$





```

% Aircraft object
myAC = DSVAircraft(aircraftDataFileName);

if (myAC.err == -1)
    disp(['... terminating.']); % unsuccessful object construction
else
    disp(['File ', aircraftDataFileName, ' read, OK.']);

    % Initial conditions
    z_0 = -4000.; % a.s.l. altitude (m)
    V_0 = 260.; % flight speed
    q_0 = 0.; % pitching angular speed (rad/s)
    gamma_0 = 0.; % path climb angle (rad)

    % Using Matlab built-in ISA model for density
    [air_Temp_0, sound_speed_0, air_pressure_0, rho_0] = atmosisa(-z_0);

    % Gravity acceleration
    g = 9.81; % (m/s2)

    % initial guess for the design vector
    x0 = [ ...
        0; ... % 1) alpha_0
        0; ... % 2) delta_0
        0; ... % 3) delta_s_0
        0.5]; % 4) delta_T_0

    % Cost function minimization

    % bounds
    lb = [convang(-15, 'deg', 'rad'), ... % minimum alpha
        convang(-20, 'deg', 'rad'), ... % minimum elevator deflection
        convang(-5, 'deg', 'rad'), ... % minimum stabilizer incidence
        0.2 ... % minimum thrust fraction
        ];

    ub = [convang(15, 'deg', 'rad'), ... % maximum alpha
        convang(13, 'deg', 'rad'), ... % maximum elevator deflection
        convang(5, 'deg', 'rad'), ... % maximum stabilizer incidence
        1.0 ... % maximum thrust fraction
        ];

    options = optimset( ...
        'tolfun', 1e-9, ...
        'Algorithm', 'interior-point');

    [x, fval] = ...
        fmincon(@costLongEquilibriumStaticStickFixed, ... % objective func.
            x0, ... % initial guess
            [], [], [], [], ... % linear constraints
            lb, ub, ... % lower, upper bounds
            @myNonLinearConstraint, ... % nonlinear const.
            options) % min search config options

    alpha_0_deg = convang(x(1), 'rad', 'deg') % converged values
    delta_e_0_deg = convang(x(2), 'rad', 'deg')
    delta_s_0_deg = convang(x(3), 'rad', 'deg')
    delta_T_0 = x(4)

end % myAC construction OK

```

Nel codice precedente viene chiamata la funzione di libreria `fmincon` per la ricerca del minimo di una funzione scalare  $J$  di variabile vettoriale  $\xi$ . Nel caso specifico la funzione da minimizzare è la funzione di costo  $J$  definita dalla (7.84), con le variabili  $\xi_j$  corrispondenti alle quantità  $\alpha$ ,  $\delta_e$ ,  $\delta_s$ ,  $\delta_T$ . La  $J(\xi)$  viene implementata in un file separato ed è chiamata `costLongEquilibriumStaticStickFixed`. Un punto di minimo corrispondente a una condizione di volo equilibrato sarà detto  $\xi_0$  ed avrà componenti  $\alpha_0$ ,  $\delta_{e,0}$ ,  $\delta_{s,0}$ ,  $\delta_{T,0}$ . Spesso questo punto dello spazio delle  $\xi$ , tale che  $J(\xi_0) = 0$ , viene detto *design point* e

lo spazio delle  $\xi$  viene anche detto *design space*.

Le possibilità di ricerca di un minimo di  $J$  messe a disposizione da `fmincon` sono molteplici ed avanzate. Si parla di ricerca di minimo *condizionato* nel caso in cui la generica variabile  $\xi_i$  può variare in un intervallo reale finito e in generale devono sussistere relazioni del tipo:  $f(\xi) = 0$  e  $g(\xi) \leq 0$ , con  $f$  e  $g$  due funzioni scalari. Si rimanda alla documentazione di Matlab per approfondimenti su questo argomento. Si ricorda che la ricerca del punto di minimo  $\xi_0$  avviene sempre attraverso un algoritmo numerico iterativo a partire da un assegnato valore di tentativo iniziale. Il valore di tentativo è rappresentato nel codice precedente dal vettore  $x_0$ . Nel caso auspicato in cui l'algoritmo di ricerca converge verso un valore accettabile il punto di minimo  $\xi_0$  è approssimato dal vettore  $x$ .

Si osservi il particolare comando con cui si è effettuata la chiamata a `fmincon`. Tra i parametri passati a questa funzione si distinguono: (i) il puntatore alla funzione di costo `costLongEquilibriumStaticStickFixed` (detta anche *funzione obiettivo* del processo di minimizzazione), (ii) il vettore di tentativo  $x_0$ , (iii) i vettori `lb` e `ub` che definiscono gli intervalli di variazione delle variabili di cui  $J$  è funzione, (iv) il puntatore a una funzione `myNonLinearConstraint` che implementa eventuali vincoli non lineari per le variabili indipendenti, (v) una struttura dati `options` che contiene le impostazioni di configurazione della ricerca del minimo vincolato (ad esempio il valore  $\epsilon$  tale che se  $J \leq \epsilon$  l'algoritmo iterativo di ricerca si arresta).

Una possibile implementazione in linguaggio Matlab della funzione  $J(\xi)$ , basata sulle (7.82), è proposta nel seguente listato:

```
%-----
% Dinamica e Simulazione di Volo - Coiro, De Marco
%-----
function f = costLongEquilibriumStaticStickFixed(x)

% Cost function for trimming the 3-DoF aircraft motion.
% The right-hand-sides of equations of motion are calculated
% then squared and summed up to form a non-negative function.
% A minimum condition for the cost function means that a trim
% condition has been reached.
% Here x is the 'design variable' in the design space

%% Declaring global variables
global ...
    g ... % gravity acceleration
    z_0 V_0 q_0 gamma_0 ... % initial conditions
    rho_0 ... % air density at z_0
    myAC % the aircraft object, populated outside this func.

%% Aircraft relative density
mu_rel = (myAC.W/g)/(rho_0*myAC.S*myAC.b);

%% Give the design vector components proper names
alpha = x(1);
delta_e = x(2);
delta_s = x(3);
delta_T = x(4);

%% Equation of motion right-hand-sides, for steady flight
F1 = (delta_T*myAC.T/myAC.W)*cos(alpha - myAC.mu_x + myAC.mu_T) ...
    - sin(gamma_0) ...
    - ((rho_0*V_0^2)/(2*(myAC.W/myAC.S))) ...
    *(myAC.CD_0 + myAC.K*((myAC.CL_alpha*alpha ...
        + myAC.CL_delta_e*delta_e ...
        + myAC.CL_delta_s*delta_s)^myAC.m));

F2 = ( 1. - myAC.CL_q*(myAC.mac/myAC.b)/(4*mu_rel) )*q_0 ...
    - (g/V_0)*(delta_T*myAC.T/myAC.W)*sin(alpha - myAC.mu_x + myAC.mu_T) ...
    + (g/V_0)*cos(gamma_0) ...
```

```

-(g/V_0)*((rho_0*V_0^2)/(2*(myAC.W/myAC.S))) ...
*( myAC.CL_alpha*alpha + myAC.CL_delta_e*delta_e ...
+ myAC.CL_delta_s*delta_s);

F3 = myAC.Cm_0 + myAC.Cm_alpha*alpha ...
+ myAC.Cm_delta_s*delta_s ...
+ myAC.Cm_delta_e*delta_e ...
+ (myAC.mac/(2*V_0))*myAC.Cm_q*q_0 ...
+ (myAC.Cm_T_0 + myAC.Cm_T_alpha*alpha)*delta_T;

%% Build the cost function
f = F1*F1 + F2*F2 + F3*F3;

end

```

Nel codice precedente si osserva che la variabile `myAC` è dichiarata come variabile globale. Questa variabile è un oggetto costruito dall'unità di programma chiamante e allocato nel suo spazio di memoria. Tipicamente ciascuna funzione gestisce un proprio spazio di memoria e le variabili allocate in un determinato *workspace* sono dette *private*. Le variabili private non sono accessibili da parte delle altre unità di programma a meno che il programmatore non voglia deliberatamente renderlo possibile — in Matlab la parola chiave da utilizzare in questi casi è `global`. Quando ciò accade si dice allora che la visibilità (*scope*) di una variabile è di tipo globale. L'oggetto `myAC` contiene le informazioni sul velivolo utili all'implementazione ed ha inoltre un attributo di variabile globale. Tale dichiarazione è presente sia nel corpo della funzione da minimizzare `costLongEquilibriumStaticStickFixed` che nel codice chiamante. Ciò rende `myAC` visibile anche all'interno dell'implementazione di  $J(\xi)$  senza dover essere passato come parametro di scambio. Un ragionamento analogo vale per le variabili  $g$ ,  $z_0$ ,  $V_0$ ,  $q_0$ ,  $\gamma_0$  e  $\rho_0$ , il cui significato è ovvio.

La funzione `myNonLinearConstraint` richiamata sopra ha la seguente semplice implementazione:

```

function [c,ceq] = myNonLinearConstraint(x)
    c = []; % Compute nonlinear inequalities at x.
    ceq = []; % Compute nonlinear equalities at x.
end

```

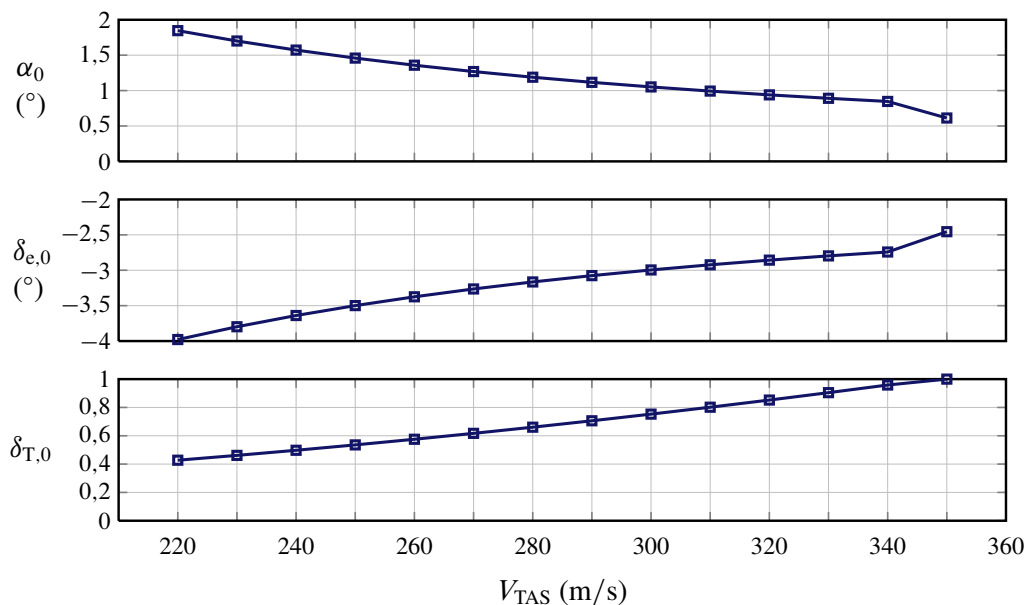
Si osserva che la chiamata a `fmincon` ha reso necessaria la definizione della funzione `myNonLinearConstraint`. Essa è in questo caso particolare una funzione che ritorna banalmente due matrici di dimensioni nulle, ma solo così è stato possibile passare come ultimo parametro a `fmincon` la struttura `options` con la quale si è selezionato un particolare algoritmo di ricerca del minimo tra quelli disponibili. Nel caso in cui dovesse essere necessario vincolare le componenti di  $\xi$  attraverso le funzioni non lineari  $f$  e  $g$  il codice precedente va modificato opportunamente.



