

Agostino De Marco
Domenico P. Coiro

Elementi
di
Dinamica e simulazione di volo

Quaderno 8

**Azioni inerziali del moto vario
ed equazioni di Eulero**

Aprile 2019

ver. 2019.a

Dichiarazione di Copyright

- Questo testo è fornito per uso personale degli studenti. Viene reso disponibile in forma preliminare, a supporto della preparazione dell'esame di *Dinamica e simulazione di volo*.
- Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o elettronico ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo sostanziale, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data, paternità e fonte originale.
- Non è consentito l'impiego di detto materiale a scopi commerciali se non previo accordo.
- È gradita la segnalazione di errori o refusi.

Copyright 2010-2017 Agostino De Marco e Domenico P. Coiro
Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Ingegneria Industriale

(Legge italiana sul Copyright 22.04.1941 n. 633)

Azioni inerziali del moto vario ed equazioni di Eulero

*Le teorie sono esposizioni senza valore.
Ciò che conta è l'azione sola.*

– Costantin Brancusi

Indice

8.1	Generalità	3
8.2	Accelerazioni lineari ed angolari	4
8.3	Fattori di carico	6
8.4	Coefficiente di contingenza	8
8.5	Coppie inerziali	8
8.6	Equazioni di Eulero	15

8.1 Generalità

Durante le fasi di volo non uniforme i velivoli vengono sottoposti a un sistema di sollecitazioni di notevole intensità. In certe condizioni la severità del cimento strutturale può arrivare addirittura a compromettere la stessa sicurezza del volo. Lo studio del comportamento dinamico dei velivoli conseguente all'azione del pilota sui comandi ed alla turbolenza atmosferica è di estrema importanza sia per valutare la rispondenza a specifici requisiti connessi con l'espletamento della missione (manovrabilità, maneggevolezza, stabilità della piattaforma di tiro, *comfort* dei passeggeri, eccetera) che per individuare possibili condizioni critiche di volo.

Inoltre è proprio durante tali fasi di moto vario che le sollecitazioni agenti sulle strutture dei velivoli raggiungono i valori estremi. La conoscenza della distribuzione e dell'entità delle sollecitazioni massime si rende necessaria fin dai primi stadi di sviluppo di un progetto, costituendo essa l'indispensabile premessa per la progettazione e la verifica delle strutture dei velivoli. È altresì necessario conoscere i requisiti di rigidezza di

dette strutture, che dipendono, a loro volta, dal massimo valore della pressione dinamica raggiungibile, la cui valutazione viene resa possibile, ancora una volta, attraverso lo studio di una condizione di volo non uniforme.

Le precedenti considerazioni mettono in evidenza la necessità di un accurato studio delle leggi che regolano il moto vario dei velivoli. Quest'ultimo è sinonimo di moto accelerato e le accelerazioni hanno luogo ogni qualvolta vi è una risultante non nulla delle forze o dei momenti esterni.

Quando la non uniformità del moto trae origine dall'azione sui comandi di volo gli effetti che ne conseguono sono voluti ed, entro certi limiti, controllati dalle manovre del pilota. Nel caso di volo in aria agitata, invece, il pilota subisce le perturbazioni del moto prodotte dalle raffiche: egli può solamente intervenire in senso moderatore quando tali effetti hanno avuto modo di manifestarsi. Il prevalere dell'uno o dell'altro tipo di sollecitazione deriva dall'impiego al quale il velivolo è destinato: evidentemente le condizioni di carico dovute alla manovra sono, in genere, di gran lunga più gravose per i velivoli acrobatici che non per quelli da trasporto e quindi esse risultano determinanti per il dimensionamento delle strutture dei velivoli appartenenti alla categoria acrobatica. Viceversa le strutture di un velivolo da trasporto risultano prevalentemente definite dalle sollecitazioni derivanti da raffica essendo meno severe, per tale categoria, le sollecitazioni da manovra. Pur tuttavia la distinzione non è mai così netta; occorre quindi in ogni caso considerare gli effetti derivanti da entrambi i tipi di sollecitazione sopra definiti.

8.2 Accelerazioni lineari ed angolari

Il moto vario, qualunque sia la causa che lo ha provocato, è caratterizzato da un'accelerazione lineare risultante $\mathbf{a} = d\mathbf{V} / dt$ diversa da quella di gravità, agente secondo una qualsiasi direzione e, il più delle volte, da un'accelerazione angolare $d\boldsymbol{\Omega} / dt$ non nulla e comunque diretta.

L'azione del pilota sui comandi (o quella derivante dai movimenti dell'atmosfera) provoca una variazione nell'entità e nella distribuzione delle azioni aerodinamiche e propulsive dando luogo ad un sistema di forze che, in genere, ammette come risultante una forza \mathbf{F} applicata nel baricentro del velivolo ed un momento \mathcal{M} attorno ad esso.

In una condizione di volo equilibrato — detta anche *condizione di regime* — le azioni aerodinamiche e propulsive unitamente a quella del peso proprio del velivolo sono tali da avere: $\mathbf{F} = \mathcal{M} = 0$. Da queste condizioni di equilibrio consegue l'annullarsi delle accelerazioni. Quando intervengono delle azioni perturbatrici $\Delta\mathbf{F}$ e $\Delta\mathcal{M}$ che vanno a modificare l'equilibrio delle forze e dei momenti agenti durante il volo uniforme, nasceranno delle accelerazioni lineari \dot{u} , \dot{v} e \dot{w} ed eventualmente angolari \dot{p} , \dot{q} , \dot{r} . Le cause perturbatrici della condizione di regime possono essere prodotte o dai movimenti dell'atmosfera oppure dalla variazione della configurazione del velivolo, ottenuta attraverso l'azione del pilota sugli organi di comando (equilibratore, timone di direzione ed alettoni — per il controllo longitudinale, direzionale e trasversale rispettivamente —, manetta del gas e freni aerodinamici — per il controllo del valore scalare della velocità).

In generale, la massa del velivolo risulta sottoposta ad un'accelerazione lineare agente secondo la direzione della forza \mathbf{F} e ad un'accelerazione angolare istantanea intorno al baricentro. Nella figura 8.1 a fronte è rappresentato il vettore $d\boldsymbol{\Omega} / dt$ determinato da una coppia perturbatrice $\Delta\mathcal{M}$ delle condizioni di regime, che scomposta lungo gli assi velivolo

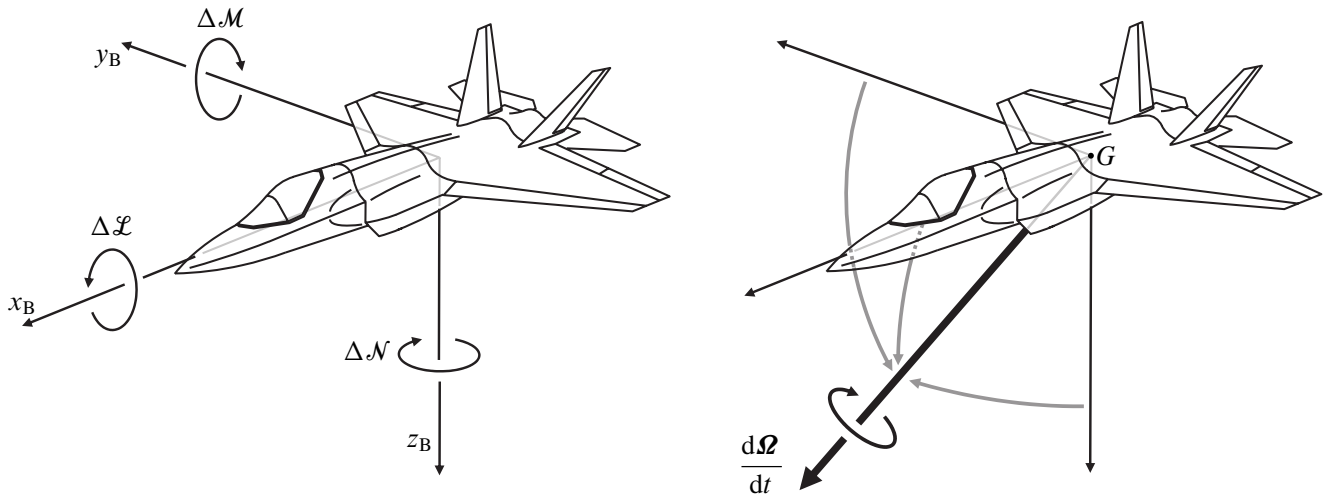


Figura 8.1 L'accelerazione angolare provocata da un'azione perturbatrice $\Delta\mathcal{M}$ delle condizioni di regime. Se quest'ultima corrisponde ad un volo traslato e uniforme (V costante e $\Omega = 0$, per $t \leq t_0$), dopo un tempo Δt , piccolo, successivo all'inizio della perturbazione il velivolo avrà acquistato una velocità angolare istantanea $\Omega(t_0 + \Delta t) \simeq (d\Omega/dt)\Delta t$.

è data dalle perturbazioni di momento di rollio $\Delta\mathcal{L}$, di beccheggio $\Delta\mathcal{M}$ e di imbardata $\Delta\mathcal{N}$.

Nelle fasi di volo non uniforme l'insieme di tutti gli elementi di massa dm del velivolo risultano così sede di un sistema di forze di inerzia. Tale sistema ha per azione risultante una forza ed una coppia d'inerzia uguali ed opposte a quelle risultanti dalle azioni combinate di natura aerodinamica e propulsiva. In tal senso si può affermare che, anche in presenza di accelerazioni, si vengono a ripristinare delle condizioni di equilibrio simili a quelle di regime. Si parlerà, in generale, di condizioni di *equilibrio dinamico*, nelle quali le forzanti $F_A(t) + F_T(t)$ ed $\mathcal{M}_A(t) + \mathcal{M}_T(t)$ sono equilibrate, istante per istante, dal sistema di forze d'inerzia. Con questa accezione in Dinamica si usa raggruppare sotto il nome di *azioni di massa* quelle del peso e delle forze e coppie d'inerzia.

Poiché è nota la distribuzione delle masse del velivolo, la conoscenza delle citate accelerazioni lineari ed angolare consente di determinare l'entità e la distribuzione delle forze di massa nonché, ovviamente, l'entità della risultante delle azioni aerodinamiche e propulsive che fanno loro equilibrio. Da ciò deriva l'interesse di conoscere le accelerazioni in atto.

Durante talune fasi di moto vario l'accelerazione angolare risulta nulla, ad esempio in virata corretta stabilizzata a quota costante oppure in moto traslato lungo una traiettoria rettilinea. In tal caso l'azione delle forze di massa (peso e forze inerziali distribuite) sul velivolo è equivalente ad una forza baricentrica e le condizioni di volo corrispondenti si dicono *fondamentali*. Ciò in contrapposizione alle cosiddette condizioni di volo *complementari*, caratterizzate da accelerazione angolare diversa da zero e quindi da azioni di massa che ammettono come risultante, oltre ad una forza, anche un momento baricentrico non nullo. Tale distinzione deriva da un'opportuna quanto necessaria schematizzazione del fenomeno del moto accelerato poiché, nella realtà, si verificano, durante una qualsiasi manovra, entrambe dette condizioni. Si può anzi affermare che la fase iniziale di una manovra è sempre costituita da una condizione di volo complementare mentre quella finale è o tende ad una condizione di volo fondamentale. Si pensi alla situazione in cui il pilota decide di passare dal volo traslato uniforme, ad ali e traiettoria orizzontali, al volo in virata

corretta a quota costante. Entrambe le condizioni sono fondamentali mentre per passare dalla prima alla seconda, per inclinare le ali e iniziare la manovra di virata, il velivolo deve passare attraverso una condizione di volo complementare.

8.3 Fattori di carico

Prendiamo adesso in considerazione alcune definizioni collegate all'accelerazione traslazionale \mathbf{a} . La forza di massa risultante agente su un velivolo in una qualsiasi fase di volo vario è data dalla somma vettoriale della forza d'inerzia $-\mathbf{ma} = -W\mathbf{a}/g$ e del peso $\mathbf{W} = W\mathbf{g}/g$. Essa è nota anche con il nome di *peso apparente del velivolo* ed ha la seguente espressione:

$$\mathbf{W}_a = \frac{W}{g} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (8.1)$$

Si definisce *fattore di carico* il rapporto:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{W}_a}{W} = \frac{\mathbf{g} - \mathbf{a}}{g} \quad (8.2)$$

fra il peso apparente ed il modulo di quello reale. Esso rappresenta la misura dell'entità e della direzione della sollecitazione esterna agente sul velivolo. Dall'equazione di equilibrio alla traslazione:

$$\mathbf{F} - \frac{W}{g} \mathbf{a} = 0 \quad (8.3)$$

esprimendo \mathbf{a} in termini di \mathbf{F} e sostituendo nella (8.2), risulta infatti:

$$\mathbf{f} = -\frac{\mathbf{F} - W}{W} \quad (8.4)$$

secondo la quale il prodotto del fattore di carico per il modulo del peso del velivolo è uguale ed opposto alla risultante delle forze esterne agenti, eccezion fatta per la forza peso. Dunque, il prodotto $\mathbf{f}W$ risulta uguale alla forza di massa risultante.

