
INDICE

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Nozioni introduttive | 3 |
| 2 | Azioni aerodinamiche sul velivolo. Nozioni di base | 7 |
| 4 | Ali finite | 17 |
| 5 | Aerodinamica delle fusoliere | 73 |
| 6 | Aerodinamica dei piani di coda | 85 |

NOZIONI INTRODUTTIVE

Esempio 1.1: *Velocità vera e velocità equivalente*



Una velocità equivalente $V_e = 150 \text{ km/h} = 41,7 \text{ m/s}$ corrisponde a un determinato valore della velocità vera $V \equiv V_t$ in quota.

All'altitudine $h = 3000 \text{ m}$ si ha una densità dell'aria $\rho = 0,909 \text{ kg/m}^3$ e la velocità vera di volo è

$$V = \frac{V_e}{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_{SL}}}} = \frac{41,7 \text{ m/s}}{\sqrt{\frac{0,909 \text{ kg/m}^3}{1,225 \text{ kg/m}^3}}} = \underline{48,4 \text{ m/s}} = \underline{174,1 \text{ km/h}}$$

che come si vede ha un valore più elevato della V_e corrispondente.



Esempio 1.2: *Angoli aerodinamici e componenti di Velocità*



Un velivolo procede alla velocità $V \equiv |V| = 200 \text{ kts} = 370,4 \text{ km/h} = 102,89 \text{ m/s}$, con un angolo d'attacco $\alpha_B = 5 \text{ deg} = 0,0873 \text{ rad}$ e un angolo di derapata $\beta = 2 \text{ deg} = 0,0349 \text{ rad}$.

Le componenti di velocità risultano essere

$$\begin{aligned} u &= V \cos \beta \cos \alpha_B = 102,89 \text{ m/s} \cdot \cos(0,0349 \text{ rad}) \cdot \cos(0,0873 \text{ rad}) \\ &= \underline{102,43 \text{ m/s}} = \underline{368,8 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= V \sin \beta = 102,89 \text{ m/s} \cdot \sin(0,0349 \text{ rad}) \\ &= \underline{3,59 \text{ m/s}} = \underline{12,9 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

$$w = V \cos \beta \sin \alpha_B = 102,89 \text{ m/s} \cdot \cos(0,0349 \text{ rad}) \cdot \sin(0,0873 \text{ rad}) \\ = \underline{8,96 \text{ m/s}} = \underline{32,3 \text{ km/h}}$$

La componente u ha un valore molto prossimo a quello della velocità lungo la traiettoria $|V|$. La componente v rappresenta l'intensità della corrente di *cross-flow*, la quale determina l'insorgere di componenti aerodinamiche non nulle di forza laterale, di momento di rollio e di momento d'imbardata. La componente w è determinata dall'inclinazione della fusoliera rispetto alla corrente asintotica ed è collegata direttamente alla portanza generata.



Esempio 1.3: Caratteristiche dell'aria in quota



Si vogliono calcolare le caratteristiche dell'aria tipo secondo il modello ISA ad un'ipotetica quota di volo $h = 8000 \text{ m}$. Per un numero di Mach di volo $M = 0,70$ si vuole poi determinare la velocità vera e il numero di Reynolds di volo per unità di lunghezza Re/l_{ref} .

La quota assegnata è al di sotto degli 11 km dunque nel modello ISA va assunto un gradiente di temperatura $LR = -0,0065 \text{ K/m}$. Pertanto la temperatura in quota è

$$T = T_{\text{SL}} - LRh = 288,16 \text{ K} + (-0,0065 \text{ K/m}) \cdot 8000 \text{ m} = \underline{236,2 \text{ K}}$$

a cui corrisponde una velocità del suono

$$a = \sqrt{\gamma_{\text{air}} R_{\text{air}} T} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \text{ N m kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 236,2 \text{ K}} = \underline{308,04 \text{ m/s}}$$

Per i valori assegnati del numero di Mach di volo e della quota si così ha una velocità di volo

$$V = a M = 308,04 \text{ m/s} \cdot 0,70 = \underline{102,89 \text{ m/s}} = \underline{370,4 \text{ km/h}}$$

La densità relativa vale

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_{\text{SL}}} = \left(\frac{T}{T_{\text{SL}}} \right)^{-\left(\frac{g}{LR \cdot R_{\text{air}}} + 1 \right)} \\ = \left(\frac{236,2 \text{ K}}{288,16 \text{ K}} \right)^{-\left(\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{-0,0065 \text{ K/m} \cdot 287 \text{ N m kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} + 1 \right)} = \underline{0,429}$$

quindi la densità dell'aria alla quota di volo è

$$\rho = \rho_{\text{SL}} \sigma = 1,225 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0,429 = \underline{0,525 \text{ kg m}^{-3}}$$

Questo valore e il valore della velocità di volo permettono il calcolo della pressione dinamica di volo

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V^2 = 0,50 \cdot 0,525 \text{ kg m}^{-3} (102,89 \text{ m/s})^2 = \underline{3895,93 \text{ N m}^{-2}} = \underline{0,039 \text{ bar}}$$

Infine, la viscosità dinamica dell'aria alla quota assegnata è

$$\begin{aligned} \mu &= 1,458 \cdot 10^{-6} \text{ kg (m s } \sqrt{\text{K}})^{-1} \cdot \frac{T^{3/2}}{T + 110,4 \text{ K}} \\ &= 1,458 \cdot 10^{-6} \text{ kg (m s } \sqrt{\text{K}})^{-1} \cdot \frac{(236,2 \text{ K})^{3/2}}{236,2 \text{ K} + 110,4 \text{ K}} \\ &= \underline{1,527 \cdot 10^{-5} \text{ kg (m s)}^{-1}} \end{aligned}$$

a cui corrisponde un numero di Reynolds per unità di lunghezza

$$\frac{Re}{l_{\text{ref}}} = \frac{\rho V}{\mu} = \frac{0,525 \text{ kg m}^{-3} \cdot 102,89 \text{ m/s}}{1,527 \cdot 10^{-5} \text{ kg (m s)}^{-1}} = 7,416 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$



Esercizio 1.1: *Caratteristiche dell'aria in quota*



Sulla base dell'esempio 1.3 calcolare il numero di Mach di volo alla quota $h = 9000 \text{ m}$ per velocità V pari, rispettivamente, a 800 km/h , 700 km/h e 600 km/h .

Per una lunghezza di riferimento $l_{\text{ref}} = 5,0 \text{ m}$ calcolare anche i numeri di Reynolds di volo corrispondenti.



AZIONI AERODINAMICHE SUL VELIVOLO. NOZIONI DI BASE

Esempio 2.1: Coefficienti aerodinamici di un velivolo

In questo esempio numerico si effettua il calcolo di un coefficiente aerodinamico a partire da una forza e, viceversa, il calcolo di una forza aerodinamica noto il coefficiente.

Un velivolo dalle caratteristiche simili a quelle di un Boeing 737 NG 800 ha una massa $m = 79000 \text{ kg} = 174165 \text{ lb}_m$ in condizioni di peso massimo al decollo (*Maximum Take-Off Weight*, MTOW) e una superficie alare $S = 124,6 \text{ m}^2 = 1341,0 \text{ ft}^2$. Per un volo alla velocità $V = 200 \text{ kts} = 370,4 \text{ km/h}$, alla quota $h = 9000 \text{ m}$, per la quale $\rho = 0,466 \text{ kg m}^{-3}$ (cfr. esempio 1.3), si ha una pressione dinamica di volo

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho V^2 = 0,50 \cdot 0,466 \text{ kg m}^{-3} \cdot (102,89 \text{ m/s})^2 = \underline{3,896 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2}} = \underline{3,900 \cdot 10^{-2} \text{ bar}}$$

corrispondente a un numero di Mach $M = 0,70$.

Se si assume un volo equilibrato, in cui la portanza L uguaglia il peso $W = mg$, si ha un coefficiente di portanza C_L pari a

$$C_L = \frac{L}{\bar{q}S} = \frac{mg}{\bar{q}S} = \frac{79000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}}{3,896 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2} \cdot 124,6 \text{ m}^2} = \underline{0,498}$$

Per un simile velivolo, nelle condizioni date, si può assumere una polare data dalla seguente legge:

$$C_D = C_{D0} + \frac{C_L^2}{\pi R_{We}} = C_{D0} + K C_L^2 = 0,0190 + 0,0124 C_L^2$$

dove $\mathcal{R}_W = 9,46$, $e = 0,85$, $K = 1/(\mathcal{R}_W e) = 0,0124$. Pertanto, il coefficiente di resistenza di volo è

$$C_D = 0,0190 + 0,0124 \cdot (0,498)^2 = 0,0221$$

Se si assume che la resistenza è uguagliata dalla spinta, la forza propulsiva necessaria al volo equilibrato è

$$\begin{aligned} T = D = C_D \bar{q} S \\ = 0,0221 \cdot 3,896 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-2} \cdot 124,6 \text{ m}^2 = \underline{3,435 \cdot 10^4 \text{ N}} = \underline{3,503 \cdot 10^3 \text{ kg}_f} = \underline{7,722 \cdot 10^3 \text{ lb}_f} \end{aligned}$$



Esercizio 2.1: Coefficienti aerodinamici di un velivolo

Sulla base dei dati dell'esempio 2.1, alla quota $h = 4000$ m calcolare i coefficienti di portanza e di resistenza per un numero di Mach di volo $M = 0,68$.



Esercizio 2.2: Coefficienti aerodinamici di un velivolo

Ripetere i calcoli dell'esempio 2.1 in condizioni di peso massimo all'atterraggio, assumendo $m = 66349$ kg, $h = 1000$ m, $M = 0,35$.



Esempio 2.2: Modelli semiempirici e uso di diagrammi tecnici

La stima delle caratteristiche aerodinamiche di un velivolo richiede in alcuni casi l'uso di modelli semiempirici. Per comprenderne il significato si immagini di dover calcolare il valore di una data grandezza g in una determinata condizione di volo.

Trattandosi di una grandezza aerodinamica, la g_W per l'ala isolata potrebbe essere stimata a partire da considerazioni sui profili alari, estendendo poi il ragionamento alla superficie portante di apertura finita. D'altra parte, il valore di g_{WB} per la configurazione ala-fusoliera o di g per l'intero velivolo potrebbe non essere semplicemente calcolabile data la complessità dei fenomeni fisici coinvolti. La g può essere modellata ponendo

$$g = K_x K_{WB} g_W \quad (2.1)$$

dove

- g_W è calcolabile, ad esempio, con una formula teorica, note le caratteristiche geometriche e aerodinamiche dell'ala,

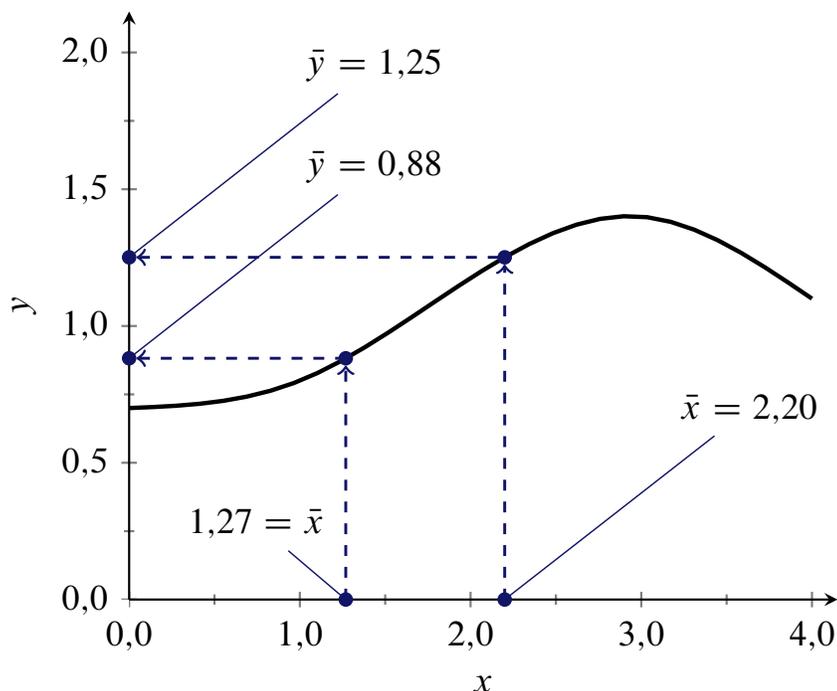


Figura 2.1 Diagramma di una funzione $f(x)$. Un valore $\bar{y} = f(\bar{x})$ letto dal grafico corrisponde al valore di K_x da utilizzare nella (2.1).

- K_{WB} è un fattore di correzione di g_w che tiene conto della presenza della fusoliera; la dipendenza di tale grandezza dalla forma della fusoliera e dal posizionamento dell'ala deve essere necessariamente ricavata attraverso indagini sperimentali ma spesso un fattore come K_{WB} può essere modellato come una funzione analitica del rapporto w_B/b (porzione di apertura alare occupata dalla sezione maestra di fusoliera) e del rapporto z_W/h_B (posizione verticale dell'ala rispetto alla retta di riferimento della fusoliera),
- K_x è un fattore moltiplicativo empirico che evidenzia la dipendenza di g da una certa variabile x collegata al velivolo completo.

Avendo g e g_w le stesse dimensioni, i due fattori di correzione K_{WB} e K_x sono adimensionali.

La formulazione (2.1) è da considerarsi un modello analitico a tutti gli effetti quando anche K_x è una funzione analitica della grandezza che ne influenza il valore. Spesso il valore di K_x non è però ottenibile semplicemente valutando una funzione ma si deve ricavare leggendo opportunamente uno o più grafici. Tali diagrammi — come anche la dipendenza $K_{WB}(w_B/b, z_W/h_B)$ — sono costruiti sulla base di dati sperimentali o attraverso procedure numeriche più o meno complesse. Ciò giustifica la denominazione ‘modello semiempirico’ attribuita alla (2.1).

Per esempio, si supponga che la dipendenza K_x dalla x sia data dal diagramma della figura 2.1. In altri termini si conosce una funzione $f(x)$ attraverso la sua rappresentazione grafica. Se il valore della x per il velivolo assegnato è $\bar{x} = 2,20$, il valore corrispondente letto dal diagramma è $K_x = f(\bar{x}) = 1,25$. Per un altro velivolo al quale corrisponde una $\bar{x} = 1,27$ si avrà un fattore di conversione $K_x = f(\bar{x}) = 0,88$ inferiore al precedente.



Esempio 2.3: Diagrammi tecnici e interpolazione

A partire dalle considerazioni dell'esempio 2.2 è opportuno richiamare qui alcune semplici nozioni di calcolo numerico collegate all'uso dei diagrammi tecnici.

Il diagramma della figura 2.1 utilizzato nell'esempio 2.2 rappresenta una fonte 'analogica' di dati. In pratica, l'ispezione visuale del grafico e l'uso di matita e righello permette di ricavare per via grafica il valore di K_x , dato quello di x .

Spesso una corrispondenza fra la x e K_x è disponibile in forma di *funzione definita per punti*: è noto un numero finito N di coppie di valori corrispondenti (x_k, y_k) , con $y_k = K_x(x_k)$, per $k = 1, \dots, N$. In altri termini si dispone della tabella di valori

| x | K_x |
|----------|----------|
| x_1 | y_1 |
| x_2 | y_2 |
| \vdots | \vdots |
| x_N | y_N |

Si dice anche che K_x è una *funzione tabulare* della x .

Date le N coppie (x_k, y_k) , è senz'altro possibile ricavare più di una una funzione analitica interpolante $f(x)$, definita per $x \in [x_1, x_N]$ — ed eventualmente anche al di fuori dell'intervallo dei dati —, tale che $y_k = f(x_k)$. Ciò esula dagli scopi di questo testo e si rimanda il lettore a un qualsiasi testo di Analisi numerica o di Metodi matematici per l'ingegneria per approfondimenti sulla Teoria dell'interpolazione.

Qui la curva della figura 2.1 è sostituita da una spezzata che congiunge i punti $P_k \equiv (x_k, y_k)$. Pertanto, la funzione interpolante $f(x)$ è semplicemente la funzione lineare a tratti

$$f(x) = \begin{cases} a'x + b' & \text{se } x < x_1 \\ a_1x + b_1 & \text{se } x_1 \leq x < x_2 \\ a_2x + b_2 & \text{se } x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \dots \\ a_{N-1}x + b_{N-1} & \text{se } x_{N-1} \leq x \leq x_N \\ a''x + b'' & \text{se } x > x_N \end{cases} \quad (2.2)$$

dove i coefficienti a_k, b_k, a', b', a'' e b'' vanno determinati a partire dall'insieme di dati disponibili.

Come è facile far vedere in base a considerazioni geometriche semplici, se si assume che il tratto di curva che unisce due punti consecutivi è una retta, per $x \in [x_k, x_{k+1}]$ si ha

$$f(x) = \underbrace{\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}}_{a_k} x + \underbrace{y_k - \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} x_k}_{b_k} \quad (2.3)$$

per $k = 1, \dots, N - 1$. La formula precedente mostra che per $x = x_k$ si ha $f(x_k) = y_k$ e per $x = x_{k+1}$ si ha $f(x_{k+1}) = y_{k+1}$. Dalle (2.3) si possono ricavare facilmente i valori numerici dei coefficienti a_k, b_k per tutti gli $N - 1$ sottointervalli $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{N-1}, x_N]$.

Per x esterna all'intervallo $[x_1, x_N]$ si parla di *estrapolazione* e i coefficienti a', b', a'' e b'' che compaiono nelle (2.2). sono facilmente ricavabili per una $f(x)$ lineare a tratti. Se $x < x_1$ il punto $(x, a'x + b')$ appartiene alla retta congiungente i punti P_1 e P_2 ; per $x > x_N$ il punto $(x, a''x + b'')$ appartiene alla retta congiungente i punti P_{N-1} e P_N .

Si osservi che più sarà alto il numero N di coppie di dati disponibili più la spezzata $(x, f(x))$ assomiglierà a una curva continua; meno incerta sarà anche la stima di un valore di K_x per x non coincidente con uno dei valori nodali x_1, x_2, \dots, x_N .

Una sequenza di valori tabulari è rappresentata graficamente nel diagramma della figura 2.2. L'insieme di punti discreti P_1, P_2, \dots, P_N , con $N = 8$, rappresenta la funzione tabulare. La spezzata che si ottiene collegando i punti con segmenti di retta rappresenta il grafico della funzione interpolante (2.2).

Pertanto, se si vuole ripetere il calcolo di K_x dell'esempio 2.2, per $\bar{x} = 1,27$ si avrà:

$$1,27 = \bar{x} \in [x_3, x_4] \text{ con } (x_3, y_3) = (1,10, 0,83), (x_4, y_4) = (1,66, 1,03)$$

Questi valori, sostituiti nella (2.3) per $k = 3$ e $x = \bar{x}$, permettono di ottenere un fattore di conversione $K_x = f(\bar{x}) = \bar{y} = 0,89$.

Il risultato precedente è confermato dalla rappresentazione grafica della figura 2.2. Essa mostra che il punto di coordinate (\bar{x}, \bar{y}) giace sulla retta congiungente i punti P_3 e P_4 . Per costruzione grafica è facile verificare che

$$\frac{\bar{y} - y_3}{y_4 - y_3} = \frac{\bar{x} - x_3}{x_4 - x_3}$$



Esempio 2.4: Diagrammi tecnici e interpolazione in due variabili



Le nozioni sull'interpolazione lineare richiamate nell'esempio 2.3 possono essere applicate al caso più complesso di un modello semiempirico del tipo

$$g = K_{xy} K_{WB} g_W \quad (2.4)$$

in cui K_{xy} è un coefficiente di correzione dipendente stavolta dalle due variabili x e y .

La semplice rappresentazione di K_x riportata nella figura 2.1 si generalizza e diventa il diagramma a curve multiple della figura 2.3. Quest'ultima definisce una corrispondenza tra K_{xy} e le due variabili x e y attraverso un insieme di curve del piano xz ciascuna delle quali è associata a un valore della variabile y . Si dice che le curve sono 'funzioni di x paramtrate in y '. In particolare, sono assegnate tre curve C_1, C_2 e C_3 corrispondenti, rispettivamente, ai valori della

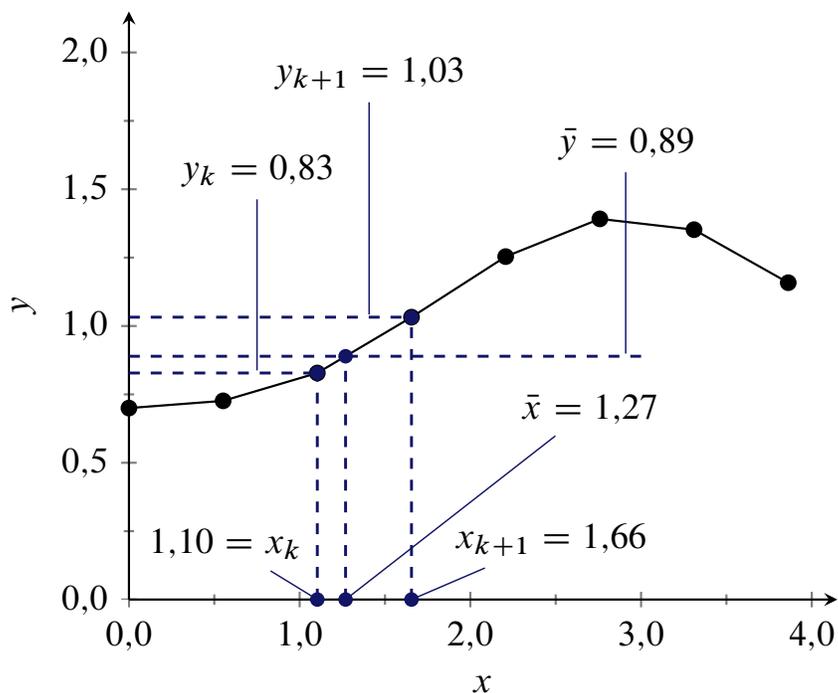


Figura 2.2 Una funzione definita per punti. La spezzata che congiunge i punti (x_k, y_k) con $k = 1, \dots, N$ è il grafico della funzione interpolante lineare $f(x)$. Calcolo del valore $f(\bar{x})$ per $x \in [x_k, x_{k+1}]$ con $k = 3$.

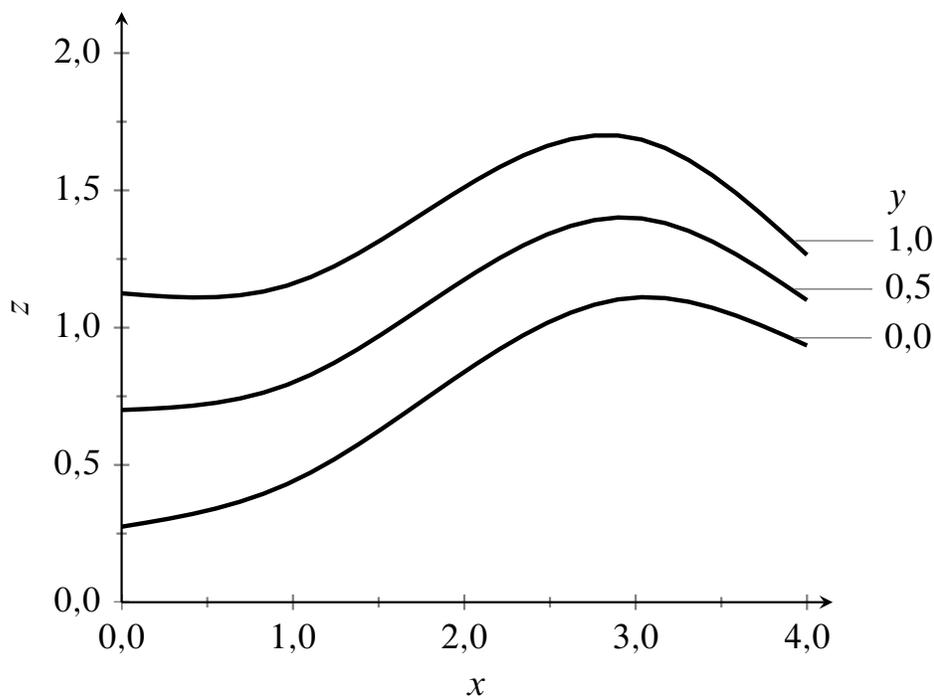


Figura 2.3 Una funzione delle due variabili (x, y) definita come insieme di curve del piano xz . Le curve sono funzioni di x parametrate in y .

y pari a

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0,5, \quad y_3 = 1$$

Le tre curve possono essere assegnate, ad esempio, soltanto in forma grafica — cioè analogica, da consultare con righello e matita — come nel caso della figura 2.1 discussa nell'esempio 2.2. In alternativa, le curve possono essere i grafici di tre funzioni interpolanti lineari $f_1(x)$, $f_2(x)$ ed $f_3(x)$, come nell'esempio 2.3.

La figura 2.3 è interpretabile alla luce della figura 2.4 che mostra un'ipotetica superficie dello

spazio xyz passante per le tre curve assegnate. Essa è il grafico di superficie di una funzione interpolante $f(x, y)$. Le tre curve C_k sono date dalla sezione della superficie con piani di equazione $y = y_k$ per $k = 1, 2, 3$.

Si vuole calcolare K_{xy} in corrispondenza dei valori $\bar{x} = 3,50$ e $\bar{y} = 0,80$. Si ha $y_2 < \bar{y} < y_3$ e si suppone di aver determinato i valori

$$z_2 = f_2(\bar{x}) = f(\bar{x}, y_2) = 1,30 \quad z_3 = f_3(\bar{x}) = f(\bar{x}, y_3) = 1,53$$

Si veda la figura 2.5 per una rappresentazione grafica del problema.

Il valore \bar{z} corrispondente al K_{xy} desiderato è semplice da ricavare per interpolazione se si assume una variazione lineare della z al variare della y , per fissata x . In termini formali si ipotizza che la funzione $f(\bar{x}, y) = \varphi(y)$ sia lineare e tale che $\varphi(y_1) = z_1$ e $\varphi(y_2) = z_2$. Si può dunque scrivere la relazione di proporzione

$$\frac{\bar{z} - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{\bar{y} - y_2}{y_3 - y_2}$$

che fornisce

$$\bar{z} = z_2 + (z_3 - z_2) \frac{\bar{y} - y_2}{y_3 - y_2} = 1,30 + (1,53 - 1,30) \frac{0,80 - 0,50}{1 - 0,50} = \underline{1,44}$$



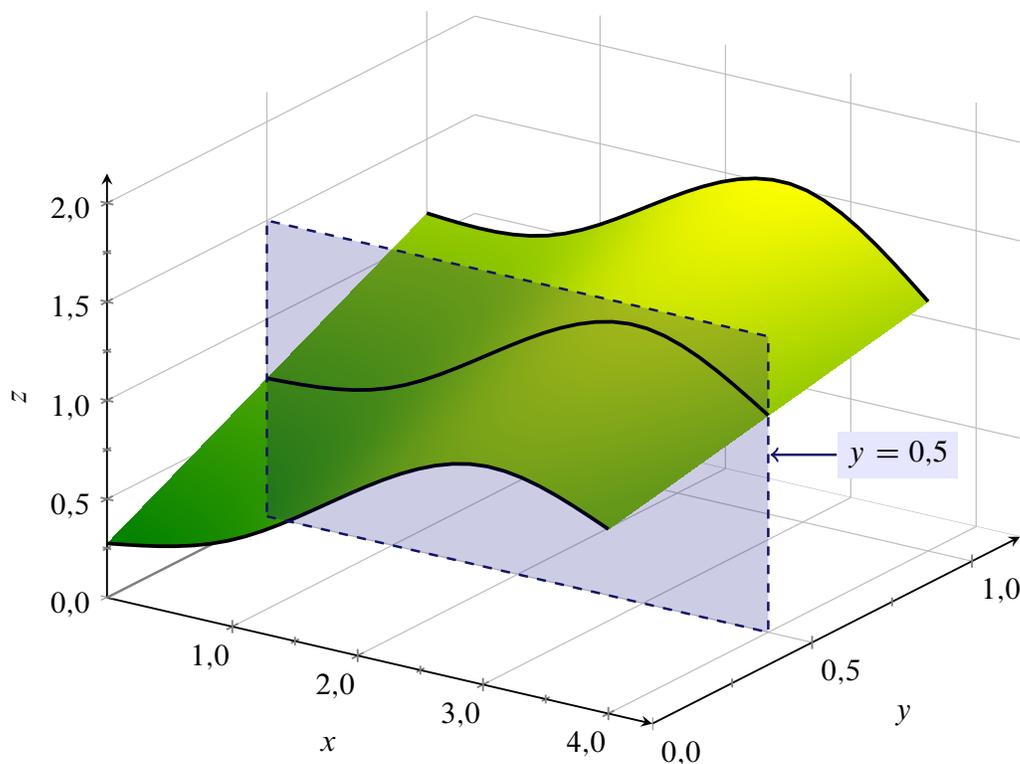


Figura 2.4 Grafico di superficie della funzione interpolante $f(x, y)$. Le sezioni della superficie con piani di equazione $y = 0$, $y = 0,5$ e $y = 1$ corrispondono alle tre curve della figura 2.3.

Esempio 2.5: *Diagrammi tecnici e interpolazione in tre variabili*



L'esempio 2.4 mostra che la formula di interpolazione lineare può essere usata con efficacia e relativa semplicità anche in più dimensioni.

La procedura di interpolazione mostrata si estende al calcolo di un coefficiente K_{xyz} dipendente da tre variabili e definito dagli insiemi di curve della figura 2.6. In questo caso si ha una funzione delle tre variabili (x, y, z) definita da due insiemi di curve del piano xs . Gli insiemi definiscono due funzioni delle variabili (x, y) come nella figura 2.3 dell'esempio 2.4. Le funzioni di due variabili sono associate ai due valori $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$ della variabile z . Una funzione interpolante sarà detta $f(x, y, z)$.

Si vuole calcolare K_{xyz} in corrispondenza dei valori $\bar{x} = 3,50$, $\bar{y} = 0,80$ e $\bar{z} = 0,75$. Si ha $y_2 < \bar{y} < y_3$ e si suppone di aver determinato i valori

$$s_{21} = f(\bar{x}, y_2, z_1) = 1,30 \quad s_{31} = f(\bar{x}, y_3, z_1) = 1,53$$

$$s_{22} = f(\bar{x}, y_2, z_2) = 1,88 \quad s_{32} = f(\bar{x}, y_3, z_2) = 2,21$$

Si veda la figura 2.7 per una rappresentazione grafica del problema.

Come nell'esempio 2.4 si calcola il valore

$$s_1 = f(\bar{x}, \bar{y}, z_1) = s_{21} + (s_{31} - s_{21}) \frac{\bar{y} - y_2}{y_3 - y_2} = \underline{1,44}$$

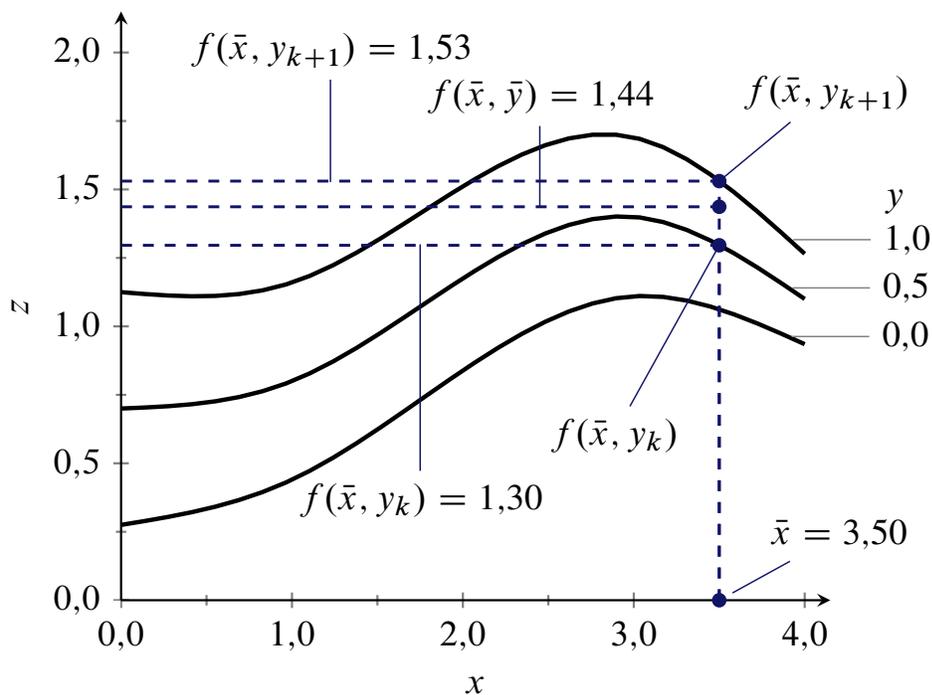


Figura 2.5 Calcolo di $\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$ per interpolazione lineare fra i valori $f(\bar{x}, y_k)$ ed $f(\bar{x}, y_{k+1})$ con $k = 2$.