### Esercizio 7.6: Ricerca di condizioni di trim del moto a 3-DoF 📄

Si sviluppi un codice di calcolo che determini le condizioni iniziali corrispondenti al volo equilibrato per un moto a 3-DoF. Si considerino i dati del velivolo forniti negli esempi precedenti.

Se si sceglie di basarsi sugli esempi di implementazione in Matlab riportati sopra, si faccia anche riferimento ai dati e al formato di file di input discussi nell'appendice Q7-A. In questa appendice viene presentata la classe `DSVAircraft`, di cui l'oggetto `myAC` è un'istanza.



**Figura 7.12** Valori di equilibrio al variare della velocità di volo iniziale, per  $\delta_{s,0} = 0$  deg. I dati del velivolo sono quelli riportati nell'esempio 7.2.

Questa implementazione permette la gestione dei dati di un velivolo attraverso un file di configurazione opportunamente formattato.



**Esercizio 7.7:** Ricerca di condizioni di trim del moto a 3-DoF, per  $\delta_{s,0} = -1$  deg

Come caso particolare dell'esercizio precedente si modifichino gli esempi di implementazione proposti sopra affinché si ottengano condizioni di *trim* per un fissato valore dell'angolo  $\delta_s$ . Si consideri il caso  $\delta_{s,0} = -1$  deg.

Si confrontino i risultati ottenuti con dati riportati nella figura 7.12, in cui sono rappresentati i valori di equilibrio  $\alpha_0$ ,  $\delta_{e,0}$  e  $\delta_{T,0}$  per  $\delta_{s,0} = 0$  deg, per quota fissata  $h_0 = 4000$  m, al variare del parametro  $V_0$ .

Facendo riferimento al codice Matlab riportato nelle pagine precedenti, risulta agevole assegnare un valore fisso ad una delle componenti del vettore  $\xi$  nell'algoritmo di ricerca del minimo di  $J(\xi)$  sfruttando il modo in cui è congegnata la funzione `fmincon`. Ad essa è possibile passare come parametri di scambio un'opportuna matrice quadrata  $A_{eq}$  ed un vettore colonna  $ceq$  corrispondente. Un esempio d'uso è riportato nel frammento di codice seguente.

```
% ...
%-- initial guess for the design vector
x0 = [ ...
      0; ... % 1) alpha_0
      0; ... % 2) delta_0
      0; ... % 3) delta_s_0
      0.5 ... % 4) delta_T_0
      1];

%-- Cost function minimization
% Aeq, in Aeq*x=beq linear constraint
Aeq = zeros(4,4);
beq = zeros(4,1);
Aeq(3,3) = 1; % pick delta_s
delta_s_0 = convang(-1,'deg','rad');
```

```

beq(3,1) = delta_s_0; % keep delta_s fixed
%-- bounds
lb =[convang(-15,'deg','rad'), ... % minimum alpha
     convang(-20,'deg','rad'), ... % minimum elevator deflection
     convang(-5,'deg','rad'), ... % minimum stabilizer incidence
     0.2 ... % minimum thrust fraction
    ];
ub =[convang( 15,'deg','rad'), ... % maximum alpha
     convang( 13,'deg','rad'), ... % maximum elevator deflection
     convang(  2,'deg','rad'), ... % maximum stabilizer incidence
     1.0 ... % maximum thrust fraction
    ];

options = optimset( ...
    'tolfun',1e-9, ... % threshold
    'Algorithm','interior-point' ... % algor. type
);
[x,fval] = ...
    fmincon(@costLongEquilibriumStaticStickFixed, ...
            x0, ...
            [], ... % A, A*x<=b
            [], ... % b
            Aeq, ... % Aeq, Aeq*x=beq
            beq, ... % beq
            lb,ub, ...
            @myNonLinearConstraint, ...
            options)
% ...

```

Essendo in questo caso  $\xi = [\alpha, \delta_e, \delta_s, \delta_T]^T$ , la funzione `fmincon` assicurerà che le componenti  $\xi_i$  soddisfino il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \delta_e \\ \delta_s \\ \delta_T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{s,0} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.85)$$

caso particolare del sistema

$$[A] \{\xi\} = \{b\} \quad (7.86)$$

La relazione di uguaglianza (7.85), nella quale si riconoscono la matrice `Aeq` a primo membro e il vettore colonna `beq` a secondo membro, è un'equazione di vincolo che equivale a fissare il valore di  $\xi_3 = \delta_{s,0}$ . La relazione generale (7.86), con `[A]` matrice sparsa, permette di imporre equazioni di vincolo più generali sulle componenti  $\xi_i$ .

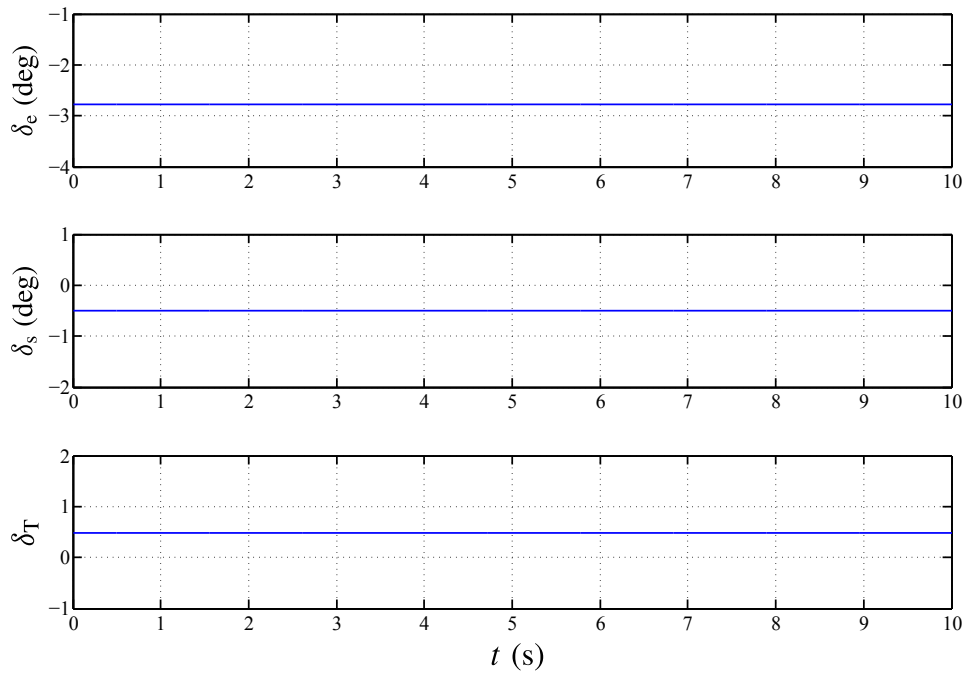
Con questa strategia, insieme con altre possibilità offerte da una funzione di ricerca di minimo come `fmincon`, sarà possibile investigare su condizioni di *trim* sottoposte a relazioni vincolanti aggiuntive sulle componenti del vettore  $\xi$ . Si rimanda alla documentazione della funzione `fmincon` per ulteriori approfondimenti.



### Esercizio 7.8: Simulazione del moto a 3-DoF (verifica delle condizioni di trim)

Si sviluppi un codice di calcolo per la risoluzione delle equazioni del moto a 3-DoF con legge del comando longitudinale e della manetta assegnate.

Si consideri il velivolo i cui dati sono stati assegnati nell'esempio 7.2. A partire da condizioni iniziali corrispondenti al volo equilibrato, si fissi un tempo di osservazione  $t_f = 10$  s e si esegua l'integrazione numerica delle equazioni del moto per regolazioni dei



**Figura 7.13** Storie temporali invariate dei comandi, a partire da una condizione di *trim*. Si veda l'esercizio 7.8.

comandi invariate. Si riportino in forma di diagramma cartesiano le storie temporali delle variabili di stato.

Si verifichi l'entità dei discostamenti di velocità, quota e assetto al tempo  $t_f$  dai valori iniziali. Si confrontino i risultati con i diagrammi della figura 7.14.

Si valuti l'effetto delle eventuali variazioni di posizione del baricentro sui suddetti discostamenti. Da tale posizione dipende l'entità della derivata aerodinamica

$$C_{M\alpha} = -C_{L\alpha} (\hat{X}_N - \hat{X}_G) \quad (7.87)$$

cioè l'indice di stabilità statica al beccheggio.

Se si sceglie di basarsi sugli esempi di implementazione riportati sopra, si modifichi opportunamente la funzione `costLongEquilibriumStaticStickFixed` creando una funzione `eqLongDynamicStickFixed`. Quest'ultima dovrà essere definita in modo tale da fornire una variabile di ritorno vettoriale, le cui componenti rappresentano i secondi membri delle equazioni (7.67). Il puntatore alla funzione così implementata potrà essere passato alla funzione di libreria `ode45` che integra un sistema di equazioni differenziali ordinarie con il metodo di Runge–Kutta.