Il fattore di carico viene determinato — in grandezza, direzione e verso — attraverso le sue proiezioni su una terna di riferimento. A tale scopo ci si riferisce, in genere, agli assi aerodinamici, cioè alle direzioni secondo cui viene decomposta l'azione aerodinamica risultante. Le componenti del fattore di carico così ottenute prendono il nome di *fattori di carico longitudinale* f_{x_A} , *trasversale* f_{y_A} e *normale* f_{z_A} :

$$f_{x_A} = \frac{g_{x_A} - a_{x_A}}{g} \quad f_{y_A} = \frac{g_{y_A} - a_{y_A}}{g} \quad f_{z_A} = \frac{g_{z_A} - a_{z_A}}{g} \quad (8.5)$$

Poiché le componenti delle azioni di massa sugli assi aerodinamici — ove si trascuri l'angolo che l'asse della spinta propulsiva forma con la direzione della velocità ($\mu_T + \alpha_B \approx 0$, si veda la figura 8.2 nella pagina successiva) — sono equilibrate dall'esuberanza della spinta T sulla resistenza D , e dalla forza laterale Y_A dalla portanza L rispettivamente, le (8.5) diventano:

$$f_{x_A} = -\frac{T - D}{W} \quad f_{y_A} = -\frac{Y_A}{W} \quad f_{z_A} = \frac{L}{W} \quad (8.6)$$

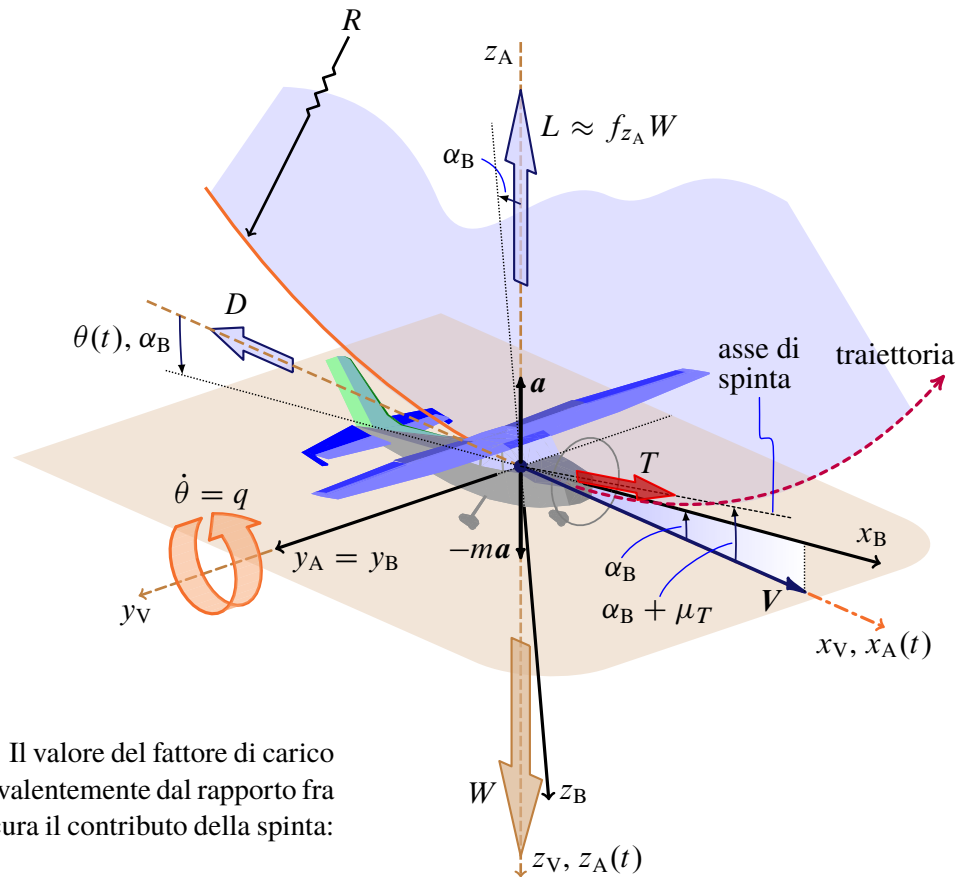


Figura 8.2 Volo in richiamata. Il valore del fattore di carico normale f_{z_A} è determinato prevalentemente dal rapporto fra la portanza e il peso, se si trascura il contributo della spinta: $T \sin(\alpha_B + \mu_T) \approx 0$.

Una situazione di volo ad un fattore di carico normale maggiore dell'unità è riportata nella figura 8.2. Il disegno rappresenta l'istante di una manovra di richiamata ad ali livellate in cui la velocità è orizzontale. Quando il pilota riesce a stabilizzare questa manovra, cioè ad ottenere una V (modulo della velocità) e un α_B (vento relativo) costanti lungo la traiettoria, si hanno condizioni di volo fondamentali. La velocità angolare istantanea è un vettore costante, orizzontale e di modulo q mentre è nulla l'accelerazione angolare. Nella richiamata stabilizzata l'accelerazione lineare a è non nulla ma è dovuta alla variazione temporale della direzione di V , quindi è centripeta. In questo caso il valore di f_{z_A} è determinato prevalentemente dal rapporto fra la portanza e il peso, se si trascura nella terza delle (8.5) il contributo della spinta: $T \sin(\alpha_B + \mu_T) \approx 0$. Considerazioni simili valgono anche per il moto di virata stabilizzata a quota costante.

Per avere un'idea del significato pratico del fattore di carico normale, si consideri, ad esempio, una manovra caratterizzata da un valore di $f_{z_A} = 4,50$. Ciò vuol dire che la componente della forza di massa agente sul velivolo secondo la normale alla traiettoria è uguale a 4,50 volte il suo peso.

Si osservi che le relazioni (8.6) definiscono i fattori longitudinale, trasversale e normale come rapporti rispetto al peso del velivolo, rispettivamente, dell'eccesso di spinta sulla resistenza aerodinamica, della forza trasversale e della portanza. In altri termini, essi forniscono la misura dei rispettivi numeratori in termini di unità di peso del velivolo. Tali sono le definizioni che vengono generalmente fornite per i fattori di carico sebbene quella espressa dalla (8.4) sia da considerarsi preferibile perché unica e di carattere generale. Questa, insieme alle (8.5), risulta infatti valida anche quando sul velivolo agiscono altre forze esterne, oltre quelle di natura aerodinamica e propulsiva. Ad esempio, ciò si verifica in fase di atterraggio, dovendo annoverare tra le forze esterne le reazioni del terreno

all'impatto. Inoltre la definizione generale (8.4) non comporta l'introduzione di alcuna ipotesi semplificativa circa la direzione della forza propulsiva.

8.4 Coefficiente di contingenza

La portanza è, fra le forze che compaiono a numeratore delle espressioni (8.5) dei fattori di carico, quella che può raggiungere i valori più elevati. Inoltre la direzione dell'asse z_A , — dati i piccoli valori delle incidenze normali di volo (in genere inferiori ai 20 deg) — è molto prossima a quella della normale alle superfici portanti. Gli alti fattori di carico normale associati ai valori estremi conseguibili dalla portanza conducono quindi ad elevate sollecitazioni su dette superfici portanti. A ciò si accompagnano le esigenze di natura aerodinamica che portano all'adozione di strutture in genere non controventate e caratterizzate da sviluppi relativamente modesti nella direzione normale al loro piano (bassi spessori percentuali dei profili alari). È quindi di particolare rilievo, ai fini strutturali, la conoscenza del massimo valore del fattore di carico normale. Esso viene denominato *coefficiente di contingenza*:

$$n = (f_{z_A})_{\max} \quad (8.7)$$

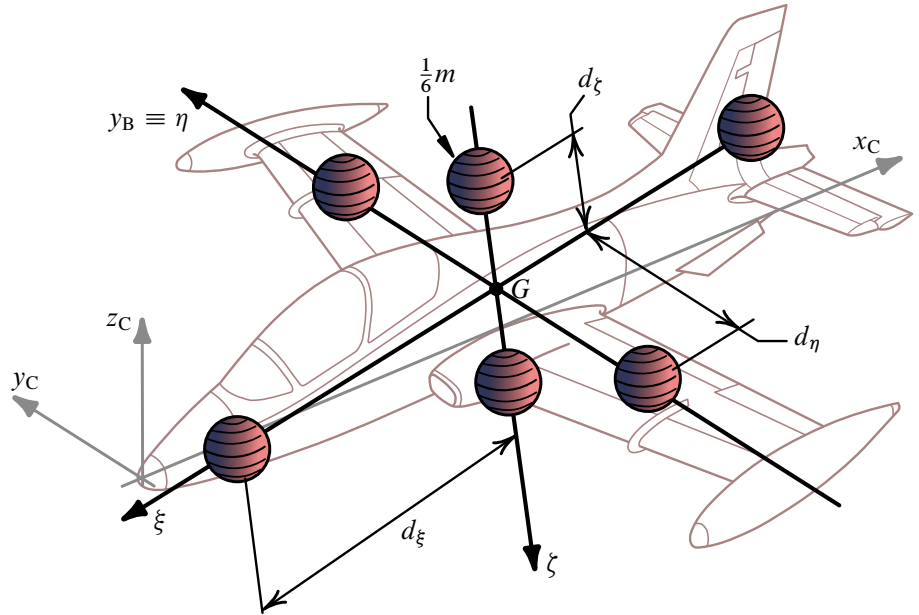
La regolamentazione vigente sul collaudo di robustezza dei velivoli prescrive il valore del coefficiente di contingenza in relazione all'impiego cui essi sono destinati. Per nessun velivolo pilotato viene prescritto un valore maggiore di 8 in quanto quest'ultimo può esser considerato come il limite superiore della perturbazione fisiologica che un pilota normale, munito di apposita tuta “anti-g” può sopportare nella posizione usuale di pilotaggio. Poiché, come noto, le alterazioni fisiologiche connesse con il raggiungimento di forti accelerazioni sono dovute essenzialmente agli squilibri provocati nella circolazione del sangue, la “sopportazione” ammissibile risulta influenzata in notevole misura dalla direzione secondo la quale agisce l'accelerazione.

Così, ad esempio, le forze di massa agenti nella direzione longitudinale del pilota (direttrice testa-piedi) possono essere sopportate da individui allenati non muniti di tuta anti-g, solo per alcuni secondi nel caso di accelerazioni dell'ordine di 5 volte quella di gravità. Tale intensità ammissibile del fattore di carico si riduce ulteriormente se l'azione di massa è diretta nel senso piedi-testa (“g negativi”). Se invece l'accelerazione agisce trasversalmente al pilota (dall'addome al dorso o viceversa) egli può tollerare valori della sopportazione ben maggiori (fino a 10 per la durata di qualche minuto). In ogni caso la sopportazione fisiologica limita il coefficiente di contingenza e, con esso, le possibilità di manovra dei velivoli.

8.5 Coppie inerziali

Restano da prendere in considerazione a questo punto le coppie inerziali dovute ad un'accelerazione rotazionale non nulla, cioè in condizioni di volo complementari. A tal proposito si deve osservare che, mentre le forze inerziali sono relativamente semplici da visualizzare — potendo immaginare la massa del velivolo tutta concentrata nel punto G e arrivando così alle definizioni del fattore di carico —, un discorso più generale deve essere impostato per l'analisi delle accelerazioni angolari intorno al baricentro. La distribuzione e l'entità delle azioni di massa durante una qualsiasi fase di volo non uniforme dipendono dalla

Figura 8.3 Sistema di 6 masse concentrate, ciascuna pari a $\frac{1}{6}m$. Esso è equivalente alla reale distribuzione di masse del velivolo in termini di momenti principali d'inerzia. Le masse sono disposte a due a due lungo gli assi centrali d'inerzia ξ , η e ζ , in posizioni simmetriche rispetto al baricentro G . Le distanze da quest'ultimo sono pari, rispettivamente, a d_ξ , d_η , e d_ζ , funzioni dei raggi centrali d'inerzia del velivolo, κ_x , κ_y , κ_z [definizione (8.8)].



distribuzione effettiva delle masse del velivolo e, in generale, tanto dai valori dei fattori di carico quanto dalla velocità angolare Ω e dell'accelerazione angolare $d\Omega/dt$.

Di particolare rilievo risultano essere le coppie inerziali per il ruolo determinante che esse assumono in quei problemi di dinamica dei velivoli che sono governati prevalentemente dagli equilibri alla rotazione (analisi del rollio rapido, dell'evoluzione di vite, eccetera). È di grande utilità, per la corretta interpretazione di taluni fenomeni che si manifestano in queste evoluzioni, chiarire la natura fisica di dette coppie ed il modo secondo cui esse influenzano l'equilibrio dinamico.