Analogamente si calcola il valore

$$s_2 = f(\bar{x}, \bar{y}, z_2) = s_{22} + (s_{32} - s_{22}) \frac{\bar{y} - y_2}{y_3 - y_2} = 1,88 + (2,21 - 1,88) \frac{0,80 - 0,50}{1 - 0,50} = \underline{2,08}$$

Per una verifica grafica dei due risultati precedenti si veda la figura 2.7.

Infine, il valore \bar{s} corrispondente al K_{xyz} desiderato si ricava per interpolazione lineare tra i valori s_1 ed s_2 come se questi fossero le ordinate di una retta nel piano zs passante per i punti (z_1, s_1) e (z_2, s_2) . In termini formali si ipotizza che la funzione $f(\bar{x}, \bar{y}, z) = \varphi(z)$ sia lineare e tale che $\varphi(z_1) = s_1$ e $\varphi(z_2) = s_2$. Si può dunque scrivere la relazione di proporzione

$$\frac{\bar{s} - s_1}{s_2 - s_1} = \frac{\bar{z} - z_1}{z_2 - z_1}$$

che fornisce

$$\bar{s} = s_1 + (s_2 - s_1) \frac{\bar{z} - z_1}{z_2 - z_1} = 1,44 + (2,08 - 1,44) \frac{0,75 - 0}{1 - 0} = \underline{1,92}$$

Si osservi che il valore di $\bar{s} = K_{xyz}$ ottenuto è più vicino al valore s_2 che non a s_1 essendo \bar{z} più vicino a z_2 che non a z_1 .



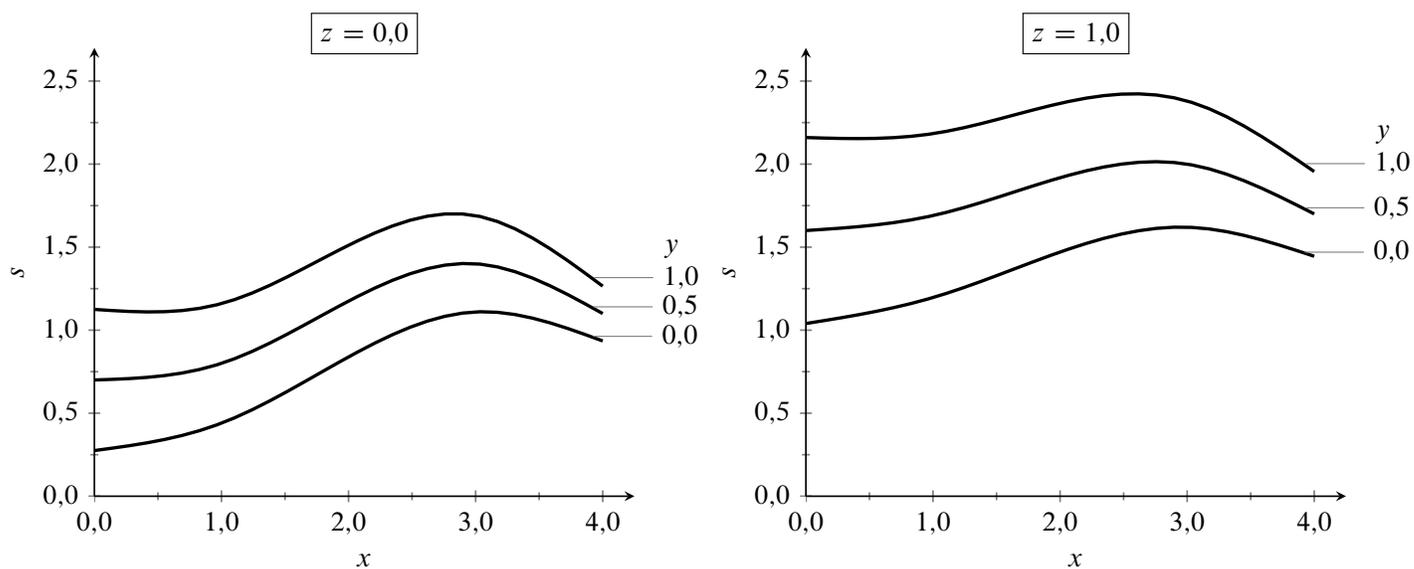


Figura 2.6 Una funzione delle tre variabili (x, y, z) definita da due insiemi di curve del piano xs . Gli insiemi definiscono due funzioni delle variabili (x, y) analogamente all'esempio della figura 2.3. Ciascuna funzione corrisponde a un valore della variabile z .

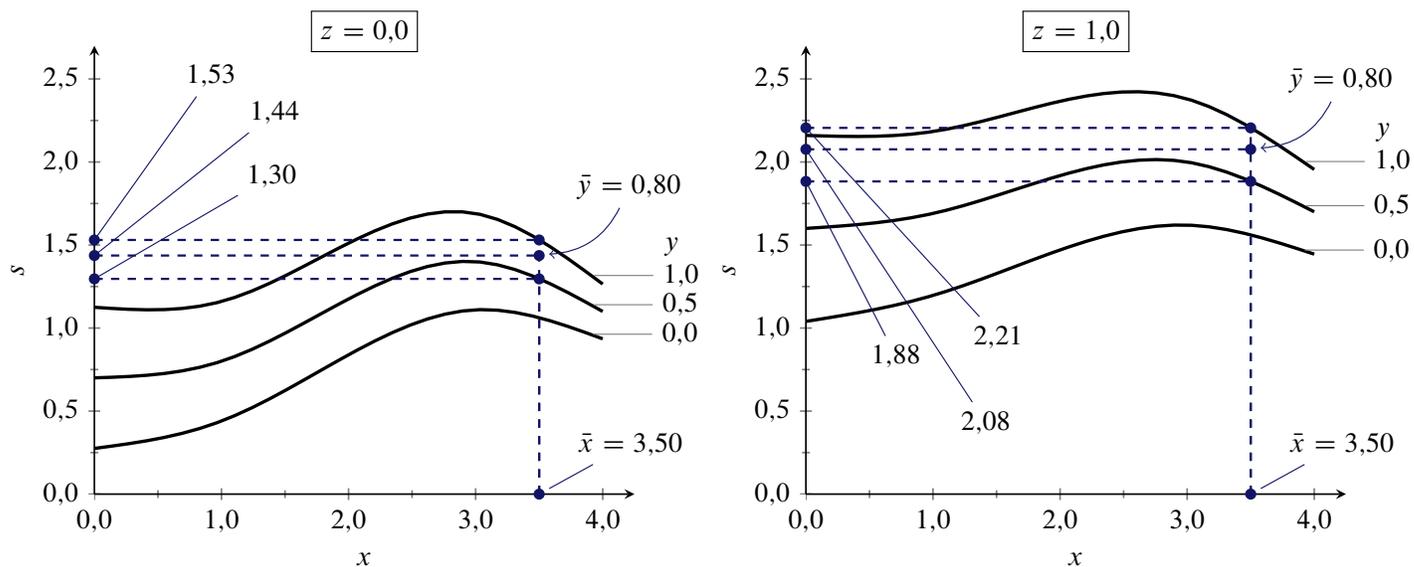


Figura 2.7 Una funzione delle tre variabili (x, y, z) definita da due insiemi di curve del piano xs . Gli insiemi definiscono due funzioni delle variabili (x, y) analogamente all'esempio della figura 2.3. Ciascuna funzione corrisponde a un valore della variabile z .

ALI FINITE

Esempio 4.1: Caratteristiche geometriche di un'ala dritta



Un'ala finita ha apertura $b = 26,0$ m, bordi d'attacco e d'uscita rettilinei e angolo di freccia nullo, cioè $\Lambda_{c/4} = 0^\circ$. Inoltre, le sezioni alari alle varie stazioni Y lungo l'apertura hanno corda costante pari a 2,50 m e hanno tutte lo stesso profilo, cioè le caratteristiche aerodinamiche di sezione sono costanti.

Si vogliono calcolare le seguenti grandezze:

$$S, \mathcal{R}, \bar{c}, X_{le, \bar{c}}, Y_{\bar{c}}$$

Non essendo rastremata, l'ala ha una corda di radice $c_r = 2,50$ m, una corda d'estremità $c_t = 2,50$ m e un rapporto di rastremazione $\lambda = 1$. La freccia del bordo d'attacco è $\Lambda_{le} = 0^\circ$.

La superficie alare si calcola come segue:

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{2} c_r (1 + \lambda) = b c_r \\ &= 0,50 \cdot 26,0 \text{ m} \cdot 2,50 \text{ m} \cdot (1 + 1) = \underline{65 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

In questo caso essa è semplicemente l'area di un rettangolo.

L'allungamento è dunque

$$\mathcal{R} = \frac{b^2}{S} = \frac{(26,0 \text{ m})^2}{65 \text{ m}^2} = \underline{10,41}$$

Questo valore è superiore a 10 e permette di affermare che si è in presenza di un'ala di elevato allungamento.

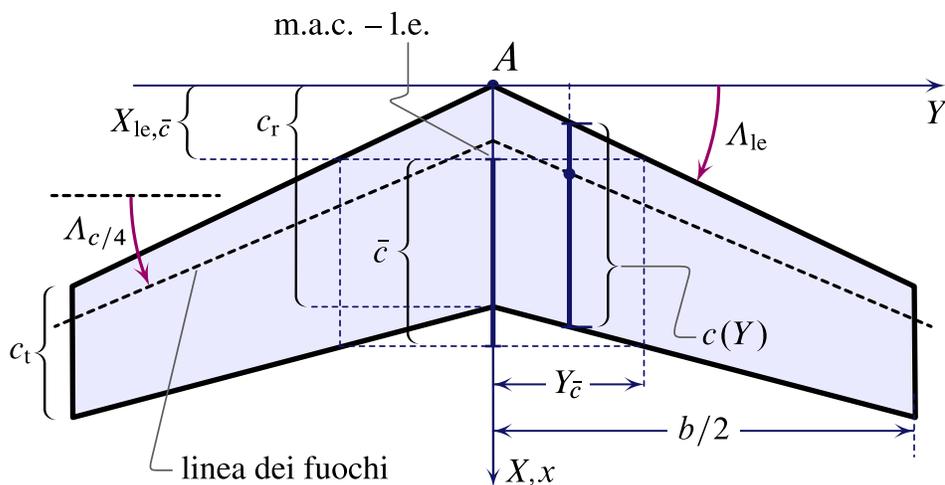


Figura 4.1 Grandezze geometriche caratteristiche di un'ala finita a bordi dritti.

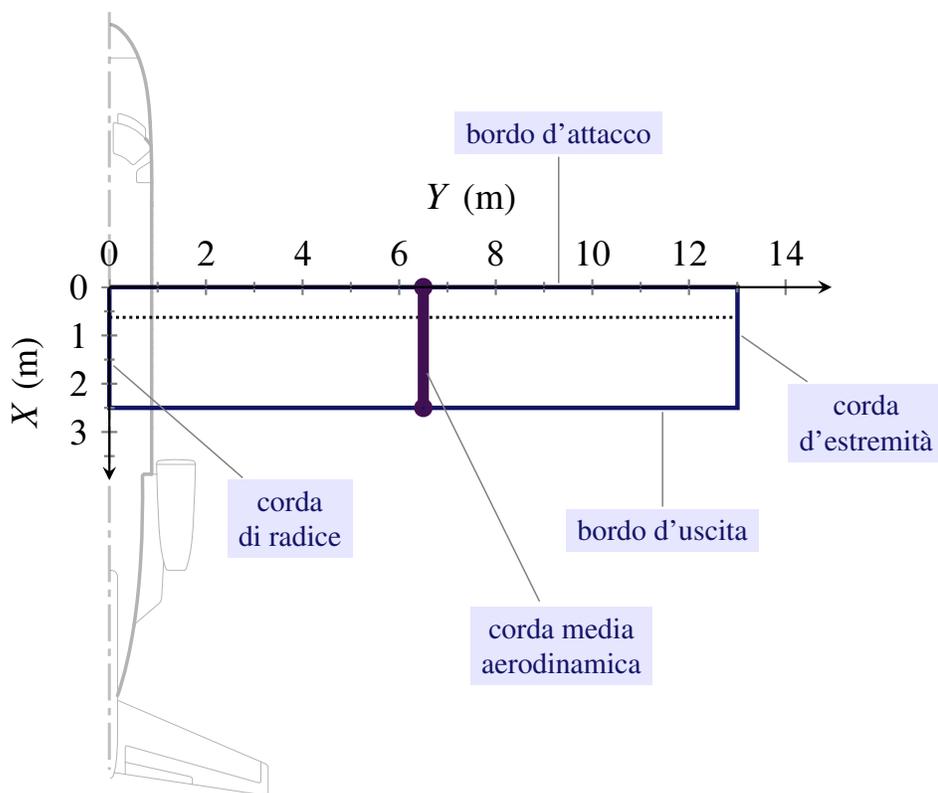


Figura 4.2 Forma in pianta assegnata nell'esempio 4.1.

La corda media aerodinamica è data dalla formula

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \frac{2}{3} c_r \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{1 + \lambda} \\ &= 0,67 \cdot 2,50 \text{ m} \cdot \frac{1 + 1 + 1^2}{1 + 1} = \underline{2,50 \text{ m}}\end{aligned}$$

Si osserva che per ali di questo tipo il valore di \bar{c} non è altro che quello della corda di qualsiasi sezione alare.

La distanza longitudinale del bordo d'attacco della corda media aerodinamica dal bordo

d'attacco della corda di radice è data da

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}} &= \frac{b}{6} \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} \tan \Lambda_{le} \\ &= \frac{26,0 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 1} \cdot \tan(0 \text{ rad}) = \underline{0 \text{ m}} \end{aligned}$$

Il valore nullo conferma che la corda media aerodinamica, proiettata sul piano di mezzeria dell'ala, si sovrappone alla corda di radice.

Per l'ala assegnata tutte le stazioni Y lungo l'apertura hanno corda pari a \bar{c} . Formalmente, la stazione $Y_{\bar{c}}$ corrispondente alla corda media aerodinamica si calcola come segue:

$$\begin{aligned} Y_{\bar{c}} &= \frac{b}{6} \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} = \\ &= \frac{26,0 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 + 1} = \underline{6,50 \text{ m}} = \frac{b}{2} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il valore ottenuto corrisponde alla stazione lungo l'apertura alare a metà strada tra la corda di radice e la corda d'estremità.

Si vedrà più avanti che per questo tipo di ala dritta a sezione costante, quando lo svergolamento geometrico $\epsilon_g(Y)$ è identicamente nullo, le caratteristiche aerodinamiche basilari del profilo di sezione si trasferiscono all'ala finita. Per esempio, l'angolo di portanza nulla α_{0L} coincide con l'angolo $\alpha_{0\ell}$ di portanza nulla del profilo; così come $C_L|_{\alpha=0}$ coincide con il C_{L0} di profilo. Il gradiente $C_{L\alpha}$ relativo all'ala va invece corretto rispetto al valore $C_{\ell\alpha}$ relativo al profilo per l'effetto dell'allungamento finito.



Esempio 4.2: *Caratteristiche geometriche di un'ala dritta e rastremata*



Un'ala finita ha apertura $b = 26,0 \text{ m}$, bordi d'attacco e d'uscita rettilinei e angolo di freccia nullo, cioè $\Lambda_{c/4} = 0^\circ$. A differenza dell'esempio 4.1, l'ala assegnata qui è rastremata, cioè la corda delle diverse sezioni alari varia linearmente con la distanza Y dal piano di mezzeria. La corda di radice è $c_r = 2,50 \text{ m}$ e la corda d'estremità è $c_t = 1,25 \text{ m}$.

Si vogliono calcolare le seguenti grandezze:

$$S, \mathcal{R}, \Lambda_{le}, \bar{c}, X_{le, \bar{c}}, Y_{\bar{c}}$$

Date le due corde di radice e d'estremità, va valutato il rapporto di rastremazione

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{1,25 \text{ m}}{2,50 \text{ m}} = \underline{0,50}$$

Per quanto riguarda la legge delle corde, si pone $c(Y) = A_c Y + B_c$. Imponendo che $c(0) = c_r$ e $c(\frac{1}{2}b) = c_t$, si ha che i coefficienti della legge lineare sono

$$A_c = \frac{c_t - c_r}{b/2} = 2 \frac{1,25 \text{ m} - 2,50 \text{ m}}{26,01 \text{ m}} = \underline{-0,096}$$

$$B_c = c_r = \underline{2,50 \text{ m}}$$

Dunque

$$c(Y) = A_c Y + B_c = -0,096 Y + 2,50 \text{ m}$$

La superficie alare in questo caso non è altro che l'area di due trapezi, ciascuno di base maggiore c_r , base minore c_t e altezza $\frac{1}{2}b$, e si calcola come segue:

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{2} c_r (1 + \lambda) \\ &= 0,50 \cdot 26,0 \text{ m} \cdot 2,50 \text{ m} \cdot (1 + 0,50) = \underline{48,8 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

È facile verificare che si ottiene lo stesso risultato se si applica la formula di calcolo

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{b/2} c(Y) dY = 2 \int_0^{b/2} (A_c Y + B_c) dY \\ &= 2 \int_{0 \text{ m}}^{13,0 \text{ m}} (-0,096 Y + 2,50 \text{ m}) dY = 2 \left[-0,096 \frac{Y^2}{2} + 2,50 \text{ m } Y \right]_{0 \text{ m}}^{13,0 \text{ m}} \\ &= 2 \left(-0,096 \cdot 84,6 \text{ m}^2 + 32,5 \text{ m}^2 \right) - 0 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

A questo punto si può calcolare l'allungamento alare, che è

$$\mathcal{R} = \frac{b^2}{S} = \frac{(26,0 \text{ m})^2}{48,8 \text{ m}^2} = \underline{13,87}$$

È noto che la linea congiungente i punti lungo le singole corde $c(Y)$ distanti $c(Y)/n$ dal bordo d'attacco locale forma un angolo di freccia $\Lambda_{c/n}$ collegato a quello del bordo d'attacco Λ_{le} dalla seguente relazione:

$$\tan \Lambda_{c/n} = \tan \Lambda_{le} - \frac{(4/n)(1 - \lambda)}{\mathcal{R}(1 + \lambda)}$$

Da questa, per una freccia $\Lambda_{c/4} = 0^\circ$ della linea dei quarti di corda, si ricava

$$\tan 0 = \tan \Lambda_{le} - \frac{1,00 \cdot (1 - 0,50)}{13,87 \cdot (1 + 0,50)} \Rightarrow \Lambda_{le} = \underline{0,0240 \text{ rad}} = \underline{1,4 \text{ deg}}$$

La corda media aerodinamica è in questo caso

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \frac{2}{3} c_r \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{1 + \lambda} \\ &= 0,67 \cdot 2,50 \text{ m} \cdot \frac{1 + 0,50 + 0,50^2}{1 + 0,50} = \underline{1,94 \text{ m}}\end{aligned}$$

cioè un valore intermedio tra quello della corda di radice (2,50 m) e quello della corda d'estremità (1,25 m), più vicino al primo che al secondo.

La distanza longitudinale del bordo d'attacco della corda media aerodinamica dal bordo d'attacco della corda di radice è

$$\begin{aligned}X_{le,\bar{c}} &= \frac{b}{6} \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} \tan \Lambda_{le} \\ &= \frac{26,0 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,50}{1 + 0,50} \cdot \tan(0,024 \text{ rad}) = \underline{0,14 \text{ m}}\end{aligned}$$

Si osserva che all'ala rastremata, pur se di freccia nulla, corrisponde un $X_{le,\bar{c}}$ non nullo. Ciò significa che la proiezione della sezione alare avente corda pari a \bar{c} nel piano di mezzeria è più arretrata della corda di radice. Inoltre, dato il valore di \bar{c} precedentemente calcolato, tale proiezione è tutta interna alla corda di radice, cioè $X_{le,\bar{c}} + \bar{c} < c_r$. Per una conferma grafica di questi risultati si veda la figura 4.3.

La stazione $Y_{\bar{c}}$ alla quale la legge delle corde $c(Y)$ assume il valore \bar{c} è

$$\begin{aligned}Y_{\bar{c}} &= \frac{b}{6} \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} = \\ &= \frac{26,0 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,50}{1 + 0,50} = \underline{5,78 \text{ m}}\end{aligned}$$

Il valore calcolato corrisponde a una stazione lungo l'apertura alare più vicina alla radice che all'estremità.



Esempio 4.3: *Caratteristiche geometriche di un'ala a bordi dritti, rastremata, a freccia*

L'ala di un velivolo ha bordi d'attacco e d'uscita rettilinei, apertura $b = 26,8 \text{ m}$, corda di radice $c_r = 5,20 \text{ m}$, corda d'estremità $c_t = 1,60 \text{ m}$ e freccia del bordo d'attacco $\Lambda_{le} = 27,5^\circ$.

Si vogliono calcolare le seguenti grandezze:

$$S, \mathcal{R}, \Lambda_{c/4}, \Lambda_{c/2}, \Lambda_{te}, \bar{c}, X_{le,\bar{c}}, Y_{\bar{c}}$$

Per le corde di sezione vale la legge lineare $c(Y) = A_c Y + B_c$ con

$$A_c = \frac{c_t - c_r}{b/2} = 2 \frac{1,60 \text{ m} - 5,20 \text{ m}}{26,80 \text{ m}} = \underline{-0,269}$$

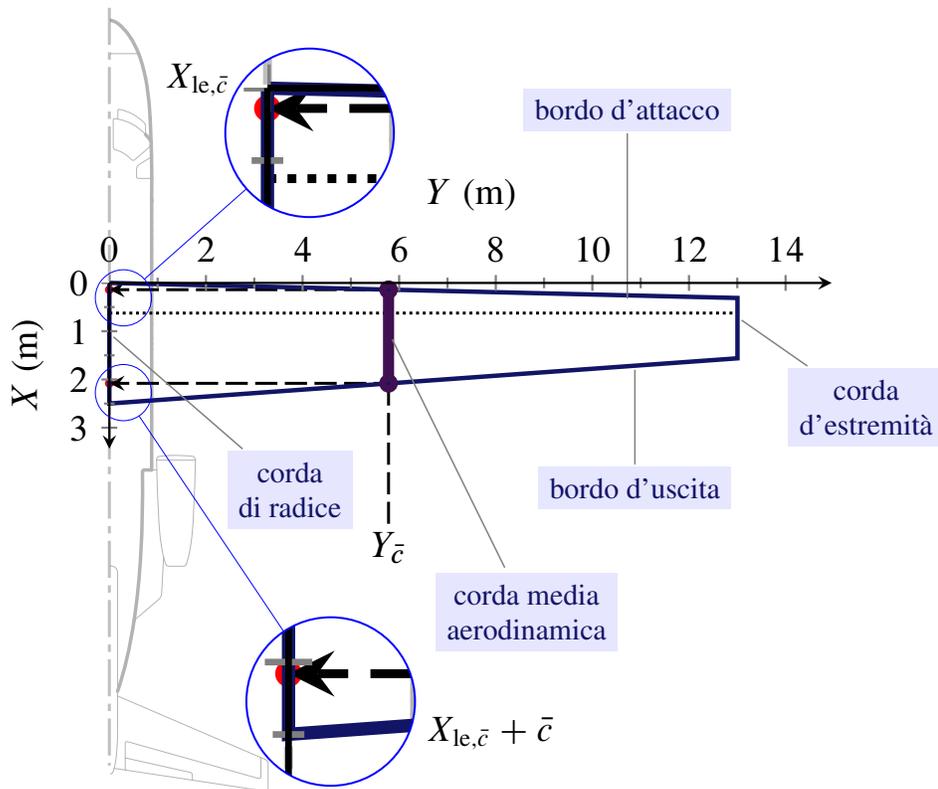


Figura 4.3 Forma in pianta assegnata nell'esempio 4.2.

$$B_c = c_r = \underline{5,20 \text{ m}}$$

dunque

$$c(Y) = A_c Y + B_c = -0,269 Y + 5,20 \text{ m}$$

Il rapporto di rastremazione è

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{1,60 \text{ m}}{5,20 \text{ m}} = \underline{0,31}$$

e la superficie alare è

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{2} c_r (1 + \lambda) \\ &= 0,50 \cdot 26,8 \text{ m} \cdot 5,20 \text{ m} \cdot (1 + 0,31) = \underline{91,1 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

Ne consegue un allungamento alare

$$\mathcal{R} = \frac{b^2}{S} = \frac{(26,8 \text{ m})^2}{91,1 \text{ m}^2} = \underline{7,88}$$

Per la relazione

$$\tan \Lambda_{c/n} = \tan \Lambda_{le} - \frac{(4/n)(1 - \lambda)}{\mathcal{R}(1 + \lambda)}$$

che lega l'angolo di freccia del bordo d'attacco Λ_{le} all'angolo di freccia $\Lambda_{c/n}$ della linea congiungente i punti lungo le singole corde $c(Y)$ distanti $c(Y)/n$ dal bordo d'attacco locale, si ha

$$\tan \Lambda_{c/4} = \tan(0,480 \text{ rad}) - \frac{1,00 \cdot (1 - 0,31)}{7,88 \cdot (1 + 0,31)} \Rightarrow \Lambda_{c/4} = \underline{0,426 \text{ rad}} = \underline{24,4 \text{ deg}}$$

$$\tan \Lambda_{c/2} = \tan(0,480 \text{ rad}) - \frac{2,00 \cdot (1 - 0,31)}{7,88 \cdot (1 + 0,31)} \Rightarrow \Lambda_{c/2} = \underline{0,369 \text{ rad}} = \underline{21,1 \text{ deg}}$$

$$\tan \Lambda_{te} = \tan(0,480 \text{ rad}) - \frac{4,00 \cdot (1 - 0,31)}{7,88 \cdot (1 + 0,31)} \Rightarrow \Lambda_{te} = \underline{0,247 \text{ rad}} = \underline{14,1 \text{ deg}}$$

Si osserva che gli angoli di freccia caratteristici della forma in pianta vanno progressivamente a diminuire passando dal bordo d'attacco (Λ_{le}), alla linea dei quarti di corda ($\Lambda_{c/4}$), alla linea mediana ($\Lambda_{c/2}$), fino al bordo d'uscita (Λ_{te}).

Il valore della corda media aerodinamica è il seguente:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{2}{3} c_r \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{1 + \lambda} \\ &= 0,67 \cdot 5,20 \text{ m} \cdot \frac{1 + 0,31 + 0,31^2}{1 + 0,31} = \underline{3,72 \text{ m}} \end{aligned}$$

La distanza longitudinale del bordo d'attacco della corda media aerodinamica dal bordo d'attacco della corda di radice è

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}} &= \frac{b}{6} \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} \tan \Lambda_{le} \\ &= \frac{26,8 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,31}{1 + 0,31} \cdot \tan(0,480 \text{ rad}) = \underline{2,87 \text{ m}} \end{aligned}$$

Si osserva che per un'ala rastremata e a freccia non nulla si ha un $X_{le, \bar{c}}$ non nullo. Ciò significa che la proiezione della sezione alare avente corda pari a \bar{c} nel piano di mezzeria è più arretrata della corda di radice. Inoltre, dato il valore di \bar{c} precedentemente calcolato, tale proiezione non è tutta interna alla corda di radice ma ha un bordo d'uscita di ascissa $X_{le, \bar{c}} + \bar{c} > c_r$. Per una conferma grafica di questi risultati si veda la figura 4.4.

La stazione $Y_{\bar{c}}$ alla quale la legge delle corde $c(Y)$ assume il valore \bar{c} è

$$\begin{aligned} Y_{\bar{c}} &= \frac{b}{6} \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} \\ &= \frac{26,8 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,31}{1 + 0,31} = \underline{5,52 \text{ m}} \end{aligned}$$

Il punto di coordinate $(X_{1e,\bar{c}}, 0)$ è di estrema importanza nella formulazione delle equazioni di equilibrio al beccheggio e della condizione di stabilità statica al beccheggio dei velivoli. Tale punto viene preso come riferimento dai progettisti per valutare la posizione del baricentro e dei centri aerodinamici caratteristici del velivolo (dell'ala isolata, della configurazione alafusoliera, del velivolo completo). Per esempio, se un dato punto caratteristico P ha una distanza longitudinale $a\bar{c}$ dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica (con a adimensionale), si introduce una coordinata x tale che $x_P = X_P - X_{1e,\bar{c}} = a\bar{c}$. Si dice anche che la posizione adimensionale di P rispetto al bordo d'attacco della corda media aerodinamica è $\bar{x}_P = a$.



Esempio 4.4: Caratteristiche geometriche di una cranked wing



Un'ala finita ha i bordi d'attacco e d'uscita corrispondenti a due spezzate. In particolare, la forma in pianta della semiala destra è l'unione di due pannelli etichettati come "pannello 1" (pannello interno) e "pannello 2" (pannello esterno), ed è rappresentata schematicamente nella figura 4.5 a pagina 26. Questo tipo di forma in pianta è detto anche *cranked wing*.

L'apertura totale è $b = 26,8 \text{ m}$, il pannello interno ha estensione $\frac{1}{2}b_1 = 7,37 \text{ m}$, il pannello esterno ha estensione $\frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b_1 = 6,03 \text{ m}$. Le corde di radice e d'estremità sono $c_r = c_{r,1} = 5,20 \text{ m}$ e $c_t = c_{t,2} = 2,20 \text{ m}$. Il bordo d'attacco è una linea spezzata in corrispondenza del punto B e il bordo d'uscita è spezzato in corrispondenza del punto B' . Entrambi hanno coordinata $Y_B = Y_{B'} = \frac{1}{2}b_1 = 7,37 \text{ m}$. La sezione alare BB' ha corda $c_{t,1} = c_{r,2} = 3 \text{ m}$. Gli angoli di freccia dei bordi d'attacco di ciascun pannello sono $\Lambda_{1e,1} = 32 \text{ deg}$ e $\Lambda_{1e,2} = 12 \text{ deg}$.