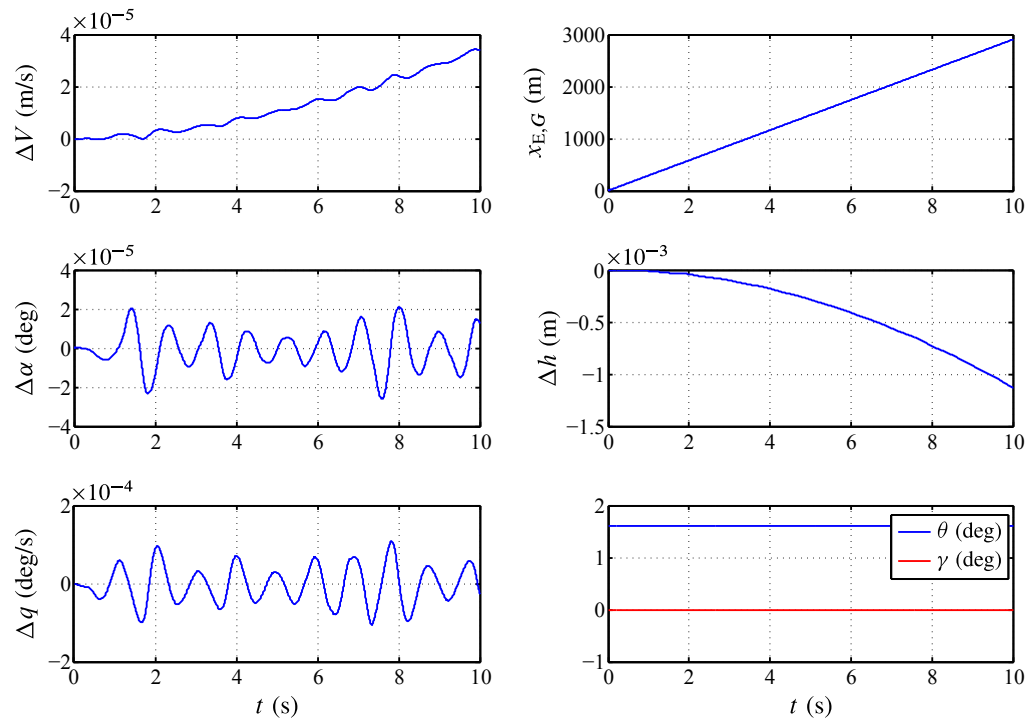


### Esercizio 7.9: Simulazione del moto a 3-DoF [legge $\delta_e(t)$ assegnata]

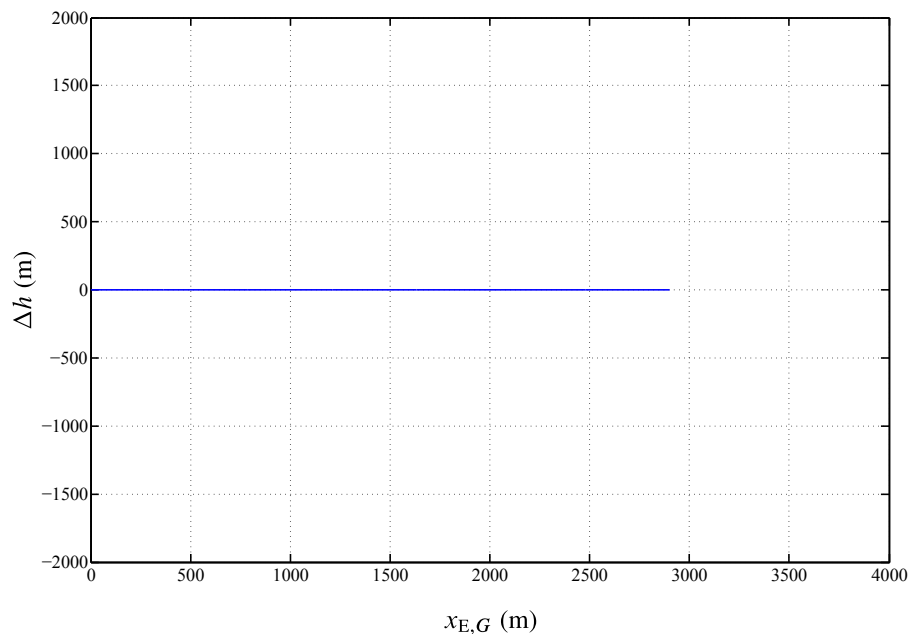


A partire dall'esercizio precedente si proceda ad integrare numericamente le equazioni del moto a 3-DoF assegnando stavolta una legge del movimento non nulla del comando longitudinale. Si faccia riferimento alla legge rappresentata nella figura 7.16, nota anche come legge di comando “cabra-picchia” (*elevator pulse*).

Per un tempo  $t_1 = 1$  s si mantenga fissa l'escursione  $\delta_e$ , pari al valore di equilibrio iniziale. A partire dall'istante  $t_1$  fino all'istante  $t_2 = 2,50$  s si applichi una legge  $\delta_e(t)$



**Figura 7.14** Storie temporali delle variabili di stato. Le grandezze  $\Delta(\cdot)$  rappresentano delle variazioni rispetto ai valori iniziali. Si veda l'esercizio 7.8.

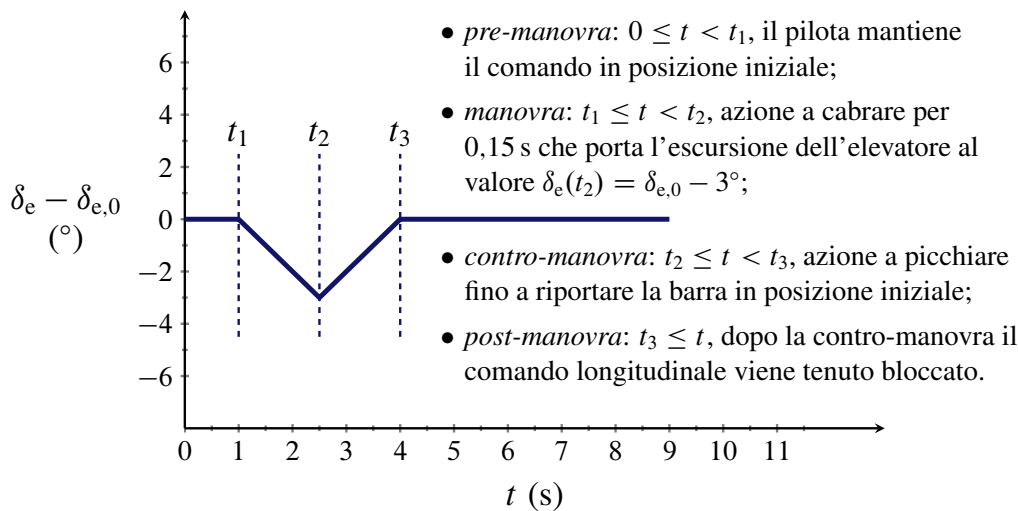


**Figura 7.15** Traiettoria del baricentro a partire da una condizione di *trim* e per posizioni invariate dei comandi. Si veda l'esercizio 7.8.

che incrementi linearmente l'escursione dell'elevatore dal valore  $\delta_{e,0}$  al valore  $\delta_{e,0} + \Delta\delta_e$ , con  $\Delta\delta_e = -3$  deg. A partire dall'istante  $t_2$  fino all'istante  $t_3 = 4$  s si applichi una legge  $\delta_e(t)$  che riporti linearmente l'escursione dell'elevatore al valore iniziale  $\delta_{e,0}$ . Per il resto della manovra, cioè per  $t_3 \leq t \leq t_f$ , si supponga infine che il pilota mantenga bloccato il comando longitudinale.

Si riportino in forma di diagramma cartesiano le storie temporali delle variabili di stato e di controllo. Si mostrino inoltre le storie dei fattori di carico  $f_{x_A}$  ed  $f_{z_A}$ . Si confronti la storia del fattore di carico normale con quella dell'accelerazione angolare  $\dot{q}$ .





**Figura 7.16** Una legge di manovra dell'equilibratore detta "cabra-picchia". Si veda l'esercizio 7.9.

Ricavare le risposte temporali per un tempo finale  $t_f = 120$  s. Studiare le oscillazioni delle variabili di stato in un breve intervallo di tempo (dell'ordine di qualche secondo) successivo all'istante  $t_3$ , a partire dal quale la risposta del velivolo è di fatto una risposta libera. Verificare che le variabili che mostrano oscillazioni significative nel breve periodo sono l'angolo d'attacco e la velocità angolare di beccheggio. Verificare inoltre che le variabili che mostrano oscillazioni significative nel lungo periodo sono la velocità, la quota e l'angolo di elevazione.



**Esercizio 7.10:** *Simulazione del moto a 3-DoF (variazione della legge del  $\delta_e$ )*



A partire dai risultati dell'esercizio precedente si proceda ad effettuare delle simulazioni di volo analoghe sperimentando diverse leggi di comando.

Si verifichino gli effetti delle variazioni della durata del forzamento  $t_3 - t_1$  e dell'ampiezza  $\Delta\delta_e$  sulla risposta del velivolo.

Si confrontino i risultati con i diagrammi riportati nelle figure 7.17 e 7.18, dove si sono considerate due diverse storie temporali dell'elevatore del tipo "cabra-picchia", denominate 'caso A' e 'caso B'. Le due leggi di comando si sono ottenute variando la durata dell'intervallo  $t_3 - t_1$  e mantenendo fisso l'incremento massimo di  $\delta_e$ .

Si verifichi anche l'effetto delle eventuali variazioni di posizione del baricentro.

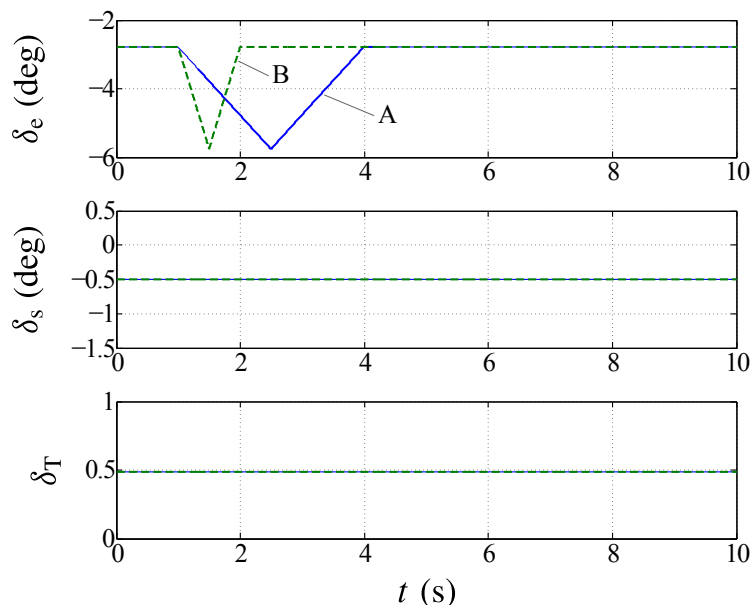


**Esercizio 7.11:** *Simulazione del moto a 3-DoF [legge  $\delta_T(t)$  assegnata]*



A partire dall'esercizio 7.8 si proceda ad integrare numericamente le equazioni del moto a 3-DoF assegnando una legge di variazione della manetta.

Per un tempo  $t_1 = 2$  s si mantenga fisso il parametro di controllo  $\delta_T$ , pari al valore di equilibrio iniziale. A partire dall'istante  $t_1$  fino all'istante  $t_2 = 2,50$  s si applichi una legge  $\delta_T(t)$  che incrementi linearmente la manetta dal valore  $\delta_{T,0}$  al valore  $\delta_{T,0} + \Delta\delta_T$ , con  $\Delta\delta_T = 0,30$  — a tale scopo si scelga una condizione di volo equilibrato iniziale che sia



**Figura 7.17** Due diverse storie temporali dell’elevatore del tipo “cabra-picchia”, caso A e caso B. Leggi ottenute variando la durata dell’intervallo  $t_3 - t_1$  e il gradiente  $\dot{\delta}_e$ , mantenendo fisso l’incremento massimo di  $\delta_e$ . Sono riportate anche le storie invariate dei comandi  $\delta_s$  e  $\delta_T$ . Si veda l’esercizio 7.9.

assicurata da una regolazione  $\delta_{T,0}$  inferiore a 0,70. A partire dall’istante  $t_2$  fino alla fine del tempo di osservazione della manovra, cioè per  $t_2 \leq t \leq t_f$ , si supponga infine che il pilota mantenga bloccata la manetta.