8.5.1 Il sistema di masse equivalenti al velivolo

A tale scopo è conveniente riferirsi, anziché alla reale distribuzione di masse del velivolo, al sistema equivalente rappresentato nella figura 8.3. Il sistema è costituito da sei masse discrete, ciascuna uguale alla sesta parte della massa del velivolo, $m/6 = W/(6g)$, disposte lungo gli assi centrali di inerzia, a due a due in posizioni simmetriche rispetto al baricentro G . Le sei masse hanno dunque baricentro e assi centrali d'inerzia sovrapposti a quelli del velivolo. Inoltre, con un'opportuna scelta delle reciproche distanze, esse hanno, nel loro complesso, i medesimi momenti principali d'inerzia $A \equiv I_\xi$, $B \equiv I_\eta$ e $C \equiv I_\zeta$ del velivolo. Ciò ha luogo conferendo alle tre coppie di punti materiali delle distanze baricentrali d_ξ , d_η , d_ζ , rispettivamente, tali da soddisfare le relazioni:

$$\kappa_x^2 = \frac{d_\eta^2 + d_\zeta^2}{3} \quad \kappa_y^2 = \frac{d_\xi^2 + d_\zeta^2}{3} \quad \kappa_z^2 = \frac{d_\xi^2 + d_\eta^2}{3} \quad (8.8)$$

essendo κ_x , κ_y e κ_z i raggi di inerzia del velivolo. Questi ultimi sono definiti dalle relazioni:

$$\kappa_x = \sqrt{\frac{A}{W/g}} \quad \kappa_y = \sqrt{\frac{B}{W/g}} \quad \kappa_z = \sqrt{\frac{C}{W/g}} \quad (8.9)$$

Un siffatto sistema di masse, sottoposto all'accelerazione di gravità, ammette come risultante una forza uguale al peso del velivolo applicata nel suo baricentro. Inoltre, essendo caratterizzato dai medesimi momenti principali di inerzia, l'effetto sugli equilibri

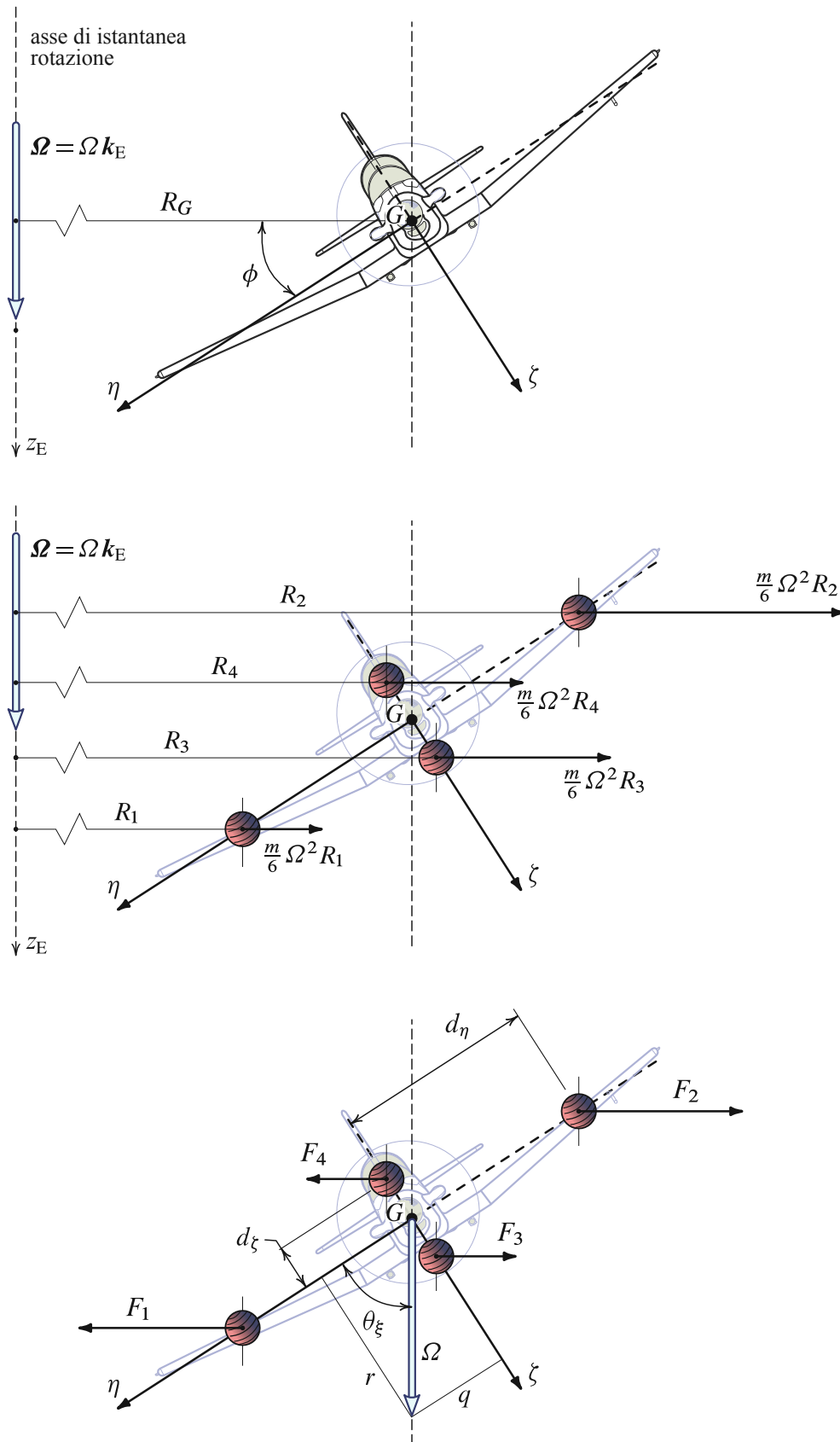


Figura 8.4 Azioni inerziali in virata stabilizzata a destra a quota costante. Il velivolo ha un moto di rotazione rigida intorno all'asse di istantanea rotazione e la velocità angolare istantanea Ω è verticale (schema in alto). Le forze centrifughe applicate alle masse $\frac{m}{6}$ nel piano $\eta\zeta$ risultano in una coppia baricentrica negativa (che tende a far livellare le ali, schema centrale). Per l'analisi degli equilibri alla rotazione è possibile considerare equivalentemente il moto di rotazione intorno al baricentro (schema in basso) applicando Ω in G e valutando le forze centrifughe F_1, F_2, F_3 ed F_4 (a due a due uguali e opposte) rispetto all'asse baricentricale parallelo all'asse di istantanea rotazione.

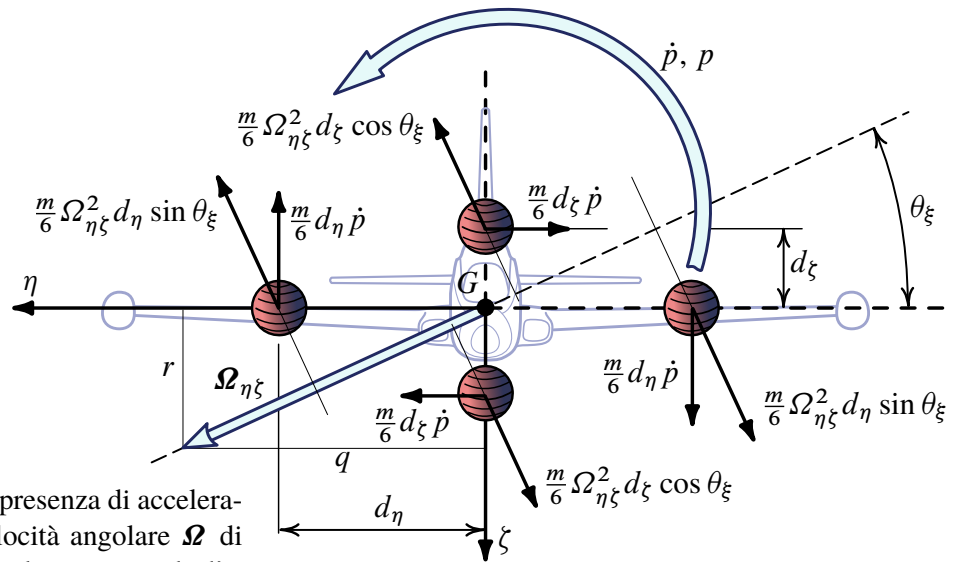


Figura 8.5 Coppie inerziali in presenza di accelerazione angolare \dot{p} e di una velocità angolare Ω di componenti (p, q, r) rispetto agli assi centrali d'inerzia del velivolo. Le masse concentrate del sistema equivalente disposte lungo gli assi η e ζ sono soggette a forze d'inerzia centrifuge dovute alla proiezione $\Omega_{\eta\zeta}$ di Ω nel piano $\eta\zeta$.

dinamici alla rotazione prodotto dalle coppie inerziali agenti su un velivolo in volo alla velocità angolare Ω e con accelerazione angolare $d\Omega/dt$ è lo stesso di quello derivante dalle coppie inerziali agenti sul sistema discreto preso in esame nelle medesime condizioni di velocità ed accelerazione angolari.

Risulta quindi utile analizzare le componenti sugli assi centrali d'inerzia — terna $\mathcal{T}_{CI} = \{G, \xi, \eta, \zeta\}$ — delle coppie inerziali relative al sistema di masse discreto equivalente al velivolo quando questo ruota nello spazio con velocità angolare Ω ed accelera angularmente. Nel discorso che segue si chiameranno (p, q, r) le componenti di Ω nel riferimento centrale d'inerzia. Ciò è giustificato dal fatto che \mathcal{T}_{CI} è una particolare terna di assi velivolo, che, tra l'altro, si presenta ruotata rispetto alla terna canonica \mathcal{T}_B di un angolo μ_ξ in genere piccolo.

Nelle analisi degli equilibri dinamici alla rotazione presentate nei paragrafi seguenti, come noto dalla teoria dei moti rigidi, basterà considerare il cosiddetto *moto intorno al baricentro*, immaginando il velivolo come un solido incernierato in G . Il vettore Ω sarà dunque passante per il baricentro anziché applicato lungo l'asse di istantanea rotazione. Si veda ad esempio la figura 8.4.

8.5.2 Coppie inerziali intorno all'asse di rollio

In primo luogo si prenda in considerazione l'equilibrio dinamico alla rotazione secondo l'asse longitudinale e si esamini la figura 8.5. Si vuole analizzare l'effetto di un'accelerazione angolare intorno all'asse della fusoliera — vettore $\dot{p}\mathbf{i}_\xi$ — in presenza di componenti non nulle, in generale, della velocità angolare. Dall'esame delle figure 8.3 e 8.5 si deduce quanto segue.

(i) La componente \dot{p} dell'accelerazione angolare non ha alcun effetto sulle masse disposte lungo l'asse ξ .

(ii) Al contrario, la suddetta accelerazione angolare provoca sulle masse ubicate lungo gli assi η e ζ l'insorgere di forze d'inerzia che ammettono come risultante una coppia che

si oppone alla rotazione in atto (moto di rollio accelerato) ed il cui valore è dato, per le (8.8), da:

$$\begin{aligned} -2 \frac{m}{6} d_\eta^2 \dot{p} - 2 \frac{m}{6} d_\xi^2 \dot{p} = \\ -\frac{W}{3g} (d_\eta^2 + d_\xi^2) \dot{p} = -\frac{W}{g} \kappa_x^2 \dot{p} = -A \dot{p} \end{aligned} \quad (8.10)$$

(iii) Le eventuali componenti \dot{q} ed \dot{r} dell'accelerazione angolare, sempre per quanto riguarda le masse ubicate lungo gli assi η e ζ , danno luogo a forze inerziali il cui momento rispetto all'asse ξ è nullo.

(iv) La proiezione $\Omega_{\eta\zeta}$ della velocità angolare sul piano $\eta\zeta$ provoca l'insorgere di forze d'inerzia centrifughe, cioè normali alla direzione di $\Omega_{\eta\zeta}$, inclinata di un angolo θ_ξ rispetto a η . Esse danno luogo ad una coppia inerziale intorno a ξ che, tenendo conto delle (8.8) e della figura 8.5, si esprime come segue:

$$\begin{aligned} -2 \left[\left(\frac{m}{6} \Omega_{\eta\zeta}^2 d_\eta \sin \theta_\xi \right) \cos \theta_\xi \right] d_\eta + 2 \left[\left(\frac{m}{6} \Omega_{\eta\zeta}^2 d_\zeta \cos \theta_\xi \right) \sin \theta_\xi \right] d_\zeta \\ = \frac{m}{3} \Omega_{\eta\zeta}^2 (d_\zeta^2 - d_\eta^2) \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi = m \Omega_{\eta\zeta}^2 \left(\frac{d_\xi^2 + d_\zeta^2}{3} - \frac{d_\xi^2 + d_\eta^2}{3} \right) \sin \theta_\xi \cos \theta_\xi \\ = \left(m \kappa_y^2 - m \kappa_z^2 \right) \left(\Omega_{\eta\zeta} \cos \theta_\xi \right) \left(\Omega_{\eta\zeta} \sin \theta_\xi \right) = (B - C) q r \end{aligned} \quad (8.11)$$

(v) La componente p della velocità angolare, infine, non ha alcun effetto sulle masse disposte secondo l'asse ξ . Inoltre la p produce forze centrifughe sulle masse disposte lungo η e ζ . Tali forze incidono l'asse ξ , rispetto al quale hanno quindi braccio nullo, e non contribuiscono al momento di rollio.

Per l'equilibrio dinamico intorno all'asse di rollio va uguagliata a zero la somma delle coppie inerziali (8.10) e (8.11) e della risultante $\mathcal{L} \equiv \mathcal{M} \cdot \mathbf{i}_\xi$ delle coppie esterne intorno a ξ . Si perviene così alla seguente equazione:

$$-\dot{p} A + (B - C) q r + \mathcal{L} = 0 \quad (8.12)$$

nota come *prima equazione di Eulero*.