Per l'ala *cranked* assegnata si vogliono calcolare le seguenti grandezze:

$$S, \mathcal{R}, \bar{c}, X_{1e,\bar{c}}, Y_{\bar{c}}$$

La legge delle corde di questa forma in pianta è la seguente funzione lineare a tratti:

$$c(Y) = \begin{cases} c_1(Y) = A_{c,1} Y + B_{c,1} & \text{per } 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}b_1 \\ c_2(Y) = A_{c,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{c,2} & \text{per } \frac{1}{2}b_1 < Y \leq \frac{1}{2}b \end{cases}$$

i cui coefficienti si calcolano imponendo $c_1(0) = c_{r,1}$, $c_1(\frac{1}{2}b_1) = c_{t,1}$, $c_2(\frac{1}{2}b_1) = c_{r,2}$, $c_2(\frac{1}{2}b) = c_{t,2}$. Per i dati assegnati si ha

$$A_{c,1} = \frac{c_{t,1} - c_{r,1}}{b_1/2} = 2 \frac{3 \text{ m} - 5,20 \text{ m}}{14,74 \text{ m}} = \underline{-0,299}$$

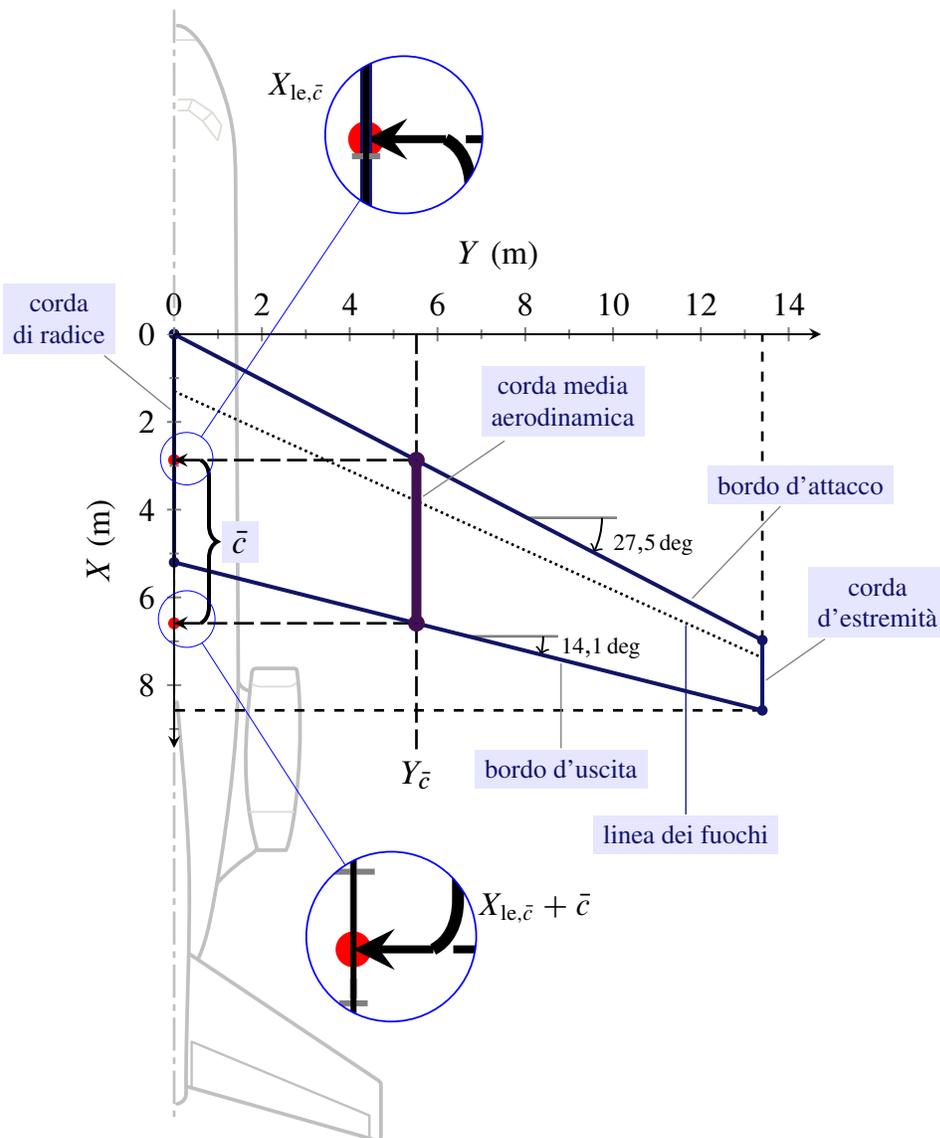


Figura 4.4 Forma in pianta dell'ala assegnata nell'esempio 4.3.

$$B_{c,1} = c_{r,1} = \underline{5,20 \text{ m}}$$

$$A_{c,2} = \frac{c_{i,2} - c_{r,2}}{b_2/2} = 2 \frac{2,20 \text{ m} - 3 \text{ m}}{12,06 \text{ m}} = \underline{-0,133}$$

$$B_{c,2} = c_{r,2} = \underline{3 \text{ m}}$$

dunque

$$c(Y) = \begin{cases} c_1(Y) = -0,299 Y + 3 \text{ m} & \text{per } 0 \text{ m} \leq Y \leq 7,37 \text{ m} \\ c_2(Y) = -0,133 (Y - 7,37 \text{ m}) + 3 \text{ m} & \text{per } 7,37 \text{ m} < Y \leq 13,40 \text{ m} \end{cases}$$

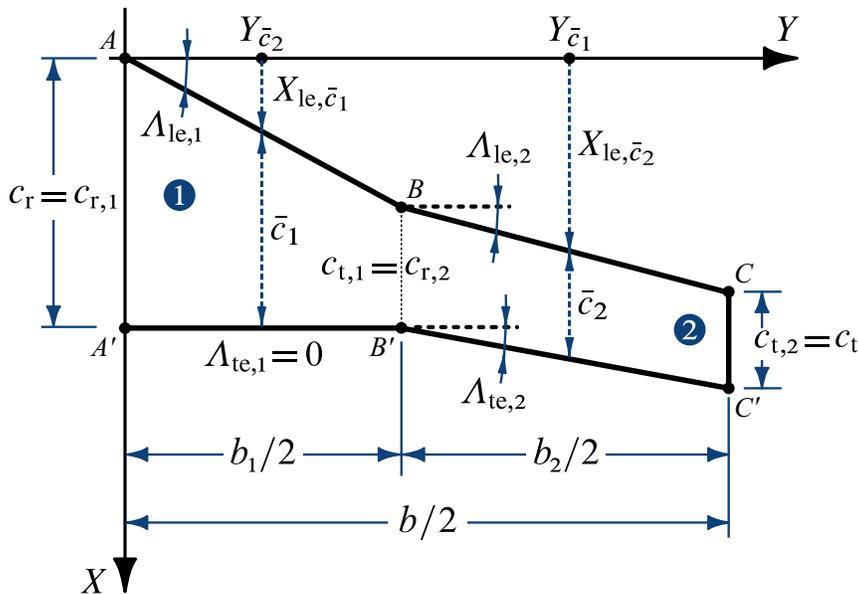


Figura 4.5 Ala a bordi d'attacco e d'uscita non rettilinei detta *cranked wing*.

Relativamente alla porzione alare interna, il rapporto di rastremazione è

$$\lambda_1 = \frac{c_{t,1}}{c_{r,1}} = \frac{3 \text{ m}}{5,20 \text{ m}} = \underline{0,58}$$

la superficie è

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{b_1}{2} c_{r,1} (1 + \lambda_1) \\ &= 0,50 \cdot 14,7 \text{ m} \cdot 5,20 \text{ m} \cdot (1 + 0,58) = \underline{60,4 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

e l'allungamento corrispondente è

$$\mathcal{R}_1 = \frac{b_1^2}{S_1} = \frac{(14,7 \text{ m})^2}{60,4 \text{ m}^2} = \underline{3,60}$$

Dunque la corda media aerodinamica del pannello interno è

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \frac{2}{3} c_{r,1} \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_1} \\ &= 0,67 \cdot 5,20 \text{ m} \cdot \frac{1 + 0,58 + 0,58^2}{1 + 0,58} = \underline{4,20 \text{ m}} \end{aligned}$$

La distanza longitudinale del bordo d'attacco della corda media aerodinamica del pannello 1 dal bordo d'attacco della corda di radice è

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}_1} &= \frac{b_1}{6} \frac{1 + 2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \tan \Lambda_{le,1} \\ &= \frac{14,7 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,58}{1 + 0,58} \cdot \tan (0,559 \text{ rad}) = \underline{2,10 \text{ m}} \end{aligned}$$

La stazione lungo l'apertura corrispondente alla corda \bar{c}_1 è

$$\begin{aligned} Y_{\bar{c}_1} &= \frac{b_1}{6} \frac{1 + 2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \\ &= \frac{14,7 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,58}{1 + 0,58} = \underline{3,36 \text{ m}} \end{aligned}$$

In altri termini, $Y_{\bar{c}_1}$ è la distanza dal piano di mezzzeria tale che $c_1(Y_{\bar{c}_1}) = \bar{c}_1$. A tale stazione lungo l'apertura corrisponde un profilo alare il cui bordo d'attacco ha ascissa X_{le, \bar{c}_1} .

Relativamente alla porzione alare esterna, come se questa fosse isolata, il rapporto di rastremazione è

$$\lambda_2 = \frac{c_{t,2}}{c_{r,2}} = \frac{2,20 \text{ m}}{3 \text{ m}} = \underline{0,73}$$

la superficie è

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{b_2}{2} c_{r,2} (1 + \lambda_2) \\ &= 0,50 \cdot 12,1 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} \cdot (1 + 0,73) = \underline{31,4 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

e l'allungamento corrispondente è

$$\mathcal{R}_2 = \frac{b_2^2}{S_2} = \frac{(12,1 \text{ m})^2}{31,4 \text{ m}^2} = \underline{4,64}$$

La corda media aerodinamica del pannello esterno è

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= \frac{2}{3} c_{r,2} \frac{1 + \lambda_2 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_2} \\ &= 0,67 \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{1 + 0,73 + 0,73^2}{1 + 0,73} = \underline{2,62 \text{ m}} \end{aligned}$$

La distanza longitudinale del bordo d'attacco della corda media aerodinamica del pannello 2 dal punto B è

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}_2} - X_B &= \frac{b_2}{6} \frac{1 + 2\lambda_2}{1 + \lambda_2} \tan \Lambda_{le,2} \\ &= \frac{12,1 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,73}{1 + 0,73} \cdot \tan(0,209 \text{ rad}) = \underline{0,61 \text{ m}} \end{aligned}$$

Questa distanza è quella che si calcolerebbe se l'ala coincidesse con il pannello esterno cioè se B fosse il bordo d'attacco della corda di radice. Quindi l'ascissa X_{le, \bar{c}_2} è

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}_2} &= X_B + 0,61 \text{ m} = \frac{b_1}{2} \tan \Lambda_{le,1} + 0,61 \text{ m} \\ &= 7,37 \text{ m} \cdot \tan(0,559 \text{ rad}) + 0,61 \text{ m} = 4,61 \text{ m} + 0,61 \text{ m} = \underline{5,21 \text{ m}} \end{aligned}$$

La stazione lungo l'apertura alare corrispondente alla corda \bar{c}_2 è

$$\begin{aligned} Y_{\bar{c}_2} &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{6} \frac{1 + 2\lambda_2}{1 + \lambda_2} \\ &= 7,37 \text{ m} + \frac{12,1 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,73}{1 + 0,73} = \underline{7,37 \text{ m} + 2,86 \text{ m}} = \underline{10,23 \text{ m}} \end{aligned}$$

Questa è la effettiva distanza dal piano di simmetria dell'ala della stazione alare nel pannello esterno di corda pari a \bar{c}_2 .

La forma in pianta assegnata ha una superficie complessiva pari a

$$S = S_1 + S_2 = 60,4 \text{ m}^2 = \underline{91,8 \text{ m}^2}$$

e un allungamento

$$\mathcal{R} = \frac{b^2}{S} = \frac{(26,80 \text{ m})^2}{91,8 \text{ m}^2} = \underline{7,83}$$

Dalla formula di calcolo generale della corda media aerodinamica scritta per un'ala *cranked* a due pannelli

$$\bar{c} = \frac{1}{S} \int_0^{b/2} c^2(Y) dY = \frac{1}{S} \int_0^{b_1/2} c_1^2(Y) dY + \frac{1}{S} \int_{b_1/2}^{b/2} c_2^2(Y) dY$$

essendo i due integrali a secondo membro pari a $S_1 \bar{c}_1$ e $S_2 \bar{c}_2$, rispettivamente, si ha che la \bar{c} dell'ala assegnata è data dalla seguente media pesata:

$$\bar{c} = \frac{S_1 \bar{c}_1 + S_2 \bar{c}_2}{S_1 + S_2} = \frac{60,4 \text{ m}^2 \cdot 4,20 \text{ m} + 31,4 \text{ m}^2 \cdot 2,62 \text{ m}}{60,4 \text{ m}^2 + 31,4 \text{ m}^2} = \underline{3,66 \text{ m}}$$

Si osserva che $\bar{c} > c_{t,1}$, essendo $S_1 > S_2$. Pertanto, il valore della stazione $Y_{\bar{c}}$ va ricercato tra le coordinate Y dei profili montati lungo il pannello interno, cioè guardando la legge delle corde $c_1(Y)$. Si ha dunque

$$\bar{c} = A_{c,1} Y_{\bar{c}} + B_{c,1} \quad \Rightarrow \quad Y_{\bar{c}} = \frac{\bar{c} - B_{c,1}}{A_{c,1}} = \frac{3,66 \text{ m} - 5,20 \text{ m}}{-0,299} = \underline{5,16 \text{ m}}$$

Verificare, per esercizio, che quando $S_2 > S_1$ va applicata la seguente formula:

$$Y_{\bar{c}} = \frac{b_1}{2} + \frac{\bar{c} - B_{c,2}}{A_{c,2}}$$

Individuata tale stazione, si estrae la coordinata X del bordo d'attacco della corda corrispondente, cioè la $X_{l_e, \bar{c}}$. La distanza longitudinale del bordo d'attacco della corda media aerodinamica

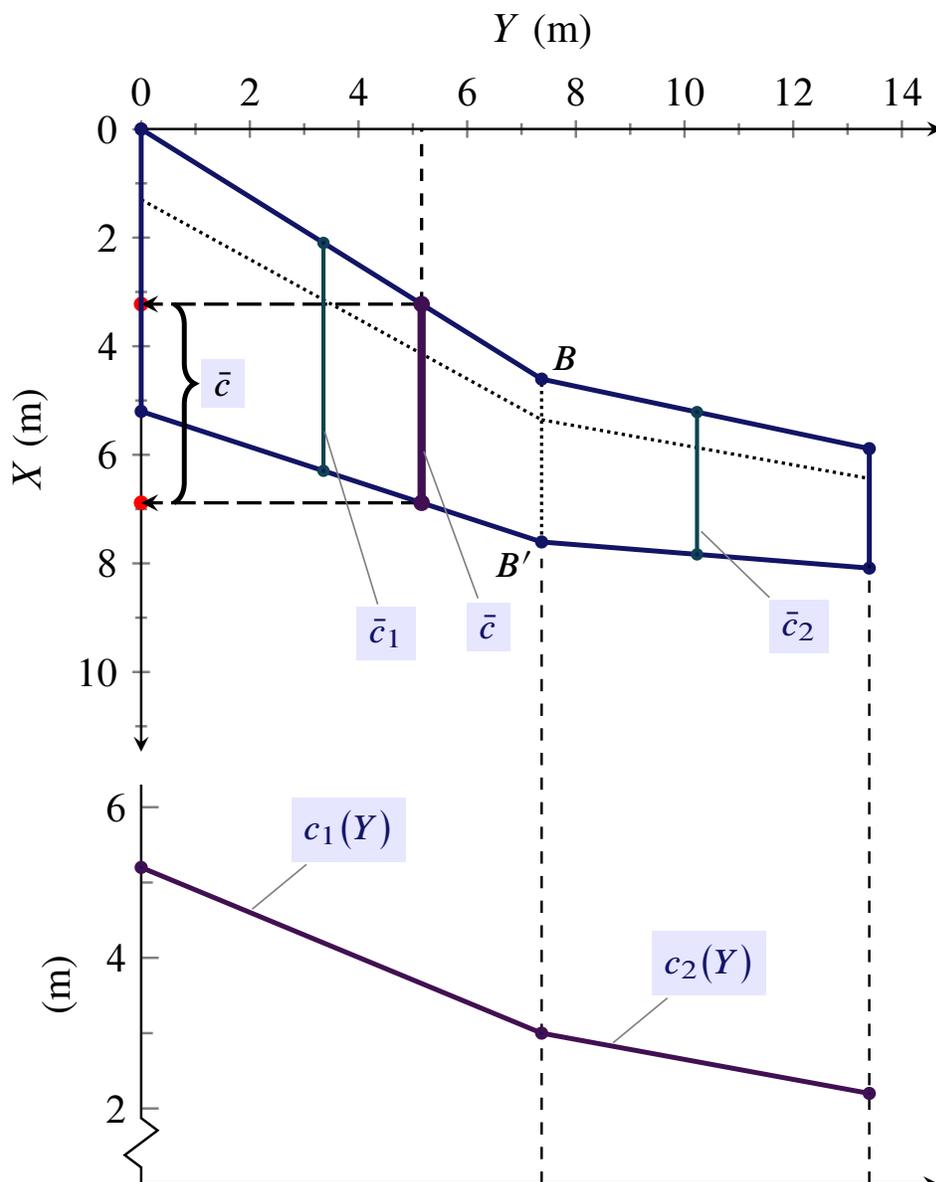


Figura 4.6 Forma in pianta dell'ala *cranked* assegnata nell'esempio 4.4. È riportata anche la legge delle corde lineare a tratti.

dell'ala *cranked* dal bordo d'attacco della corda di radice è in questo caso

$$X_{le,\bar{c}} = Y_{\bar{c}} \tan \Lambda_{le,1} = 5,16 \text{ m} \cdot \tan(0,559 \text{ rad}) = \underline{3,23 \text{ m}}$$

Verificare, per esercizio, che quando $S_2 > S_1$ va applicata la seguente formula:

$$X_{le,\bar{c}} = \frac{b_1}{2} \tan \Lambda_{le,1} + \frac{\bar{c} - B_{c,2}}{A_{c,2}} \tan \Lambda_{le,2}$$

La figura 4.6 riporta il disegno della forma in pianta assegnata. Sono evidenziate le corde aerodinamiche dei singoli pannelli e la corda \bar{c} . In basso nella figura è anche riportata la legge delle corde $c(Y)$.



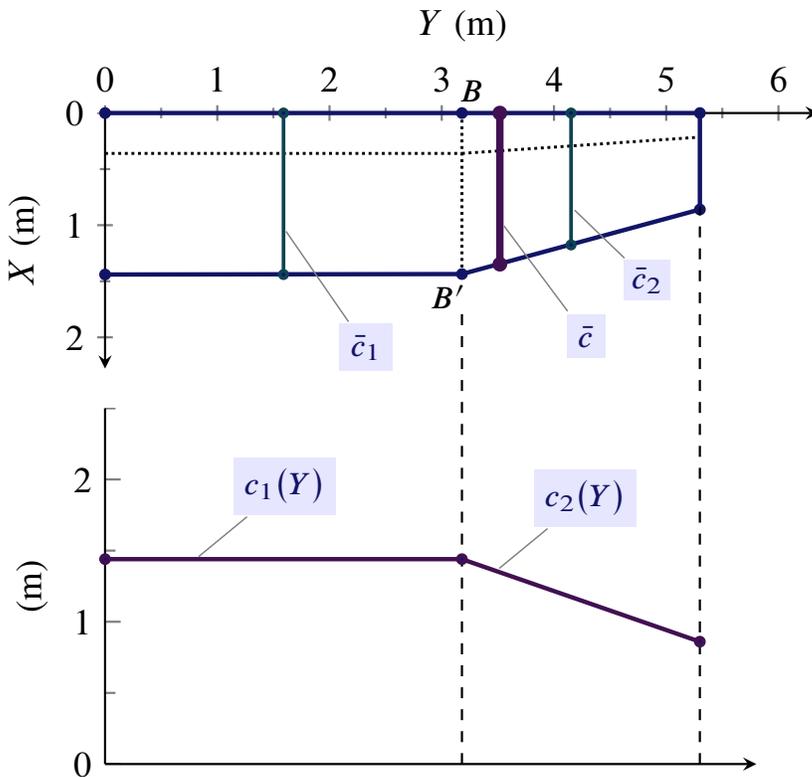


Figura 4.7 Forma in pianta dell'ala *cranked* assegnata nell'esercizio 4.1. È riportata anche la legge delle corde lineare a tratti.

Esercizio 4.1: Corda media aerodinamica di un'ala *cranked*



Si consideri l'ala finita la cui semiala destra ha la forma in pianta riportata nella figura 4.7. Il pannello interno ha corda costante pari a $c_r = c_{r,1} = 1,44$ m ed ha un'apertura $\frac{1}{2}b_1 = 3,18$ m. Il pannello esterno ha corda d'estremità $c_t = c_{t,2} = 0,86$ m e si estende per un'apertura $\frac{1}{2}b_2 = 2,12$ m. La semiapertura alare è $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 = 10,60$ m.

Ricostruire la legge delle corde per $0 \leq Y \leq \frac{1}{2}b$ e verificare che l'ala ha una corda media aerodinamica $\bar{c} = 1,35$ m. Verificare inoltre che $X_{le,\bar{c}} = 0$ m e $Y_{\bar{c}} = 3,52$ m.



Esempio 4.5: Forma in pianta equivalente una *cranked* wing



Con riferimento all'esempio 4.4 e alla figura 4.8 si vuole trovare una forma in pianta semplice, con bordi d'attacco e d'uscita dritti, che sia equivalente ad un'ala *cranked* a due pannelli.

L'ala equivalente ha area S della forma in pianta, apertura b e corda d'estremità c_t uguali a quelle dell'ala *cranked*. In particolare, dallo schema della figura 4.8 la posizione relativa della corda d'estremità rispetto all'apice A dell'ala assegnata è invariata.

Per l'ala *cranked* assegnata nell'esempio 4.4 si vuole conoscere:

$$P_1, P_2, c_{r,eqv}, \lambda_{eqv}, A_{le,eqv}$$

Le posizioni P_1 e P_2 , rispettivamente, del bordo d'attacco e del bordo d'uscita dell'ala equivalente vanno trovate imponendo opportunamente le condizioni di equivalenza su enunciate.

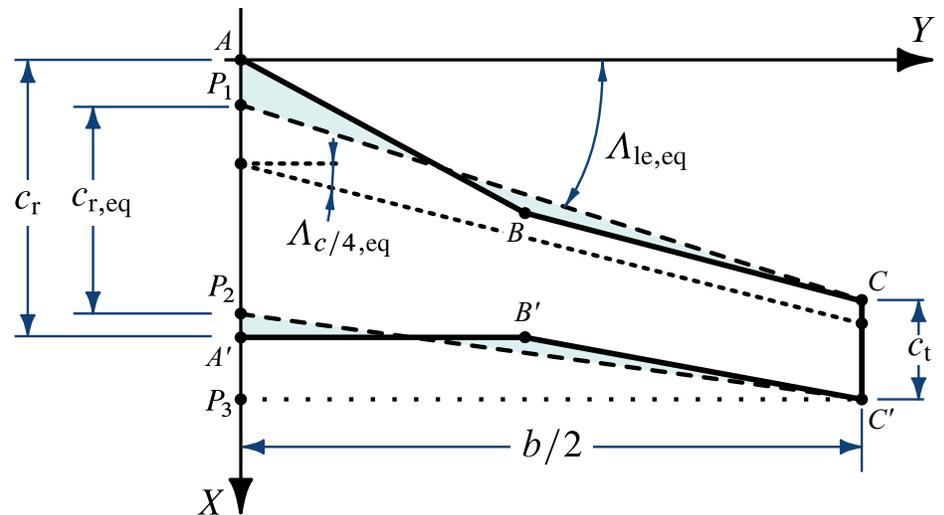


Figura 4.8 Ala a bordi d'attacco e d'uscita non rettilinei ed ala equivalente a bordi dritti.

La posizione del punto P_1 si calcola imponendo:

$$\text{Area}(P_1CC'P_3P_1) = \text{Area}(ABCC'P_3A)$$

oppure, detta C'' la proiezione di C sull'asse delle X , imponendo:

$$\text{Area}(P_1CC''P_1) = \text{Area}(ABCC''A)$$

La posizione del punto P_2 si calcola imponendo:

$$\text{Area}(P_2C'P_3P_2) = \text{Area}(A'B'C'P_3A')$$

Dallo schema di riferimento, i dati del problema permettono di calcolare

$$Y_B = \frac{b_1}{2} = \underline{7,37 \text{ m}}$$

$$X_B = Y_B \tan \Lambda_{le,1} = 7,37 \text{ m} \cdot \tan(0,559 \text{ rad}) = \underline{4,61 \text{ m}}$$

$$Y_C = \frac{b}{2} = \underline{13,40 \text{ m}}$$

$$X_C = X_B + \frac{b_2}{2} \tan \Lambda_{le,2} = 4,61 \text{ m} + 6,03 \text{ m} \cdot \tan(0,209 \text{ rad}) = \underline{5,89 \text{ m}}$$

$$Y_{C'} = Y_C = \underline{13,40 \text{ m}}$$

$$X_{C'} = X_C + c_t = 5,89 \text{ m} + 2,20 \text{ m} = \underline{8,09 \text{ m}}$$

$$Y_{B'} = Y_B = \underline{7,37 \text{ m}}$$

$$X_{B'} = X_B + c_{t,1} = 4,61 \text{ m} + 3 \text{ m} = \underline{7,61 \text{ m}}$$

$$X_{A'} = c_{r,1} = \underline{5,20 \text{ m}}$$

La condizione che definisce il punto P_1 diventa dunque

$$\frac{1}{2}(X_C - X_{P_1}) Y_C = \frac{1}{2} [X_C + (X_C - X_B)] Y_B + \frac{1}{2}(X_C - X_B)(Y_C - Y_B)$$

cioè un'equazione algebrica nell'incognita X_{P_1} . Sostituendo i valori precedentemente calcolati, si ottiene

$$X_{P_1} = \underline{1,37 \text{ m}}$$

Analogamente, la condizione che definisce il punto P_2 diventa

$$\frac{1}{2}(X_{C'} - X_{P_2}) Y_{C'} = \frac{1}{2} [(X_{C'} - X_{A'}) + (X_{C'} - X_{B'})] Y_{B'} + \frac{1}{2}(X_{C'} - X_{B'})(Y_{C'} - Y_{B'})$$

cioè un'equazione algebrica nell'incognita X_{P_2} . Sostituendo i valori precedentemente calcolati, si ottiene

$$X_{P_2} = \underline{6,02 \text{ m}}$$

I risultati precedenti permettono di calcolare la corda di radice dell'ala equivalente

$$c_{r,\text{eqv}} = X_{P_2} - X_{P_1} = 6,02 \text{ m} - 1,37 \text{ m} = \underline{4,65 \text{ m}}$$

Da questo dato è possibile ottenere il rapporto di rastremazione

$$\lambda_{\text{eqv}} = \frac{c_t}{c_{r,\text{eqv}}} = \frac{2,20 \text{ m}}{4,65 \text{ m}} = \underline{0,47}$$

valore diverso da quello dell'ala originale $\lambda = c_t/c_{r,1} = 0,42$.

Trovare una forma in pianta semplice che sia equivalente ad un'ala di forma in pianta a bordi spezzati risulta utile quando si devono usare metodi semiempirici per la valutazione dei coefficienti aerodinamici di un velivolo. In alcuni casi tali metodi richiedono dei dati di ingresso relativi a un'ala semplice — ad esempio l'angolo di freccia Λ_{le} oppure $\Lambda_{c/4}$ — e, disponendo di un'ala *cranked*, è opportuno individuare gli angoli $\Lambda_{le,eqv}$ o $\Lambda_{c/4,eqv}$ dell'ala equivalente prima di usarli per il calcolo richiesto.

L'angolo di freccia del bordo d'attacco dell'ala equivalente si calcola come segue:

$$\tan \Lambda_{le,eqv} = \frac{X_C - X_{P_1}}{b/2} = \frac{5,89 \text{ m} - 1,37 \text{ m}}{13,40 \text{ m}} \Rightarrow \Lambda_{le,eqv} = \underline{0,325 \text{ rad}} = \underline{18,6 \text{ deg}}$$

Per esercizio, verificare che

$$\Lambda_{c/4,eqv} = \underline{0,280 \text{ rad}} = \underline{16,1 \text{ deg}}$$

$$\Lambda_{c/2,eqv} = \underline{0,234 \text{ rad}} = \underline{13,4 \text{ deg}}$$

$$\Lambda_{te,eqv} = \underline{0,139 \text{ rad}} = \underline{8,0 \text{ deg}}$$

La figura 4.9 riporta la forma in pianta assegnata e quella della forma in pianta equivalente.



Esempio 4.6: Angolo di portanza nulla di un'ala finita

L'ala di un velivolo ha bordi d'attacco e d'uscita rettilinei, apertura $b = 26,8 \text{ m}$, corda di radice $c_r = 5,20 \text{ m}$, corda d'estremità $c_t = 2,34 \text{ m}$ e freccia nulla ($\Lambda_{c/4} = 0 \text{ deg}$). Inoltre, il profilo di radice ha un angolo di portanza nulla $\alpha_{0\ell,r} = -3 \text{ deg}$ mentre il profilo d'estremità ha un angolo di portanza nulla $\alpha_{0\ell,t} = -2 \text{ deg}$, con svergolamento geometrico $\epsilon_{g,t} = -1,5 \text{ deg}$.

Si vuole calcolare l'angolo di portanza nulla dell'ala: α_{0L} .

Com'è noto, l'angolo di portanza nulla di un'ala finita è la media della differenza $\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)$ (svergolamento aerodinamico effettivo) pesata con la porzione di superficie locale $dS = c(Y) dY$. Pertanto, per calcolare l'integrale

$$\alpha_{0L} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)] c(Y) dY$$

vanno ricostruite le leggi di variazione lungo l'apertura: (i) della corda, (ii) dell'angolo di portanza nulla di sezione, (iii) del calettamento geometrico di sezione. In mancanza di specifiche indicazioni, si può assumere che le ultime due leggi siano lineari.

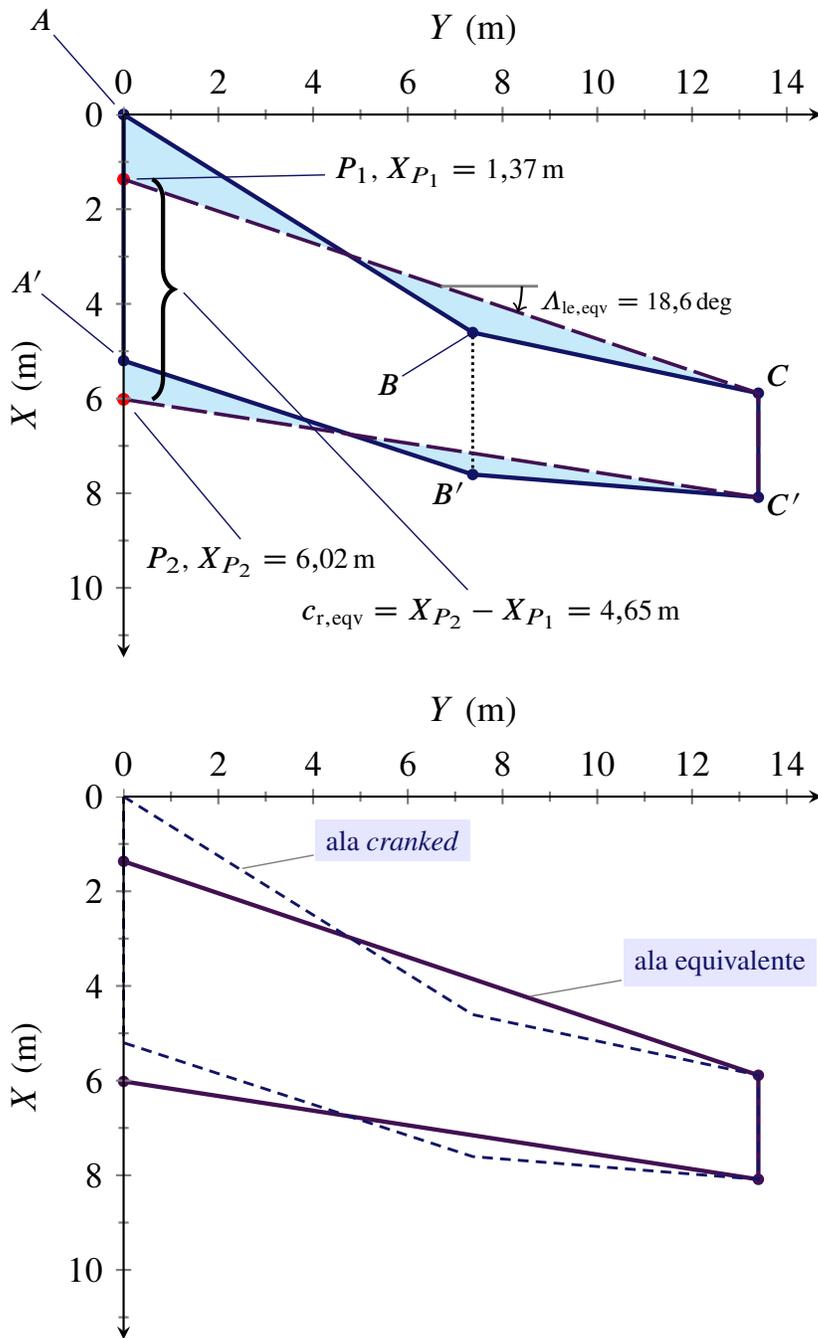


Figura 4.9 Ala *cranked* assegnata negli esempi 4.4 e 4.5 e forma in pianta equivalente.