Si riportino in forma di diagramma cartesiano le storie temporali delle variabili di stato e di controllo. Si mostrino inoltre le storie dei fattori di carico  $f_{x_A}$  ed  $f_{z_A}$ .



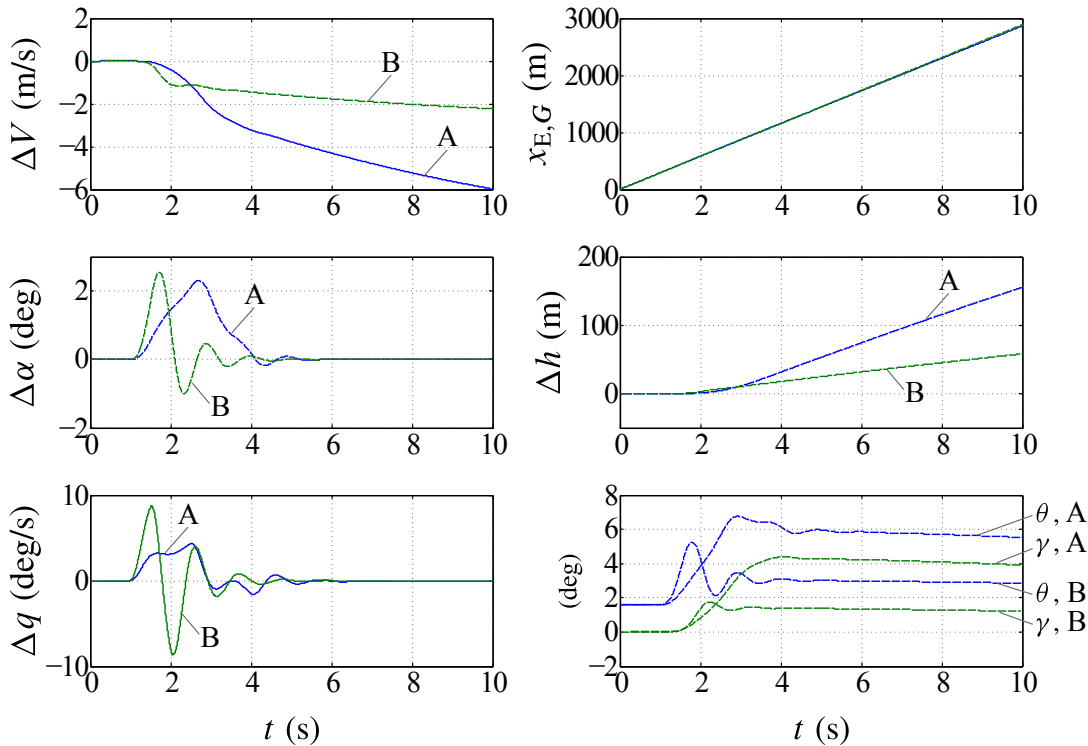
**Esercizio 7.12:** *Simulazione del moto a 3-DoF (con  $C_{D_0}$ ,  $k$  e  $T$  funzioni tabulari)*

A partire dagli esercizi precedenti si prevedano delle variazioni con il numero di Mach di volo dei coefficienti  $C_{D_0}$  e  $k$  presenti nella legge costitutiva del coefficiente di resistenza (7.55). A tale riguardo si faccia riferimento alla figura 7.19.

Inoltre si preveda per la spinta massima erogabile una dipendenza dalla quota e dal numero di Mach di volo  $T_{\max}(M, h)$  come quella riportata nella figura 7.20.

In queste circostanze i valori delle suddette funzioni sono disponibili in forma tabulare. Spesso è opportuno ricavare delle dipendenze analitiche sotto forma di funzioni *spline* interpolanti, in modo da poter calcolare il valore effettivo di  $C_D$ , di  $k$  e di  $T = \delta_T T_{\max}$  durante l’integrazione numerica al passo delle equazioni del moto. Una possibile implementazione in Matlab del ragionamento precedente può basarsi sui frammenti di codice riportati in quanto segue.

Si consideri in primo luogo il problema della ricerca di una funzione interpolante per il  $C_{D_0}$ . Affinché si possa costruire un’opportuna struttura dati destinata ad avere visibilità globale — dunque accessibile nei passi successivi dell’algoritmo di integrazione — è necessario un minimo di lavoro preliminare. I dati numerici come quelli riportati nella figura 7.19 spesso sono il risultato di rilievi sperimentali oppure di analisi numeriche. Alcune volte i valori numerici sono ricavati attraverso la digitalizzazione di curve inizialmente disponibili sotto forma di immagine non vettoriale. Si ha quindi a disposizione un



**Figura 7.18** Storie temporali delle variabili di stato per due manovre “cabra-picchia”. Le grandezze  $\Delta(\cdot)$  rappresentano delle variazioni rispetto ai valori iniziali. I risultati si riferiscono ai casi A e B della figura 7.17. Si veda l’esercizio 7.9.

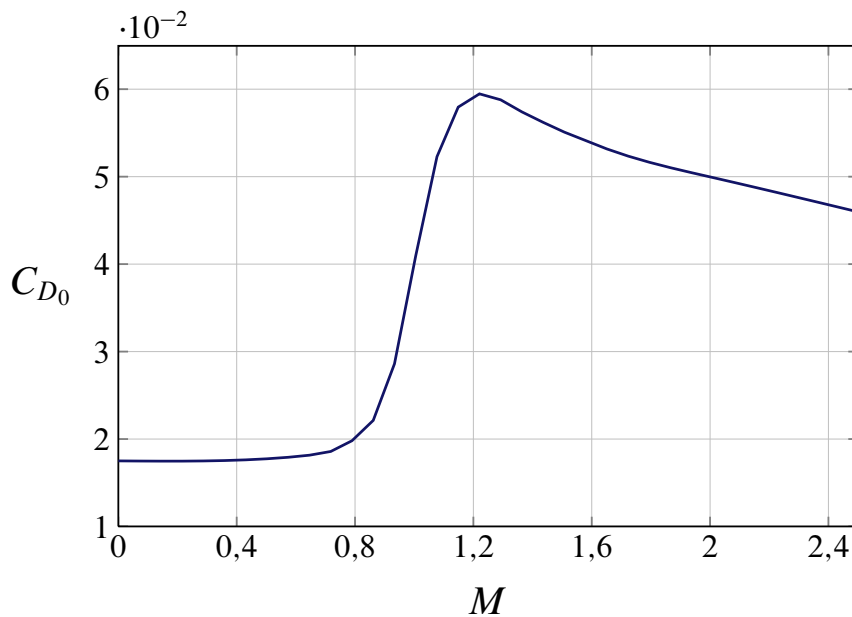
numero discreto di dati immagazzinato in un file di testo (‘File 1’ nella figura 7.19). Se il nome del file è `CD0_vs_Mach.csv` esso potrà essere letto attraverso la funzione `importdata` come nel codice seguente:

```
%-----
% Si veda il 'File 1' nella figura 7.19
%-----
s_CD0_vs_Mach = importdata( ...           % importa i dati in una matrice
                        'CD0_vs_Mach.csv', ... % nome file
                        ',', ...           % carattere separatore
                        2 ...             % ignora le prime 2 righe
                    );
x = s_CD0_vs_Mach.data(:,1); % estrazione colonna 1
y = s_CD0_vs_Mach.data(:,2); % estrazione colonna 2

p = 0.999999; % smoothing parameter
pp_CD0_vs_Mach = csaps(x, y, p); % smoothing spline
global pp_CD0_vs_Mach % scope globale

% - Disegno della curva
% valori in cui si vuole conoscere la funzione di M
xx = linspace(0, 2.8, 50); % infittimento
yy = fnval(pp_CD0_vs_Mach, xx); % funzione interpolante
plot(xx, yy); label('M'); ylabel('C_{D0}');
```

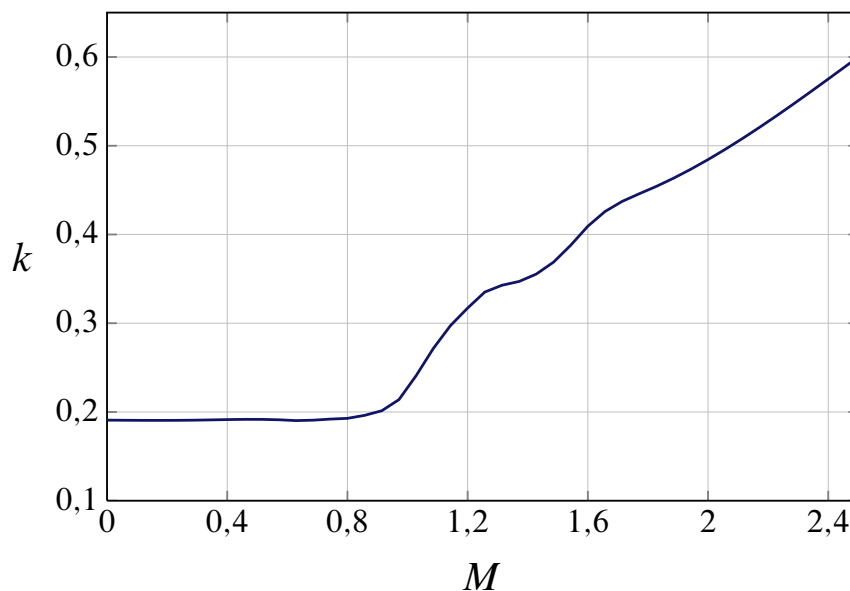
I dati contenuti nel file sono nel formato CSV (*comma-separated values*), cioè i valori numerici su ciascuna riga sono separati dal carattere virgola (‘,’) senza ulteriori regole di formattazione. In genere questo formato prevede che su ciascuna riga compaia un numero fissato di valori. Per aiutare i lettori che eventualmente scorrono il contenuto di questi file spesso è utile inserire una o più righe di intestazione. Nel caso precedente le due righe iniziali vengono scartate dalla funzione di importazione dei dati. Il risultato della chiamata a `importdata` è l’allocazione in memoria della struttura dati `s_CD0_vs_Mach`. Il campo `s_CD0_vs_Mach.data` è una matrice le cui colonne contengono i valori numerici



```

--- File 1
Mach, CD0
0.0, 0.0175
0.3, 0.0175
0.60, 0.01799
0.65001, 0.01817
0.69890, 0.01844
0.75029, 0.01896
0.79916, 0.02006
0.85094, 0.02167
0.90017, 0.02474
0.95054, 0.03116
1.00042, 0.04008
1.04697, 0.04834
1.09819, 0.05451
1.14782, 0.05795
1.19668, 0.05935
1.24600, 0.05941
1.29659, 0.05875
1.34636, 0.05777
1.39738, 0.05686
1.44631, 0.05608
1.49733, 0.05526
1.54751, 0.05461
1.6, 0.05387
2.0, 0.050
2.5, 0.046