Poiché l'architettura dei velivoli è caratterizzata da una prevalente distribuzione delle masse nel piano $x_B y_B$, tipicamente si ha:

$$C > A \quad C > B \quad (8.13)$$

la seconda delle quali conduce, per q ed r di segno concorde, a valori negativi del secondo termine a primo membro della (8.12). Ne consegue quindi che il verso secondo cui agisce la componente di rollio della coppia inerziale dovuta alle forze d'inerzia centrifughe è determinato dalle masse distribuite secondo l'apertura alare, il cui effetto risulta essere prevalente su quella delle rimanenti. Dunque per un velivolo convenzionale, in situazioni di volo in cui vi è moto di cabrata e moto di imbardata verso destra (q ed r positive), il termine $(B - C)qr$ nella (8.12) è negativo e rappresenta un'inerzia al rollio. In altre parole, esso rappresenta una coppia che si oppone alle accelerazioni positive \dot{p} , alla stessa stregua del tipico termine inerziale $-A\dot{p}$.

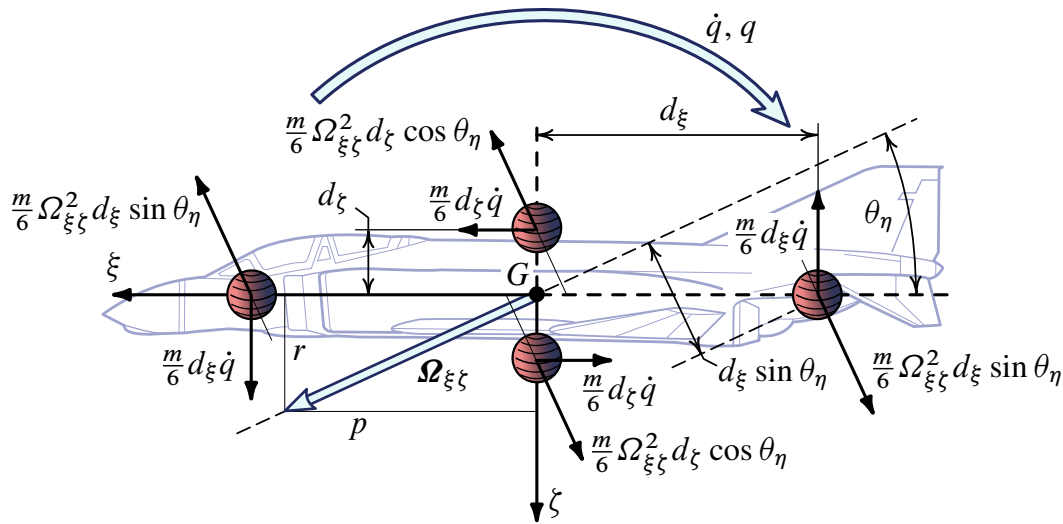


Figura 8.6 Coppie inerziali in presenza di accelerazione angolare \dot{q} e di una velocità angolare Ω di componenti (p, q, r) rispetto agli assi centrali d'inerzia del velivolo. Le masse concentrate del sistema equivalente disposte lungo gli assi ξ e ζ sono soggette a forze d'inerzia centrifuge dovute alla proiezione $\Omega_{\xi\zeta}$ di Ω nel piano $\xi\zeta$.

8.5.3 Coppie inerziali intorno all'asse di beccheggio

L'analisi degli equilibri dinamici alla rotazione intorno agli assi di beccheggio e di imbardata procede secondo ragionamenti analoghi a quelli precedentemente esposti per le coppie inerziali di rollio. La componente secondo η delle coppie di inerzia può essere ricavata dall'analisi della figura 8.6. Essa risulta costituita da due termini di cui uno:

$$-\frac{W}{3g}(d_\xi^2 + d_\zeta^2)\dot{q} = -B\dot{q} \quad (8.14)$$

è dovuto all'azione della componente \dot{q} dell'accelerazione angolare sulle masse disposte secondo ξ e ζ (le componenti \dot{p} ed \dot{r} danno luogo ad azioni di massa il cui momento rispetto ad η è nullo) mentre l'altro:

$$\frac{W}{3g}\Omega_{\xi\zeta}^2(d_\xi^2 - d_\zeta^2)\sin\theta_\eta\cos\theta_\eta = (C - A)pr \quad (8.15)$$

è relativo alle forze centrifughe derivanti dalla proiezione $\Omega_{\xi\zeta}$ della velocità angolare nel piano $\xi\zeta$.

Tali relazioni conducono alla condizione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse trasversale espressa dalla *seconda equazione di Eulero*:

$$-\dot{q}B + (C - A)pr + \mathcal{M} = 0 \quad (8.16)$$

dove $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \cdot \mathbf{i}_\eta$ è la risultante delle coppie esterne di beccheggio. Il secondo termine a primo membro della (8.16), per la prima delle (8.13), assume valori positivi o negativi in relazione ai segni concordi o discordi di p ed r rispettivamente. La componente di beccheggio della coppia inerziale centrifuga agisce pertanto nel verso determinato dalla prevalente azione delle masse distribuite secondo l'asse longitudinale di fusoliera. Dunque per un velivolo convenzionale ($C > A$), in situazioni di volo in cui vi è moto di rollio a destra e moto di imbardata verso destra (p ed r positive), il termine $(C - A)pr$ nella (8.16)

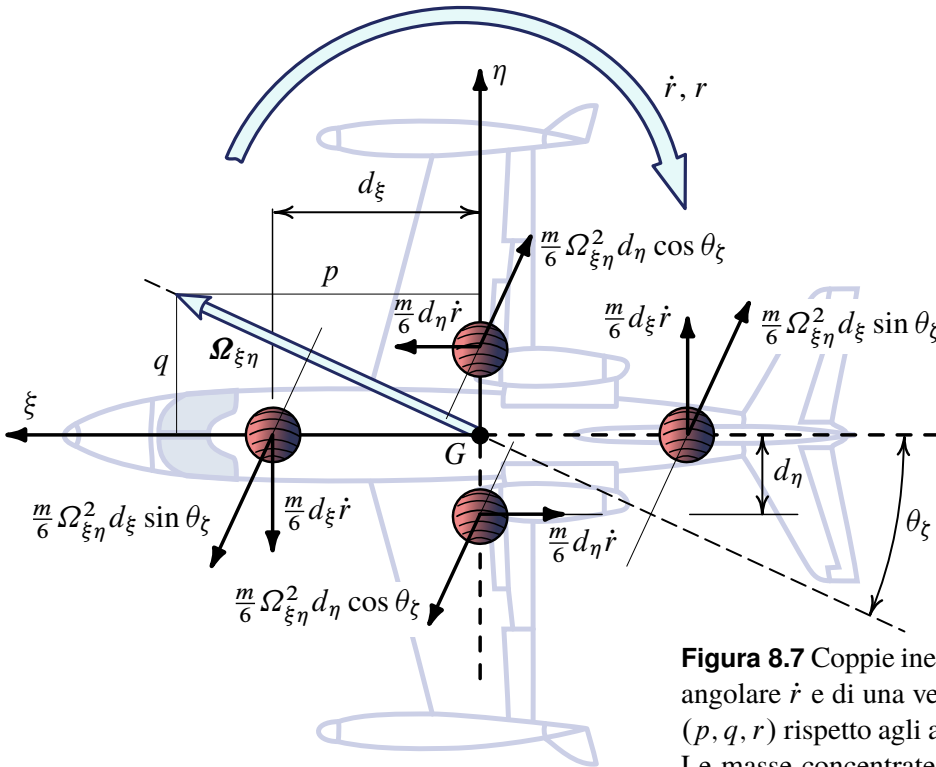


Figura 8.7 Coppie inerziali in presenza di accelerazione angolare \dot{r} e di una velocità angolare Ω di componenti (p, q, r) rispetto agli assi centrali d'inerzia del velivolo. Le masse concentrate del sistema equivalente disposte lungo gli assi ξ ed η sono soggette a forze d'inerzia centrifuge dovute alla proiezione $\Omega_{\xi\eta}$ di Ω nel piano $\xi\eta$.

è positivo, cioè, al contrario del tipico termine inerziale $-B\dot{q}$, favorisce le accelerazioni positive \dot{q} .

8.5.4 Coppie inerziali intorno all'asse di imbardata

La componente secondo l'asse ζ della coppia di inerzia può essere ricavata esaminando la figura 8.7. Essa risulta espressa dalla somma del termine:

$$-\frac{W}{3g}(d_\xi^2 + d_\eta^2) \dot{r} = -C \dot{r} \tag{8.17}$$

e del termine:

$$\frac{W}{3g} \Omega_{\xi\eta}^2 (d_\eta^2 - d_\xi^2) \sin \theta_\zeta \cos \theta_\zeta = (A - B) p q \tag{8.18}$$

derivanti, rispettivamente, dall'accelerazione di imbardata \dot{r} e dalla proiezione $\Omega_{\xi\eta}$ della velocità angolare nel piano $\xi\eta$.

Dalle (8.17) e (8.18) si ricava immediatamente, come equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse ζ , la *terza equazione di Eulero*:

$$-C \dot{r} + (A - B) p q + \mathcal{N} = 0 \tag{8.19}$$

dove $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M} \cdot \mathbf{i}_\zeta$ è la risultante delle coppie esterne di imbardata.

Circa il senso della coppia inerziale dovuta alla velocità angolare $\Omega_{\xi\eta}$ si ha, per p e q di segno concorde, che esso è positivo per velivoli di architettura convenzionale, caratterizzati da una prevalente distribuzione di masse in ala ($A > B$), ed è negativo per velivoli di

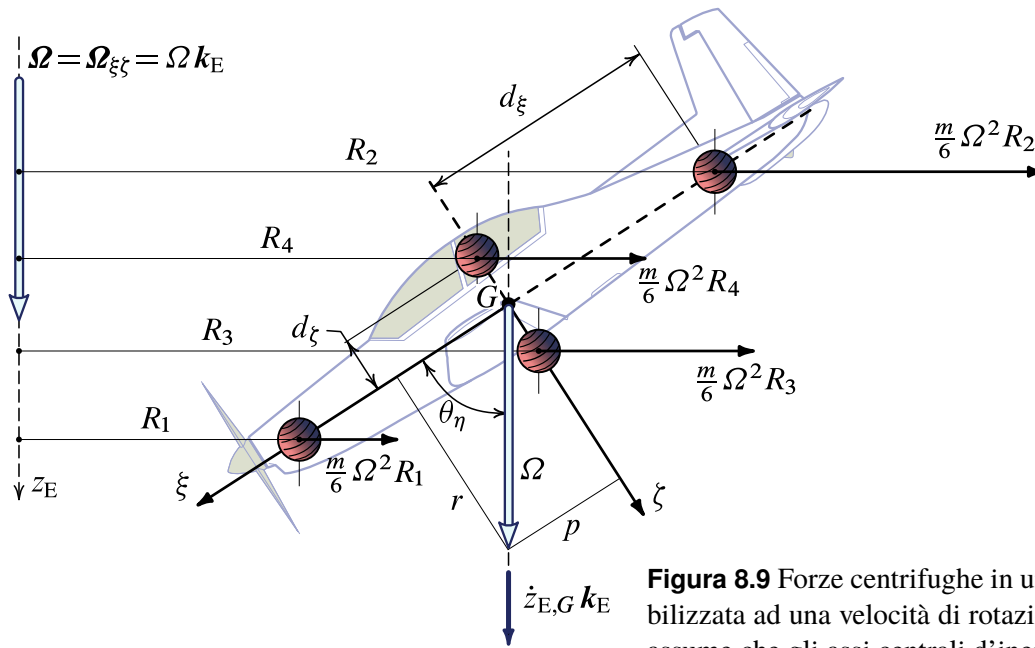


Figura 8.9 Forze centrifughe in una evoluzione di vite stabilizzata ad una velocità di rotazione Ω . Per semplicità si assume che gli assi centrali d'inerzia ξ e ζ incidano l'asse della vite z_E .

Esempio 8.1: Azioni inerziali in una manovra di vite

Un esempio pratico in cui è interessante valutare le coppie inerziali è dato dall'evoluzione di vite. La figura 8.9 mostra la vista laterale di un velivolo in vite stabilizzata, in rotazione a una velocità angolare costante $\Omega \mathbf{k}_E$ intorno a un asse verticale (per semplicità coincidente con l'asse terra z_E) e in caduta a una velocità costante $\dot{z}_{E,G} \mathbf{k}_E$. In altri termini, detta R_G la distanza del baricentro dall'asse di rotazione, esso descrive una traiettoria a forma di elica a passo costante, con una velocità costante in modulo e pari a $V_G = (\Omega^2 R_G^2 + \dot{z}_{E,G}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Nello schema della figura 8.9, in cui si assume per semplicità che gli assi centrali d'inerzia ξ e ζ incidano l'asse della vite, si osservano le forze centrifughe a cui le singole masse $\frac{m}{6}$ sono sottoposte per effetto della rotazione. In questo esempio sono nulle le accelerazioni angolari ma sussiste comunque una coppia baricentrica inerziale $(C - A)pr$ dovuta alle componenti di rollio e imbardata della velocità angolare. Dalle osservazioni immediatamente successive alla (8.16), la coppia inerziale in questo caso è positiva, cioè a cabrare, e nell'analisi del moto di vite si dirà che essa è *pro-vite*. La coppia d'inerzia si contrappone alla coppia aerodinamica al beccheggio, che per l'elevato angolo d'attacco è evidentemente un momento picchiante (detto *anti-vite* perché aiuterebbe il pilota a uscirne). Quando il moto è stabilizzato si ha che le due coppie, aerodinamica e inerziale (avendo trascurato in prima approssimazione gli effetti propulsivi), si fanno equilibrio e l'accelerazione angolare \dot{q} è nulla.