Per le corde di sezione vale la legge lineare $c(Y) = A_c Y + B_c$ con

$$A_c = \frac{c_t - c_r}{b/2} = 2 \frac{2,34 \text{ m} - 5,20 \text{ m}}{26,80 \text{ m}} = \underline{\underline{-0,213}}$$

$$B_c = c_r = \underline{\underline{5,20 \text{ m}}}$$

dunque

$$c(Y) = A_c Y + B_c = -0,213 Y + 5,20 \text{ m}$$

Per gli angoli di portanza nulla di sezione vale la legge lineare $\alpha_{0\ell}(Y) = A_\alpha Y + B_\alpha$ con

$$A_\alpha = \frac{\alpha_{0\ell,t} - \alpha_{0\ell,r}}{b/2} = 2 \frac{-0,0349 \text{ rad} - (-0,0524 \text{ rad})}{26,80 \text{ m}} = \underline{0,00130 \text{ rad/m}}$$

$$B_\alpha = \alpha_{0\ell,r} = \underline{-0,0524 \text{ rad}}$$

dunque

$$\alpha_{0\ell}(Y) = A_\alpha Y + B_\alpha = (0,00130 \text{ rad/m}) Y - 0,0524 \text{ rad}$$

Per gli angoli di calettamento geometrico di sezione vale la legge lineare $\epsilon_g(Y) = A_\epsilon Y + B_\epsilon$ con

$$A_\epsilon = \frac{\epsilon_{g,t} - \epsilon_{g,r}}{b/2} = 2 \frac{-0,0262 \text{ rad}}{26,80 \text{ m}} = \underline{-0,00195 \text{ rad/m}}$$

$$B_\epsilon = \underline{0 \text{ rad}}$$

dunque

$$\epsilon_g(Y) = A_\epsilon Y + B_\epsilon = (-0,00195 \text{ rad/m}) Y$$

L'ala assegnata ha un rapporto di rastremazione

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{2,34 \text{ m}}{5,20 \text{ m}} = \underline{0,45}$$

e una superficie alare

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{2} c_r (1 + \lambda) \\ &= 0,50 \cdot 26,8 \text{ m} \cdot 5,20 \text{ m} \cdot (1 + 0,45) = \underline{101,0 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

A questo punto è possibile calcolare l'angolo di portanza nulla

$$\begin{aligned} \alpha_{0L} &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)] c(Y) dY \\ &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [(A_\alpha Y + B_\alpha) - A_\epsilon Y] (A_c Y + B_c) dY \end{aligned}$$

Il valore dell'integrale definito è facilmente ottenibile sostituendo nella funzione integranda i

valori dei coefficienti precedentemente calcolati. Si ha

$$\begin{aligned}\alpha_{0L} &= \frac{2}{101,0 \text{ m}^2} \int_{0\text{m}}^{13,4\text{m}} \left[0,00130 \text{ rad/m } Y - 0,0524 \text{ rad} \right. \\ &\quad \left. - (-0,00195 \text{ rad/m}) Y \right] (-0,213 Y + 5,20 \text{ m}) dY \\ &= \frac{2}{101,0 \text{ m}^2} \int_{0\text{m}}^{13,4\text{m}} \left(-0,000278 \text{ rad/m } Y^2 + 0,0112 \text{ rad } Y - 0,000417 \text{ rad/m } Y^2 \right. \\ &\quad \left. + 0,00677 \text{ rad } Y + (-0,272 \text{ rad m}) - (-0,0102 \text{ rad}) Y \right) dY\end{aligned}$$

Risolviendo l'integrale definito si ottiene

$$\begin{aligned}\alpha_{0L} &= \frac{2}{101,0 \text{ m}^2} \left[-0,000278 \text{ rad/m } \frac{Y^3}{3} + 0,0112 \text{ rad } \frac{Y^2}{2} - 0,000417 \text{ rad/m } \frac{Y^3}{3} \right. \\ &\quad \left. + 0,00677 \text{ rad } \frac{Y^2}{2} + (-0,272 \text{ rad m}) Y - (-0,0102 \text{ rad}) \frac{Y^2}{2} \right]_{0\text{m}}^{13,4\text{m}} \\ &= \underline{-0,0333 \text{ rad}} = \underline{-1,91 \text{ deg}}\end{aligned}$$

Si osserva che il risultato ottenuto corrisponde a un valore intermedio tra l'angolo $\alpha_{0\ell,r}$ di portanza nulla della radice (-3 deg) e la differenza

$$\alpha_{0\ell,t} - \epsilon_t = -2 \text{ deg} - (-1,5 \text{ deg}) = -0,5 \text{ deg}$$

tra l'angolo di portanza nulla d'estremità e il calettamento geometrico d'estremità. Il valore di α_{0L} è più vicino a quello di $\alpha_{0\ell,r}$ per via della rastremazione.

Per una conferma grafica dei risultati di questo esempio si veda la figura 4.10 in cui sono rappresentate la forma in pianta assegnata e le leggi lineari di svergolamento geometrico e di angolo di portanza nulla di sezione.



Esempio 4.7: Angolo di portanza nulla di un'ala cranked

La semiala destra di un velivolo dell'aviazione generale è rappresentata nella figura 4.11 (si veda anche l'esercizio 4.1). La forma in pianta ha il bordo d'attacco rettilineo e il bordo d'uscita rettilineo a tratti, con discontinuità nel punto B' . L'ala è un caso particolare di *cranked wing* con $\Lambda_{le,1} = \Lambda_{le,2} = 0^\circ$.

L'apertura totale è $b = 10,6 \text{ m}$, il pannello interno ha estensione $\frac{1}{2}b_1 = 3,18 \text{ m}$, il pannello esterno ha estensione $\frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b_1 = 2,12 \text{ m}$. La corda del pannello interno è costante e pari a $c_r = c_{r,1} = c_{t,1} = 1,44 \text{ m}$. Il pannello esterno è invece rastremato e ha corda d'estremità $c_t = c_{t,2} = 0,86 \text{ m}$.

Inoltre, il pannello interno ha profilo e svergolamento geometrico costanti. Sia alla radice che all'estremità del primo pannello l'angolo di portanza nulla di sezione è $\alpha_{0\ell,r,1} = \alpha_{0\ell,t,1} =$

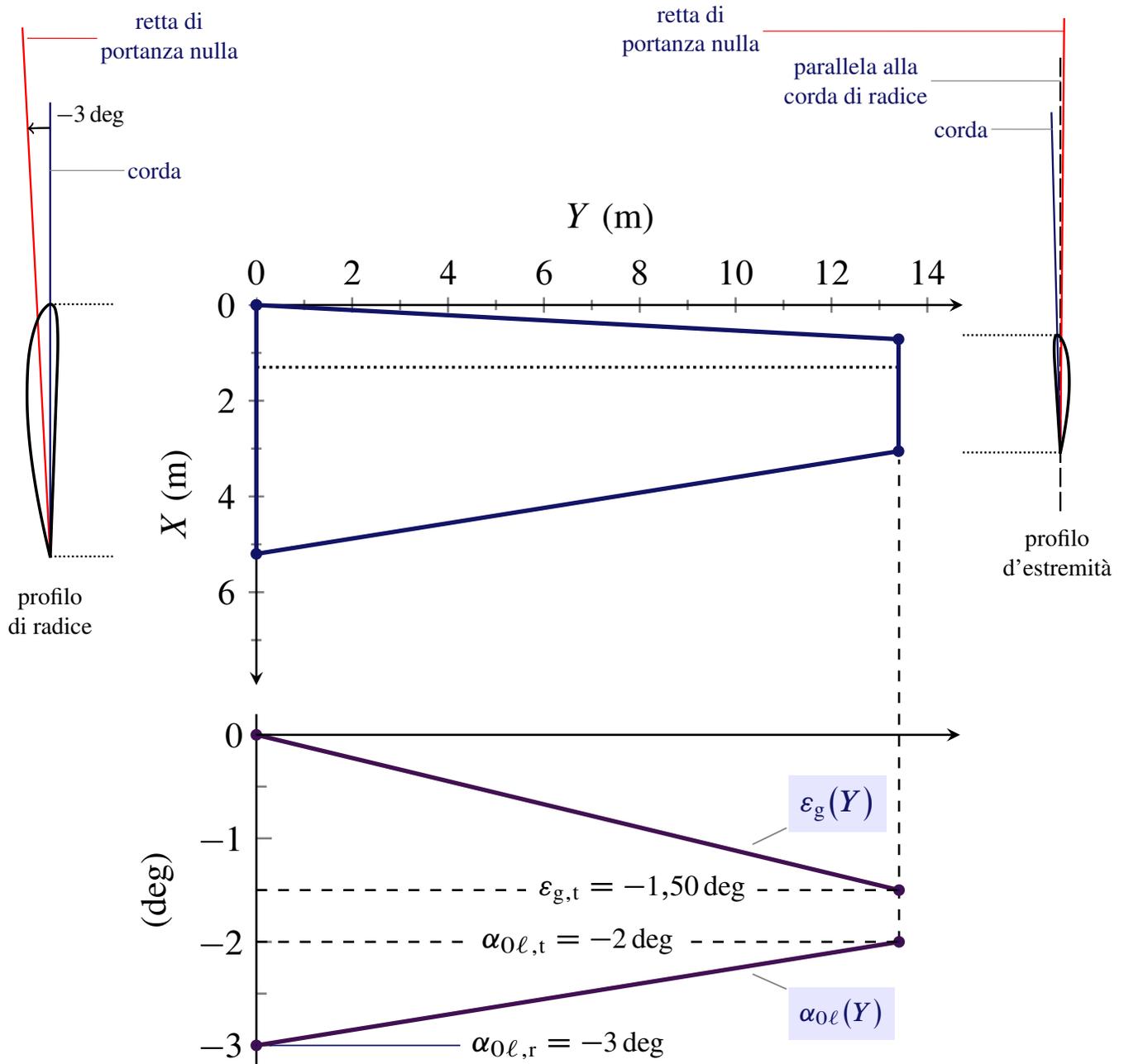


Figura 4.10 Forma in pianta della semiala dell'esempio 4.6. Sono rappresentate le leggi lineari di svergolamento geometrico ϵ_g e di angolo di portanza nulla di sezione $\alpha_{0\ell}$. A sinistra è disegnato lo schema del profilo di radice con la sua retta di portanza nulla e la sua corda. Questa è la retta di riferimento per gli angoli $\epsilon_g(Y)$. A destra è disegnato il profilo d'estremità, calettato di un angolo $\epsilon_{g,t} = \epsilon_g(\frac{1}{2}b)$.

$-2,5 \text{ deg}$ e il calettamento geometrico è $\epsilon_{g,r,1} = \epsilon_{g,t,1} = 0 \text{ deg}$. Nel pannello esterno si ha una variazione lineare dell'angolo di portanza nulla e dello svergolamento geometrico; la sezione d'estremità possiede un angolo di portanza nulla $\alpha_{0\ell,t,2} = -1 \text{ deg}$. e uno svergolamento geometrico $\epsilon_{g,t,2} = -3 \text{ deg}$. Si veda la figura 4.11 per una rappresentazione grafica delle leggi $c(Y)$, $\alpha_{0\ell}(Y)$ ed $\epsilon_g(Y)$.

Si vuole calcolare l'angolo di portanza nulla dell'ala: α_{0L} .

Per risolvere il problema basta ricostruire le espressioni analitiche delle leggi $c(Y)$, $\alpha_{0\ell}(Y)$ ed $\epsilon_g(Y)$ per $0 \leq Y \leq \frac{1}{2}b$. Successivamente, tali leggi lineari a tratti vanno sostituite nell'integrale definito contenuto nella formula di calcolo di α_{0L} .

La legge delle corde della forma in pianta assegnata è la seguente funzione lineare a tratti:

$$c(Y) = \begin{cases} c_1(Y) = A_{c,1} Y + B_{c,1} & \text{per } 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}b_1 \\ c_2(Y) = A_{c,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{c,2} & \text{per } \frac{1}{2}b_1 < Y \leq \frac{1}{2}b \end{cases}$$

i cui coefficienti si calcolano imponendo $c_1(0) = c_{r,1}$, $c_1(\frac{1}{2}b_1) = c_{t,1}$, $c_2(\frac{1}{2}b_1) = c_{r,2}$, $c_2(\frac{1}{2}b) = c_{t,2}$. Per i dati assegnati si ha

$$A_{c,1} = \frac{c_{t,1} - c_{r,1}}{b_1/2} = 2 \frac{1,44 \text{ m} - 1,44 \text{ m}}{6,36 \text{ m}} = \underline{0}$$

$$B_{c,1} = c_{r,1} = \underline{1,44 \text{ m}}$$

$$A_{c,2} = \frac{c_{t,2} - c_{r,2}}{b_2/2} = 2 \frac{0,86 \text{ m} - 1,44 \text{ m}}{4,24 \text{ m}} = \underline{-0,272}$$

$$B_{c,2} = c_{r,2} = \underline{1,44 \text{ m}}$$

dunque

$$c(Y) = \begin{cases} c_1(Y) = 1,44 \text{ m} & \text{per } 0 \text{ m} \leq Y \leq 3,18 \text{ m} \\ c_2(Y) = -0,272 (Y - 3,18 \text{ m}) + 1,44 \text{ m} & \text{per } 3,18 \text{ m} < Y \leq 5,30 \text{ m} \end{cases}$$

La legge degli angoli di portanza nulla di sezione è la seguente funzione lineare a tratti:

$$\alpha_{0\ell}(Y) = \begin{cases} \alpha_{0\ell,1}(Y) = A_{\alpha,1} Y + B_{\alpha,1} & \text{per } 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}b_1 \\ \alpha_{0\ell,2}(Y) = A_{\alpha,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{\alpha,2} & \text{per } \frac{1}{2}b_1 < Y \leq \frac{1}{2}b \end{cases}$$

i cui coefficienti si calcolano imponendo $\alpha_{0\ell,1}(0) = \alpha_{0\ell,r,1}$, $\alpha_{0\ell,1}(\frac{1}{2}b_1) = \alpha_{0\ell,t,1}$, $\alpha_{0\ell,2}(\frac{1}{2}b_1) = \alpha_{0\ell,r,2}$, $\alpha_{0\ell,2}(\frac{1}{2}b) = \alpha_{0\ell,t,2}$. Per i dati assegnati si ha

$$A_{\alpha,1} = \frac{\alpha_{0\ell,t,1} - \alpha_{0\ell,r,1}}{b_1/2} = 2 \frac{-0,04 \text{ rad} - (-0,04 \text{ rad})}{6,36 \text{ m}} = \underline{0 \text{ rad/m}}$$

$$B_{\alpha,1} = \alpha_{0\ell,r,1} = \underline{-0,0436 \text{ rad}}$$

$$A_{\alpha,2} = \frac{\alpha_{0\ell,t,2} - \alpha_{0\ell,r,2}}{b_2/2} = 2 \frac{-0,0175 \text{ m} - (-0,0436 \text{ m})}{4,24 \text{ m}} = \underline{0,0123 \text{ rad/m}}$$

$$B_{\alpha,2} = \alpha_{0\ell,r,2} = \underline{-0,0436 \text{ rad}}$$

dunque

$$\alpha_{0\ell}(Y) = \begin{cases} \alpha_{0\ell,1}(Y) = -0,0436 \text{ rad} & \text{per } 0 \text{ m} \leq Y \leq 3,18 \text{ m} \\ \alpha_{0\ell,2}(Y) = 0,0123 \text{ rad/m} (Y - 3,18 \text{ m}) \\ \quad -0,0436 \text{ rad} & \text{per } 3,18 \text{ m} < Y \leq 5,30 \text{ m} \end{cases}$$

Infine, la legge degli angoli di svergolamento geometrico di sezione è la seguente funzione lineare a tratti:

$$\epsilon_g(Y) = \begin{cases} \epsilon_{g,1}(Y) = A_{\epsilon,1} Y + B_{\epsilon,1} & \text{per } 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}b_1 \\ \epsilon_{g,2}(Y) = A_{\epsilon,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{\epsilon,2} & \text{per } \frac{1}{2}b_1 < Y \leq \frac{1}{2}b_2 \end{cases}$$

i cui coefficienti si calcolano imponendo $\epsilon_{g,1}(0) = 0 \text{ deg}$, $\epsilon_{g,1}(\frac{1}{2}b_1) = \epsilon_{g,t,1}$, $\epsilon_{g,2}(\frac{1}{2}b_1) = \epsilon_{g,t,1}$, $\epsilon_{g,2}(\frac{1}{2}b_2) = \epsilon_{g,t,2}$. Per i dati assegnati si ha

$$A_{\epsilon,1} = \frac{\epsilon_{g,t,1}}{b_1/2} = 2 \frac{0 \text{ rad}}{6,36 \text{ m}} = \underline{0 \text{ rad/m}}$$

$$B_{\epsilon,1} = \epsilon_{g,r,1} = \underline{0 \text{ rad}}$$

$$A_{\epsilon,2} = \frac{\epsilon_{g,t,2} - \epsilon_{g,r,2}}{b_2/2} = 2 \frac{-0,0524 \text{ m} - (0 \text{ m})}{4,24 \text{ m}} = \underline{-0,0247 \text{ rad/m}}$$

$$B_{\epsilon,2} = \epsilon_{g,r,2} = \underline{0 \text{ rad}}$$

dunque

$$\epsilon_g(Y) = \begin{cases} \epsilon_{g,1}(Y) = 0 \text{ rad} & \text{per } 0 \text{ m} \leq Y \leq 3,18 \text{ m} \\ \epsilon_{g,2}(Y) = -0,0247 \text{ rad/m} (Y - 3,18 \text{ m}) & \text{per } 3,18 \text{ m} < Y \leq 5,30 \text{ m} \end{cases}$$

A questo punto è possibile calcolare l'angolo di portanza nulla

$$\alpha_{0L} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)] c(Y) dY$$

che per un'ala *cranked* a due pannelli diventa una somma di due integrali

$$\alpha_{0L} = \frac{2}{S} \int_0^{b_1/2} [\alpha_{0\ell,1}(Y) - \epsilon_{g,1}(Y)] c_1(Y) dY \\ + \frac{2}{S} \int_{b_1/2}^{b/2} [\alpha_{0\ell,2}(Y) - \epsilon_{g,2}(Y)] c_2(Y) dY$$

La formula precedente, scritta per esteso, diventa

$$\alpha_{0L} = \frac{2}{S} \int_0^{b_1/2} \left[(A_{\alpha,1} Y + B_{\alpha,1}) - A_{\epsilon,1} Y \right] (A_{c,1} Y + B_{c,1}) dY \\ + \frac{2}{S} \int_{b_1/2}^{b/2} \left[A_{\alpha,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{\alpha,2} - A_{\epsilon,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) - B_{\epsilon,2} \right] \\ \cdot \left[A_{c,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{c,2} \right] dY$$

I pannelli della semiala assegnata hanno un rapporti di rastremazione

$$\lambda_1 = \frac{c_{t,1}}{c_{r,1}} = \frac{1,44 \text{ m}}{1,44 \text{ m}} = \underline{1}$$

$$\lambda_2 = \frac{c_{t,2}}{c_{r,2}} = \frac{0,86 \text{ m}}{1,44 \text{ m}} = \underline{0,60}$$

e superfici

$$S_1 = \frac{b_1}{2} c_{r,1} (1 + \lambda_1) \\ = 0,50 \cdot 6,4 \text{ m} \cdot 1,44 \text{ m} \cdot (1 + 1) = \underline{9,2 \text{ m}^2}$$

$$S_2 = \frac{b_2}{2} c_{r,2} (1 + \lambda_2) \\ = 0,50 \cdot 4,2 \text{ m} \cdot 1,44 \text{ m} \cdot (1 + 0,60) = \underline{4,9 \text{ m}^2}$$

Pertanto, la superficie alare è

$$S = S_1 + S_2 = 9,2 \text{ m}^2 + 4,9 \text{ m}^2 = \underline{12,2 \text{ m}^2}$$

La somma dei due integrali definiti è facilmente ottenibile sostituendo nelle funzioni integrande i valori dei coefficienti precedentemente calcolati. Svolgendo i calcoli per il primo integrale si

ottiene

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0L,1} &= \frac{2}{S} \int_0^{b_1/2} \left[(A_{\alpha,1} Y + B_{\alpha,1}) - A_{\epsilon,1} Y \right] (A_{c,1} Y + B_{c,1}) dY \\
 &= \frac{2}{12,2 \text{ m}^2} \int_{0 \text{ m}}^{3,2 \text{ m}} \left[(0 \text{ rad/m } Y - 0,0436 \text{ rad}) \right. \\
 &\quad \left. - (0 \text{ rad/m}) Y \right] (0 Y + 1,44 \text{ m}) dY \\
 &= \frac{2}{12,2 \text{ m}^2} \int_{0 \text{ m}}^{3,2 \text{ m}} -0,0436 \text{ rad} \cdot 1,44 \text{ m } dY \\
 &= \underline{-0,0327 \text{ rad}} = \underline{-1,87 \text{ deg}}
 \end{aligned}$$

Analogamente, per il secondo integrale si ottiene

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0L,2} &= \frac{2}{S} \int_{b_1/2}^{b/2} \left[A_{\alpha,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{\alpha,2} - A_{\epsilon,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) - B_{\epsilon,2} \right] \\
 &\quad \cdot \left[A_{c,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{c,2} \right] dY \\
 &= \frac{2}{12,2 \text{ m}^2} \int_{3,2 \text{ m}}^{5,3 \text{ m}} \left[0,0123 \text{ rad/m } \left(Y - 3,2 \text{ m} \right) - 0,0436 \text{ rad} \right. \\
 &\quad \left. - (-0,0247 \text{ rad/m}) \left(Y - 3,2 \text{ m} \right) - 0 \text{ rad} \right] \\
 &\quad \left[-0,272 \left(Y - 3,2 \text{ m} \right) + 1,44 \text{ m} \right] dY \\
 &= \underline{-0,00305 \text{ rad}} = \underline{-0,17 \text{ deg}}
 \end{aligned}$$

Infine, l'angolo di portanza nulla dell'ala assegnata è

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0L} &= \alpha_{0L,1} + \alpha_{0L,2} = -0,0327 \text{ rad} + (-0,00305 \text{ rad}) \\
 &= \underline{-0,0358 \text{ rad}} = \underline{-2,05 \text{ deg}}
 \end{aligned}$$



Esempio 4.8: Angolo di portanza nulla di un'ala finita (metodo grafico)



Si consideri ancora l'ala dell'esempio 4.3 avente bordi d'attacco e d'uscita rettilinei, apertura $b = 26,8 \text{ m}$, corda di radice $c_r = 5,20 \text{ m}$, corda d'estremità $c_t = 1,60 \text{ m}$ e freccia del bordo d'attacco $A_{le} = 27,5 \text{ deg}$. Inoltre, il profilo di radice ha un angolo di portanza nulla $\alpha_{0\ell,r} = -3 \text{ deg}$ mentre il profilo d'estremità ha un angolo di portanza nulla $\alpha_{0\ell,t} = -1,5 \text{ deg}$, con svergolamento geometrico $\epsilon_{g,t} = -1,5 \text{ deg}$. Infine, il numero di Mach di volo è $M = 0,70$.

Si vuole calcolare l'angolo di portanza nulla dell'ala α_{0L} secondo la formula semiempirica

$$\alpha_{0L} = \left(\bar{\alpha}_{0\ell} + K_{\alpha,1} \epsilon_{g,t} \right) K_{\alpha,2} \quad (4.1)$$

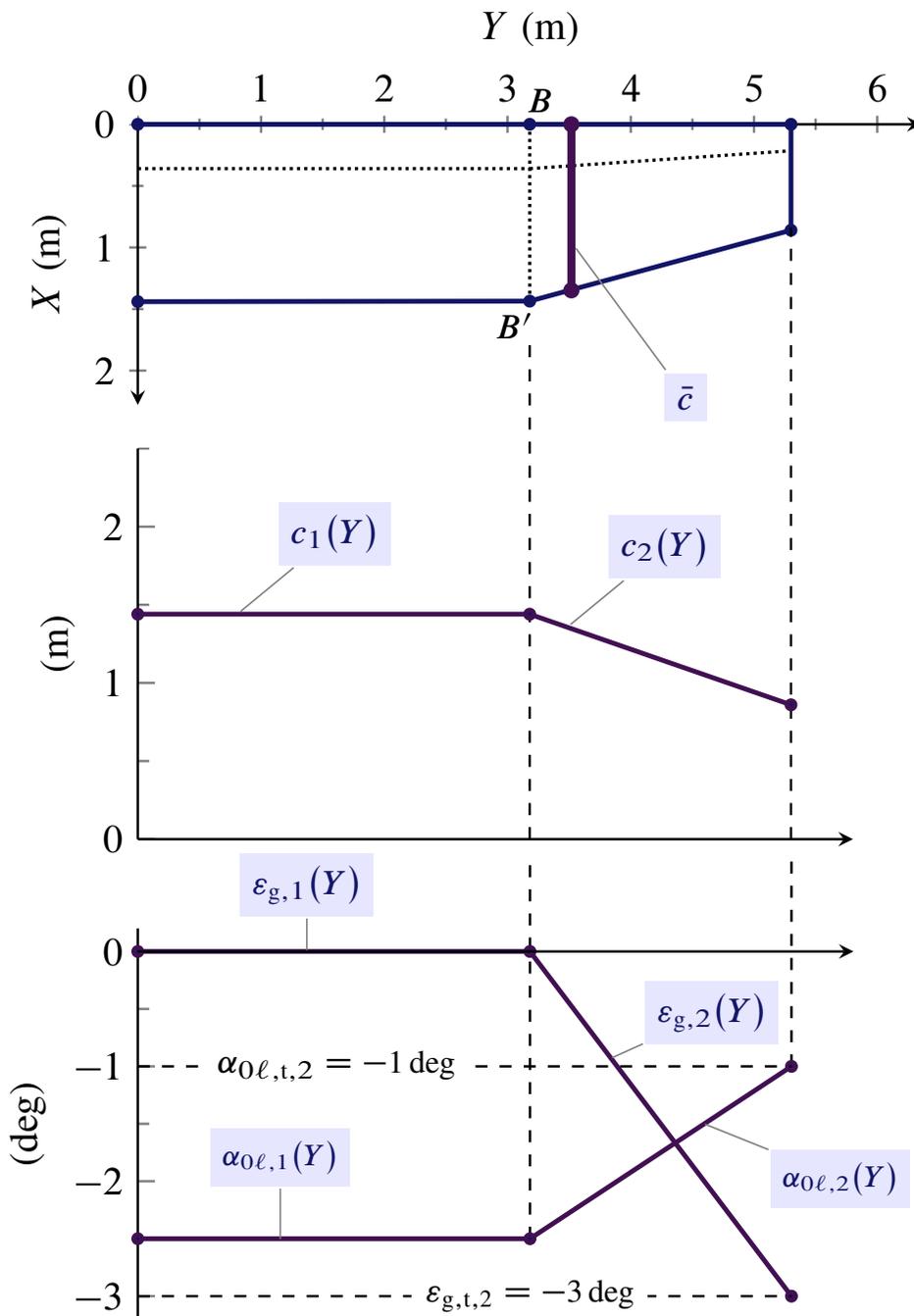


Figura 4.11 Forma in pianta dell'ala *cranked* assegnata nell'esempio 4.7. Sono riportate anche le leggi lineari a tratti della corda, dell'angolo di portanza nulla di sezione e dello svergolamento geometrico.

In questa modellazione

$$\bar{\alpha}_{0l} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} \alpha_{0l}(Y) c(Y) dY$$

è il valor medio dell'angolo di portanza nulla di sezione. Il coefficiente $K_{\alpha,1}$ è concettualmente il rapporto $\Delta\alpha_{0L}/\epsilon_{g,t}$ che si legge dalla figura 4.12, funzione dell'angolo di freccia $\Lambda_{c/4}$, dell'allungamento alare \mathcal{R} e del rapporto di rastremazione λ . Il coefficiente $K_{\alpha,2}$ è un fattore di correzione dovuto agli eventuali effetti della comprimibilità, si legge dalla figura 4.13 ed è funzione del numero di Mach di volo, ovvero del prodotto $M \cos \Lambda_{c/4}$, e del valor medio dello spessore percentuale dei profili (\bar{t}/c) .

Vanno ricostruite le leggi di variazione lungo l'apertura: (i) della corda, (ii) dell'angolo di portanza nulla di sezione, (iii) dello spessore percentuale di sezione. In mancanza di specifiche indicazioni, si può assumere che le ultime due leggi siano lineari.

Nell'esempio 4.3, per quanto riguarda le corde, si è ricavato che

$$A_c = \underline{-0,269}, \quad B_c = \underline{5,20 \text{ m}}$$

e

$$c(Y) = A_c Y + B_c = -0,269 Y + 5,20 \text{ m}$$

Per gli angoli di portanza nulla di sezione vale la legge lineare $\alpha_{0\ell}(Y) = A_\alpha Y + B_\alpha$ con

$$A_\alpha = \frac{\alpha_{0\ell,t} - \alpha_{0\ell,r}}{b/2} = 2 \frac{-0,0262 \text{ rad} - (-0,0524 \text{ rad})}{26,80 \text{ m}} = \underline{0,00195 \text{ rad/m}}$$

$$B_\alpha = \alpha_{0\ell,r} = \underline{-0,0524 \text{ rad}}$$

dunque

$$\alpha_{0\ell}(Y) = A_\alpha Y + B_\alpha = (0,00195 \text{ rad/m}) Y - 0,0524 \text{ rad}$$

La legge dello spessore percentuale dei profili si ricava analogamente, ponendo $(t/c)(Y) = A_{t/c} Y + B_{t/c}$ con

$$A_{t/c} = \frac{(t/c)_t - (t/c)_r}{b/2} = 2 \frac{0,09 - 0,1500}{26,80 \text{ m}} = \underline{-0,00448 \text{ m}^{-1}}$$

$$B_{t/c} = (t/c)_r = \underline{0,15}$$

dunque

$$(t/c)(Y) = A_{t/c} Y + B_{t/c} = (-0,00448 \text{ m}^{-1}) Y + 0,15$$

L'ala assegnata ha un rapporto di rastremazione

$$\lambda = \frac{c_t}{c_r} = \frac{1,60 \text{ m}}{5,20 \text{ m}} = \underline{0,31}$$

una superficie alare

$$\begin{aligned} S &= \frac{b}{2} c_r (1 + \lambda) \\ &= 0,50 \cdot 26,8 \text{ m} \cdot 5,20 \text{ m} \cdot (1 + 0,31) = \underline{91,1 \text{ m}^2} \end{aligned}$$

un allungamento

$$\mathcal{R} = \frac{b^2}{S} = \frac{(26,8 \text{ m})^2}{91,1 \text{ m}^2} = \underline{7,88}$$

e un angolo di freccia

$$\tan \Lambda_{c/4} = \tan(0,480 \text{ rad}) - \frac{1,00 \cdot (1 - 0,31)}{7,88 \cdot (1 + 0,31)} \Rightarrow \Lambda_{c/4} = \underline{0,426 \text{ rad}} = \underline{24,4 \text{ deg}}$$

A questo punto è possibile calcolare i valori medi

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{0\ell} &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} \alpha_{0\ell}(Y) c(Y) dY = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} (A_\alpha Y + B_\alpha) (A_c Y + B_c) dY \\ &= \frac{2}{91,1 \text{ m}^2} \int_{0\text{m}}^{13,4\text{m}} (0,00195 \text{ rad/m } Y - 0,0524 \text{ rad}) (-0,269 Y + 5,20 \text{ m}) dY \\ &= \underline{-0,0416 \text{ rad}} = \underline{-2,40 \text{ deg}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(t/c)} &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} (t/c)(Y) c(Y) dY = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} (A_{t/c} Y + B_{t/c}) (A_c Y + B_c) dY \\ &= \frac{2}{91,1 \text{ m}^2} \int_{0\text{m}}^{13,4\text{m}} (-0,00448 \text{ m}^{-1} Y + 0,150) (-0,269 Y + 5,20 \text{ m}) dY \\ &= \underline{0,125} \end{aligned}$$

Con i valori su calcolati dalla figura 4.12 si legge

$$\Lambda_{c/4} = 24,4 \text{ deg} , \mathcal{R} = 7,88 , \lambda = 0,31 \xRightarrow{\text{fig. 4.12}} K_{\alpha,1} = \frac{\Delta\alpha_{0L}}{\epsilon_{g,t}} = \underline{-0,381}$$

e dalla figura 4.13 si legge

$$M \cos \Lambda_{c/4} = 0,64 , \overline{(t/c)} = 0,125 \xRightarrow{\text{fig. 4.13}} K_{\alpha,2} = \frac{\alpha_{0L}}{\alpha_{0L}|_{M=0,30}} = \underline{0,85}$$

Pertanto, l'ala assegnata, al numero di Mach specificato, ha un angolo di portanza nulla

$$\begin{aligned} \alpha_{0L} &= (\bar{\alpha}_{0\ell} + K_{\alpha,1} \epsilon_{g,t}) K_{\alpha,2} \\ &= (-0,0416 \text{ rad} + (-0,381)(-0,0262 \text{ rad})) \cdot 0,85 \\ &= \underline{-0,0269 \text{ rad}} = \underline{-1,54 \text{ deg}} \end{aligned}$$

Secondo la modellazione qui introdotta questo valore dell'angolo di portanza nulla dell'ala è legato al particolare valore del numero di Mach di volo. Per un prodotto $M \cos \Lambda_{c/4}$ sufficientemente elevato α_{0L} varierà al variare del numero di Mach per effetto del fattore di correzione per comprimibilità $K_{\alpha,2}$.