```

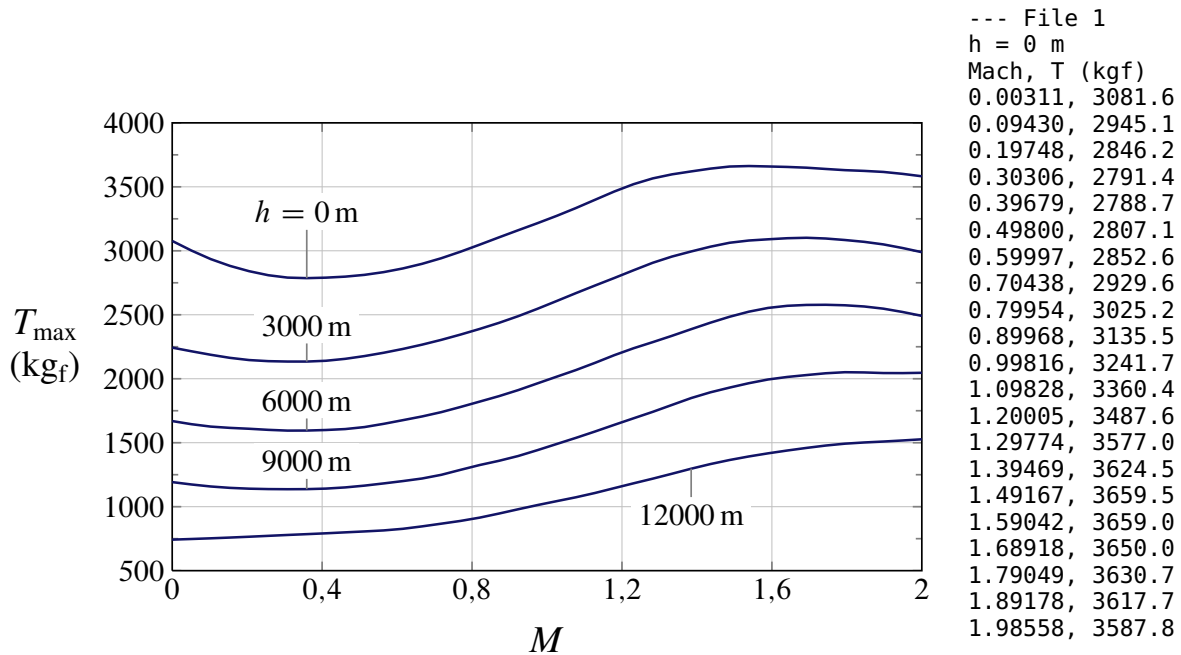


```

--- File 2
Mach, k
0.0, 0.1908
0.3, 0.1908
0.600, 0.1908
0.64956, 0.1901
0.69846, 0.1911
0.75070, 0.1921
0.79919, 0.1927
0.85017, 0.1958
0.90073, 0.1997
0.95086, 0.2082
1.00097, 0.2255
1.04811, 0.2525
1.09986, 0.2781
1.14828, 0.2996
1.19755, 0.3161
1.24598, 0.3322
1.29485, 0.3419
1.34668, 0.3438
1.39848, 0.3515
1.44653, 0.3583
1.49789, 0.3727
1.54800, 0.3896
1.6, 0.4094
1.8, 0.45
2.5, 0.60

```

**Figura 7.19** Andamento tipico in funzione del numero di Mach  $M$  delle grandezze  $C_{D0}$  e  $k$  presenti nella legge costitutiva del coefficiente di resistenza (7.55):  $C_D = C_{D0} + kC_L^m$ . Questi andamenti sono verosimili per un velivolo come quello considerato nell'esempio 7.2. Sono riportati i valori numerici che esprimono  $C_{D0}$  e  $k$  come funzioni tabulari in termini di un numero discreto di valori del numero di Mach. Questi dati possono essere immagazzinati in file di testo e potranno essere manipolati quando si voglia implementare delle funzioni interpolanti.



--- File 2

h = 3000 m  
Mach, T (kgf)  
0.003, 2244.8  
0.09787, 2189.9  
0.19923, 2147.5  
0.30470, 2134.5  
0.39758, 2138.1  
0.49959, 2171.1  
0.60239, 2225.0  
0.70431, 2293.5  
0.80118, 2372.4  
0.90136, 2466.1  
0.99983, 2576.4  
1.09911, 2695.1  
1.20425, 2816.0  
1.29937, 2924.2  
1.39625, 3003.2  
1.49233, 3065.3  
1.59101, 3089.9  
1.69056, 3101.9  
1.79270, 3084.7  
1.89152, 3052.8  
1.98957, 2995.7

--- File 3

h = 6000 m  
Mach, T (kgf)  
0.00040, 1669.5  
0.09845, 1627.1  
0.20058, 1609.9  
0.30439, 1594.7  
0.39894, 1598.3  
0.49847, 1616.6  
0.60127, 1668.4  
0.70655, 1730.8  
0.80343, 1807.6  
0.90197, 1890.7  
1.00046, 1990.6  
1.10229, 2094.7  
1.20409, 2211.4  
1.30010, 2302.9  
1.39776, 2400.6  
1.49377, 2490.0  
1.59152, 2554.3  
1.69188, 2576.8  
1.79398, 2574.2  
1.89530, 2548.6  
1.98915, 2497.8

--- File 4

h = 9000 m  
Mach, T (kgf)  
0.00088, 1192.4  
0.10046, 1158.5  
0.20008, 1141.2  
0.30637, 1136.6  
0.40009, 1140.2  
0.49962, 1160.5  
0.60246, 1195.6  
0.70611, 1241.2  
0.80300, 1313.9  
0.90325, 1380.3  
1.00178, 1467.6  
1.10363, 1563.4  
1.20713, 1667.5  
1.30146, 1761.0  
1.39911, 1863.0  
1.49433, 1935.6  
1.59292, 1995.7  
1.69242, 2028.7  
1.79529, 2051.2  
1.89573, 2044.4  
1.99028, 2045.9

--- File 5

h = 12000 m  
Mach, T (kgf)  
0.00192, 742.7  
0.10064, 752.6  
0.20103, 764.6  
0.30643, 778.8  
0.40096, 790.8  
0.49967, 804.9  
0.60256, 823.2  
0.70622, 862.5  
0.80486, 905.9  
0.90178, 966.0  
1.00371, 1030.4  
1.10398, 1090.5  
1.20672, 1165.4  
1.29944, 1231.7  
1.40050, 1308.6  
1.49742, 1370.8  
1.59269, 1418.3  
1.69301, 1459.6  
1.79502, 1492.6  
1.89540, 1508.8  
1.98992, 1525.0

**Figura 7.20** Andamento tipico in funzione del numero di Mach  $M$  e della quota  $h$  della spinta  $T_{\max}$  (massima erogabile) da un motopropulsore che equipaggia un velivolo come quello considerato nell'esempio 7.2. Sono riportati i valori numerici che esprimono  $T_{\max}$  come funzione tabulare in termini di un numero discreto di valori del numero di Mach, per assegnati valori discreti della quota. Questi dati possono essere immagazzinati in file di testo e potranno essere manipolati quando si voglia implementare una funzione interpolante. Essa potrà in generale essere concepita, ad esempio, come una *spline* in due dimensioni. In alternativa si possono costruire tante funzioni interpolanti con variabile indipendente  $M$  per quanti sono i valori discreti di  $h$ .

provenienti dal ‘File 1’ mostrato nella figura 7.19.

Il codice precedente svolge anche un’altra operazione, che è quella di costruire la struttura dati `pp_CD0_vs_Mach` attraverso la chiamata alla funzione `csaps`. Questa chiamata non fa altro che costruire una *smoothing spline*  $g_{ss}(M)$ , funzione cubica a tratti del numero di Mach, con la quale è possibile approssimare  $C_{D_0}$  per un generico valore di  $M$  (la dicitura ‘pp’ sta ad indicare una *piecewise polynomial function*; si rimanda alla documentazione di Matlab per approfondimenti). La struttura dati può essere visualizzata attraverso la finestra dei comandi:

```
>> pp_CD0_vs_Mach
pp_CD0_vs_Mach =
    form: 'pp'
    breaks: [1x25 double]
    coefs: [24x4 double]
    pieces: 24
    order: 4
    dim: 1
```

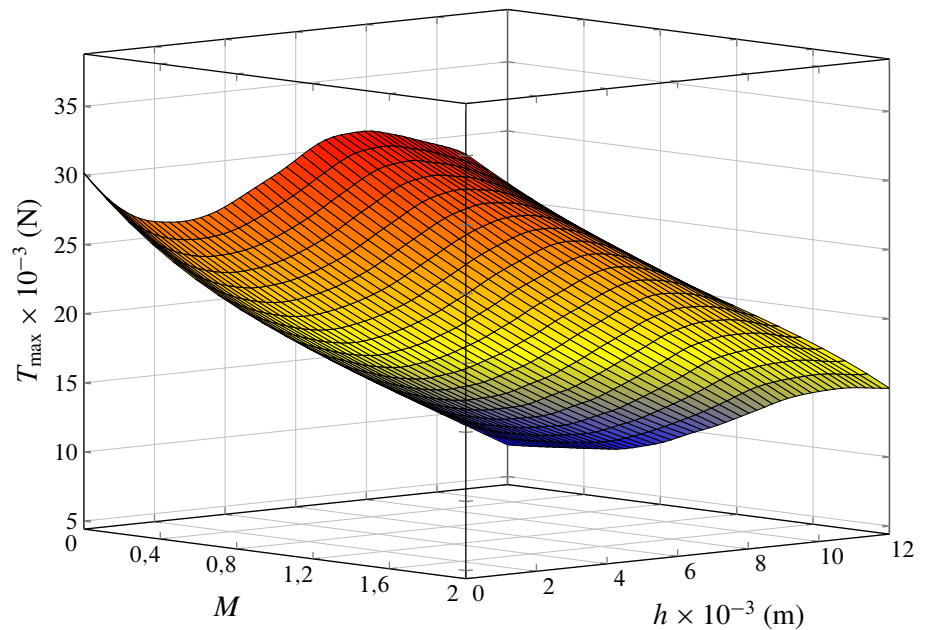
Il campo `breaks` contiene i valori discreti della variabile indipendente (prima colonna del ‘File 1’ della figura 7.19). Il campo `coefs` contiene i coefficienti dei polinomi di terzo grado che esprimono la funzione interpolante approssimata. Una volta costruita la struttura dati `pp_CD0_vs_Mach` ad essa viene data una visibilità globale in modo da renderla accessibile da parte di altre funzioni. L’utilità di questo approccio emerge dall’ultima operazione effettuata dal codice precedente. Viene creato un vettore `xx`, in questo caso di valori corrispondenti a numeri di Mach via via crescenti, ed un vettore `yy` di corrispondenti valori del  $C_{D_0}$ . Ciò si ottiene attraverso la funzione `fncval` che accetta in input una struttura come `pp_CD0_vs_Mach` ed un vettore di valori in cui valutare la funzione interpolante. Nell’esempio precedente questa operazione serve a creare un grafico (si veda l’istruzione `plot(xx, yy)`; che non fa altro che riprodurre la curva in alto nella figura 7.19). Nell’integrazione al passo delle equazioni del moto la chiamata a `fncval` servirà a determinare il valore effettivo del  $C_{D_0} = g_{ss}(M)$  in funzione del numero di Mach di volo  $M(t)$ , noto all’istante di tempo corrente  $t$ .