Dallo schema delle forze in gioco è semplice rendersi conto che la coppia baricentrica inerziale è così esprimibile:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{inerziale}} = (C - A)pr = & -\frac{m}{6}\Omega^2 R_1 d_\xi \cos \theta_\eta + \frac{m}{6}\Omega^2 R_2 d_\xi \cos \theta_\eta \\ & -\frac{m}{6}\Omega^2 R_3 d_\xi \cos \theta_\eta + \frac{m}{6}\Omega^2 R_4 d_\xi \cos \theta_\eta \end{aligned} \quad (8.21)$$

Essendo $R_1 < R_4 < R_G < R_3 < R_2$ e $d_\xi < d_\xi$ il segno positivo dell'espressione a primo membro della (8.21) è confermato dal bilancio a secondo membro, in cui domina il momento cabrante $\frac{m}{6}\Omega^2(R_2 - R_1)d_\xi \cos \theta_\eta$ sul momento picchiante antagonista $-\frac{m}{6}\Omega^2(R_3 - R_4)d_\xi \cos \theta_\eta$.

Analoghi ragionamenti sulle coppie inerziali di rollio e imbardata in vite stabilizzata sono possibili. Ma è necessario in quei casi ipotizzare in generale un assetto del velivolo ad ali *non* livellate per avere tutte e tre le componenti p , q ed r non nulle e dunque le coppie di rollio $(B - C)qr$ e d'imbardata $(A - B)pq$ non nulle.



Esempio 8.2: Dati di volo per una evoluzione di vite piatta



Il NASA Technical Paper 2644 [48] riporta i risultati di una campagna di prove di volo condotte su un velivolo sperimentale monomotore a elica. L'aeroplano considerato è rappresentativo di una classe di velivoli dell'aviazione generale per i quali si sono svolte numerose importanti ricerche nel campo del comportamento in volo ad assetti post-stallo. Esse sono tipicamente finalizzate al miglioramento della manovrabilità all'assetto critico e delle capacità di uscita dalla vite.

Alcuni dati significativi di una delle condizioni di prova del velivolo sono i seguenti:

quota di volo iniziale,	h_0	= 2815 m (ASL)
massa,	m	= 694 kg
momento centrale d'inerzia, A		= 789,10 kg m ²
momento centrale d'inerzia, B		= 981,60 kg m ²
momento centrale d'inerzia, C		= 1675,80 kg m ²
superficie alare,	S	= 9,11 m ²
corda media aerodinamica, \bar{c}		= 1,22 m

L'archivio [Q8_simulink_spin.zip](#) contiene i dati, i grafici ed il progetto Simulink (con i file Matlab corredati) utilizzati per questo esercizio.

Le storie temporali delle componenti di velocità angolare, delle deflessioni delle superfici di governo (necessarie a innescare la manovra), della velocità, degli angoli aerodinamici e della quota sono riportate nella figura 8.10 nella pagina successiva. Lo stallo può osservarsi ispezionando le curve di δ_e , V ed α per un tempo t successivo a 15 s fino ai 18 s. Si distingue poi una fase della storia di volo, successiva ai primi 35 s, in cui le componenti p , q ed r si stabilizzano intorno a valori tipici $(\cdot)_{ss}$ (*steady state*) di una vite piatta (*flat spin*). In particolare si osserva l'elevato valore della r_{ss} intorno ai 200 deg/s, oltre che della p_{ss} intorno ai 100 deg/s, con un valore della q_{ss} relativamente piccolo.

Nella figura 8.11 a pagina 19 è riportato lo schema di un modello Simulink per l'analisi dell'evoluzione di vite a partire dalla conoscenza delle storie di volo. I dettagli del modello sono visibili nelle successive figure 8.12-8.14.

La figura 8.16 a pagina 23 mostra le coppie inerziali che compaiono a primo membro delle equazioni di Eulero (8.12), (8.16) e (8.19). L'ordine di grandezza della coppia inerziale di beccheggio in vite stabilizzata è facilmente calcolabile dai dati e dai valori

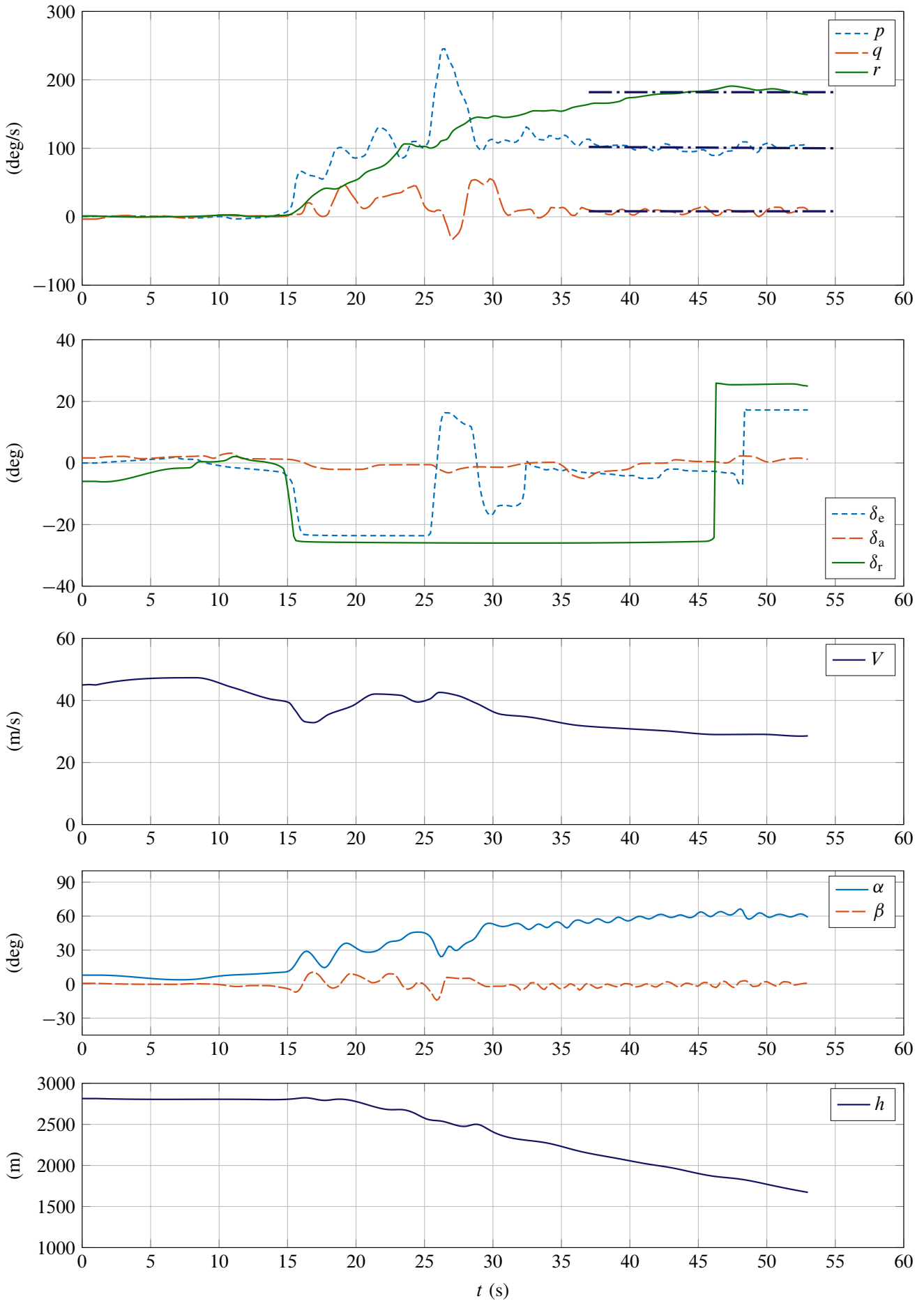


Figura 8.10 Storie di volo sperimentali [48] per un velivolo dell'aviazione generale in un'evoluzione di vite piatta.

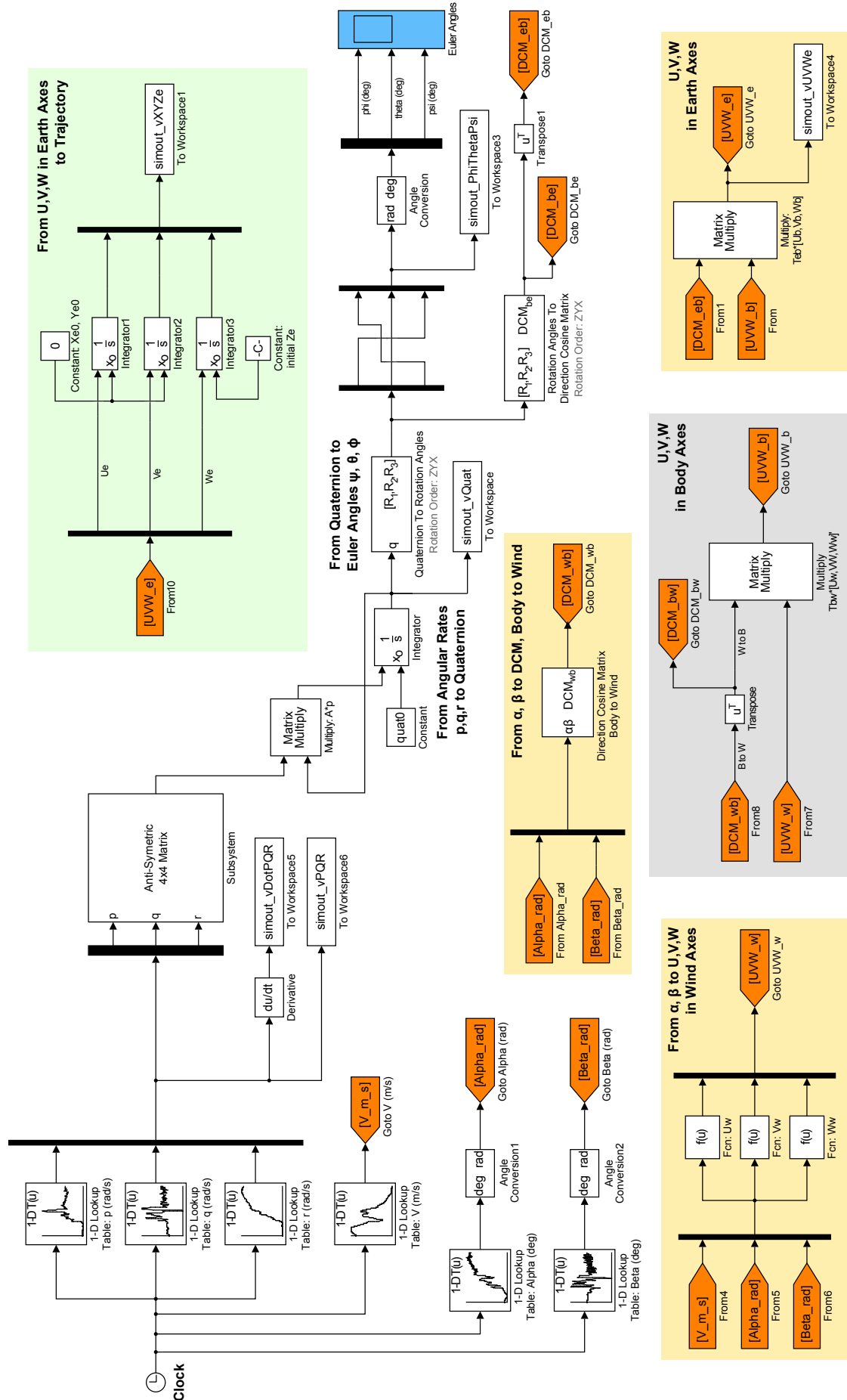


Figura 8.11 Modello Simulink per l'analisi dell'evoluzione di vite. Richiede l'uso dell'Aerospace Blockset.