Verificare che l'angolo di portanza nulla calcolato con la formula dell'esempio 4.6 è

$$\alpha_{0L} = \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)] c(Y) dY = \underline{-0,0308 \text{ rad}} = \underline{-1,77 \text{ deg}}$$



Esercizio 4.2: Angolo di portanza nulla di un'ala finita (metodo grafico)



Con il metodo grafico e per la stessa ala dell'esempio 4.8 calcolare l'angolo di portanza nulla α_{0L} ai seguenti numeri di Mach di volo: $M_1 = 0,3$, $M_2 = 0,5$, $M_3 = 0,6$.



Esempio 4.9: Gradiente di portanza di un'ala finita



È assegnata un'ala finita a bordi dritti e a freccia nulla, cioè con angolo di freccia della linea dei fuochi $\Lambda_{c/4} = 0^\circ$. Le rimanenti caratteristiche della superficie portante sono le seguenti:

$$\text{corde: } c_r = 5,20 \text{ m}, c_t = 2,34 \text{ m}, \lambda = 0,45,$$

$$\text{apertura e superficie: } b = 26,80 \text{ m}, S = 101,04 \text{ m}^2, \mathcal{R} = 7,11,$$

$$\text{gradienti } C_{\ell\alpha} \text{ di profilo: } C_{\ell\alpha,r} = 6,15 \text{ rad}^{-1}, C_{\ell\alpha,t} = 6,05 \text{ rad}^{-1},$$

Per l'ala assegnata si vuole calcolare il gradiente $C_{L\alpha}$.

Se si assumono le seguenti leggi lineari

$$c(Y) = A_c Y + B_c \quad C_{\ell\alpha}(Y) = A_{C_{\ell\alpha}} Y + B_{C_{\ell\alpha}}$$

si ha, per quanto riguarda la legge delle corde di sezione

$$A_c = \frac{c_t - c_r}{b/2} = 2 \frac{2,34 \text{ m} - 5,20 \text{ m}}{26,80 \text{ m}} = \underline{-0,213}$$

$$B_c = c_r = \underline{5,20 \text{ m}}$$

dunque

$$c(Y) = A_c Y + B_c = -0,213 Y + 5,20 \text{ m}$$

Analogamente, per la legge dei gradienti del coefficiente di portanza di sezione

$$\begin{aligned} A_{C_{\ell\alpha}} &= \frac{C_{\ell\alpha,t} - C_{\ell\alpha,r}}{b/2} = 2 \frac{6,05 \text{ rad}^{-1} - 6,15 \text{ rad}^{-1}}{26,80 \text{ m}} \\ &= \underline{-0,00746 \text{ (rad m)}^{-1}} = \underline{-0,0001302 \text{ (deg m)}^{-1}} \end{aligned}$$

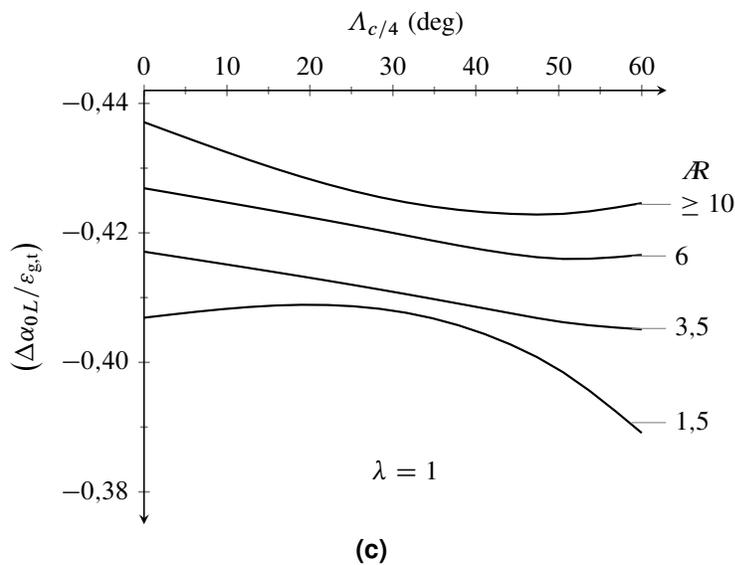
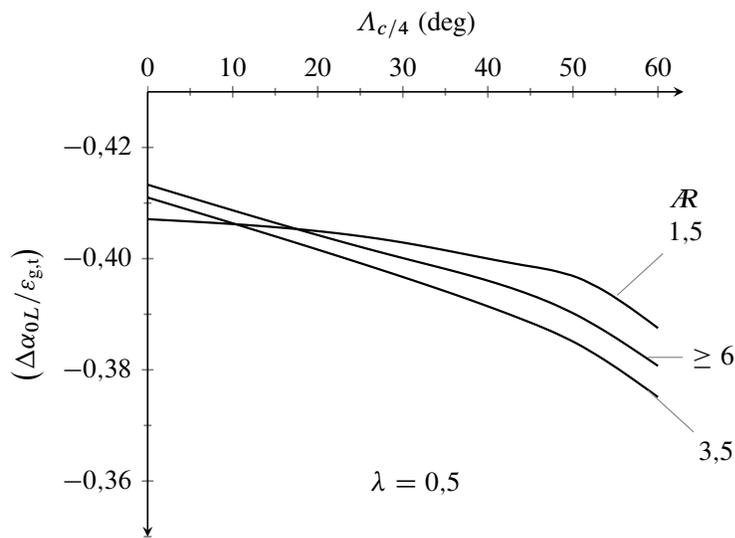
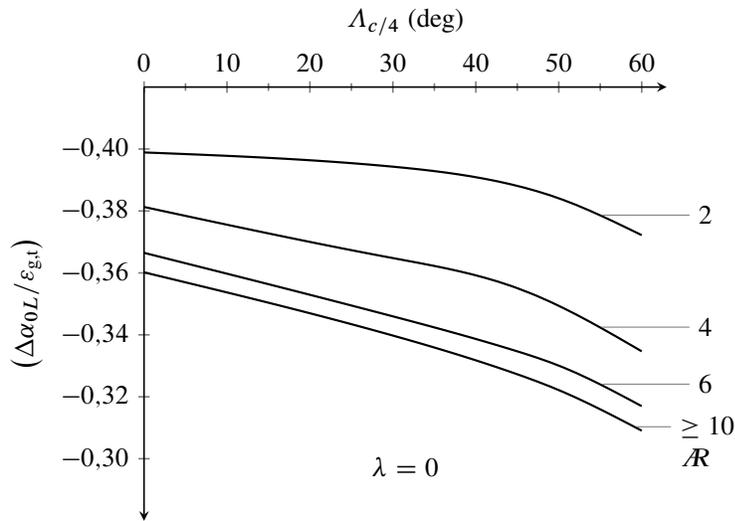


Figura 4.12 Fattore di correzione $(\Delta\alpha_{0L}/\epsilon_t)$ per il calcolo dell'angolo di portanza nulla di un'ala finita α_{0L} .

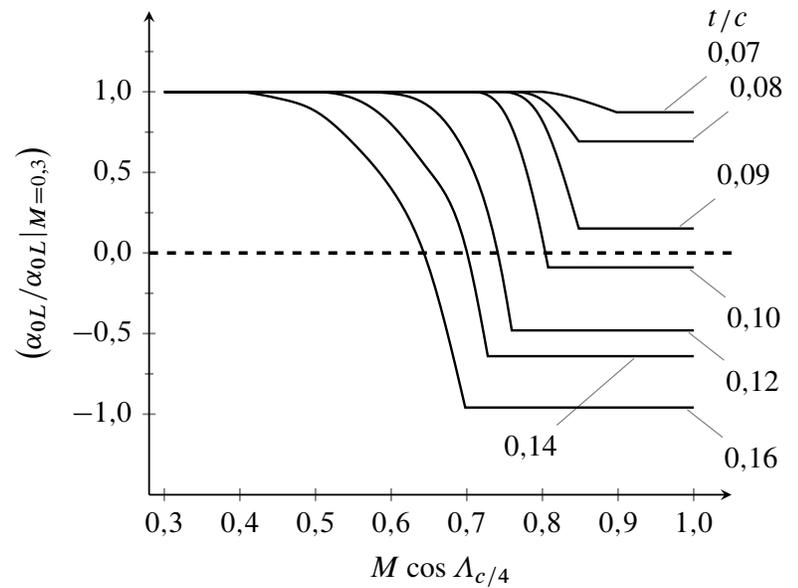


Figura 4.13 Fattore di correzione $(\alpha_{0L}/\alpha_{0L}|_{M=0,3})$ che incorpora gli effetti della comprimibilità per il calcolo dell'angolo di portanza nulla di un'ala finita α_{0L} .

$$B_{C_{l\alpha}} = C_{l\alpha,r} = \underline{6,150 \text{ rad}^{-1}}$$

cioè

$$C_{l\alpha}(Y) = A_{C_{l\alpha}} Y + B_{C_{l\alpha}} = -0,00746 (\text{rad m})^{-1} Y + 6,150 \text{ rad}^{-1}$$

Le leggi ricavate sopra permettono di calcolare il gradiente medio

$$\begin{aligned} \bar{C}_{l\alpha} &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} c(Y) C_{l\alpha}(Y) dY \\ &= \frac{2}{101,04 \text{ m}^2} \int_0^{13,4 \text{ m}} [-0,00746 (\text{rad m})^{-1} Y + 6,150 \text{ rad}^{-1}] \\ &\quad \cdot [-0,213 Y + 5,20 \text{ m}] dY \\ &= \underline{6,106 \text{ rad}^{-1}} = \underline{0,1066 \text{ deg}^{-1}} \end{aligned}$$

Esso può essere utilizzato per il calcolo del gradiente di portanza dell'ala finita

$$C_{L\alpha} = \frac{\bar{C}_{l\alpha}}{1 + \frac{\bar{C}_{l\alpha}}{\pi Re_w}} = \frac{6,106 \text{ rad}^{-1}}{1 + \frac{6,106 \text{ rad}^{-1}}{3,14 \cdot 7,11 \cdot 0,90}} = \underline{4,683 \text{ rad}^{-1}} = \underline{0,0817 \text{ deg}^{-1}}$$



Esempio 4.10: Gradiente di portanza di un'ala finita. Effetto dell'allungamento

Si vuole calcolare il gradiente $C_{L\alpha}$ di un'ala simile a quella dell'esempio 4.9 verificando l'effetto della variazione di allungamento alare.

Per l'ala di riferimento si ha:

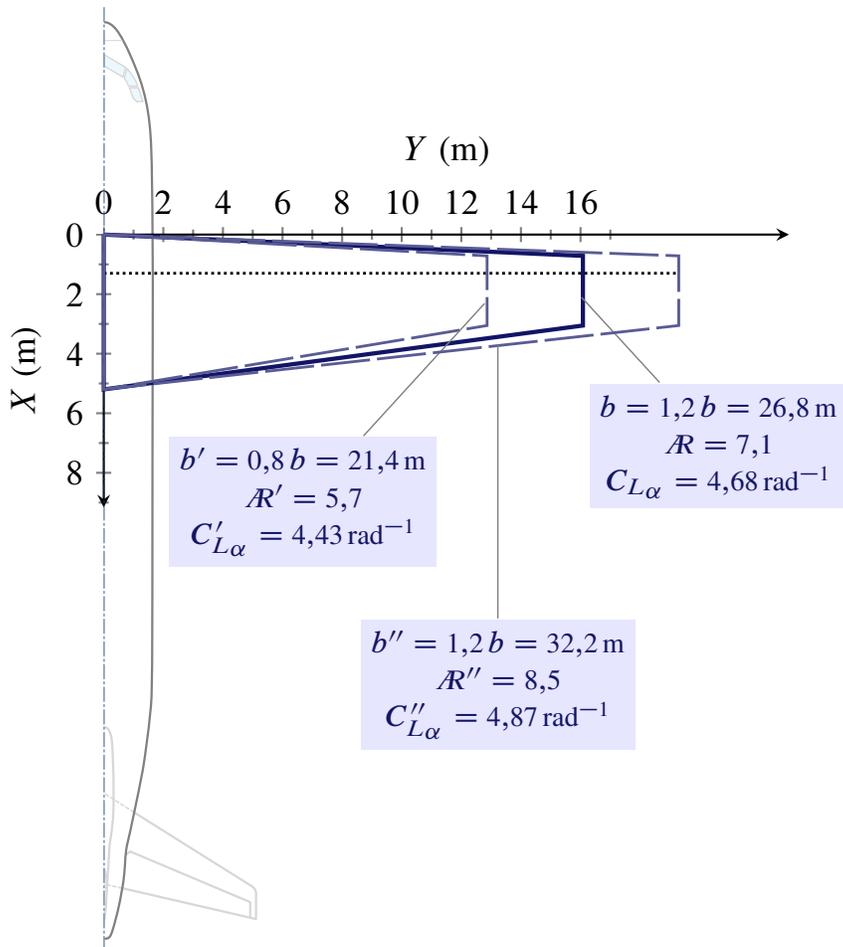


Figura 4.14 Forme in pianta al variare dell'apertura, a parità di corde di radice e di estremità.

$$b = 26,80 \text{ m}, \mathcal{R} = 7,11, S = 101,04 \text{ m}^2, \bar{C}_{\ell\alpha} = 6,106 \text{ rad}^{-1}$$

$$C_{L\alpha} = 4,68 \text{ rad}^{-1} = 0,082 \text{ deg}^{-1}$$

Per un'ala di pari corde di radice e rapporto di rastremazione, ma di apertura b' diminuita del 20% rispetto alla b si ha:

$$b' = 21,44 \text{ m}, \mathcal{R}' = 5,69, S' = 80,83 \text{ m}^2, \bar{C}'_{\ell\alpha} = 6,1063 \text{ rad}^{-1}$$

$$C'_{L\alpha} = 4,43 \text{ rad}^{-1} = 0,077 \text{ deg}^{-1}$$

Analogamente, per un'ala di apertura b'' aumentata del 20% rispetto alla b si ha:

$$b'' = 32,16 \text{ m}, \mathcal{R}'' = 8,53, S'' = 121,24 \text{ m}^2, \bar{C}''_{\ell\alpha} = 6,1063 \text{ rad}^{-1}$$

$$C''_{L\alpha} = 4,87 \text{ rad}^{-1} = 0,085 \text{ deg}^{-1}$$

I valori dei gradienti $C'_{L\alpha}$ e $C''_{L\alpha}$ sono calcolati applicando il procedimento dell'esempio 4.9. Si osserva che per un allungamento via via crescente ($\mathcal{R}' < \mathcal{R} < \mathcal{R}''$) cresce il gradiente della retta di portanza dell'ala ($C'_{L\alpha} < C_{L\alpha} < C''_{L\alpha}$).

Si veda la figura 4.14 per una conferma grafica dei risultati precedenti.



Esempio 4.11: *Gradiente di portanza di un'ala finita, formula di Polhamus*



Si vuole calcolare il gradiente $C_{L\alpha}$ di un'ala finita a freccia con una formula nota con il nome di *formula di Polhamus*:

$$C_{L\alpha} = \frac{2\pi \mathcal{R}}{2 + \sqrt{4 + \frac{\mathcal{R}^2(1 - M^2)}{k_p^2} \left(1 + \frac{\tan^2 \Lambda_{c/2}}{1 - M^2}\right)}} \quad (4.2)$$

con

$$k_p = \begin{cases} 1 + \mathcal{R} \frac{1,87 - 0,000233 \Lambda_{le}}{100} & \text{se } \mathcal{R} < 4 \\ 1 + \frac{(8,2 - 2,3 \Lambda_{le}) - \mathcal{R}(0,22 - 0,153 \Lambda_{le})}{100} & \text{se } \mathcal{R} \geq 4 \end{cases} \quad (4.3)$$

e Λ_{le} in radianti. La (4.2) è da ritenersi applicabile per ali finite aventi

$$\Lambda_{le} < 32^\circ, \quad 0,4 < \lambda \leq 1, \quad 3 \leq \mathcal{R} \leq 8 \quad (4.4)$$

e per un numero di Mach di volo $M < M_{cr}$.

Si consideri un'ala con bordi d'attacco e d'uscita rettilinei, di apertura $b = 26,8$ m, corda di radice $c_r = 5,20$ m, corda d'estremità $c_t = 2,18$ m e freccia del bordo d'attacco $\Lambda_{le} = 27,5$ deg. Si assuma un numero di Mach di volo $M = 0,7$ e un $M_{cr} \simeq 0,79$.

Si lascia per esercizio al lettore il compito di verificare che la forma in pianta assegnata ha un rapporto di rastremazione $\lambda = 0,42$, una superficie alare $S = 99,0$ m², un allungamento alare $\mathcal{R} = 7,26$ e un angolo $\Lambda_{c/2} = 0,387$ rad = 22,2 deg.

I dati dell'ala sono tali da soddisfare le condizioni (4.4) e, sostituiti nelle (4.2)-(4.3), permettono di ricavare

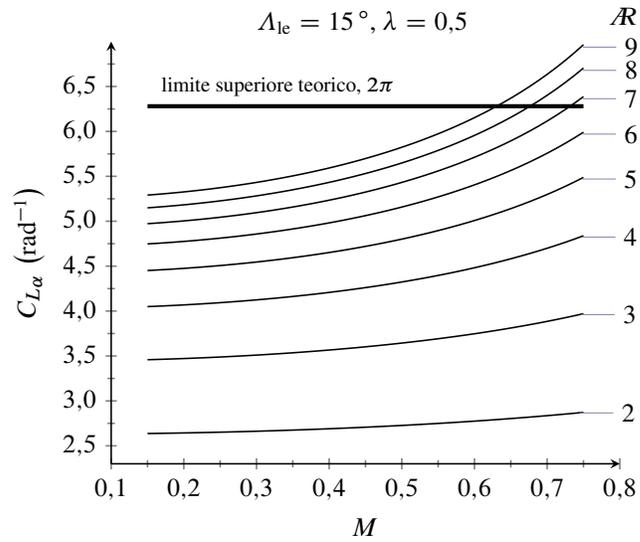
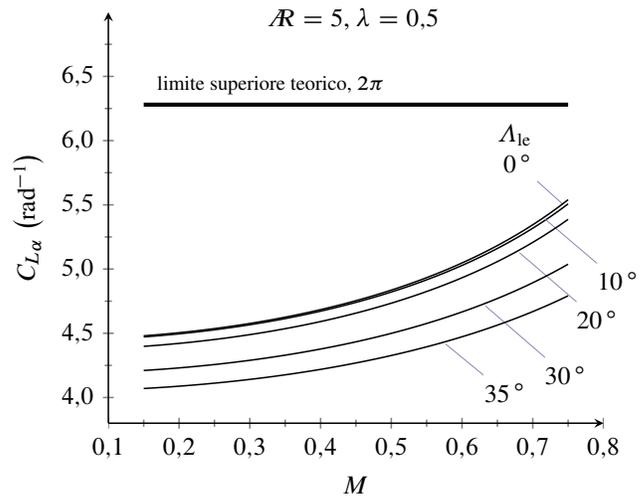
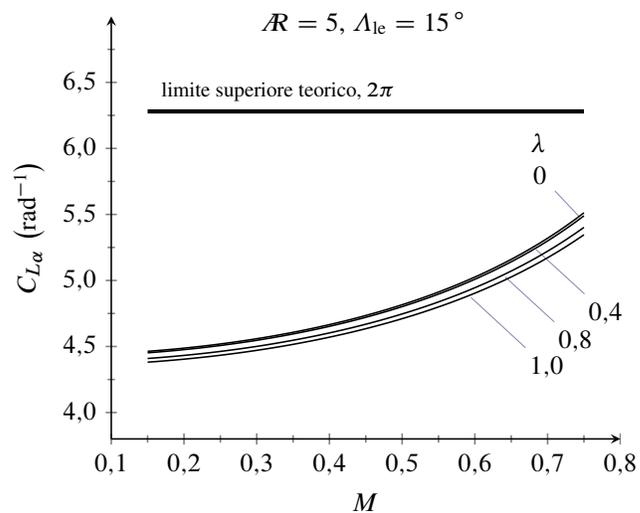
$$k_p = 1 + \frac{(8,2 - 2,3 \cdot 0,480 \text{ rad}) - 7,26 (0,22 - 0,153 \cdot 0,480 \text{ rad})}{100} = \underline{1,06}$$

e

$$\begin{aligned} C_{L\alpha} &= \frac{2\pi \mathcal{R}}{2 + \sqrt{4 + \frac{\mathcal{R}^2(1 - M^2)}{k_p^2} \left(1 + \frac{\tan^2 \Lambda_{c/2}}{1 - M^2}\right)}} \\ &= \frac{6,280 \cdot 7,26}{2 + \sqrt{4 + \frac{7,26^2(1 - 0,70^2)}{1,06^2} \left(1 + \frac{\tan^2 0,387 \text{ rad}}{1 - 0,70^2}\right)}} = \underline{5,72 \text{ rad}^{-1}} = \underline{0,100 \text{ deg}^{-1}} \end{aligned}$$



Esempio 4.12: Centro aerodinamico di un'ala a bordi dritti, rastremata, a freccia 

(a) $C_{L\alpha}$ al variare di M , per diversi valori del parametro \mathcal{R} .(b) $C_{L\alpha}$ al variare di M , per diversi valori del parametro Δ_{le} .(c) $C_{L\alpha}$ al variare di M , per diversi valori del parametro λ .**Figura 4.15** Rappresentazioni grafiche della formula di Polhamus per il calcolo del gradiente $C_{L\alpha}$.

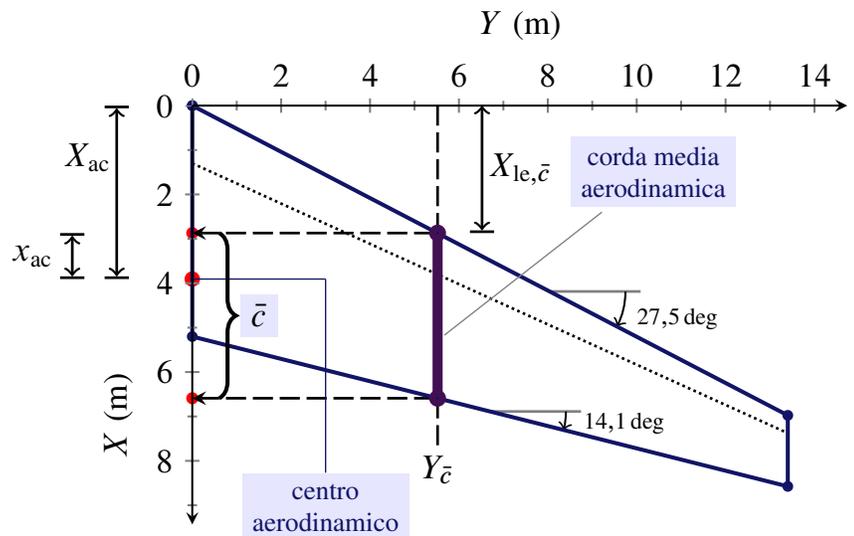


Figura 4.16 Centro aerodinamico dell'ala assegnata nell'esempio 4.12.

Si consideri l'ala assegnata nell'esempio 4.3. Con l'aiuto dei grafici riportati nelle figure 4.17, 4.18 e 4.19, calcolare la posizione del centro aerodinamico per un numero di Mach di volo $M = 0,70$.

Dai dati e dalla figura 4.17 si legge

$$\lambda = 0,31 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \underline{1,395}$$

dalla figura 4.18 si legge

$$\Lambda_{le} = 27,5 \text{ deg} , \quad \mathcal{R} = 7,9 , \quad \lambda = 0,31 \quad \Rightarrow \quad K_2 = \underline{0,558}$$

dalla figura 4.19 si legge

$$\Lambda_{le} = 27,5 \text{ deg} , \quad M = 0,70 , \quad \mathcal{R} = 7,9 , \quad \lambda = 0,31 \quad \Rightarrow \quad \frac{X'_{ac}}{c_r} = \underline{0,758}$$

Si ottiene dunque

$$\frac{x_{ac}}{\bar{c}} = K_1 \left(\frac{X'_{ac}}{c_r} - K_2 \right) = 1,395 \left(0,758 - 0,558 \right) = \underline{0,278}$$

La rappresentazione grafica del centro aerodinamico dell'ala assegnata ($X_{ac}, 0$) è data dalla figura 4.16. La posizione del X_{ac} è facilmente calcolabile come

$$\begin{aligned} X_{ac} &= X_{le, \bar{c}} + \left(\frac{x_{ac}}{\bar{c}} \right) \bar{c} \\ &= 2,87 \text{ m} + 0,278 \cdot 3,72 \text{ m} = 2,87 \text{ m} + 1,04 \text{ m} = \underline{3,91 \text{ m}} \end{aligned}$$



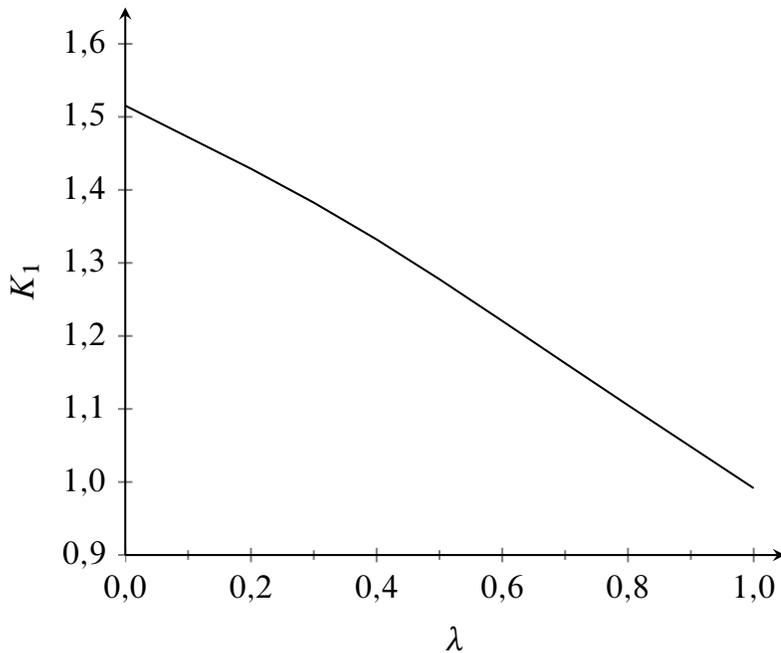


Figura 4.17 Coefficiente K_1 nella formula di calcolo del centro aerodinamico di un'ala finita.

Esempio 4.13: *Centro aerodinamico di un'ala cranked*



In questo esempio verrà calcolata la posizione del centro aerodinamico di un'ala simile a quella di un Boeing 787. L'ala considerata è di tipo *cranked*, come si vede dalla forma in pianta riportata nella figura 4.20, e possiede le seguenti caratteristiche:

Pannello 1 (pannello interno)

corde: $c_{r,1} = 11,87 \text{ m}$, $c_{t,1} = 6,42 \text{ m}$, $\lambda_1 = 0,54$,

apertura e superficie: $b_1 = 19,36 \text{ m}$, $S_1 = 177,05 \text{ m}^2$, $\mathcal{AR}_1 = 2,12$,

angoli di freccia: $\Lambda_{le,1} = 0,5620 \text{ rad} = 32,2 \text{ deg}$,

$\Lambda_{te,1} = 0,0667 \text{ rad} = 3,8 \text{ deg}$,

gradienti $C_{\ell\alpha}$ di profilo: $C_{\ell\alpha,r,1} = 6,15 \text{ rad}^{-1} = 0,1073 \text{ deg}^{-1}$,

$C_{\ell\alpha,t,1} = 6,05 \text{ rad}^{-1} = 0,1056 \text{ deg}^{-1}$,

svergolamenti: $\alpha_{0\ell,r,1} = -0,044 \text{ rad} = -2,5 \text{ deg}$,

$\alpha_{0\ell,t,1} = -0,044 \text{ rad} = -2,5 \text{ deg}$,

$\epsilon_{g,t,1} = 0 \text{ rad} = 0 \text{ deg}$,

centri aerodinamici di profilo: $\bar{x}_{ac,2D,1,r} = 0,25$, $\bar{x}_{ac,2D,1,t} = 0,25$,

coefficienti $C_{m_{ac}}$ di profilo: $C_{m_{ac},r,1} = -0,080$, $C_{m_{ac},t,1} = -0,080$,

Pannello 2 (pannello esterno)

corde: $c_{r,2} = 6,42 \text{ m}$, $c_{t,2} = 1,69 \text{ m}$, $\lambda_2 = 0,26$,

apertura e superficie: $b_2 = 39,31 \text{ m}$, $S_2 = 159,42 \text{ m}^2$, $\mathcal{AR}_2 = 9,69$,

angoli di freccia: $\Lambda_{le,2} = 0,5620 \text{ rad} = 32,2 \text{ deg}$,

$\Lambda_{te,2} = 0,3712 \text{ rad} = 21,3 \text{ deg}$,

gradienti $C_{\ell\alpha}$ di profilo: $C_{\ell\alpha,r,2} = 6,05 \text{ rad}^{-1} = 0,1056 \text{ deg}^{-1}$,

$C_{\ell\alpha,t,2} = 6,01 \text{ rad}^{-1} = 0,1049 \text{ deg}^{-1}$,

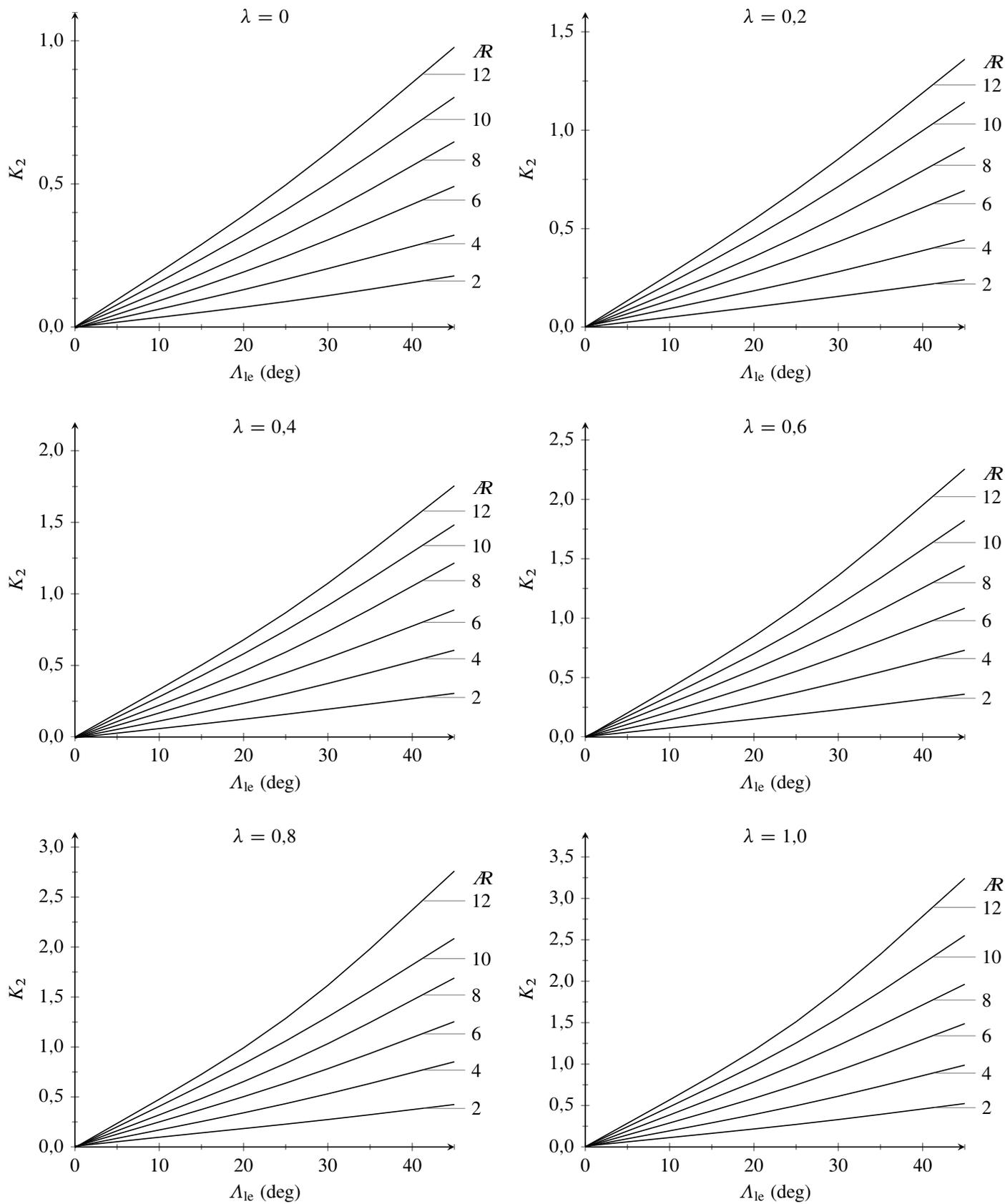


Figura 4.18 Coefficiente K_2 nella formula di calcolo del centro aerodinamico di un'ala finita.