Si lascia per esercizio al lettore il compito di creare una struttura dati `pp_k_vs_Mach` che incorpori una *smoothing spline* utile a determinare la quantità  $k(M)$ , a partire dai valori riportati nella figura 7.19.

Per quanto riguarda la spinta  $T_{max}$ , le curve relative alle quote di volo 0 m, 3000 m, 6000 m, 9000 m, e 12000 m potranno essere ricostruite con un procedimento simile a quello esposto sopra. L’interpolante finale è in questo caso una funzione di due variabili indipendenti:  $M$  ed  $h$ . Dal punto di vista dell’implementazione, potrebbe essere conveniente costruire un *cell-array* di dimensioni  $5 \times 2$  — tante righe quante sono le curve della figura 7.20, una colonna per la quota, una colonna per la *smoothing spline* in funzione di  $M$ . Si ricorda che i *cell-array* sono utili tutte le volte in cui si vogliono aggregare dati di tipo diverso in una struttura indicizzata simile ad una matrice. Si guardi, ad esempio, il frammento di codice seguente:

```
%-----
% Si vedano i 'File 1', ..., 'File 5' nella figura 7.20
%-----
s_T_vs_Mach_h1 = importdata('T_vs_Mach_h1.csv', ',', 3);
v_M_h1 = s_T_vs_Mach_h1.data(:,1);
v_T_h1 = s_T_vs_Mach_h1.data(:,2);

p = 0.999999; % smoothing parameter
pp_T_vs_Mach_h1 = csaps(v_M_h1, v_T_h1, p); % smoothing spline
```



**Figura 7.21** Rappresentazione grafica della funzione di due variabili  $T_{\max}(M, h)$ . Essa può essere espressa attraverso una funzione interpolante approssimata (*smoothing spline*) della funzione tabulare riportata nella figura 7.20.

```
% Analogamente si costruiscono: pp_T_vs_Mach_h2, ... pp_T_vs_Mach_h5
```

```
% Cell array
```

```
c_Tmax_vs_h_M{1,1} = 0; c_Tmax_vs_h_M{1,2} = pp_T_vs_Mach_h1;
c_Tmax_vs_h_M{2,1} = 3000; c_Tmax_vs_h_M{2,2} = pp_T_vs_Mach_h2;
c_Tmax_vs_h_M{3,1} = 6000; c_Tmax_vs_h_M{3,2} = pp_T_vs_Mach_h3;
c_Tmax_vs_h_M{4,1} = 9000; c_Tmax_vs_h_M{4,2} = pp_T_vs_Mach_h4;
c_Tmax_vs_h_M{5,1} = 12000; c_Tmax_vs_h_M{5,2} = pp_T_vs_Mach_h5;
```

```
% infittimento
```

```
v_M = linspace( ...
    0, ... % Mach minimo
    2, ... % Mach max
    30);
```

```
for i=1:5
```

```
    v_h(i) = c_Tmax_vs_h_M{i,1}; % quota
    m_Tmax(i,:) = fnval(c_Tmax_vs_h_M{i,2}, v_M); % Tmax
```

```
end
```

```
[m_M, m_h] = meshgrid(v_M, v_h);
```

```
global m_M m_h m_Tmax % matrici adatte all'interpolazione 2D
```

Nel codice precedente si alloca in memoria il *cell-array* `c_Tmax_vs_h_M` i cui elementi vengono designati con l'operatore `{*,*}` (parentesi graffe che racchiudono una coppia di indici). Nel ciclo `for` successivo essi vengono scorsi agevolmente come se si trattasse di elementi di una matrice. Vengono creati i vettori `v_M` e `v_h` (supporto della funzione interpolante che si intende costruire) e le matrici `m_M`, `m_h` ed `m_Tmax`. A queste ultime variabili potrà essere data visibilità globale allo scopo di poterle utilizzare all'interno di un'opportuna funzione di interpolazione.

Un esempio d'uso delle matrici appena ricavate è dato dal frammento di codice seguente in cui si va ad eseguire il disegno della superficie  $T_{\max}(M, h)$ :

```
% - Preparazione delle variabili
```

```
% valori in cui si vuole conoscere la funzione di (M,h)
```

```
v_M_I = linspace(v_M(1), v_M(end), 50);
v_h_I = linspace(v_h(1), v_h(end), 20); % infittimenti
[m_M_I, m_h_I] = meshgrid(v_M_I, v_h_I);
```

```
% - Chiamata alla funzione interpolante
```

```
m_Tmax_I = interp2( ...
    m_M, m_h, ... % nodi di supporto
    m_Tmax, ... % valori tabulati
```



```

        m_M_I, m_h_I, ... % vedi chiamata a meshgrid
        'spline');

% - Disegno della superficie
mesh(m_M_I, m_h_I, m_Tmax_I*9.81)
xlabel('M'); ylabel('h (m)'); zlabel('T (N)')

```

Vengono creati i vettori  $v_{M_I}$  e  $v_{h_I}$  che rappresentano due collezioni di valori delle variabili indipendenti  $(M, h)$  in cui si intende calcolare la funzione  $T_{\max}(M, h)$ . Questi si ricavano infittendo opportunamente i vettori di supporto  $v_M$  e  $v_h$ . La chiamata alla funzione `meshgrid` serve a creare le matrici  $m_{M_I}$  ed  $m_{h_I}$  in vista della chiamata alla funzione di disegno `mesh`. Il calcolo dei valori della funzione interpolante è effettuato attraverso la chiamata alla funzione `interp2` con passaggio dell'opzione `'spline'`. In pratica si è utilizzata una funzione interpolante esatta (*spline* in due dimensioni) a partire da un numero di funzioni interpolanti approssimate (*smoothing spline* in funzione di  $M$ ). La rappresentazione grafica creata dal codice precedente è mostrata nella figura 7.21 nella pagina precedente.

Per finire, sulla base di quanto discusso sopra, sarà possibile implementare in un'unica funzione il procedimento che calcola i valori di  $C_{D0}$ ,  $k$  e  $T_{\max}$  in funzione dei valori istantanei  $h(t)$  ed  $M(t)$ . Ciò può essere programmato come segue:

```

function [CD0, k, Tmax] = calc_CD0_k_Tmax(M, h)
% Dichiarazioni
global pp_CD0_vs_Mach ...
       pp_k_vs_Mach ...
       m_M m_h m_Tmax

CD0 = fnval(pp_CD0_vs_Mach, M);
k = fnval(pp_k_vs_Mach, M);
Tmax = interp2(m_M, m_h, m_Tmax, M, h, 'spline');
end

```

La definizione della funzione `calc_CD0_k_Tmax` si ispira ai frammenti di codice discussi in precedenza. Essa presuppone che nel codice chiamante l'utente abbia definito e rese globali le stesse variabili elencate nella dichiarazione `global` contenuta al suo interno.



### Esercizio 7.13: Modello aerodinamico longitudinale con Digital Datcom

Si scelga un velivolo e se ne determinino le caratteristiche aerodinamiche simmetriche attraverso il software Digital Datcom.

In particolare, si ottengano le curve del  $C_D$ ,  $C_L$  e  $C_M$  in funzione di  $\alpha_B$ , di  $\delta_e$ , eventualmente per diversi valori del numero di Mach e della deflessione  $\delta_f$  dei flap. Si ottengano anche i valori delle derivate  $C_{Lq}$ ,  $C_{Mq}$ ,  $C_{L\dot{\alpha}}$  e  $C_{M\dot{\alpha}}$ .

Da eventuali dati di pubblico dominio sul velivolo scelto si assegnino le caratteristiche della propulsione.

Si trovi una condizione di volo equilibrato orizzontale risolvendo un problema di *trim*. Si scelga una legge di comando e si trovi la risposta del modello di velivolo.





## Una classe in linguaggio Matlab per la gestione dei dati di un velivolo

*Programmare è capire.*  
– Kristen Nygaard

### Indice

---

<b>A.1</b>	<b>La classe <code>DSVAircraft</code></b>	<b>58</b>
<b>A.2</b>	<b>Esempio d'uso di oggetti di tipo <code>DSVAircraft</code></b>	<b>62</b>
<b>A.3</b>	<b>Formato del file di configurazione di oggetti di classe <code>DSVAircraft</code></b>	<b>63</b>

---

In informatica, una tecnica di programmazione — un paradigma per scrivere “buoni” programmi per un insieme di problemi — è uno stile fondamentale di programmazione, ovvero un insieme di strumenti concettuali per la stesura di programmi. Lo stile di programmazione definisce e determina il modo in cui il programmatore concepisce e percepisce il programma. Per esempio, un programma scritto secondo il paradigma della “programmazione a oggetti” (*Object-Oriented Programming*, OOP) è costituito da oggetti che interagiscono fra loro. Diversamente, un programma sviluppato secondo il paradigma della “programmazione funzionale” è una composizione di funzioni.

A partire dalla versione 2008a il linguaggio Matlab mette a disposizione degli utenti un paradigma di programmazione a oggetti. Il supporto a questo stile di programmazione avviene attraverso la presenza di funzionalità del linguaggio che rendono conveniente (ragionevolmente facile, sicuro ed efficiente) l'utilizzo di tale metodo di impostazione dei programmi.

In pratica la possibilità di creare oggetti ed usarli in modo conveniente è offerta dalla parola chiave `classdef` che permette di definire tipi di dati personalizzabili. Le *variabili membro* di una classe — simili ai campi di una variabile strutturata — sono definibili attraverso la parola chiave `properties`. L'aspetto particolare delle classi di dati, non presente nei semplici tipi di dati strutturati, risiede nella possibilità di definire funzioni di accesso e manipolazione che sono inglobate nella classe stessa. In altri termini, le funzioni

di manipolazione degli oggetti fanno parte integrante del tipo di dati. Queste funzioni sono dette in gergo *funzioni membro* o *metodi* della classe. Ciò permette di progettare oggetti che interagiscono tra di loro e con oggetti di altri tipi attraverso delle funzioni membro opportunamente definite. In Matlab le funzioni membro si definiscono con la parola chiave `methods`. Si rimanda alla documentazione di Matlab per approfondimenti sulle funzionalità di supporto alla programmazione a oggetti.

La tecnica di programmazione a oggetti si presta particolarmente allo sviluppo di sistemi complessi, partendo eventualmente da soluzioni implementative semplificate. Queste ultime possono essere “scalate” in fasi successive di sviluppo passando a versioni via via più sofisticate.

## A.1 La classe `DSVAircraft`

Forniamo qui un esempio di implementazione in Matlab di una classe pensata per la gestione dei dati di un velivolo nell’ambito delle simulazioni di volo.