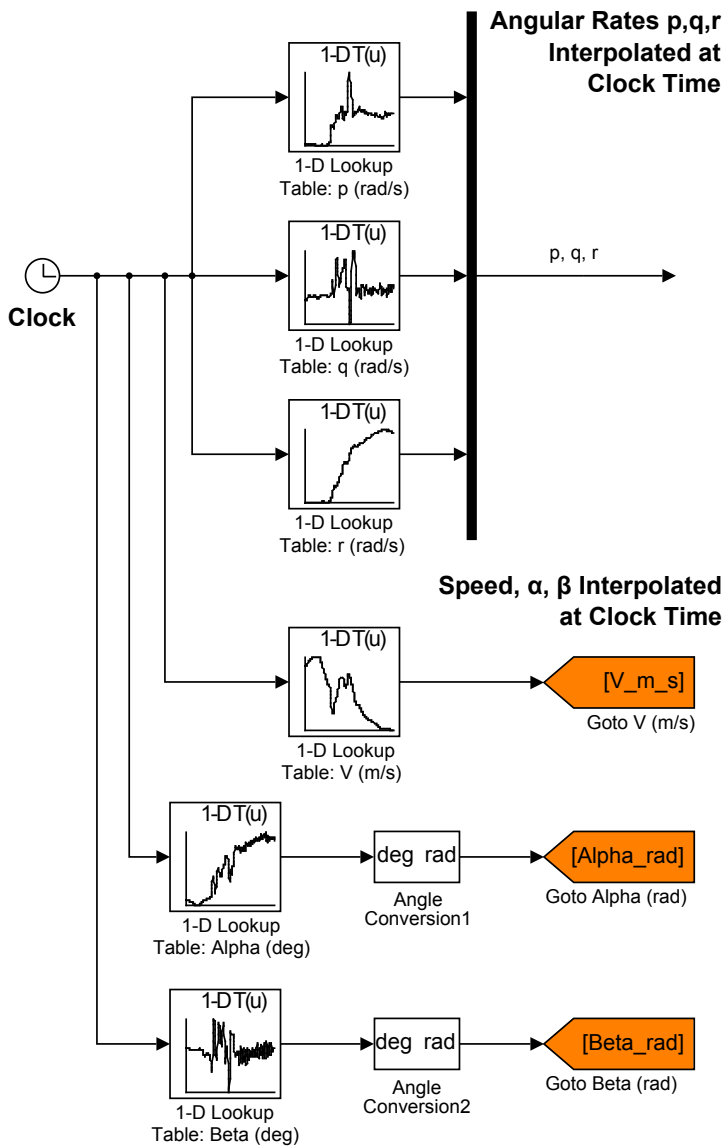


Figura 8.12 Dettaglio del modello Simulink della figura 8.11. Dai dati di volo sono note le sequenze di tempi discreti e dei corrispondenti valori di $[p, q, r, V, \alpha, \beta]$. Il tempo di simulazione t (detto *clock*) viene usato come variabile indipendente per l'interpolazione dei valori sperimentali (figura 8.10).

medi finali evidenziati nella figura 8.10:

$$(C - A)p_{ss}r_{ss} \approx 1000 \text{ kg m}^2 \cdot \frac{180}{57,3} \text{ rad/s} \cdot \frac{100}{57,3} \text{ rad/s} \approx 5000 \text{ N m}$$

Questo valore è confermato dalla figura 8.16 in cui si osserva che la coppia d'inerzia più importante in vite piatta stabilizzata è quella di beccheggio, significativamente più elevata delle coppie d'inerzia di rollio e di imbardata. La coppia di beccheggio è evidentemente equilibrata dalla risultante $\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_T$ della coppia baricentrica aerodinamica e di quella propulsiva.

La figura 8.17 a pagina 24 mostra le storie temporali degli angoli di Eulero nell'evoluzione di vite piatta.



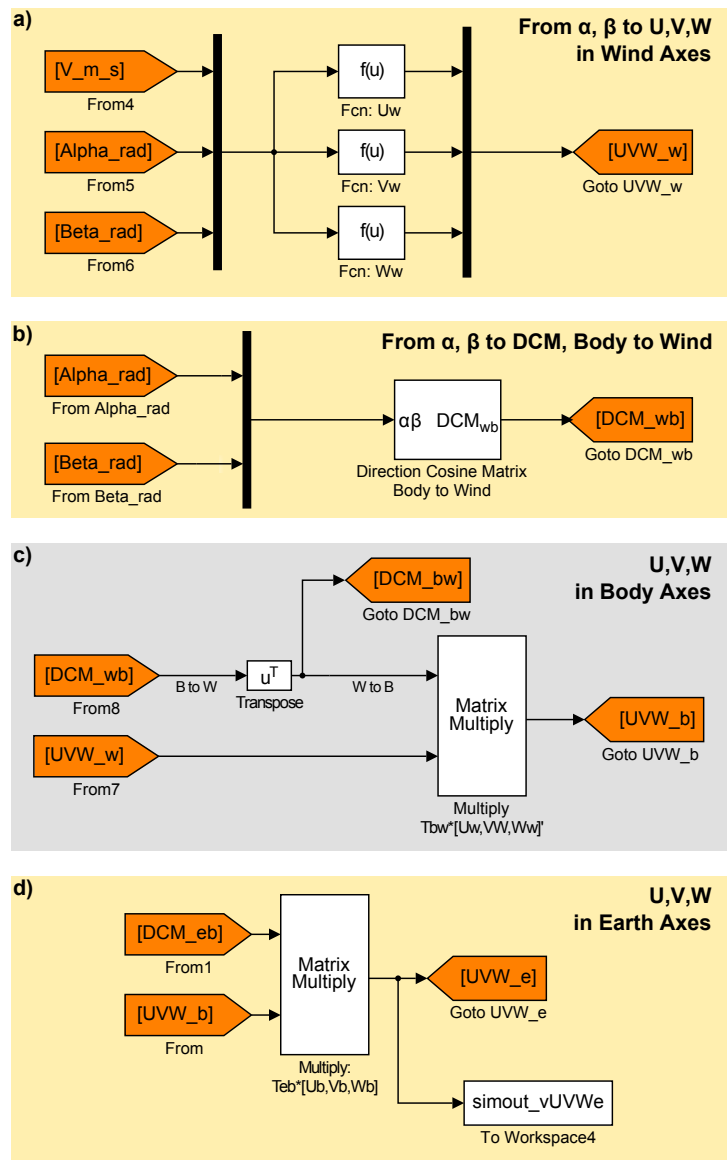


Figura 8.13 Dettaglio del modello Simulink della figura 8.11.

a) Trasformazione dei segnali V , α , β nelle componenti di velocità in assi vento (americani, *wind axes*), cioè $[V, 0, 0]$.

b) Trasformazione dei segnali α , β nella matrice di coseni direttori $[T_{WB}]$.

c) Trasformazione dei segnali V , α , β nelle componenti di velocità in assi velivolo, cioè $[u, v, w]$.

d) Trasformazione dei segnali $[u, v, w]$ e $[T_{EB}]$ nelle componenti di velocità in assi Terra, cioè $[\dot{x}_{E,G}, \dot{y}_{E,G}, \dot{z}_{E,G}]$.

Per la matrice $[T_{EB}]$ si veda la figura 8.14.

Esercizio 8.1: Azioni inerziali in una manovra di tonneau



Il Cessna T37-A è un velivolo prodotto negli USA dal 1955 al 1975 ed è stato usato prevalentemente come addestratore dai piloti della USAF. Alcuni dati rilevanti dell'aeromobile riferiti alla condizione di volo in crociera sono i seguenti:

$$\text{massa: } m = 6360 \text{ lb,}$$

$$\text{momenti e prodotti d'inerzia: } I_{xx} = 7985 \text{ slug ft}^2,$$

$$I_{yy} = 3326 \text{ slug ft}^2,$$

$$I_{zz} = 11183 \text{ slug ft}^2,$$

$$I_{xz} \approx 0 \text{ slug ft}^2, I_{xy} = I_{yz} = 0 \text{ slug ft}^2,$$

$$\text{Numero di Mach di volo: } M = 0,459,$$

$$\text{Altitudine: } h = 30000 \text{ ft.}$$

Si ipotizzi una manovra di tonneau e si determinino i contributi alle coppie inerziali presenti a primo membro delle equazioni di Eulero (8.12), (8.16) e (8.19). Si traccino i diagrammi temporali delle coppie inerziali di rollio, beccheggio e imbardata ricavando considerazioni sulle azioni di pilotaggio richieste per effettuare la manovra.



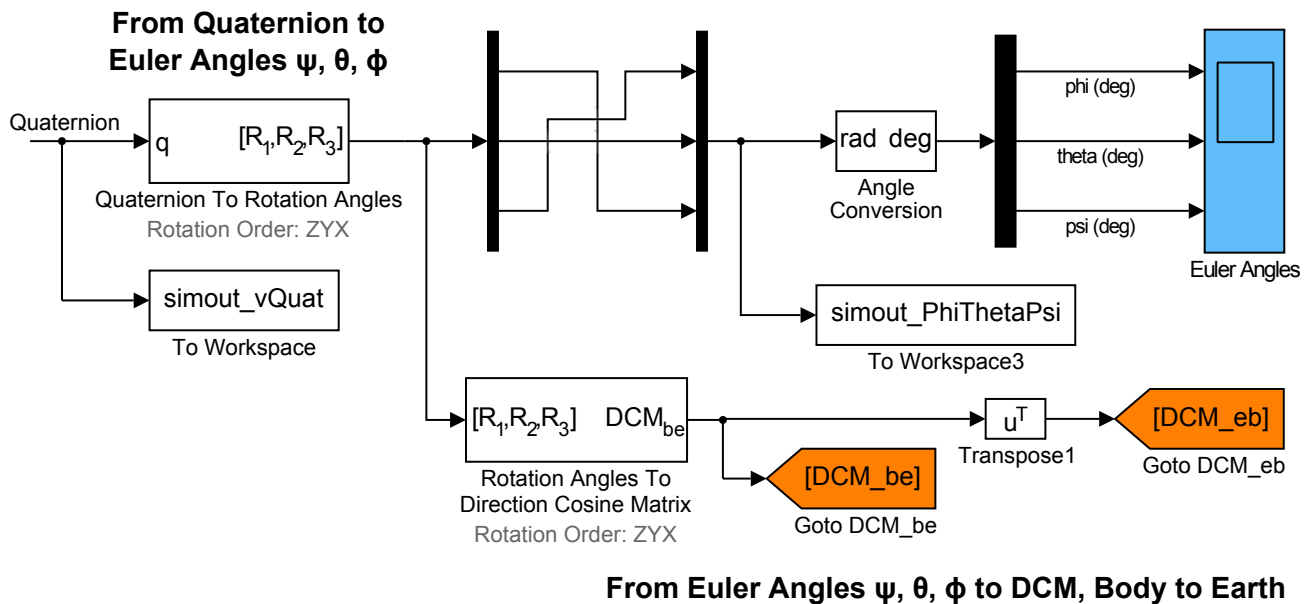


Figura 8.14 Dettaglio del modello Simulink della figura 8.11. Trasformazione dei segnali $[q_0, q_1, q_2, q_3]$, in angoli di Eulero $[\psi, \theta, \phi]$ e nella matrice di coseni direttori $[T_{EB}]$. Per lo schema di integrazione delle equazioni di propagazione del quaternione si veda l'esempio ?? e le figure ?? e ??.

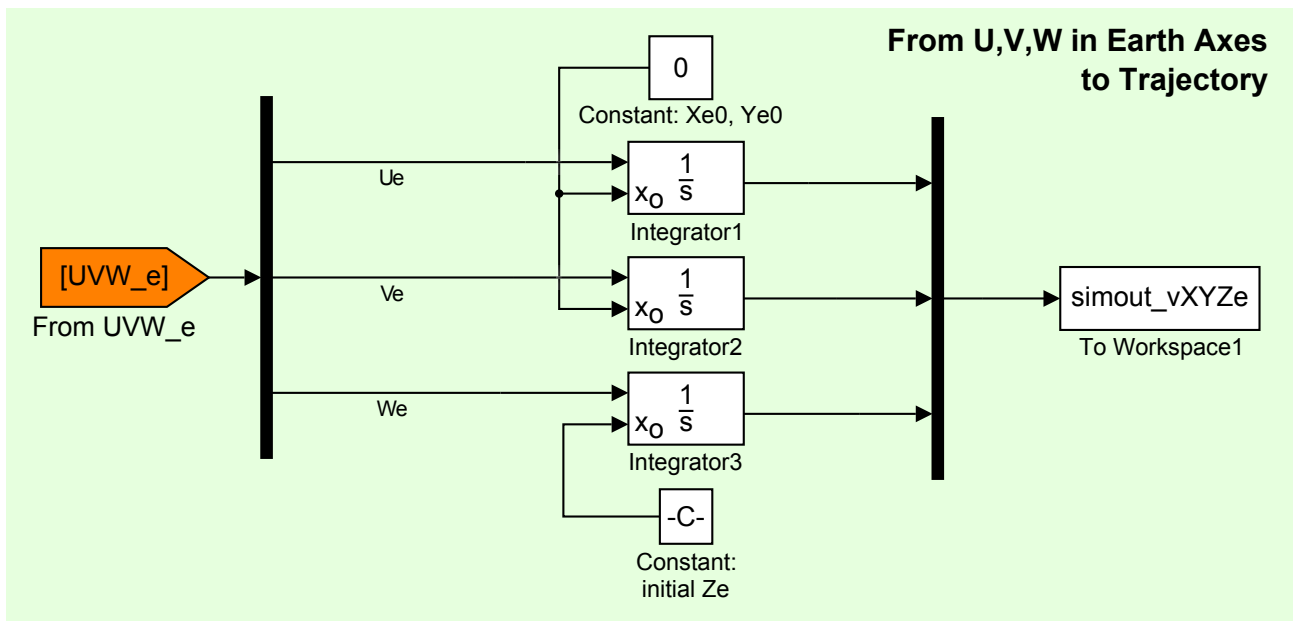


Figura 8.15 Dettaglio del modello Simulink della figura 8.11. Trasformazione dei segnali $[\dot{x}_{E,G}, \dot{y}_{E,G}, \dot{z}_{E,G}]$, in punti della traiettoria $[x_{E,G}, y_{E,G}, z_{E,G}]$.