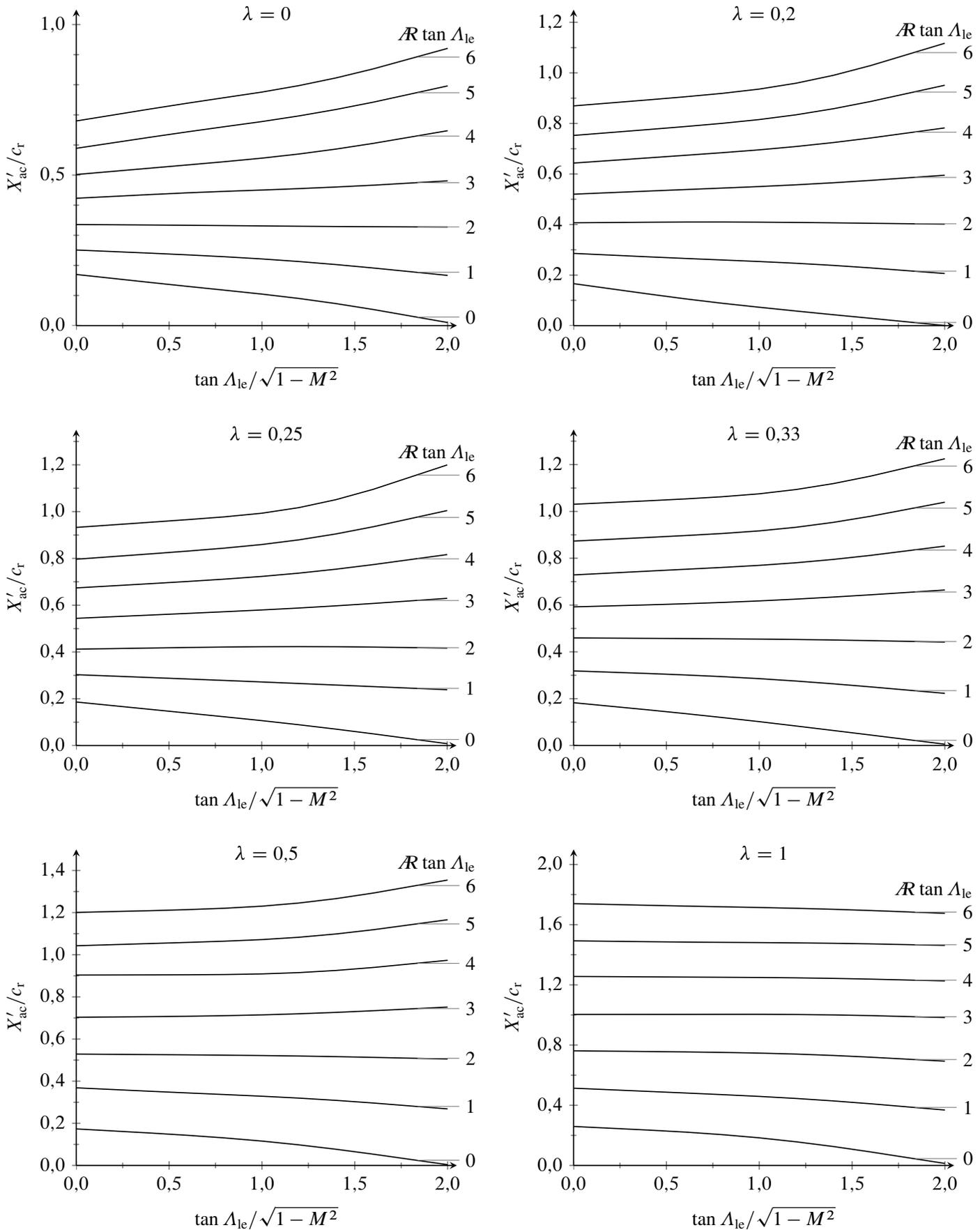


Figura 4.19 Posizione adimensionale X'_{ac}/c_r nella formula di calcolo del centro aerodinamico di un'ala finita.

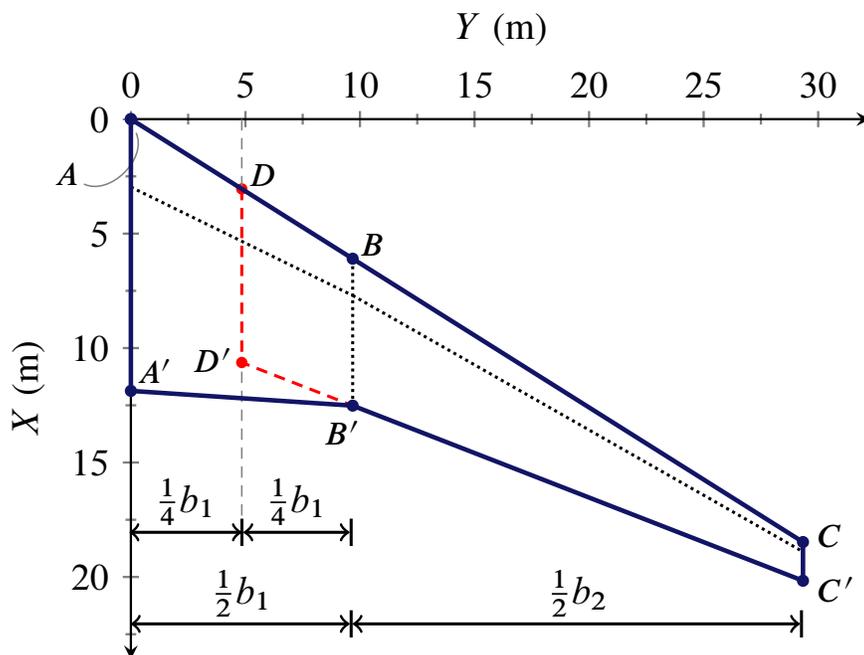


Figura 4.20 Ala *cranked* proposta nell'esempio 4.13. Sono evidenziati il pannello interno $ABB'A'$, il pannello esterno $BCC'B'$ e il pannello esterno esteso $DCC'D'$ (*constructed panel*) utilizzato per il calcolo del centro aerodinamico dell'ala.

$$\begin{aligned} \text{svergolamenti: } \alpha_{0l,r,2} &= -0,044 \text{ rad} = -2,5 \text{ deg}, \\ \alpha_{0l,t,2} &= -0,017 \text{ rad} = -1 \text{ deg}, \\ \epsilon_{g,t,2} &= -0,052 \text{ rad} = -3 \text{ deg}, \end{aligned}$$

$$\text{centri aerodinamici di profilo: } \bar{x}_{ac,2D,2,r} = 0,25, \bar{x}_{ac,2D,2,t} = 0,25,$$

$$\text{coefficienti } C_{mac} \text{ di profilo: } C_{mac,r,2} = -0,080, C_{mac,t,2} = -0,040,$$

$$\text{condizione di volo: } M = 0,65.$$

Dai dati si ricava agevolmente la legge delle corde

$$c(Y) = \begin{cases} c_1(Y) = A_{c,1} Y + B_{c,1} & \text{per } 0 \leq Y \leq \frac{1}{2}b_1 \\ c_2(Y) = A_{c,2} \left(Y - \frac{b_1}{2} \right) + B_{c,2} & \text{per } \frac{1}{2}b_1 < Y \leq \frac{1}{2}b \end{cases}$$

con

$$A_{c,1} = \frac{c_{t,1} - c_{r,1}}{b_1/2} = 2 \frac{6,42 \text{ m} - 11,87 \text{ m}}{19,36 \text{ m}} = \underline{\underline{-0,563}}$$

$$B_{c,1} = c_{r,1} = \underline{\underline{11,87 \text{ m}}}$$

$$A_{c,2} = \frac{c_{t,2} - c_{r,2}}{b_2/2} = 2 \frac{1,69 \text{ m} - 6,42 \text{ m}}{39,31 \text{ m}} = \underline{\underline{-0,241}}$$

$$B_{c,2} = c_{r,2} = \underline{\underline{6,42 \text{ m}}}$$

Pertanto, risulta

$$c(Y) = \begin{cases} c_1(Y) = -0,563 Y + 6,42 \text{ m} & \text{per } 0 \text{ m} \leq Y \leq 9,68 \text{ m} \\ c_2(Y) = -0,241 (Y - 9,68 \text{ m}) + 6,42 \text{ m} & \text{per } 9,68 \text{ m} < Y \leq 29,34 \text{ m} \end{cases}$$

Dalla figura 4.20 si osservano i punti A , B , B' e A' che definiscono la porzione interna dell'ala. Il pannello interno ha un rapporto di rastremazione

$$\lambda_1 = \frac{c_{t,1}}{c_{r,1}} = \frac{6,42 \text{ m}}{11,87 \text{ m}} = \underline{0,54}$$

una superficie

$$S_1 = \frac{b_1}{2} c_{r,1} (1 + \lambda_1) = 0,50 \cdot 19,4 \text{ m} \cdot 11,87 \text{ m} \cdot (1 + 0,54) = \underline{177,1 \text{ m}^2}$$

e un allungamento

$$\mathcal{R}_1 = \frac{b_1^2}{S_1} = \frac{(19,4 \text{ m})^2}{177,1 \text{ m}^2} = \underline{2,12}$$

Da tali valori si ricava una corda media aerodinamica

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= \frac{2}{3} c_{r,1} \frac{1 + \lambda_1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_1} \\ &= 0,67 \cdot 11,87 \text{ m} \cdot \frac{1 + 0,54 + 0,54^2}{1 + 0,54} = \underline{9,42 \text{ m}} \end{aligned}$$

La sezione alare del pannello interno avente corda \bar{c}_1 ha bordo d'attacco di ascissa

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}_1} &= \frac{b_1}{6} \frac{1 + 2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \tan \Lambda_{le,1} \\ &= \frac{19,4 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,54}{1 + 0,54} \cdot \tan (0,562 \text{ rad}) = \underline{2,75 \text{ m}} \end{aligned}$$

corrispondente alla stazione

$$\begin{aligned} Y_{\bar{c}_1} &= \frac{b_1}{6} \frac{1 + 2\lambda_1}{1 + \lambda_1} \\ &= \frac{19,4 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,54}{1 + 0,54} = \underline{4,36 \text{ m}} \end{aligned}$$

lungo l'apertura alare.

Analogamente, dalla figura 4.20 si osservano i punti B , C , C' e B' che definiscono la porzione esterna dell'ala. Per il pannello esterno si ha un rapporto di rastremazione

$$\lambda_2 = \frac{c_{t,2}}{c_{r,2}} = \frac{1,69 \text{ m}}{6,42 \text{ m}} = \underline{0,26}$$

una superficie

$$S_2 = \frac{b_2}{2} c_{r,2} (1 + \lambda_2) = 0,50 \cdot 39,3 \text{ m} \cdot 6,42 \text{ m} \cdot (1 + 0,26) = \underline{159,4 \text{ m}^2}$$

e un allungamento

$$\mathcal{R}_2 = \frac{b_2^2}{S_2} = \frac{(39,3 \text{ m})^2}{159,4 \text{ m}^2} = \underline{9,69}$$

Conseguentemente, si ha una corda media aerodinamica

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= \frac{2}{3} c_{r,2} \frac{1 + \lambda_2 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_2} \\ &= 0,67 \cdot 6,42 \text{ m} \cdot \frac{1 + 0,26 + 0,26^2}{1 + 0,26} = \underline{4,52 \text{ m}} \end{aligned}$$

Il bordo d'attacco del profilo di corda \bar{c}_2 dista dunque

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}_2} - X_B &= \frac{b_2}{6} \frac{1 + 2\lambda_2}{1 + \lambda_2} \tan \Lambda_{le,2} \\ &= \frac{39,3 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,26}{1 + 0,26} \cdot \tan(0,562 \text{ rad}) = \underline{4,99 \text{ m}} \end{aligned}$$

in senso longitudinale dal punto B . Pertanto

$$\begin{aligned} X_{le, \bar{c}_2} &= X_B + 4,99 \text{ m} = \frac{b_1}{2} \tan \Lambda_{le,1} + 4,99 \text{ m} \\ &= 9,68 \text{ m} \cdot \tan(0,562 \text{ rad}) + 4,99 \text{ m} = 6,10 \text{ m} + 4,99 \text{ m} = \underline{11,08 \text{ m}} \end{aligned}$$

Conseguentemente, la stazione che individua lungo l'apertura il profilo del pannello esterno di corda \bar{c}_2 è

$$\begin{aligned} Y_{\bar{c}_2} &= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{6} \frac{1 + 2\lambda_2}{1 + \lambda_2} \\ &= 9,68 \text{ m} + \frac{39,3 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,26}{1 + 0,26} = \underline{9,68 \text{ m} + 7,92 \text{ m} = 17,60 \text{ m}} \end{aligned}$$

I calcoli precedenti permettono di determinare la corda media aerodinamica \bar{c} dell'ala, che ha superficie totale

$$S = S_1 + S_2 = 177,1 \text{ m}^2 = \underline{336,5 \text{ m}^2}$$

e allungamento

$$\mathcal{R} = \frac{b^2}{S} = \frac{(58,67 \text{ m})^2}{336,5 \text{ m}^2} = \underline{10,23}$$

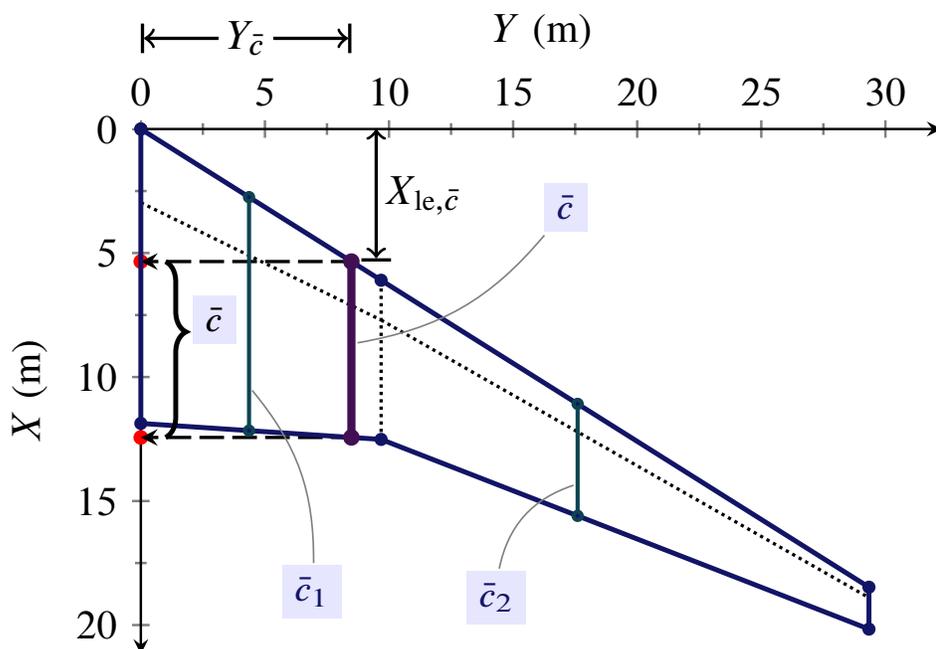


Figura 4.21 Corda media aerodinamica dell'ala proposta nell'esempio 4.13.

Il valore di \bar{c} è il seguente:

$$\bar{c} = \frac{S_1 \bar{c}_1 + S_2 \bar{c}_2}{S_1 + S_2} = \frac{177,1 \text{ m}^2 \cdot 9,42 \text{ m} + 159,4 \text{ m}^2 \cdot 4,52 \text{ m}}{177,1 \text{ m}^2 + 159,4 \text{ m}^2} = \underline{7,09 \text{ m}}$$

Essendo in questo caso $\bar{c} < c_{t,1} = 9,42 \text{ m}$, si determina la stazione

$$Y_{\bar{c}} = \frac{\bar{c} - B_{c,1}}{A_{c,1}} = \frac{7,09 \text{ m} - 11,87 \text{ m}}{-0,563} = \underline{8,48 \text{ m}}$$

lungo l'apertura corrispondente al profilo di corda \bar{c} . Tale profilo ha bordo d'attacco di ascissa

$$X_{le,\bar{c}} = Y_{\bar{c}} \tan \Lambda_{le,1} = 8,48 \text{ m} \cdot \tan (0,562 \text{ rad}) = \underline{5,34 \text{ m}}$$

Nella figura 4.21 è riportato il disegno della forma in pianta assegnata dove sono indicate le corde \bar{c}_1 , \bar{c}_2 e \bar{c} e le distanze $X_{le,\bar{c}}$ ed $Y_{\bar{c}}$.

A questo punto si procede al calcolo del centro aerodinamico dell'ala assegnata. Il metodo grafico utilizzato nell'esempio 4.12 per la determinazione del centro aerodinamico di un'ala a bordi dritti può essere applicato qui a ciascuno dei due pannelli alari. A differenza del caso di un'ala semplice, per un'ala *cranked* bisogna ricavare un pannello esterno *esteso* — detto *constructed outer panel* — come mostrato nelle figure 4.20 e 4.22. Esso si costruisce prolungando i bordi d'attacco e d'uscita del pannello 2 verso l'interno, partendo, rispettivamente, dai punti B e B' , fino a incontrare nei punti D e D' la retta parallela all'asse X di equazione $Y = \frac{1}{4}b_1$. Pertanto, nei calcoli che seguono si considera il pannello interno $\mathcal{P}_1 = ABB'A'$ e, al posto del pannello $\mathcal{P}_2 = BCC'B$, il pannello esterno esteso $\mathcal{P}_2' = DCC'D'$.

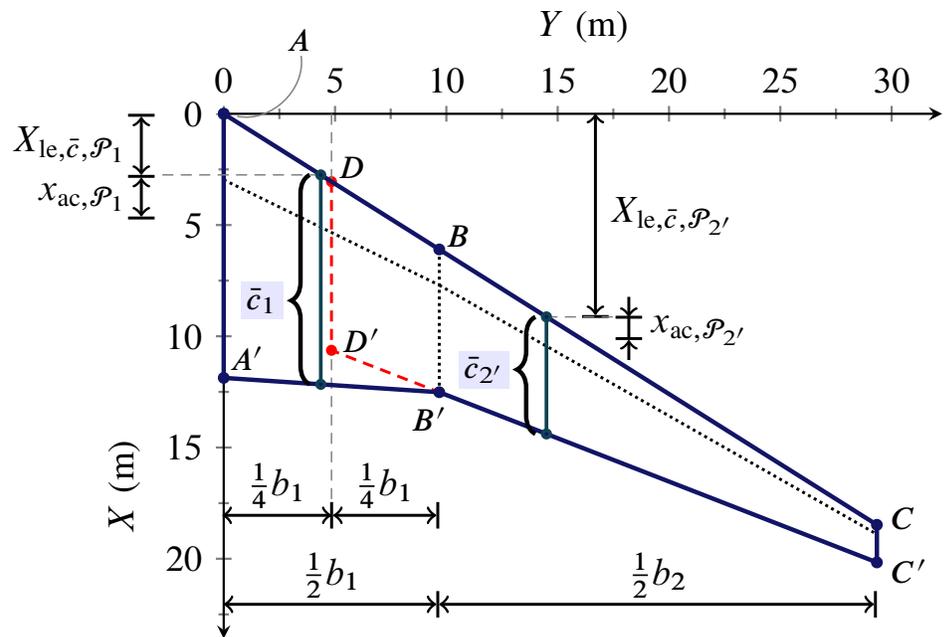


Figura 4.22 Centri aerodinamici dei pannelli $\mathcal{P}_1 = ABB'A'$ e $\mathcal{P}_{2'} = DCC'D'$.

Per quanto riguarda il pannello interno \mathcal{P}_1 , dai dati e dalla figura 4.17 si legge

$$\lambda_1 = 0,54 \quad \Rightarrow \quad K_{1,\mathcal{P}_1} = \underline{1,259}$$

dalla figura 4.18 si legge

$$\Delta_{le,1} = 32,2 \text{ deg} , \quad \mathcal{R}_1 = 2,1 , \quad \lambda_1 = 0,54 \quad \Rightarrow \quad K_{2,\mathcal{P}_1} = \underline{0,242}$$

dalla figura 4.19 si legge

$$\Delta_{le,1} = 32,2 \text{ deg} , \quad M = 0,65 , \quad \mathcal{R}_1 = 2,1 , \quad \lambda_1 = 0,54 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{X'_{ac}}{c_r} \right|_{\mathcal{P}_1} = \underline{0,411}$$

Si ottiene dunque

$$\left. \frac{x_{ac}}{\bar{c}} \right|_{\mathcal{P}_1} = K_{1,\mathcal{P}_1} \left(\left. \frac{X'_{ac}}{c_r} \right|_{\mathcal{P}_1} - K_{2,\mathcal{P}_1} \right) = 1,259 (0,411 - 0,242) = \underline{0,213}$$

Per quanto riguarda il pannello interno $\mathcal{P}_{2'}$, si ricava

$$b_{2'} = 2 \left(\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{4} b_1 \right) = 2(19,66 \text{ m} + 4,84 \text{ m}) = 48,99 \text{ m}$$

$$c_{r,2'} = A_{c,2} \left(-\frac{1}{4} b_1 \right) + B_{c,2} = -0,241 (-4,84 \text{ m}) + 6,42 \text{ m} = 7,58 \text{ m}$$

$$\lambda_{2'} = \frac{c_{t,2}}{c_{r,2'}} = \frac{1,69 \text{ m}}{7,58 \text{ m}} = \underline{0,22}$$

$$S_{2'} = \frac{b_{2'}}{2} c_{r,2'} (1 + \lambda_{2'}) = 0,50 \cdot 49,0 \text{ m} \cdot 7,58 \text{ m} \cdot (1 + 0,22) = \underline{227,2 \text{ m}^2}$$

$$\mathcal{R}_{2'} = \frac{b_{2'}^2}{S_{2'}} = \frac{(49,0 \text{ m})^2}{227,2 \text{ m}^2} = \underline{10,56}$$

Dai dati e dalla figura 4.17 si legge

$$\lambda_{2'} = 0,22 \quad \Rightarrow \quad K_{1,\mathcal{P}_{2'}} = \underline{1,435}$$

dalla figura 4.18 si legge

$$\Lambda_{1e,2} = 32,2 \text{ deg} , \quad \mathcal{R}_{2'} = 10,6 , \quad \lambda_{2'} = 0,22 \quad \Rightarrow \quad K_{2,\mathcal{P}_{2'}} = \underline{0,820}$$

dalla figura 4.19 si legge

$$\Lambda_{1e,2} = 32,2 \text{ deg} , \quad M = 0,65 , \quad \mathcal{R}_{2'} = 10,6 , \quad \lambda_{2'} = 0,22 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{X'_{ac}}{c_r} \right|_{\mathcal{P}_{2'}} = \underline{0,958}$$

A questo punto può calcolarsi la quantità

$$\frac{X_{ac}}{c_r} = \frac{\left. \frac{X'_{ac}}{c_r} \right|_{\mathcal{P}_1} S_1 C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_1} + \left. \frac{X'_{ac}}{c_r} \right|_{\mathcal{P}_{2'}} S_{2'} C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_{2'}}}{S_1 C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_{2'}} + S_{2'} C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_{2'}}$$

dopo aver determinato per ciascun pannello il gradiente del coefficiente di portanza. Per le caratteristiche geometriche dei pannelli \mathcal{P}_1 e $\mathcal{P}_{2'}$ si possono stimare i due gradienti come segue:

$$C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_1} = \frac{a_0 \cos \Lambda_{1e,1}}{\sqrt{1 - M^2 \cos^2 \Lambda_{1e,1} + \left(\frac{a_0 \cos \Lambda_{1e,1}}{\pi \mathcal{R}_1} \right)^2} + \frac{a_0 \cos \Lambda_{1e,1}}{\pi \mathcal{R}_1}}$$

$$C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_{2'}} = \frac{a_0 \cos \Lambda_{1e,2}}{\sqrt{1 - M^2 \cos^2 \Lambda_{1e,2} + \left(\frac{a_0 \cos \Lambda_{1e,2}}{\pi \mathcal{R}_{2'}} \right)^2} + \frac{a_0 \cos \Lambda_{1e,2}}{\pi \mathcal{R}_{2'}}$$

con

$$a_0 = \frac{6,088 \text{ rad}^{-1}}{\sqrt{1 - M^2 \cos^2 \Lambda_{1e,1}}} \quad (\Lambda_{1e,1} = \Lambda_{1e,2})$$

Dai dati del problema è facile verificare che si ha

$$C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_1} = 2,836 \text{ rad}^{-1} = 0,0495 \text{ deg}^{-1} , \quad C_{L\alpha} \Big|_{\mathcal{P}_{2'}} = 5,923 \text{ rad}^{-1} = 0,1034 \text{ deg}^{-1}$$

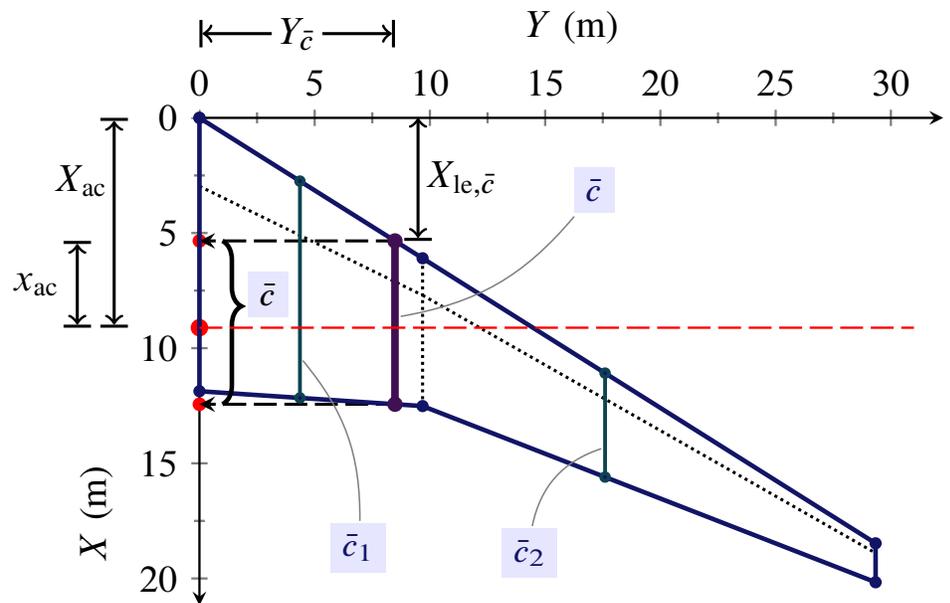


Figura 4.23 Centro aerodinamico dell'ala proposta nell'esempio 4.13. L'asse tratteggiato, parallelo all'asse Y e passante per il centro aerodinamico alare è l'asse di beccheggio intorno al quale il coefficiente di momento dell'ala è costante al variare dell'angolo d'attacco della corrente: $\partial C_{M_{ac}}/\partial\alpha = 0$.

Pertanto, si ricava

$$\frac{X_{ac}}{c_r} = \frac{0,411 \cdot 2,836 \text{ rad}^{-1} \cdot 177,1 \text{ m}^2 + 0,958 \cdot 5,923 \text{ rad}^{-1} \cdot 227,2 \text{ m}^2}{2,836 \text{ rad}^{-1} \cdot 177,1 \text{ m}^2 + 5,923 \text{ rad}^{-1} \cdot 227,2 \text{ m}^2} = \underline{0,768}$$

Per un'ala *cranked* questo è il risultato determinante, che permette di ottenere

$$X_{ac} = \frac{X_{ac}}{c_r} c_{r,1} = 0,768 \cdot 11,87 \text{ m} = 9,11 \text{ m}$$

cioè

$$\frac{x_{ac}}{\bar{c}} = \frac{X_{ac} - X_{le,\bar{c}}}{\bar{c}} = \frac{9,11 \text{ m} - 5,34 \text{ m}}{7,09 \text{ m}} = \underline{0,532}$$

Il centro aerodinamico di coordinate $(X_{ac}, 0)$ è rappresentato nella figura 4.23.