La versione proposta qui è poco più sofisticata di una semplice struttura dati. Essa è stata battezzata `DSVAircraft` ed è da implementarsi in un file di nome `DSVAircraft.m`. Il listato di questo file è il seguente:

```
%-----
% Dinamica e Simulazione di Volo - Coiro, De Marco A.A. 2010-2011
%-----
classdef DSVAircraft
    % DSVAircraft class for aircraft data management
    % Detailed explanation goes here

    properties
        %-----
        % IDs and misc.
        %-----
        Name = 'DSVAircraft - <Put a name here>';
        g = 9.81;
        err = 0;
        %-----
        % Geometry
        %-----
        S
        b
        mac
        %-----
        % Mass, inertia, etc
        %-----
        mass
        W
        k_y
        mu_x
        Xcg_adim
        Xn_adim
        %-----
        % Aerodynamics
        %-----
        CD_0
```

```

K
m
CL_alpha
CL_delta_e
CL_delta_s
CL_alpha_dot
CL_q
Cm_0
Cm_alpha
Cm_alpha_dot
Cm_delta_s
Cm_delta_e
Cm_delta_e_dot
Cm_q
%-----
% Elevator
%-----
S_e
x_C_e
Lambda_e
mac_e
mass_e
W_e
ec_adim
k_e
I_e
I_ey
Ch_e_0
Ch_e_alpha
Ch_e_delta_s
Ch_e_delta_e
Ch_e_delta_e_dot
Ch_e_q
Ch_e_alpha_dot
Rs_e
Rg_e
delta_e_max
delta_e_min
%-----
% Propulsion
%-----
T
Cm_T_0
Cm_T_alpha
mu_T
%-----
% Limitations
%-----
CL_max
CL_min
n_max
n_min
Fe_max
Fe_min
end

```

```

methods
%% Constructor, populate class properties reading from file
function obj = DSVAircraft(dataFileName)
    f_id = fopen(dataFileName,'r');
    % check if file opening was ok
    if (f_id==-1)
        obj.err = -1; % opening failed
        disp(['DSVAircraft :: initFromFile __ Could NOT open file ', ...
            dataFileName, ' ...'])
    else
        disp(['DSVAircraft :: initFromFile __ Opening file ', ...
            dataFileName, ' ... OK.'])
        %% File open, OK
        for i=1:5 % read 5 dummy rows
            temp = fgetl(f_id);
        end
        %% Geometric data
        obj.S = fscanf(f_id,'%f ')
        temp = fgetl(f_id);% read the rest of the line as dummy text
        obj.b = fscanf(f_id,'%f ') , temp=fgetl(f_id);
        obj.mac = fscanf(f_id,'%f ') , temp=fgetl(f_id);
        for i=1:2
            temp = fgetl(f_id);
        end
        %% Mass data
        obj.mass = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.W = obj.mass*obj.g;
        obj.k_y = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.mu_x = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.Xcg_adim = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        for i=1:3
            temp = fgetl(f_id);
        end
        %% Aerodynamics
        % Neutral point of the aircraft, non-dimensional
        obj.Xn_adim = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        for i=1:1
            temp = fgetl(f_id);
        end
        % Polar
        obj.CD_0 = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.K = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.m = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        for i=1:1
            temp = fgetl(f_id);
        end
        % Aerodynamic derivatives
        obj.CL_alpha = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.CL_delta_e = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.CL_delta_s = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.CL_alpha_dot = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.CL_q = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.Cm_0 = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.Cm_delta_e = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.Cm_delta_s = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);
        obj.Cm_alpha_dot = fscanf(f_id,'%f ') , temp = fgetl(f_id);

```

```

obj.Cm_q = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Cm_delta_e_dot = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
% calculate stability derivative
obj.Cm_alpha = -obj.CL_alpha*(obj.Xn_adim - obj.Xcg_adim);
for i=1:3
    temp = fgetl(f_id);
end
%% Elevator data
% Geometry
obj.S_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Lambda_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.x_C_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.mac_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
for i=1:1
    temp = fgetl(f_id);
end
% Mass, inertia, etc
obj.mass_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.W_e = obj.mass_e*obj.g;
obj.ec_adim = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.k_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.I_e = (obj.mass_e)*(obj.k_e^2);
obj.I_ey = obj.mass_e*obj.ec_adim*obj.mac_e*obj.x_C_e ...
    - obj.I_e*sin(obj.Lambda_e);
for i=1:1
    temp = fgetl(f_id);
end
% Aerodynamics
obj.Ch_e_0 = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Ch_e_alpha = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Ch_e_delta_s = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Ch_e_delta_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Ch_e_delta_e_dot = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Ch_e_q = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Ch_e_alpha_dot = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
for i=1:4
    temp = fgetl(f_id);
end
%% Command linkage characteristics
% Irreversible Type
obj.Rs_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Rg_e = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
for i=1:1
    temp = fgetl(f_id);
end
% Limitations: angular excursion range
obj.delta_e_max = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.delta_e_min = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
for i=1:2
    temp = fgetl(f_id);
end
%% Propulsion data
obj.T = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.T = obj.T*obj.g;
obj.Cm_T_0 = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Cm_T_alpha = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);

```

```

obj.mu_T = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.e_T = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
for i=1:2
    temp = fgetl(f_id);
end
%% Limitations (aerodynamic and structural)
obj.CL_max = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.CL_min = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.n_max = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.n_min = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
for i=1:2
    temp = fgetl(f_id);
end
%% Limitations on piloting stick force
obj.Fe_max = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
obj.Fe_min = fscanf(f_id,'%f '), temp = fgetl(f_id);
%% finally, set the error tag
obj.err = 0;
end % if f_id not -1
end % constructor of DSVAircaft, init. from file

%% other methods to be defined here ...

end % methods
end

```

Una simile classe di dati permette di allocare in memoria un oggetto attraverso un *costruttore* che legge i dati da un file e assegna i valori alle variabili membro.

## A.2 Esempio d'uso di oggetti di tipo DSVAircaft

Il costruttore di un oggetto (o di una classe) è una funzione speciale che porta il nome della classe stessa. Ecco un frammento di codice che mostra come viene allocato un oggetto di tipo **DSVAircraft** attraverso il suo costruttore:

```

% ...
%% Aircraft data file name
aircraftDataFileName = 'DSV_Aircraft_data.txt';
%% Aircraft object
myAC = DSVAircaft(aircraftDataFileName);
% ...

```

Nel codice precedente la variabile **myAC** è l'oggetto di tipo **DSVAircraft**. Il comando di assegnazione chiama il costruttore della classe, al quale viene passato il nome di un file. Il file viene letto secondo le modalità implementate nella definizione della classe (si veda la sezione *methods* all'interno del costrutto *classdef*).

## A.3 Formato del file di configurazione di oggetti di classe DSV Aircraft

L'aspetto decisivo riguardo all'uso di un simile tipo di dati è legato alla comodità di definire attraverso un file di configurazione i dati del velivolo. Qui di seguito si riporta un esempio di file di configurazione che viene letto con successo dal costruttore di **DSVAircraft**:

```

-----
Dinamica e Simulazione di Volo / Coiro, De Marco A.A. 2010-2011
-----

A/C MAIN GEOMETRIC DATA
17.0  Wing planform area, S, (m^2)
6.90  Wing span, b, (m)
2.60  Mean aerodynamic chord, mac, (m)

MASS AND INERTIA
6000  Mass, mass (kg)
2.20  Inertia gyration radius around pitch axis, k_y, (m)
0.00  Wing-Body zero-lift line angle wrt x-body axis, mu_x, (rad)
0.360 Normalized CG pos. wrt mac l.e., Xcg_adim

AERODYNAMICS
A/C NEUTRAL POINT
0.450 Normalized CG pos. wrt mac l.e., Xn_adim
POLAR
0.0580 CD0 in the parabolic polar: CD=CD0+K*CL^m
0.3500 K in the parabolic polar
2.00   m in the parabolic polar
AERODYNAMIC DERIVATIVES
4.1800 CL_alpha (1/rad)
0.2870 CL_delta_e (1/rad)
0.5220 CL_delta_s (1/rad)
2.270  CL_alpha_dot
4.720  CL_q
-0.0150 Cm(CL=0)
-0.5070 Cm_delta_e (1/rad)
-0.9230 Cm_delta_s (1/rad)
-4.000  Cm_alpha_dot
-8.34   Cm_q
0.000   Cm_delta_e_dot

ELEVATOR DATA
GEOMETRY
1.1590 Reference surface, S_e (m^2)
0.5235988 Hinge axis sweep angle, Lambda_e (rad)
-3.300  Coord. along x-body of elev.-fixed ref. frame origin, x_C_e (m)
0.420   Elevator mean aerod. chord, mac_e (m)
MASS/INERTIA
50.00   Elevator mass, mass_e (kg)
0.000   Offset of elev. CG wrt elev. mac (m)
0.090   Elevator inertia gyration radius around hinge, k_e, (m)
AERODYNAMICS
0.0000  Ch_e_0
-0.0035 Ch_e_alpha (1/rad)
-0.0057 Ch_e_delta_s (1/rad)
-0.0100 Ch_e_delta_e (1/rad)
-0.000  Ch_e_delta_e_dot
0.0360  Ch_e_q
-0.0220 Ch_e_alpha_dot

ELEVATOR COMMAND CHARACTERISTICS
TYPE
reversible
0.300   Stick sensitivity ratio, Rs_e (push/pull)
0.40000 Gearing ratio, i.e. stick displ./delta_e, Rg_e (m/rad)
ELEVATOR ANGULAR RANGE
0.5235988 max angle, push-over-wise, delta_e_max (rad)
-0.5235988 min angle, pull-up-wise, delta_e_min (rad)

```

```

PROPULSION DATA
7530 Thrust, T (kg-force)
0.0000 Cm_T_0
0.0000 Cm_T_alpha
0.0000 Setting angle wrt x-body axis, mu_T (rad)
0.0000 offset (with sign) of T-vector wrt cg, e_T (m)

AERODYNAMIC/STRUCTURAL LIMITATIONS
0.85 Max CL, CL_max
-0.75 Min CL, CL_min
7.80 Max load factor, n_max
-4.50 Min load factor, n_min

STICK-FORCE LIMITATIONS
75.000 Max push force (kg-force)
-75.000 Max pull force (kg-force)
-----