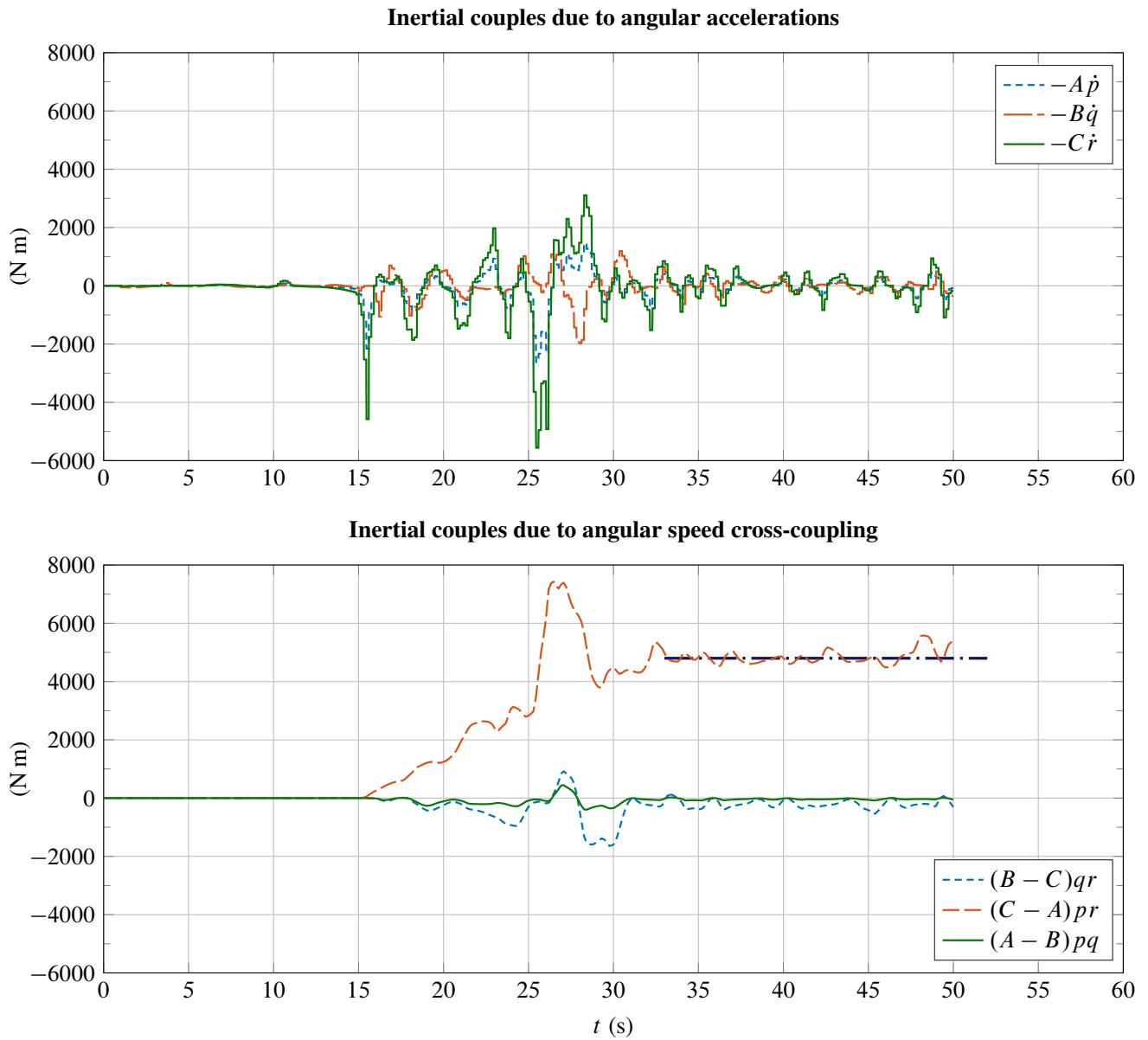


Figura 8.16 Coppie inerziali nell'evoluzione di vite piatta.

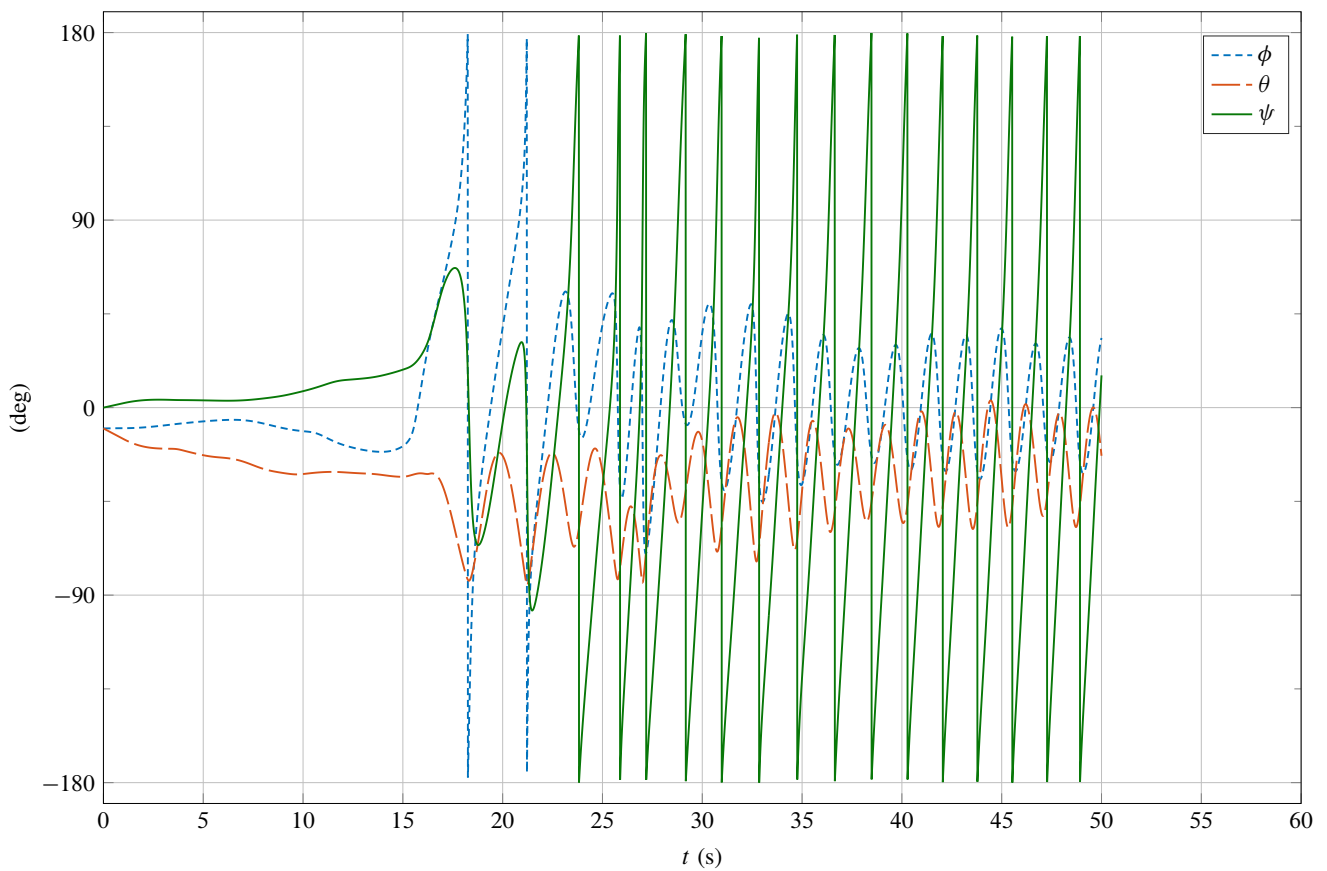


Figura 8.17 Storie temporali degli angoli di Eulero nell'evoluzione di vite piatta. L'angolo di prua ψ è stato riportato per compattezza nell'intervallo $[-\pi, \pi[$ anziché in $[0, 2\pi[$, sempre con il Nord corrispondente a $\psi = 0$.

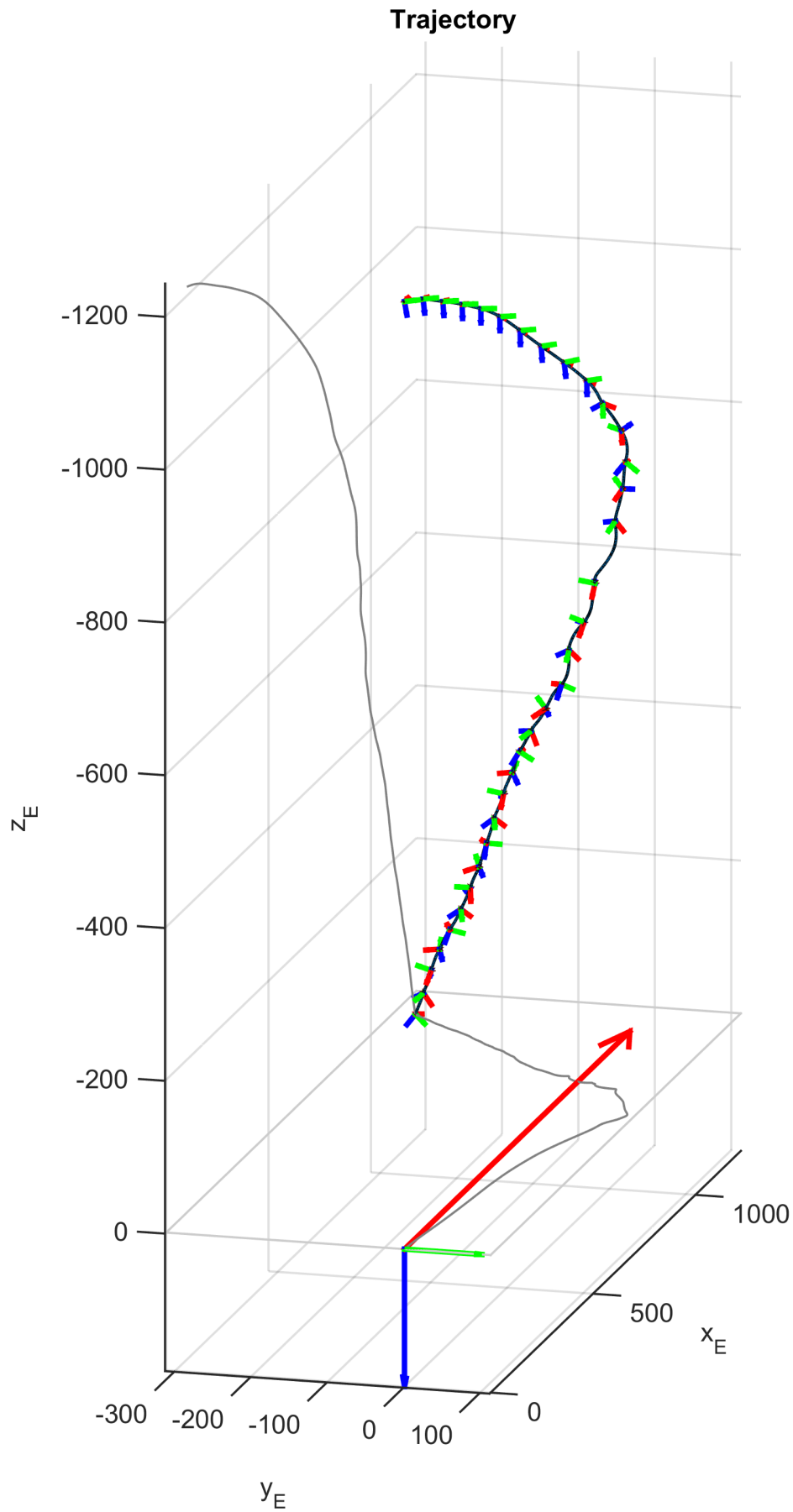


Figura 8.18 Traiettorie del baricentro nell'evoluzione di vite piatta ricavata dai dati sperimentali.