Esercizio 4.3: Centro aerodinamico dell'ala di un Boeing 747



Sulla base dell'esempio 4.13 determinare il centro aerodinamico di un'ala simile a quella di un Boeing 747. La forma in pianta assegnata è rappresentata nella figura 4.24 e possiede le seguenti caratteristiche:

Pannello 1 (pannello interno)

corde: $c_{r,1} = 14,69 \text{ m}$, $c_{t,1} = 8,84 \text{ m}$, $\lambda_1 = 0,60$,

apertura e superficie: $b_1 = 19,84 \text{ m}$, $S_1 = 233,45 \text{ m}^2$, $\mathcal{R}_1 = 1,69$,

angoli di freccia: $\Lambda_{le,1} = 0,7330 \text{ rad} = 42 \text{ deg}$,

$\Lambda_{te,1} = 0,3011 \text{ rad} = 17,3 \text{ deg}$,

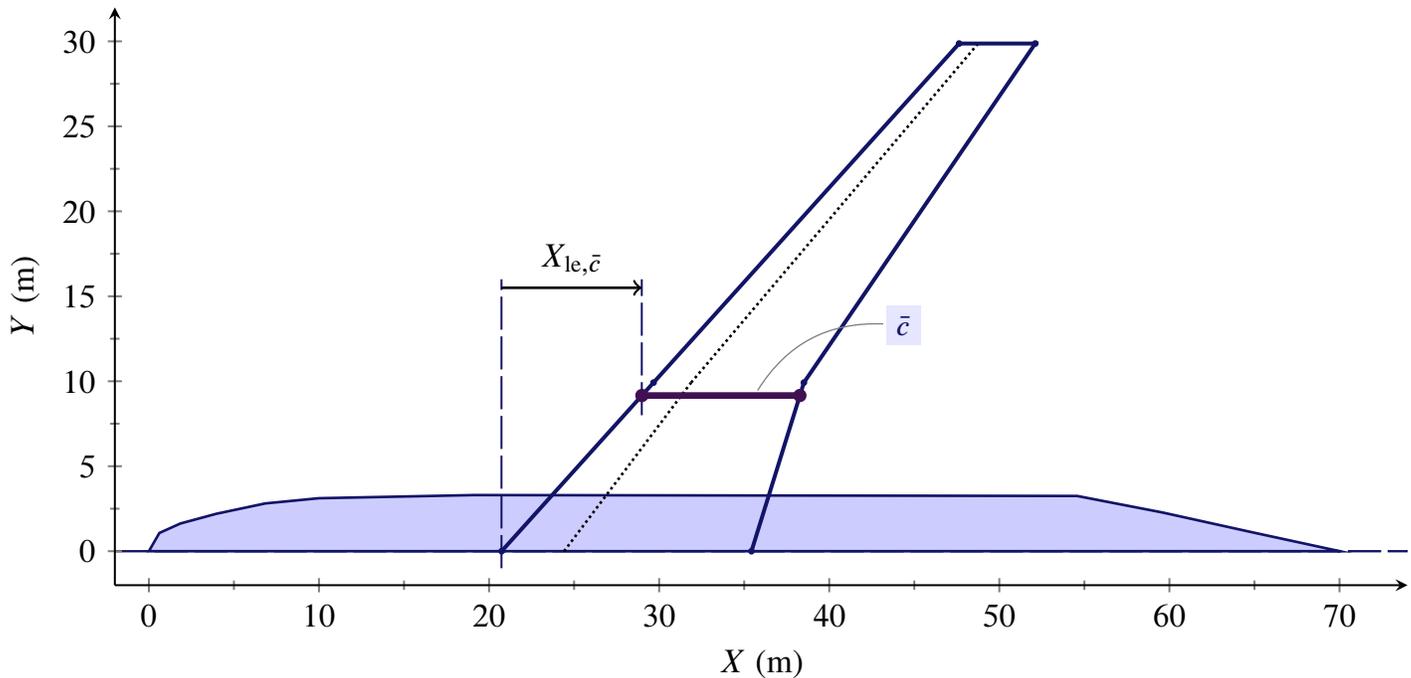


Figura 4.24 Vista in pianta dell'ala di un Boeing 747. Si veda l'esercizio 4.3.

gradienti C_{l_α} di profilo: $C_{l_{\alpha,r,1}} = 6,15 \text{ rad}^{-1} = 0,1073 \text{ deg}^{-1}$,

$C_{l_{\alpha,t,1}} = 6,05 \text{ rad}^{-1} = 0,1056 \text{ deg}^{-1}$,

svergolamenti: $\alpha_{0l,r,1} = -0,044 \text{ rad} = -2,5 \text{ deg}$,

$\alpha_{0l,t,1} = -0,044 \text{ rad} = -2,5 \text{ deg}$,

$\epsilon_{g,t,1} = 0 \text{ rad} = 0 \text{ deg}$,

centri aerodinamici di profilo: $\bar{x}_{ac,2D,1,r} = 0,25$, $\bar{x}_{ac,2D,1,t} = 0,25$,

coefficienti $C_{m_{ac}}$ di profilo: $C_{m_{ac,r,1}} = -0,080$, $C_{m_{ac,t,1}} = -0,080$,

Pannello 2 (pannello esterno)

corde: $c_{r,2} = 8,84 \text{ m}$, $c_{t,2} = 4,48 \text{ m}$, $\lambda_2 = 0,51$,

apertura e superficie: $b_2 = 39,90 \text{ m}$, $S_2 = 265,72 \text{ m}^2$, $\mathcal{R}_2 = 5,99$,

angoli di freccia: $\Lambda_{le,2} = 0,7330 \text{ rad} = 42 \text{ deg}$,

$\Lambda_{te,2} = 0,5985 \text{ rad} = 34,3 \text{ deg}$,

gradienti C_{l_α} di profilo: $C_{l_{\alpha,r,2}} = 6,05 \text{ rad}^{-1} = 0,1056 \text{ deg}^{-1}$,

$C_{l_{\alpha,t,2}} = 6,01 \text{ rad}^{-1} = 0,1049 \text{ deg}^{-1}$,

svergolamenti: $\alpha_{0l,r,2} = -0,044 \text{ rad} = -2,5 \text{ deg}$,

$\alpha_{0l,t,2} = -0,017 \text{ rad} = -1 \text{ deg}$,

$\epsilon_{g,t,2} = -0,052 \text{ rad} = -3 \text{ deg}$,

centri aerodinamici di profilo: $\bar{x}_{ac,2D,2,r} = 0,25$, $\bar{x}_{ac,2D,2,t} = 0,25$,

coefficienti $C_{m_{ac}}$ di profilo: $C_{m_{ac,r,2}} = -0,080$, $C_{m_{ac,t,2}} = -0,040$,

condizione di volo: $M = 0,65$.

Verificare che

$$\alpha_{0L,W} = \underline{-1,4 \text{ deg}}$$

$$\bar{c} = \underline{9,29 \text{ m}}, \quad Y_{\bar{c}} = \underline{9,16 \text{ m}}, \quad X_{le, \bar{c}} = \underline{8,25 \text{ m}}$$

che

$$\frac{X_{ac}}{c_r} = \underline{0,901}, \quad X_{ac} = \underline{13,24 \text{ m}}$$

e infine

$$\frac{x_{ac}}{\bar{c}} = \underline{0,537}$$



Esempio 4.14: Momento di beccheggio intorno al centro aerodinamico dell'ala

Si consideri l'ala a bordi dritti rappresentata nella figura 4.25 per la quale è nullo l'angolo di freccia del bordo d'attacco, cioè $\Lambda_{le} = 0 \text{ deg}$. Le rimanenti caratteristiche della superficie portante sono le seguenti:

corde: $c_r = 2,50 \text{ m}, c_t = 1 \text{ m}, \lambda = 0,40,$

apertura e superficie: $b = 16 \text{ m}, S = 28 \text{ m}^2, \mathcal{R} = 9,14,$

gradienti C_{l_α} di profilo: $C_{l_{\alpha,r}} = 6,15 \text{ rad}^{-1} = 0,1073 \text{ deg}^{-1},$
 $C_{l_{\alpha,t}} = 6,05 \text{ rad}^{-1} = 0,1056 \text{ deg}^{-1},$

angoli di portanza nulla: $\alpha_{0l,r} = -0,052 \text{ rad} = -3 \text{ deg},$
 $\alpha_{0l,t} = -0,026 \text{ rad} = -1,5 \text{ deg},$

centri aerodinamici di profilo: $\bar{x}_{ac,2D,r} = 0,25, \bar{x}_{ac,2D,t} = 0,25,$

coefficienti $C_{m_{ac}}$ di profilo: $C_{m_{ac,r}} = -0,080, C_{m_{ac,t}} = -0,100,$

condizione di volo: $M = 0,40.$

Per l'ala assegnata si vuole calcolare il coefficiente $C_{\mathcal{M}_{ac}}$.

L'angolo di freccia della linea dei quarti di corda — linea che coincide in questo caso con la linea dei fuochi delle sezioni alari — si calcola come segue:

$$\tan \Lambda_{c/4} = \tan \Lambda_{le} - \frac{(4/4)(1 - \lambda)}{\mathcal{R}(1 + \lambda)} = \tan(0 \text{ rad}) - \frac{1,00 \cdot (1 - 0,40)}{9,14 \cdot (1 + 0,40)}$$

$$\Rightarrow \Lambda_{c/4} = \underline{-0,0468 \text{ rad}} = \underline{-2,7 \text{ deg}}$$

L'ala assegnata ha dunque un angolo di freccia $\Lambda_{c/4}$ piccolo e negativo.

La corda media aerodinamica è in questo caso

$$\bar{c} = \frac{2}{3} c_r \frac{1 + \lambda + \lambda^2}{1 + \lambda} = 0,67 \cdot 2,50 \text{ m} \cdot \frac{1 + 0,40 + 0,40^2}{1 + 0,40} = \underline{1,86 \text{ m}}$$

La distanza longitudinale del bordo d'attacco della corda media aerodinamica dal bordo d'attacco della corda di radice è nulla, $X_{le,\bar{c}} = 0$ m, essendo nullo l'angolo Λ_{le} .

La stazione $Y_{\bar{c}}$ alla quale la legge delle corde $c(Y)$ assume il valore \bar{c} è

$$Y_{\bar{c}} = \frac{b}{6} \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} = \frac{16 \text{ m}}{6} \cdot \frac{1 + 2 \cdot 0,40}{1 + 0,40} = \underline{3,43 \text{ m}}$$

Per il numero di Mach di volo assegnato il centro aerodinamico dell'ala si calcola come nell'esempio 4.12. Dai dati e dalla figura 4.17 si legge

$$\lambda = 0,40 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow K_1 = \underline{1,342}$$

dalla figura 4.18 si legge

$$\Lambda_{le} = 0 \text{ deg}, \quad \mathcal{R} = 9,1, \quad \lambda = 0,40 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow K_2 = \underline{0}$$

dalla figura 4.19 si legge

$$\Lambda_{le} = 0 \text{ deg}, \quad M = 0,40, \quad \mathcal{R} = 9,1, \quad \lambda = 0,40 \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \frac{X'_{ac}}{c_r} = \underline{0,176}$$

Si ottiene dunque

$$\frac{x_{ac}}{\bar{c}} = K_1 \left(\frac{X'_{ac}}{c_r} - K_2 \right) = 1,342 (0,176 - 0) = \underline{0,236}$$

Pertanto, la posizione X_{ac} è calcolabile come

$$X_{ac} = X_{le,\bar{c}} + \left(\frac{x_{ac}}{\bar{c}} \right) \bar{c} = 0 \text{ m} + 0,236 \cdot 1,86 \text{ m} = 0 \text{ m} + 0,44 \text{ m} = \underline{0,44 \text{ m}}$$

La posizione del centro aerodinamico dell'ala individua una retta normale al piano di mezzzeria di equazione $X = X_{ac}$ rispetto alla quale può essere calcolata la legge dei bracci del carico basico

$$x_b(Y) = X_{ac} - \left[Y \tan \Lambda_{le} + \bar{x}_{ac,2D}(Y) c(Y) \right]$$

La funzione $\bar{x}_{ac,2D}(Y)$ esprime la distanza adimensionale del centro aerodinamico del profilo alla stazione Y dal bordo d'attacco della corda locale. Per l'ala assegnata questa funzione coincide con la legge costante $\bar{x}_{ac,2D}(Y) = \frac{1}{4}$ e l'espressione precedente, essendo Λ_{le} nullo, si particolarizza in

$$x_b(Y) = X_{ac} - \frac{1}{4} c(Y)$$

Il coefficiente di momento di beccheggio $C_{M_{ac}}$ dell'ala intorno al suo centro aerodinamico è

dato dalla formula

$$C_{\mathcal{M}_{ac}} = \underbrace{\frac{2}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} C_{m_{ac},2D}(Y) c^2(Y) dY}_{C_{\mathcal{M}_{ac},a}} + \underbrace{\frac{2}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} (c C_\ell)_b(Y) x_b(Y) dY}_{C_{\mathcal{M}_{ac},b}}$$

dove

- $C_{m_{ac},2D}(Y)$ è la legge dei coefficienti di momento dei profili intorno al centro aerodinamico di sezione,
- $(c C_\ell)_b(Y) = c(Y) C_{\ell,b}(Y)$ è il prodotto della corda locale $c(Y)$ e del coefficiente di portanza *basico* di sezione $C_{\ell,b}(Y)$ — presente quando l'ala è posta all'angolo di portanza nulla α_{0L} (angolo misurato rispetto alla corda di radice),
- $x_b(Y)$ è il braccio tra il punto di applicazione del carico basico locale e il centro aerodinamico dell'ala.

La formula precedente mostra che il coefficiente $C_{\mathcal{M}_{ac}}$ è la somma dei due contributi:

a) $C_{\mathcal{M}_{ac},a}$, ottenibile cumulando le coppie pure

$$d\mathcal{M}_{ac,a} = C_{m_{ac},2D}(Y) \bar{q}_\infty \underbrace{c(Y) dY}_{dS} c(Y) = \bar{q}_\infty C_{m_{ac},2D}(Y) c^2(Y) dY$$

b) $C_{\mathcal{M}_{ac},b}$, ottenibile cumulando i momenti di trasporto

$$d\mathcal{M}_{ac,b} = C_{\ell,b}(Y) x_b(Y) \bar{q}_\infty \underbrace{c(Y) dY}_{dS} = \bar{q}_\infty (c C_\ell)_b(Y) x_b(Y) dY$$

(si noti che il braccio x_b ha le dimensioni di una lunghezza)

Questi contributi vengono integrati lungo l'apertura alare e adimensionalizzati dividendoli per $\bar{q}_\infty S \bar{c}$.

Per quanto riguarda il termine $C_{\mathcal{M}_{ac},a}$, procedendo come mostrato nell'esempio 4.6 si ricava

$$c(Y) = A_c Y + B_c = -0,188 Y + 2,50 \text{ m}$$

e, analogamente, si pone

$$C_{m_{ac}}(Y) = A_{C_{m_{ac}}} Y + B_{C_{m_{ac}}}$$

con

$$A_{C_{m_{ac}}} = \frac{C_{m_{ac},t} - C_{m_{ac},r}}{b/2} = 2 \frac{-0,100 - (-0,080)}{16 \text{ m}} = \underline{\underline{-0,00250 \text{ m}^{-1}}}$$

$$B_{C_{m_{ac}}} = C_{m_{ac},r} = \underline{\underline{-0,080}}$$

cioè

$$C_{m_{ac},2D}(Y) = A_{C_{m_{ac}}} Y + B_{C_{m_{ac}}} = -0,00250 \text{ m}^{-1} Y - 0,080$$

Pertanto, la formula di calcolo del contributo dovuto alle coppie pure fornisce

$$\begin{aligned}
 C_{\mathcal{M}_{ac,a}} &= \frac{2}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} C_{mac,2D}(Y) c^2(Y) dY \\
 &= \frac{2}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} (A_{C_{mac}} Y + B_{C_{mac}}) (A_c Y + B_c)^2 dY \\
 &= \frac{2}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} (-0,500 \text{ m}^2 + 0,0594 \text{ m } Y - 4,69 \cdot 10^{-4} Y^2 - 8,79 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} Y^3) dY \\
 &= \underline{-0,0873}
 \end{aligned}$$

Si osservi che il valore dell'integrale definito è ottenibile sviluppando simbolicamente la funzione integranda che è un polinomio di grado 3 nella variabile Y .

Dall'Aerodinamica è noto che, per un generico angolo d'attacco α al quale l'ala produce un coefficiente di portanza C_L , il *carico alare* γ (*wing span loading*) è esprimibile come

$$\gamma(Y) \triangleq \frac{c(Y) C_\ell(Y)}{2b} = C_L \gamma_{a1}(Y) + \gamma_b(Y)$$

Il carico è la somma del carico *addizionale* $C_L \gamma_{a1}(Y)$ — un contributo che si annulla all'angolo di portanza nulla, in cui $C_L = 0$ — e del carico *basico* $\gamma_b(Y)$. Quest'ultimo, in particolare, è banalmente nullo per ali non svergolate (né geometricamente né aerodinamicamente) e, in generale, ha una legge di variazione con la Y il cui diagramma sottende un'area nulla:

$$\int_0^1 \gamma_b(\eta) d\eta = 0 \quad \text{con } \eta \triangleq \frac{Y}{b/2}$$

Nella formula di calcolo di $C_{\mathcal{M}_{ac,b}}$ compare $(c C_\ell)_b(Y) = 2b \gamma_b(Y)$. Questa legge di carico può essere determinata per via numerica oppure in maniera approssimata dalla conoscenza delle leggi di svergolamento geometrico $\epsilon_g(Y)$ e aerodinamico $\alpha_{0\ell}(Y)$ e dell'angolo di portanza nulla dell'ala α_{0L} .

L'espressione approssimata del carico basico, nota dalla Teoria vorticoso delle ali finite, è la seguente:

$$(c C_\ell)_b(Y) = \frac{1}{2} c(Y) C_{\ell\alpha}(Y) \left\{ \alpha_{0L} - [\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)] \right\}$$

nella quale il fattore $\frac{1}{2}$ tiene conto di effetti tridimensionali nella regione intorno alla mezzeria dell'ala. Nella formula precedente va trovata l'espressione della legge dei gradienti di portanza. In prima approssimazione si può porre $C_{\ell\alpha}(Y) = 2\pi$; in alternativa si ricava la seguente legge lineare: $C_{\ell\alpha}(Y) = A_{C_{\ell\alpha}} Y + B_{C_{\ell\alpha}}$.

Procedendo come mostrato nell'esempio 4.6 si ricava

$$\alpha_{0\ell}(Y) = A_\alpha Y + B_\alpha = (0,00327 \text{ rad/m}) Y - 0,0524 \text{ rad}$$

$$\epsilon_g(Y) = A_\epsilon Y + B_\epsilon = (-0,00545 \text{ rad/m}) Y$$

e

$$C_{\ell_\alpha}(Y) = A_{C_{\ell_\alpha}} Y + B_{C_{\ell_\alpha}} = -0,01250 (\text{rad m})^{-1} Y + 6,150 \text{ rad}^{-1}$$

Si ricava inoltre

$$\begin{aligned} \alpha_{0L} &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)] c(Y) dY \\ &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} [(A_\alpha Y + B_\alpha) - A_\epsilon Y] (A_c Y + B_c) dY = \underline{-0,0224 \text{ rad}} = \underline{-1,3 \text{ deg}} \end{aligned}$$

La formula di calcolo di $C_{\mathcal{M}_{ac,b}}$ diventa dunque

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{M}_{ac,b}} &= \frac{2}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} (c C_\ell)_b(Y) x_b(Y) dY \\ &= \frac{1}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} \underbrace{\frac{1}{2} c(Y) C_{\ell_\alpha}(Y) \left\{ \alpha_{0L} - [\alpha_{0\ell}(Y) - \epsilon_g(Y)] \right\}}_{(c C_\ell)_b(Y)} \cdot \underbrace{\left\{ X_{ac} - [Y \tan \Lambda_{le} + \bar{x}_{ac,2D}(Y) c(Y)] \right\}}_{x_b(Y)} dY \end{aligned}$$

Sostituendo i valori precedentemente trovati si ottiene

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{M}_{ac,b}} &= \frac{1}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} (A_c Y + B_c) \overbrace{(A_{C_{\ell_\alpha}} Y + B_{C_{\ell_\alpha}})}^{\approx 2\pi} \left\{ \alpha_{0L} - [(A_\alpha Y + B_\alpha) - A_\epsilon Y] \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ X_{ac} - \left[Y \tan \Lambda_{le} + \frac{1}{4} (A_c Y + B_c) \right] \right\} dY \\ &= \frac{2}{S \bar{c}} \int_0^{b/2} (-0,0438 \text{ m}^2 + 0,0271 \text{ m} Y - 0,00500 Y^2 + 0,000241 \text{ m}^{-1} Y^3) dY \\ &= \underline{-0,00346} \end{aligned}$$

Si osservi che il valore dell'integrale definito è ottenibile sviluppando simbolicamente la funzione integranda che è un polinomio di grado 3 (in questo caso particolare) nella variabile Y .

Infine, il valore del coefficiente di momento di beccheggio dell'ala intorno al suo centro aerodinamico è

$$C_{\mathcal{M}_{ac}} = C_{\mathcal{M}_{ac,a}} + C_{\mathcal{M}_{ac,b}} = -0,0873 + (-0,00346) = \underline{-0,0908}$$

Nella figura 4.25 è rappresentata la forma in pianta dell'ala assegnata, la legge dello svergolamento geometrico $\epsilon_g(y)$ e dello svergolamento aerodinamico $\alpha_{0\ell}(Y)$. È rappresentata inoltre la legge del carico addizionale ottenuta con il *metodo ingegneristico di Schrenk*

$$(cC_\ell)_{a1} = 2b \gamma_{a1} = \frac{1}{2} [c_{\text{ell}}(Y) + c_{\text{eff}}(Y)]$$

dove

$$c_{\text{ell}}(Y) = \frac{4S}{\pi b} \sqrt{1 - \frac{2Y}{b}} \quad c_{\text{eff}}(Y) = \frac{c(Y) C_{\ell\alpha}(Y)}{\bar{C}_{\ell\alpha}}$$

e $\bar{C}_{\ell\alpha} = 6,107 \text{ rad}^{-1}$. Infine sono rappresentate la funzione $x_b(Y)$ e la legge approssimata del carico basico

$$\begin{aligned} (cC_\ell)_b(Y) &= (A_c Y + B_c) (A_{C_{\ell\alpha}} Y + B_{C_{\ell\alpha}}) \left\{ \alpha_{0L} - [(A_\alpha Y + B_\alpha) - A_\epsilon Y] \right\} \\ &= 0,230 \text{ m} - 0,0848 Y + 0,00520 \text{ m}^{-1} Y^2 - 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-2} Y^3 \end{aligned}$$



Esercizio 4.4: *Momento di beccheggio intorno al centro aerodinamico dell'ala*



Un'ala finita ha le stesse caratteristiche di quella definita nell'esempio 4.14 fatta eccezione per la linea dei fuochi, che in questo caso è parallela all'asse Y , cioè è $\Lambda_{c/4} = 0^\circ$. La figura 4.26 ne riporta la vista in pianta.

Disegnare la forma in pianta, calcolare la posizione X_{ac} del suo centro aerodinamico e fornire il valore del $C_{M_{ac}}$ corrispondente.

Verificare che dalle figure 4.17, 4.18 e 4.19 si ottengono i valori:

$$K_1 = \underline{1,342}, \quad K_2 = \underline{0,068}, \quad \frac{X'_{ac}}{c_r} = \underline{0,244}$$

Tracciare la funzione $x_b(Y)$ e giustificare la coincidenza di $C_{M_{ac}}$ con il momento delle coppie pure di profilo $C_{M_{ac,a}}$.



Esempio 4.15: *Momento di beccheggio intorno al centro aerodinamico dell'ala*



L'esempio 4.14 (si veda la figura 4.25) è ripreso qui considerando una legge più accurata del carico basico. Essa è stata ottenuta numericamente ed è diagrammata nella figura 4.27. I valori numerici sono riportati nella tabella 4.1.

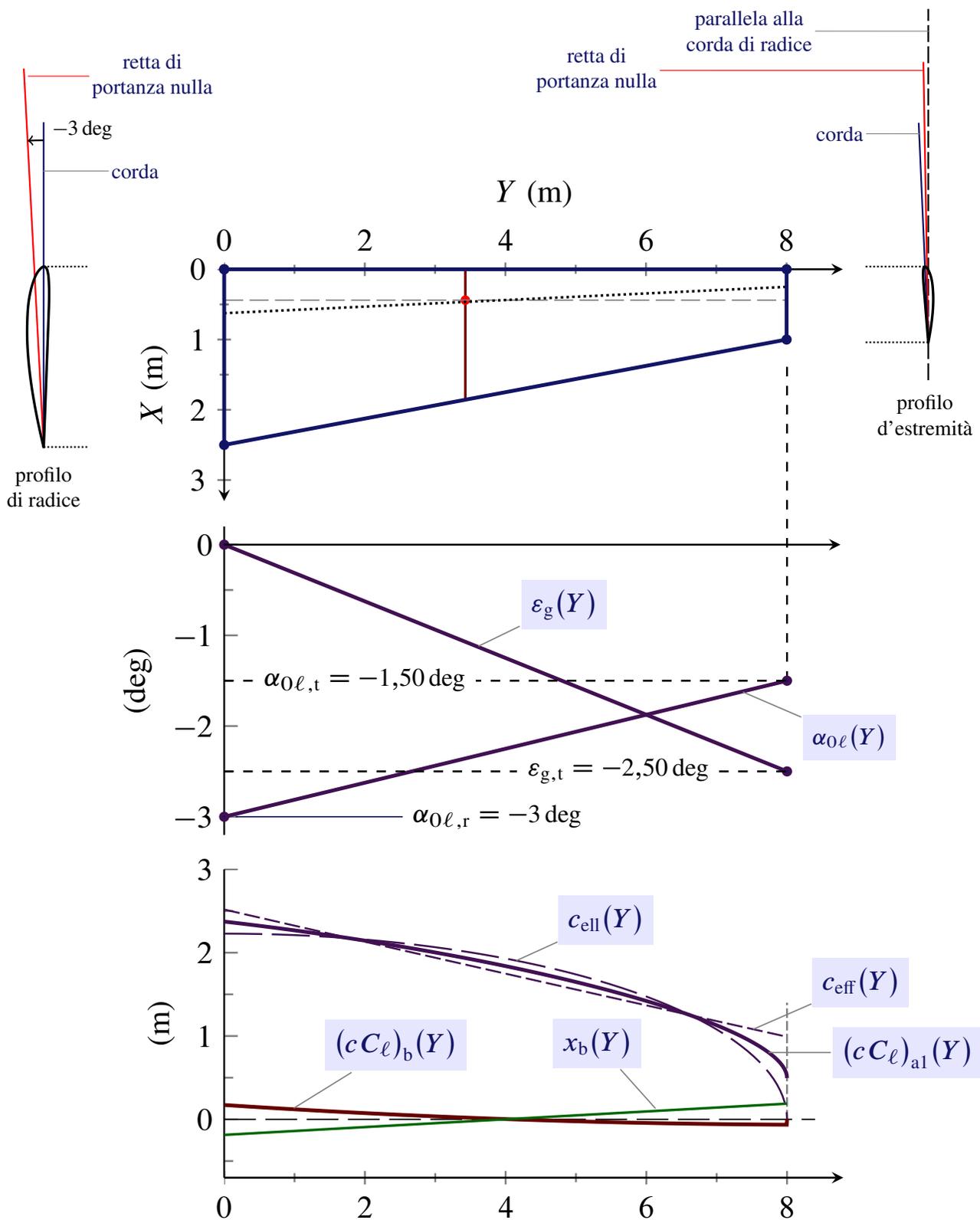


Figura 4.25 Ala assegnata nell'esempio 4.14. Legge dello svergolamento geometrico $\varepsilon_g(y)$ e dello svergolamento aerodinamico $\alpha_{0\ell}(Y)$. Diagrammi del carico addizionale $(cC_\ell)_{al}$, del carico basico $(cC_\ell)_b$ e del braccio $x_b(Y)$.

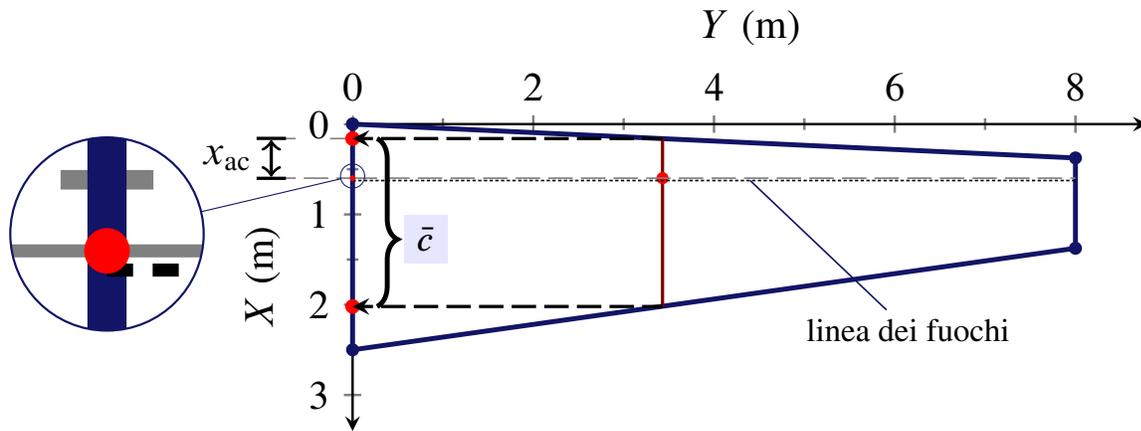


Figura 4.26 Ala assegnata nell'esercizio 4.4. Il centro aerodinamico è molto vicino alla linea dei fuochi. Quest'ultima è parallela all'asse delle Y . L'ingrandimento sulla sinistra mostra che il punto di coordinate $(\frac{1}{4}c_r, 0)$ è più arretrato del punto $(X_{le,\bar{c}} + x_{ac}, 0)$.

Nella figura 4.28 si mette a confronto la funzione $(cC_\ell)_{b,Schrenk}(Y)$, ottenuta in concomitanza dell'applicazione del metodo ingegneristico di Schrenk per il carico addizionale (si veda l'esempio 4.14), con la funzione $(cC_\ell)_b(Y)$, che interpola una sequenza di valori discreti ottenuti applicando la Teoria della linea portante di Prandtl

Nel caso qui discusso sia la funzione $x_b(Y)$ che il valore di $C_{\mathcal{M}_{ac,b}}$ coincidono con quanto ricavato nell'esempio 4.14. Per quanto riguarda il valore di $C_{\mathcal{M}_{ac,b}}$, disponendo di un andamento più accurato del carico basico, si ottiene un valore differente

$$C_{\mathcal{M}_{ac,b}} = \frac{2}{S\bar{c}} \int_0^{b/2} (cC_\ell)_b(Y) x_b(Y) dY = \underline{-0,00377}$$

L'integrale in questa formula è stato valutato numericamente dopo aver definito una funzione interpolante $(cC_\ell)_b(Y)$ lineare a tratti nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}b]$. La figura 4.29 riporta in grafico i valori discreti della funzione integranda $(cC_\ell)_b x_b$, già elencati nella settima colonna della tabella 4.1. L'area sottesa dal grafico della funzione è negativa così come è negativo, ovviamente, il segno di $C_{\mathcal{M}_{ac,b}}$.



Tabella 4.1 Ala assegnata negli esempi 4.14 e 4.15. Valori numerici con cui è stato calcolato il carico basico $(cC_\ell)_b$ con la Teoria della linea portante.

| Y (m) | $(cC_\ell)_{al}$ (m) | $(cC_\ell)_{al,Schrenk}$ (m) | $(cC_\ell)_b$ (m) | $(cC_\ell)_{b,Schrenk}$ (m) | x_b (m) | $(cC_\ell)_b x_b$ (m ²) | $(cC_\ell)_{b,Schrenk} x_b$ (m ²) |
|------------|-------------------------|---------------------------------|----------------------|--------------------------------|--------------|--|--|
| 0,00 | 2,340 | 2,3729 | 0,2148 | 0,1725 | -0,1864 | -0,0400 | -0,0322 |
| 0,63 | 2,309 | 2,3086 | 0,1935 | 0,1391 | -0,1570 | -0,0304 | -0,0218 |
| 1,25 | 2,251 | 2,2381 | 0,1569 | 0,1085 | -0,1278 | -0,0201 | -0,0139 |
| 1,87 | 2,177 | 2,1617 | 0,1156 | 0,0807 | -0,0989 | -0,0114 | -0,0080 |
| 2,47 | 2,093 | 2,0798 | 0,0732 | 0,0558 | -0,0706 | -0,0052 | -0,0039 |
| 3,06 | 2,003 | 1,9930 | 0,0324 | 0,0338 | -0,0429 | -0,0014 | -0,0015 |
| 3,63 | 1,908 | 1,9018 | -0,0054 | 0,0146 | -0,0162 | 0,0001 | -0,0002 |
| 4,18 | 1,810 | 1,8067 | -0,0392 | -0,0019 | 0,0095 | -0,0004 | 0,0000 |
| 4,70 | 1,711 | 1,7084 | -0,0683 | -0,0158 | 0,0340 | -0,0023 | -0,0005 |
| 5,20 | 1,612 | 1,6073 | -0,0926 | -0,0274 | 0,0571 | -0,0053 | -0,0016 |
| 5,66 | 1,512 | 1,5042 | -0,1119 | -0,0368 | 0,0787 | -0,0088 | -0,0029 |
| 6,08 | 1,412 | 1,3995 | -0,1262 | -0,0443 | 0,0987 | -0,0125 | -0,0044 |
| 6,47 | 1,311 | 1,2941 | -0,1355 | -0,0502 | 0,1169 | -0,0158 | -0,0059 |
| 6,82 | 1,207 | 1,1884 | -0,1398 | -0,0547 | 0,1333 | -0,0186 | -0,0073 |
| 7,13 | 1,097 | 1,0831 | -0,1389 | -0,0580 | 0,1477 | -0,0205 | -0,0086 |
| 7,39 | 0,977 | 0,9789 | -0,1326 | -0,0603 | 0,1600 | -0,0212 | -0,0097 |
| 7,61 | 0,841 | 0,8764 | -0,1203 | -0,0619 | 0,1702 | -0,0205 | -0,0105 |
| 7,78 | 0,681 | 0,7762 | -0,1013 | -0,0630 | 0,1782 | -0,0180 | -0,0112 |
| 7,90 | 0,490 | 0,6789 | -0,0747 | -0,0637 | 0,1839 | -0,0137 | -0,0117 |
| 7,98 | 0,261 | 0,5850 | -0,0404 | -0,0640 | 0,1874 | -0,0076 | -0,0120 |
| 8,00 | 0,000 | 0,4953 | 0,0000 | 0,0000 | 0,1886 | 0,0000 | 0,0000 |

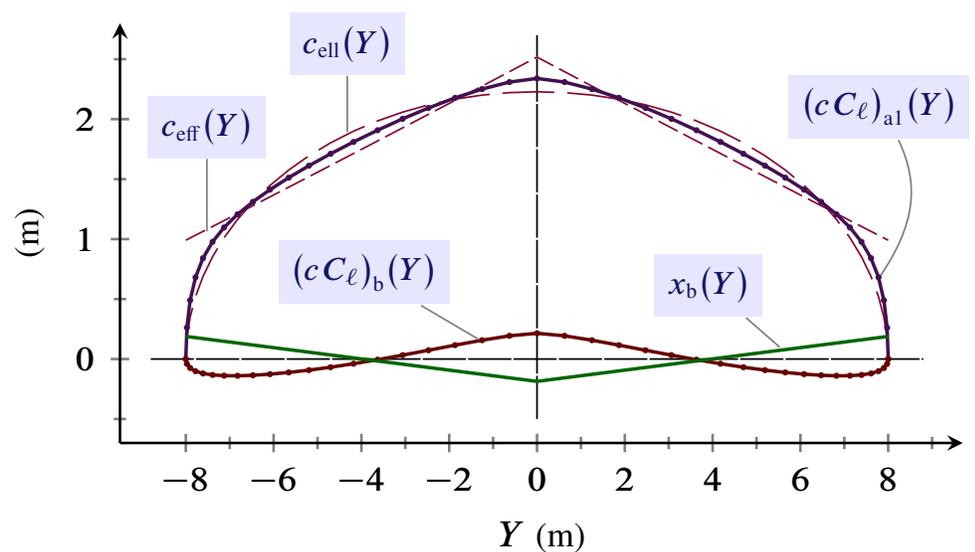


Figura 4.27 Ala assegnata negli esempi 4.14 e 4.15. Diagrammi del carico addizionale $(cC_\ell)_{al}$ e del carico basico $(cC_\ell)_b$ ottenuti numericamente (dalla Teoria della linea portante) e legge $x_b(Y)$ dei bracci del carico basico.