```

Se questo file viene nominato `DSV_Aircraft_data.txt` i dati numerici in esso contenuti verranno assegnati alle variabili membro dell'oggetto **myAC**. Ecco cosa restituisce la finestra dei comandi di Matlab quando si digita il nome di questa variabile:

```

>> myAC
myAC =
DSVAircraft
Properties:
    Name: 'DSVAircraft - <Put a name here>'
         g: 9.8100
         err: 0
         S: 17
         b: 6.9000
         mac: 2.6000
         mass: 6000
         W: 58860
         k_y: 2.2000
         mu_x: 0
    Xcg_adim: 0.3600
    Xn_adim: 0.4500
    CD_0: 0.0580
         K: 0.3500
         m: 2
    CL_alpha: 4.1800
    CL_delta_e: 0.2870
    CL_delta_s: 0.5220
    CL_alpha_dot: 2.2700
         CL_q: 4.7200
         Cm_0: -0.0150
         Cm_alpha: -0.3762
    Cm_alpha_dot: -4
         Cm_delta_s: -0.9230
         Cm_delta_e: -0.5070
    Cm_delta_e_dot: 0
         Cm_q: -8.3400
         S_e: 1.1590
         x_C_e: -3.3000
    Lambda_e: 0.5236
         mac_e: 0.4200
         mass_e: 50
         W_e: 490.5000
    ec_adim: 0
         k_e: 0.0900
         I_e: 0.4050
         I_ey: -0.2025
         Ch_e_0: 0
         Ch_e_alpha: -0.0035
         Ch_e_delta_s: -0.0057
         Ch_e_delta_e: -0.0100
         Ch_e_delta_e_dot: 0

```



```

    Ch_e_q: 0.0360
Ch_e_alpha_dot: -0.0220
    Rs_e: 0.3000
    Rg_e: 0.4000
delta_e_max: 0.5236
delta_e_min: -0.5236
    T: 7.3869e+004
    Cm_T_0: 0
    Cm_T_alpha: 0
    mu_T: 0
    e_T: 0
    CL_max: 0.8500
    CL_min: -0.7500
    n_max: 7.8000
    n_min: -4.5000
    Fe_max: 75
    Fe_min: -75

Methods

>>

```

In questo caso particolare tutte le variabili membro di **myAC** sono *pubbliche*, cioè il loro valore è accessibile e modificabile dall'utente. Ecco come è possibile modificare la posizione del baricentro:

```

>> myAC.Xcg_adim
ans =
    0.3600
>> myAC.Xcg_adim = 0.38;
>> myAC.Xcg_adim
ans =
    0.3800
>>

```

A partire dagli esempi di implementazione riportati sopra è possibile progettare nuove funzionalità della classe **DSVAircraft**, sotto forma di funzioni membro aggiuntive.



# Bibliografia

- [1] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Hodges & Smith, 1853.
- [2] O. Rodrigues, “Des lois géométriques qui régissent les déplacements d’un système solide dans l’espace, et de la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1840.
- [3] E. Salamin, “Application of Quaternions to Computation with Rotations”, Working paper, Stanford AI Lab, 1979.
- [4] A. P. Yefremov, “Quaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories”, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, vol. 1, 2004.
- [5] Schwab A. L., “Quaternions, Finite Rotations and Euler Parameters”, Course notes on Applied Multibody Dynamics, Delft University of Technology, Laboratory for Engineering Mechanics, 2003.  
<http://tam.cornell.edu/~als93/quaternion.pdf>.
- [6] AIAA/ANSI, *Recommended Practice for Atmospheric and Space Flight Vehicle Coordinate Systems*. R-004-1992, 1992.
- [7] G. H. Bryan, *Stability in Aviation: An Introduction to Dynamical Stability as Applied to the Motions of Aeroplanes*. Macmillan and Co., Limited, London, 1911.
- [8] D. J. Diston, *Computational Modelling of the Aircraft and the Environment. Volume 1, Platform Kinematics and Synthetic Environment*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [9] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [10] W. F. Phillips, “Phugoid Approximation for Conventional Airplanes”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, January-February 2000.
- [11] W. F. Phillips, “Improved Closed-Form Approximation for Dutch-Roll”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, May-June 2000.
- [12] R. Stengel, *Flight Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2004.
- [13] M. R. Napolitano, *Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation*. John Wiley, 2012.

- [14] D. K. Schmidt, *Modern Flight Dynamics*. McGraw-Hill, 2010.
- [15] B. Stevens, F. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [16] D. Stinton, *The Anatomy of the Airplane* (2nd edition). American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [17] B. Etkin, *Dynamics of Flight, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [18] M. Calcara, *Elementi di dinamica del velivolo*. Edizioni CUEN, Napoli, 1988.
- [19] L. V. Schmidt, *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. AIAA Education Series, 1998.
- [20] W. J. Duncan, *Control and Stability of Aircraft*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [21] R. Jategaonkar, *Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology*. Progress in Astronautics and Aeronautics Series, 2006.
- [22] C. D. Perkins, R. E. Hage, *Aircraft Performance, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [23] J. R. Wright, J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [24] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*. Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- [25] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*. Springer, Heidelberg, 2009.
- [26] P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. Second Edition. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2007.
- [27] J. D. Mattingly, *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2006.
- [28] K. Hünecke, *Jet Engines. Fundamentals of Theory, Design and Operation*. Motorbooks International, 1997.
- [29] A. Linke-Diesinger, *Systems of Commercial Turbofan Engines*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [30] F. R. Garza, E. A. Morelli, "A Collection of Nonlinear Aircraft Simulations with MATLAB". NASA-TM-2003-212145, January 2003.
- [31] Voce WGS84 su *Wikipedia*:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/World\\_Geodetic\\_System](http://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System)

- [32] Anonimo, *Department of Defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems*. NIMA TR8350.2, Third Edition, Amendment 2. National Imagery and Mapping Agency, US Department of Defense, 2004.
- [33] J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. DARcorporation, 2001.
- [34] H. T. Schlichting, E. A. Truckenbrodt, *Aerodynamics of the Aeroplane*. McGraw Hill Higher Education, 2nd edition, 1979.
- [35] M. M. Munk, “The aerodynamic forces on airship hulls”. NACA-TR-184, 1924.
- [36] A. Silverstein, S. Katzoff, “Aerodynamic characteristics of horizontal tail surfaces”. NACA-TR-688, 1940.
- [37] R. I. Sears, “Wind-tunnel data on the aerodynamic characteristics of airplane control surfaces”. NACA-WR-L-663, 1943.
- [38] E. Garner, “Wind-tunnel investigation of control-surface characteristics XX: plain and balanced flaps on an NACA 0009 rectangular semispan tail surface”. NACA-WR-L-186, 1944.
- [39] J. D. Brewer, M. J. Queijo, “Wind-tunnel investigation of the effect of tab balance on tab and control-surface characteristics”. NACA-TN-1403, 1947.
- [40] S. M. Crandall, H. E. Murray, “Analysis of available data on the effects of tabs on control-surface hinge moments”. NACA-TN-1049, 1946.
- [41] B. W. McCormick, *Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics*. John Wiley & Sons, 1979.
- [42] B. N. Pamadi, *Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, 1998.
- [43] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics. Modelling and Simulation with Matlab and Simulink*. Birkhäuser, Berlin, 2007.
- [44] D. Howe, *Aircraft Loading and Structural Layout*. AIAA Education Series, 2004.
- [45] P. Morelli, *Static Stability and Control of Sailplanes*. Levrotto & Bella, Torino, 1976.
- [46] L. Prandtl, O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. Dover, 1957.
- [47] R. K. Heffley, W. F. Jewell, “Aircraft Handling Qualities Data”. NASA-CR-2144, December 1972.
- [48] H. P. Stough III, J. M. Patton Jr, S. M. SliWa, “Flight Investigation of the Effect of Tail Configuration on Stall, Spin, and Recovery Characteristics of a Low-Wing General Aviation Research Airplane”. NASA-TP-1987-2644, February 1987.

- [49] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 3rd edition, New York, 2001.
- [50] J. J. Bertin, *Aerodynamics for Engineers*. Prentice-Hall, 4th edition, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [51] J. Katz, A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, England, U.K., 2001.
- [52] D. E. Hoak, *et al.*, “The USAF Stability and Control Datcom”. Air Force Wright Aeronautical Laboratories, TR-83-3048, 1960 (Revised 1978).
- [53] R. T. Jones, “A Note on the Stability and Control of Tailless Airplanes”. NACA Report 837, 1941.
- [54] D. P. Coiro, F. Nicolosi, A. De Marco, N. Genito, S. Figliolia, “Design of a Low Cost Easy-to-Fly STOL Ultralight Aircraft in Composite Material”. *Acta Polytechnica*, Vol. 45 no. 4, 2005, pp. 73-80; ISSN 1210-2709.
- [55] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Flight Tests, Performances and Flight Certification of a Twin-Engine Light Aircraft”. *Journal of Aircraft*, Vol 48, No. 1, January-February 2011.
- [56] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Parameter Estimation and Flying Qualities of a Twin-Engine CS23/FAR23 Certified Light Aircraft”. AIAA-2010-7947, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Toronto, 2010.
- [57] B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, Dover Publications, 2005.
- [58] L. Mangiacasale, *Flight Mechanics of a  $\mu$ -Airplane*, Edizioni Libreria CLUP, Milano, 1998.
- [59] G. Mengali, *Elementi di Dinamica del Volo con Matlab*, Edizioni ETS, Pisa, 2001.
- [60] R. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1989.
- [61] Y. Li, M. Nahon, “Modeling and simulations of airship dynamics”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 30, No. 6, November-December 2007.
- [62] Y. Fan, F. H. Lutze, E. M. Cliff, “Time-Optimal Lateral Maneuvers of an Aircraft”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 18, No. 5, September-October 1995.
- [63] J. N. Nielsen, *Missile Aerodynamics*, AIAA, Cambridge, MA, 1988.
- [64] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean’s Vehicles*, Wiley, New York, 1998.
- [65] J. N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- [66] E. L. Duke, R. F. Antoniewicz, K. D. Krambeer, “Derivation and Definition of a Linear Aircraft Model”. Technical Report NASA Reference Publication RP-1207, Research Engineering, NASA Ames Research Center and NASA Dryden Flight Research Facility, 1988.

- [67] G. A. Stagg, *An Unsteady Aerodynamic Model for Use in the High Angle of Attack Regime*. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1998.
- [68] Y. Fan, *Identification of an Unsteady Aerodynamic Model up to High Angle of Attack Regime*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [69] *MATLAB Users' Guide*. The Mathworks, 2003 ed edizioni successive.  
<http://www.mathworks.com/>  
<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.html>
- [70] V. Comincioli, *Analisi numerica: metodi, modelli, applicazioni*. McGraw-Hill, 1990, seconda edizione 1995.
- [71] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, seventh edition, 1993.
- [72] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.
- [73] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [74] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, 1988.
- [75] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.
- [76] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, 1994.
- [77] R. D. Finck, "USAF Stability and Control Datcom". AFWAL-TR-83-3048, October 1960, Revised 1978.
- [78] S. R. Vukelich, J. E. Williams, "The USAF Stability and Control Digital Datcom". AFFDL-TR-79-3032, Volume I, April 1979, Updated by Public Domain Aeronautical Software 1999.
- [79] W. B. Blake, "Prediction of Fighter Aircraft Dynamic Derivatives Using Digital Datcom". AIAA-85-4070, AIAA Applied Aerodynamics Conference, Colorado Springs, Colorado, 1985.
- [80] Autori Vari, Distribuzione ufficiale di Digital Datcom,  
sito internet:  
<http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/Digital-Datcom-Package.zip>
- [81] B. Galbraith, "Digital Datcom+", Holy Cows, Inc.,  
sito internet: <http://www.holycows.net/datcom/>