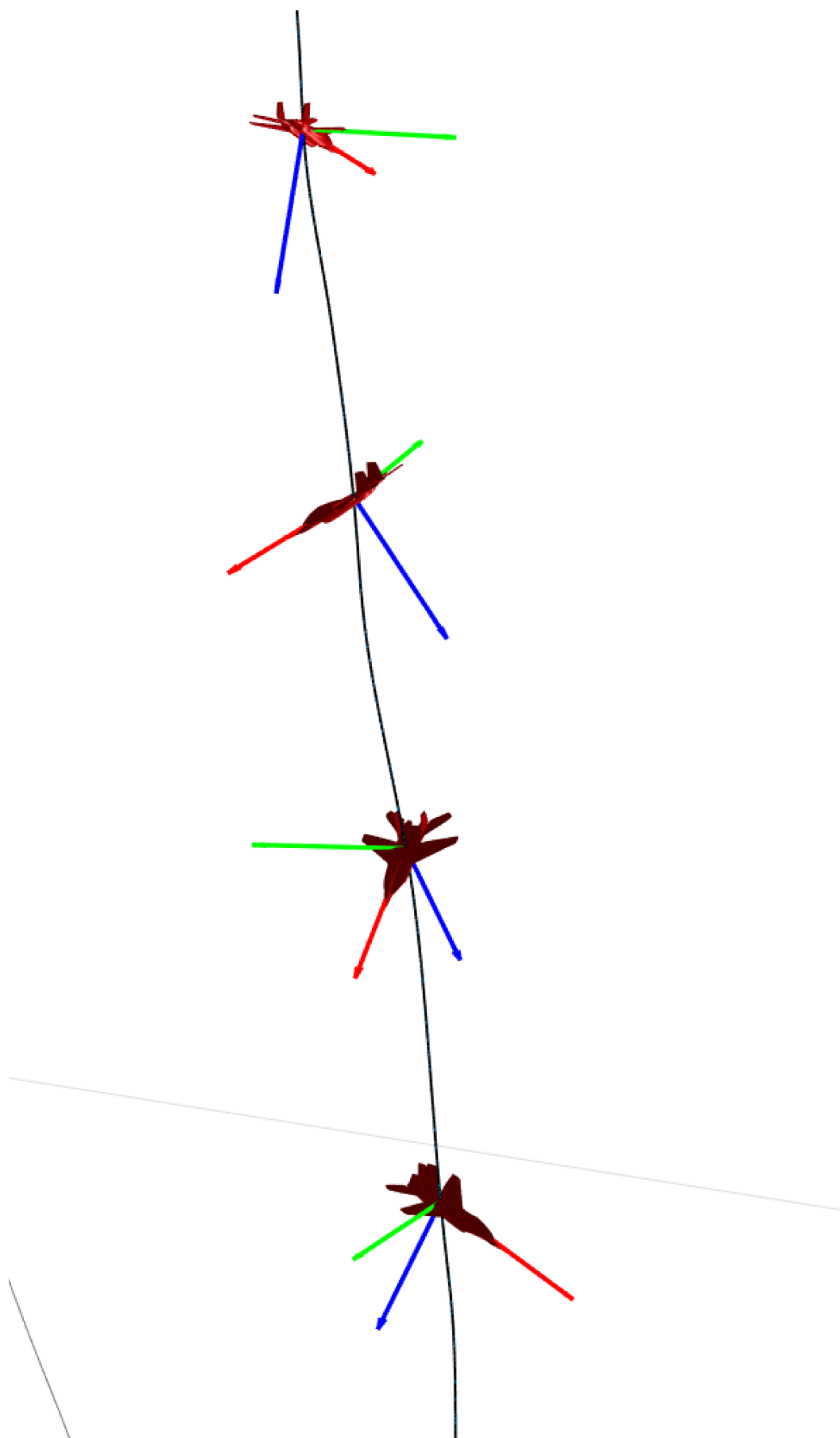


Figura 8.19 Dettaglio della traiettoria del baricentro e degli assetti del velivolo nell'evoluzione di vite piatta stabilizzata. [TO DO: cambiare modello di velivolo, mostrare un GA Aircraft]

Bibliografia

- [1] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Hodges & Smith, 1853.
- [2] O. Rodrigues, “Des lois géométriques qui régissent les déplacements d’un système solide dans l’espace, et de la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérées indépendamment des causes qui peuvent les produire”, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1840.
- [3] E. Salamin, “Application of Quaternions to Computation with Rotations”, Working paper, Stanford AI Lab, 1979.
- [4] A. P. Yefremov, “Quaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories”, *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, vol. 1, 2004.
- [5] Schwab A. L., “Quaternions, Finite Rotations and Euler Parameters”, Course notes on Applied Multibody Dynamics, Delft University of Technology, Laboratory for Engineering Mechanics, 2003.
<http://tam.cornell.edu/~als93/quaternion.pdf>.
- [6] AIAA/ANSI, *Recommended Practice for Atmospheric and Space Flight Vehicle Coordinate Systems*. R-004-1992, 1992.
- [7] G. H. Bryan, *Stability in Aviation: An Introduction to Dynamical Stability as Applied to the Motions of Aeroplanes*. Macmillan and Co., Limited, London, 1911.
- [8] D. J. Diston, *Computational Modelling of the Aircraft and the Environment. Volume 1, Platform Kinematics and Synthetic Environment*. John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [9] W. F. Phillips, *Mechanics of Flight*. John Wiley & Sons, Inc., 2004.
- [10] W. F. Phillips, “Phugoid Approximation for Conventional Airplanes”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, January-February 2000.
- [11] W. F. Phillips, “Improved Closed-Form Approximation for Dutch-Roll”, *Journal of Aircraft*, Vol. 37, No. 1, May-June 2000.
- [12] R. Stengel, *Flight Dynamics*. Princeton University Press, Princeton, 2004.
- [13] M. R. Napolitano, *Aircraft Dynamics: From Modeling to Simulation*. John Wiley, 2012.

- [14] D. K. Schmidt, *Modern Flight Dynamics*. McGraw-Hill, 2010.
- [15] B. Stevens, F. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [16] D. Stinton, *The Anatomy of the Airplane* (2nd edition). American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [17] B. Etkin, *Dynamics of Flight, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [18] M. Calcara, *Elementi di dinamica del velivolo*. Edizioni CUEN, Napoli, 1988.
- [19] L. V. Schmidt, *Introduction to Aircraft Flight Dynamics*. AIAA Education Series, 1998.
- [20] W. J. Duncan, *Control and Stability of Aircraft*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [21] R. Jategaonkar, *Flight Vehicle System Identification: A Time Domain Methodology*. Progress in Astronautics and Aeronautics Series, 2006.
- [22] C. D. Perkins, R. E. Hage, *Aircraft Performance, Stability and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [23] J. R. Wright, J. E. Cooper, *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [24] V. Losito, *Fondamenti di Aeronautica Generale*. Accademia Aeronautica, Napoli, 1994.
- [25] E. Torenbeek, H. Wittenberg, *Flight Physics*. Springer, Heidelberg, 2009.
- [26] P. H. Zipfel, *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. Second Edition. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2007.
- [27] J. D. Mattingly, *Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets*. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA. 2006.
- [28] K. Hünecke, *Jet Engines. Fundamentals of Theory, Design and Operation*. Motorbooks International, 1997.
- [29] A. Linke-Diesinger, *Systems of Commercial Turbofan Engines*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [30] F. R. Garza, E. A. Morelli, "A Collection of Nonlinear Aircraft Simulations with MATLAB". NASA-TM-2003-212145, January 2003.
- [31] Voce WGS84 su *Wikipedia*:
http://en.wikipedia.org/wiki/World_Geodetic_System

- [32] Anonimo, *Department of Defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationship with Local Geodetic Systems*. NIMA TR8350.2, Third Edition, Amendment 2. National Imagery and Mapping Agency, US Department of Defense, 2004.
- [33] J. Roskam, *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. DARcorporation, 2001.
- [34] H. T. Schlichting, E. A. Truckenbrodt, *Aerodynamics of the Aeroplane*. McGraw Hill Higher Education, 2nd edition, 1979.
- [35] M. M. Munk, “The aerodynamic forces on airship hulls”. NACA-TR-184, 1924.
- [36] A. Silverstein, S. Katzoff, “Aerodynamic characteristics of horizontal tail surfaces”. NACA-TR-688, 1940.
- [37] R. I. Sears, “Wind-tunnel data on the aerodynamic characteristics of airplane control surfaces”. NACA-WR-L-663, 1943.
- [38] E. Garner, “Wind-tunnel investigation of control-surface characteristics XX: plain and balanced flaps on an NACA 0009 rectangular semispan tail surface”. NACA-WR-L-186, 1944.
- [39] J. D. Brewer, M. J. Queijo, “Wind-tunnel investigation of the effect of tab balance on tab and control-surface characteristics”. NACA-TN-1403, 1947.
- [40] S. M. Crandall, H. E. Murray, “Analysis of available data on the effects of tabs on control-surface hinge moments”. NACA-TN-1049, 1946.
- [41] B. W. McCormick, *Aerodynamics, Aeronautics, and Flight Mechanics*. John Wiley & Sons, 1979.
- [42] B. N. Pamadi, *Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes*. AIAA Education Series, 1998.
- [43] A. Tewari, *Atmospheric and Space Flight Dynamics. Modelling and Simulation with Matlab and Simulink*. Birkhäuser, Berlin, 2007.
- [44] D. Howe, *Aircraft Loading and Structural Layout*. AIAA Education Series, 2004.
- [45] P. Morelli, *Static Stability and Control of Sailplanes*. Levrotto & Bella, Torino, 1976.
- [46] L. Prandtl, O. G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*. Dover, 1957.
- [47] R. K. Heffley, W. F. Jewell, “Aircraft Handling Qualities Data”. NASA-CR-2144, December 1972.
- [48] H. P. Stough III, J. M. Patton Jr, S. M. SliWa, “Flight Investigation of the Effect of Tail Configuration on Stall, Spin, and Recovery Characteristics of a Low-Wing General Aviation Research Airplane”. NASA-TP-1987-2644, February 1987.

- [49] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 3rd edition, New York, 2001.
- [50] J. J. Bertin, *Aerodynamics for Engineers*. Prentice-Hall, 4th edition, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [51] J. Katz, A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition, Cambridge, England, U.K., 2001.
- [52] D. E. Hoak, *et al.*, “The USAF Stability and Control Datcom”. Air Force Wright Aeronautical Laboratories, TR-83-3048, 1960 (Revised 1978).
- [53] R. T. Jones, “A Note on the Stability and Control of Tailless Airplanes”. NACA Report 837, 1941.
- [54] D. P. Coiro, F. Nicolosi, A. De Marco, N. Genito, S. Figliolia, “Design of a Low Cost Easy-to-Fly STOL Ultralight Aircraft in Composite Material”. *Acta Polytechnica*, Vol. 45 no. 4, 2005, pp. 73-80; ISSN 1210-2709.
- [55] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Flight Tests, Performances and Flight Certification of a Twin-Engine Light Aircraft”. *Journal of Aircraft*, Vol 48, No. 1, January-February 2011.
- [56] F. Nicolosi, A. De Marco, P. Della Vecchia, “Parameter Estimation and Flying Qualities of a Twin-Engine CS23/FAR23 Certified Light Aircraft”. AIAA-2010-7947, AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Toronto, 2010.
- [57] B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, Dover Publications, 2005.
- [58] L. Mangiacasale, *Flight Mechanics of a μ -Airplane*, Edizioni Libreria CLUP, Milano, 1998.
- [59] G. Mengali, *Elementi di Dinamica del Volo con Matlab*, Edizioni ETS, Pisa, 2001.
- [60] R. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*, McGraw-Hill, 1989.
- [61] Y. Li, M. Nahon, “Modeling and simulations of airship dynamics”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 30, No. 6, November-December 2007.
- [62] Y. Fan, F. H. Lutze, E. M. Cliff, “Time-Optimal Lateral Maneuvers of an Aircraft”, *Journal of Guidance, Controls and Dynamics*, Vol 18, No. 5, September-October 1995.
- [63] J. N. Nielsen, *Missile Aerodynamics*, AIAA, Cambridge, MA, 1988.
- [64] T. I. Fossen, *Guidance and Control of Ocean’s Vehicles*, Wiley, New York, 1998.
- [65] J. N. Newman, *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.
- [66] E. L. Duke, R. F. Antoniewicz, K. D. Krambeer, “Derivation and Definition of a Linear Aircraft Model”. Technical Report NASA Reference Publication RP-1207, Research Engineering, NASA Ames Research Center and NASA Dryden Flight Research Facility, 1988.

- [67] G. A. Stagg, *An Unsteady Aerodynamic Model for Use in the High Angle of Attack Regime*. MS thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1998.
- [68] Y. Fan, *Identification of an Unsteady Aerodynamic Model up to High Angle of Attack Regime*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1997.
- [69] *MATLAB Users' Guide*. The Mathworks, 2003 ed edizioni successive.
<http://www.mathworks.com/>
<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab.html>
- [70] V. Comincioli, *Analisi numerica: metodi, modelli, applicazioni*. McGraw-Hill, 1990, seconda edizione 1995.
- [71] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, seventh edition, 1993.
- [72] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, 1978.
- [73] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [74] G. Dahlquist, A. Bjorck, *Numerical Methods. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, 1988.
- [75] R. D. Richtmyer, K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*. Wiley-Interscience, 1967.
- [76] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*. John Wiley & Sons, 1994.
- [77] R. D. Finck, "USAF Stability and Control Datcom". AFWAL-TR-83-3048, October 1960, Revised 1978.
- [78] S. R. Vukelich, J. E. Williams, "The USAF Stability and Control Digital Datcom". AFFDL-TR-79-3032, Volume I, April 1979, Updated by Public Domain Aeronautical Software 1999.
- [79] W. B. Blake, "Prediction of Fighter Aircraft Dynamic Derivatives Using Digital Datcom". AIAA-85-4070, AIAA Applied Aerodynamics Conference, Colorado Springs, Colorado, 1985.
- [80] Autori Vari, Distribuzione ufficiale di Digital Datcom, sito internet:
<http://wpage.unina.it/agodemar/DSV-DQV/Digital-Datcom-Package.zip>
- [81] B. Galbraith, "Digital Datcom+", Holy Cows, Inc., sito internet: <http://www.holycows.net/datcom/>