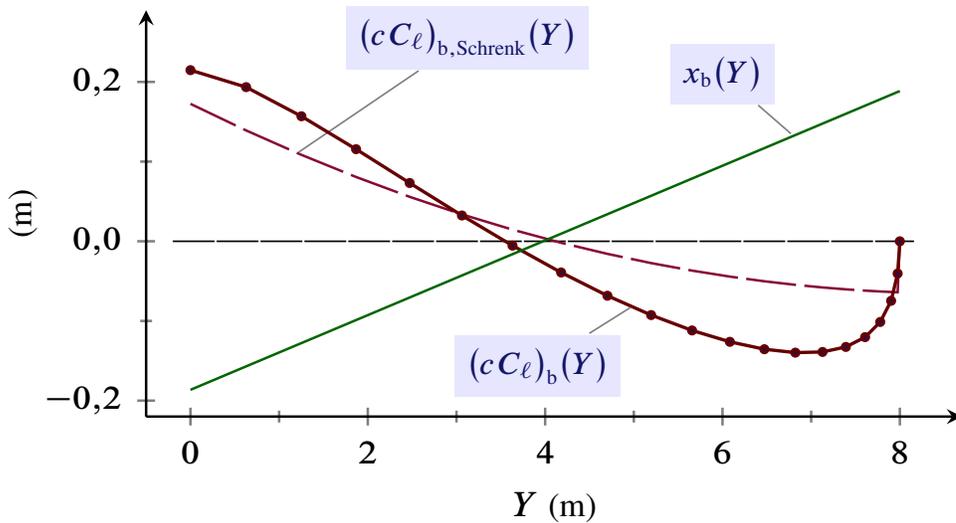


Figura 4.28 Ala assegnata negli esempi 4.14 e 4.15. Dettaglio della figura 4.27. Diagramma del carico base $(cC_\ell)_b$ ottenuto numericamente con la Teoria della linea portante e del carico base approssimato $(cC_\ell)_{b,Schrenk}$ ottenuto in concomitanza dell'applicazione del metodo ingegneristico di Schrenk per il carico addizionale (si veda anche la figura 4.25).

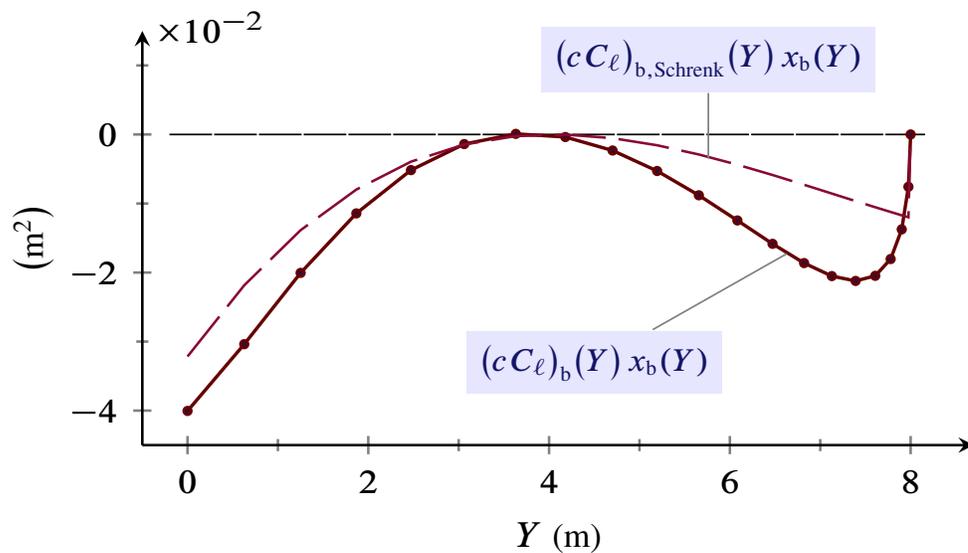


Figura 4.29 Ala assegnata negli esempi 4.14 e 4.15. Diagramma delle due funzioni prodotto $(cC_\ell)_b(Y) x_b(Y)$ e $(cC_\ell)_{b,Schrenk}(Y) x_b(Y)$ (si veda la figura 4.29). L'integrale di queste funzioni permette di stimare il contributo $C_{\mathcal{M}_{ac,b}}$ al coefficiente di momento di beccheggio $C_{\mathcal{M}_{ac}}$ dell'ala intorno al suo centro aerodinamico.

AERODINAMICA DELLE FUSOLIERE

Esempio 5.1: Caratteristiche aerodinamiche della fusoliera



Si vogliono calcolare i coefficienti $C_{M_{0,B}}$ e $C_{M_{\alpha,B}}$ di una fusoliera con il metodo di integrazione per strisce (*Strip Integration Method*) di Multhopp. A tale scopo si considera una configurazione ala-fusoliera (*Wing-Body*) simile a quella di un Boeing 747.

L'ala accoppiata alla fusoliera è praticamente coincidente con quella dell'esercizio 4.3. Ecco alcune sue caratteristiche che saranno utilizzate per i calcoli relativi alla fusoliera:

$$\mathcal{R} = 7,15, \quad b = 59,74 \text{ m}, \quad S = 499,2 \text{ m}^2, \quad c_r = 14,7 \text{ m} \quad \bar{c} = 9,29 \text{ m}$$

$$\alpha_{0L,W} = -1,4 \text{ deg}, \quad i_W = 2 \text{ deg}, \quad \lambda \equiv \lambda_{\text{eqv}} = 0,37, \quad \Lambda_{c/4} \equiv \Lambda_{c/4,\text{eqv}} = 42 \text{ deg}$$

Inoltre, l'ala assegnata ha un gradiente di portanza $C_{L_{\alpha,W}} = 4,55 \text{ rad}^{-1} = 0,0794 \text{ deg}^{-1}$.

Per quanto riguarda le condizioni operative di riferimento, in questo esempio si assume un numero di Mach di volo $M = 0,65$ e una quota di volo $h_{\text{ASL}} = 5000 \text{ m}$.

La vista laterale e la vista dall'alto della fusoliera sono riportate nelle figure 5.1a e 5.1b. Detta X la coordinata longitudinale che corre verso poppa lungo la retta di riferimento della fusoliera (*Fuselage Reference Line*, FRL), con origine all'estremità anteriore, e Z la coordinata ad essa normale presa nel piano di simmetria, si riconoscono:

- la funzione $w_f(X)$, larghezza della vista in pianta della fusoliera alla stazione X ,
- la coppia di funzioni $(X_{\text{cl},f}(X), Z_{\text{cl},f}(X))$, che descrivono la linea media (*camber line*) della vista laterale,
- la funzione $i_{\text{cl},f}(X)$, che rappresenta l'angolo, con segno cambiato, formato della tangente locale alla linea media con la FRL.

Una discretizzazione per strisce della fusoliera — rappresentata visivamente nella figura 5.1 con $N_{f0} = 14$ strisce di spessore $\Delta X = 5,0 \text{ m}$ — ha portato ai valori numerici elencati nella

tabella 5.1. In essa, per $k = 1, \dots, 14$, si osservano le coordinate (X_{cl,f_k}, Z_{cl,f_k}) dei centroidi di ciascuna striscia, le larghezze w_{f_k} e gli angoli i_{cl,f_k} .

Il coefficiente di momento di beccheggio dovuto alla fusoliera in condizioni di portanza nulla — cioè quando è $L_{WB} = 0$ — è dato dalla formula

$$C_{\mathcal{M}_{0,B}} \equiv C_{\mathcal{M}_{0L,B(W)}} = \frac{\pi}{2} \frac{k_2 - k_1}{S\bar{c}} \int_0^{l_B} w_f^2(X) [i_w - \alpha_{0L,W} + i_{cl,f}(X)] dX$$

in cui gli angoli vanno espressi in rad. Per valutare il risultato finale — essendo note le grandezze S , \bar{c} , i_w e $\alpha_{0L,W}$, relative all'ala — si devono determinare le leggi $w_f(X)$ e $i_{cl,f}(X)$ e si deve calcolare il coefficiente di massa apparente $k_2 - k_1$. Quest'ultimo si ricava dalla figura 5.2 ottenendo

$$k_2 - k_1 = 0,94$$

corrispondente al fattore di snellezza della fusoliera $l_B/d_B = 11,3$ (*Fuselage Fineness Ratio*, FFR).

La formula di calcolo del $C_{\mathcal{M}_{0,B}}$ viene approssimata sostituendo all'integrale definito una sommatoria. Quest'approssimazione si basa sulla discretizzazione della forma di fusoliera su menzionata. Con riferimento ai valori della tabella 5.1 si ottiene

$$C_{\mathcal{M}_{0,B}} \approx \frac{\pi}{2} \frac{k_2 - k_1}{S\bar{c}} \sum_{k=1}^{14} w_{f_k}^2 (i_w - \alpha_{0L,W} + i_{cl,f_k}) \Delta X = \underline{-0,0536}$$

Come si intuisce dalla vista laterale della fusoliera e dall'andamento della linea media — si veda il diagramma della sequenza (X_{cl,f_k}, i_{cl,f_k}) nella figura 5.1c — per una corrente che incide con un angolo $-i_w + \alpha_{0L,W} = -3,4$ deg rispetto alla retta di riferimento della fusoliera il momento di beccheggio è picchiante.

L'attenzione si sposta ora sul gradiente del coefficiente di momento di beccheggio della fusoliera. Esso è dato dalla formula

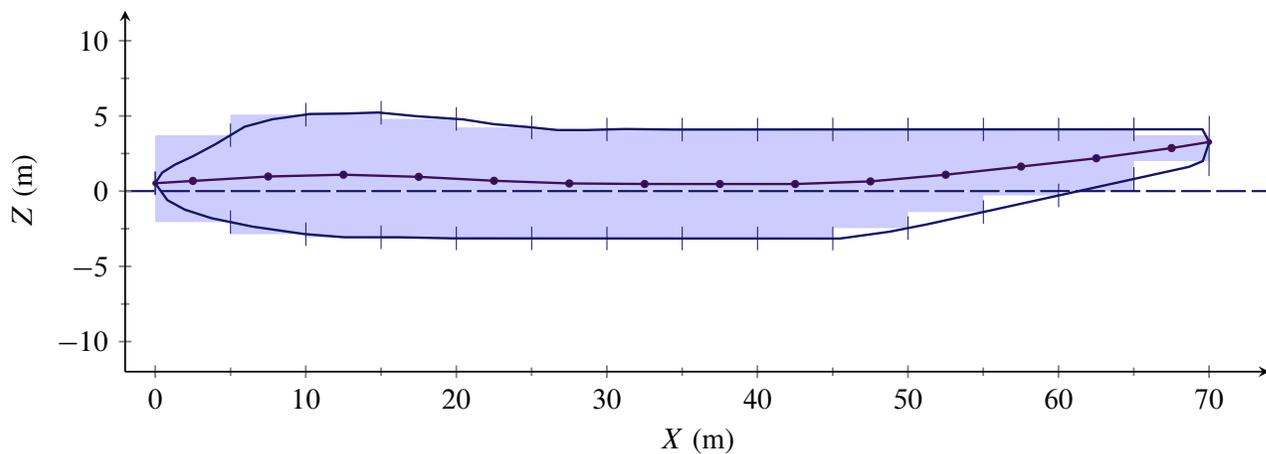
$$C_{\mathcal{M}_{\alpha,B}} \equiv (C_{\mathcal{M}_{\alpha}})_{B(W)} = \frac{\pi}{2S\bar{c}} \int_0^{l_B} w_f(X)^2 \left(1 + \frac{\partial \epsilon_u(X)}{\partial \alpha} \right) dX$$

dove $\epsilon_u(X)$ è l'angolo di *upwash* indotto dalla superficie portante principale alla generica stazione longitudinale X (si osservi che a valle dell'ala $\epsilon_u = -\epsilon_u < 0$, dove cioè il *downwash* $\epsilon > 0$).

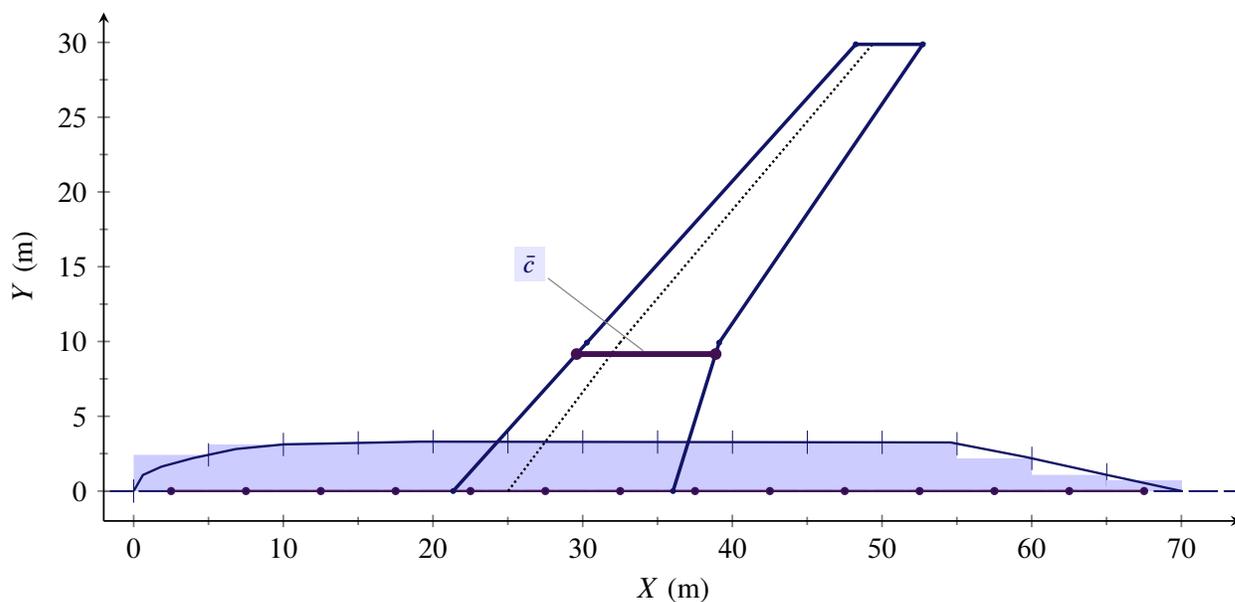
Risulta conveniente scomporre l'integrale a secondo membro nella somma di tre integrali. Essi saranno estesi, rispettivamente, alla parte anteriore della fusoliera (*forebody*), che va dalla prua al bordo d'attacco della corda di radice dell'ala, alla parte di fusoliera sottesa dalla radice alare (*wing trunk*) e alla parte posteriore (*afterbody*), che va dal bordo d'uscita della corda di radice alare fino alla poppa.

Con riferimento alle figure 5.3 e 5.4 si introducono tre nuove coordinate longitudinali lungo la FRL:

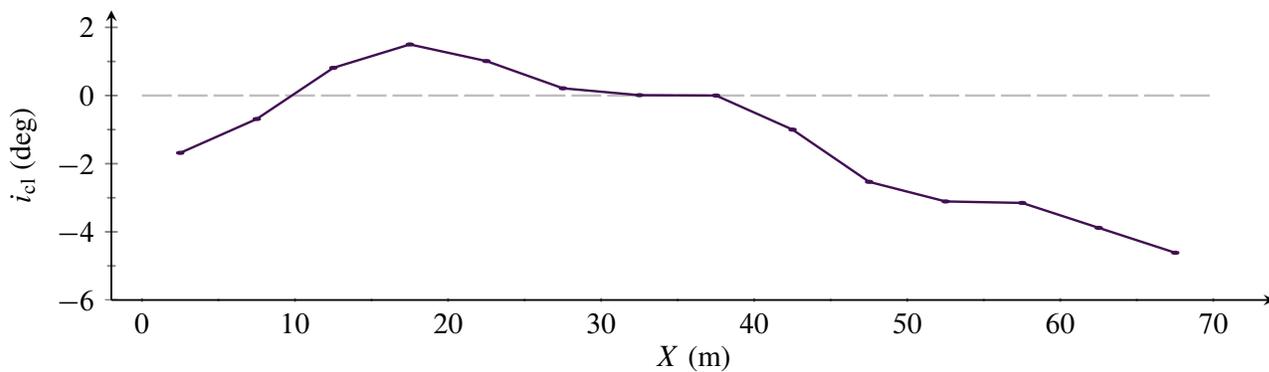
- la coordinata x_1 che corre verso prua e ha origine al bordo d'attacco della radice alare,



(a) Vista laterale



(b) Vista dall'alto

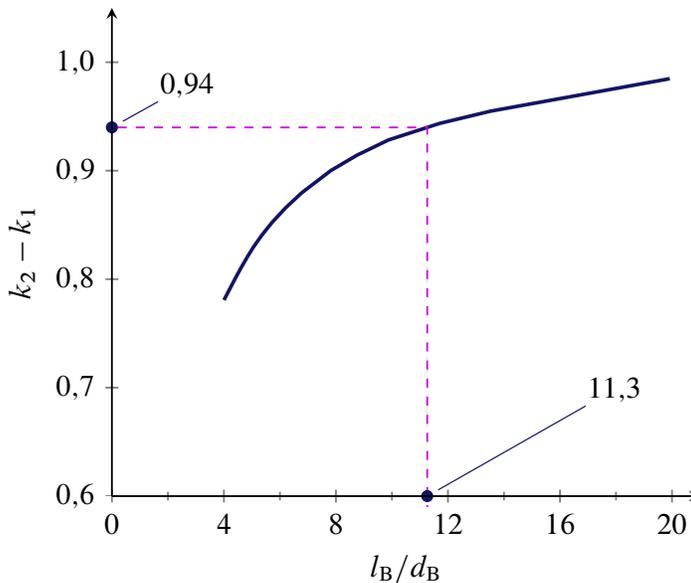


(c) Incidenza della tangente locale alla linea media

Figura 5.1 Fusoliera di un Boeing 747. Discretizzazione della proiezione laterale per il calcolo approssimato del coefficiente $C_{M0,B}$ con il metodo di integrazione per strisce di Multhopp. In basso l'angolo i_{cl} formato dalla tangente locale alla linea media (*camber line*) della fusoliera con la FRL.

Tabella 5.1 Valori discreti utilizzati nella formule di calcolo del coefficiente di momento $C_{\mathcal{M}_{0,B}}$.

| k | X_{cl,f_k} (m) | Z_{cl,f_k} (m) | w_{f_k} (m) | i_{cl,f_k} (deg) |
|-----|---------------------|---------------------|------------------|-----------------------|
| 1 | 2,5 | 0,68 | 3,61 | -1,7 |
| 2 | 7,5 | 0,97 | 5,75 | -0,7 |
| 3 | 12,5 | 1,09 | 6,34 | 0,8 |
| 4 | 17,5 | 0,95 | 6,54 | 1,5 |
| 5 | 22,5 | 0,69 | 6,60 | 1,0 |
| 6 | 27,5 | 0,51 | 6,58 | 0,2 |
| 7 | 32,5 | 0,48 | 6,57 | 0,0 |
| 8 | 37,5 | 0,47 | 6,55 | 0,0 |
| 9 | 42,5 | 0,47 | 6,54 | -1,0 |
| 10 | 47,5 | 0,65 | 6,52 | -2,5 |
| 11 | 52,5 | 1,09 | 6,51 | -3,1 |
| 12 | 57,5 | 1,63 | 5,36 | -3,2 |
| 13 | 62,5 | 2,19 | 3,27 | -3,9 |
| 14 | 67,5 | 2,86 | 1,08 | -4,6 |

**Figura 5.2** Coefficiente di massa apparente $k_2 - k_1$ della fusoliera in funzione del fattore di snellezza l_B/d_B (*Fuselage Fineness Ratio, FFR*).

- la coordinata x_W che corre verso poppa e ha la stessa origine di x_1 ,
- la coordinata x_2 che corre verso poppa e ha origine al bordo d'uscita della radice alare.

La formula di calcolo del $C_{\mathcal{M}_{\alpha,B}}$ può dunque essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned}
 C_{\mathcal{M}_{\alpha,B}} = & \frac{\pi}{2S\bar{c}} \int_0^{l_1} w_f^2(x_1) \left[1 + \frac{\partial \epsilon_u(x_1)}{\partial \alpha} \right] dx_1 + \frac{\pi}{2S\bar{c}} \int_0^{l_W} w_f^2(x_W) \left[1 + \frac{\partial \epsilon_u(x_W)}{\partial \alpha} \right] dx_W \\
 & + \frac{\pi}{2S\bar{c}} \int_0^{l_3} w_f^2(x_2) \left[1 + \frac{\partial \epsilon_u(x_2)}{\partial \alpha} \right] dx_2
 \end{aligned}$$

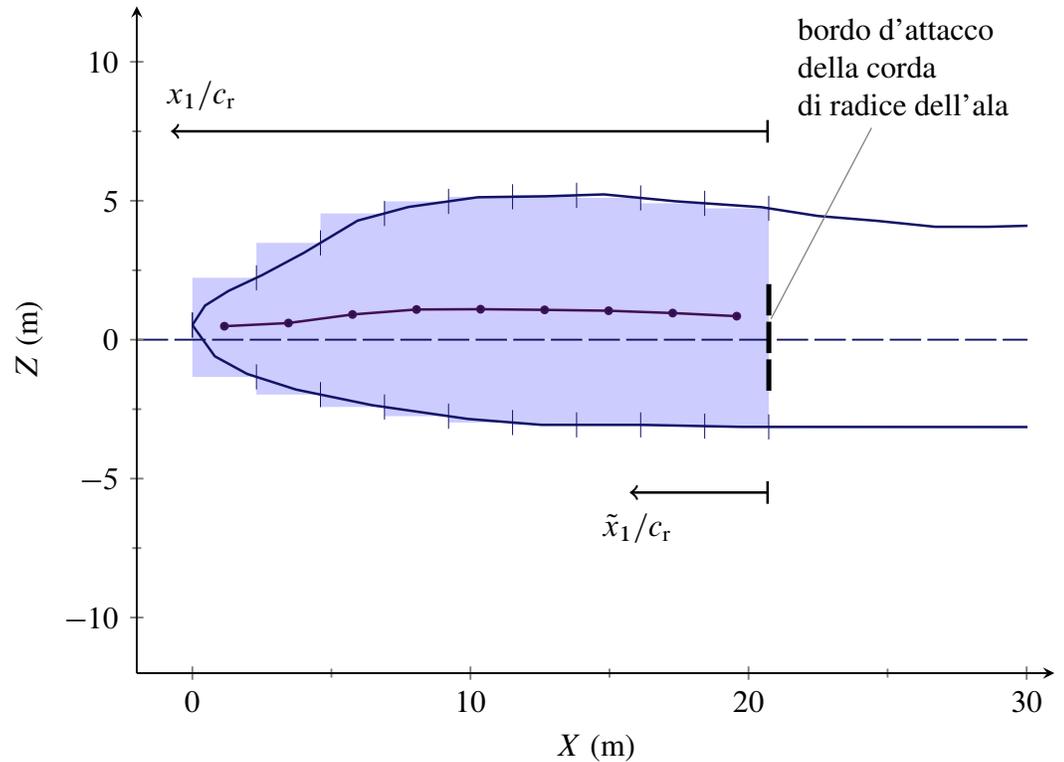


Figura 5.3 Vista laterale della parte di fusoliera antistante il bordo d'attacco della corda di radice (*forebody*) e discretizzazione in 9 strisce. Definizione delle coordinate adimensionali \tilde{x}_1/c_r e x_1/c_r utilizzate nella figura 5.5.

dove l_1 , $l_w = c_{w,r}$ ed $l_2 = l_B - l_1 - c_{w,r}$ sono le lunghezze, rispettivamente, del tronco anteriore (*nose*) della fusoliera, del tronco centrale di fusoliera interessato dall'ala (*wing trunk*) e del tronco posteriore (*tail trunk*). Una dimensione significativa è costituita dalla distanza longitudinale l'_H tra il bordo d'uscita della corda di radice alare e il centro aerodinamico dell'impennaggio orizzontale. Come riportato nella figura 5.4, si può assumere per il velivolo in esame

$$l'_H = 29,8 \text{ m}$$

Il secondo integrale a secondo membro della formula precedente può essere trascurato rispetto agli altri due nel senso che il tronco centrale della fusoliera non contribuisce in maniera significativa al risultato finale. Pertanto, si perviene alla formula

$$C_{M_{\alpha,B}} \simeq \frac{\pi}{2S\bar{c}} \int_0^{l_1} w_f^2(x_1) \left[1 + \frac{\partial \epsilon_u(x_1)}{\partial \alpha} \right] dx_1 + \frac{\pi}{2S\bar{c}} \int_0^{l_2} w_f^2(x_2) \left[1 + \frac{\partial \epsilon_u(x_2)}{\partial \alpha} \right] dx_2$$

Il risultato precedente può essere approssimato sostituendo gli integrali a delle sommatorie dopo aver opportunamente discretizzato le parti anteriore e posteriore della fusoliera. Un esempio di discretizzazione è dato dalle figure 5.3 e 5.4. I tre tronchi di fusoliera — anteriore, centrale e posteriore — sono suddivisi, rispettivamente, in $N_{f1} = 9$, $N_{fw} = 4$, ed $N_{f2} = 9$ strisce. Le strisce che contano nel calcolo di $C_{M_{\alpha,B}}$ sono quelle numerate da 1 a 9 e da 14 a 22.

A questo punto è necessario ricavare in corrispondenza dei centroidi di ciascuna striscia, oltre al valore della larghezza w_f della fusoliera, il valore del gradiente di *upwash* $\partial \epsilon_u / \partial \alpha$.

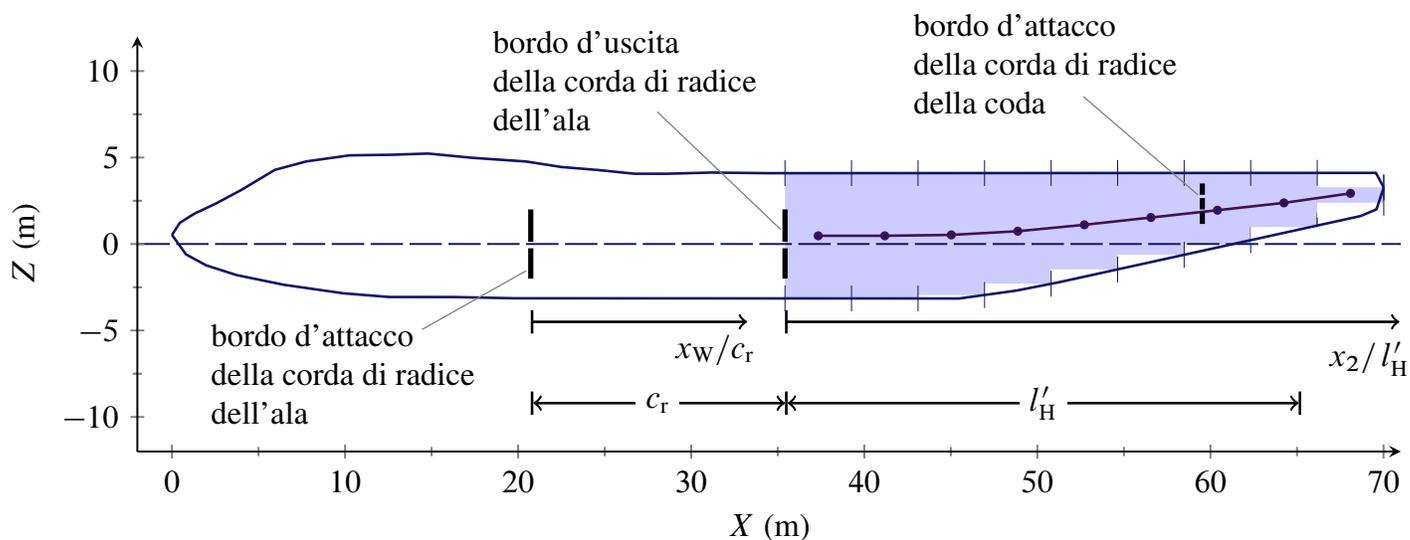


Figura 5.4 Discretizzazione della parte di fusoliera a valle del bordo d'uscita della corda di radice dell'ala (*afterbody*). Definizione delle coordinate adimensionali x_W/c_r e x_2/l'_H , con $c_r = 14,7$ m e $l'_H = 29,8$ m.

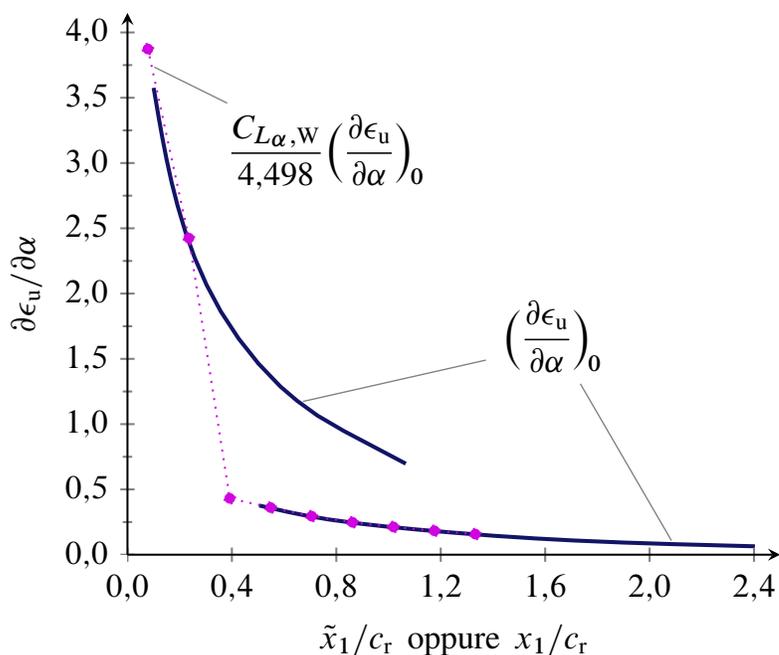


Figura 5.5 Gradiente di *upwash* alle diverse stazioni situate davanti all'ala. Le stazioni denominate \tilde{x}_1 sono quelle più vicine mentre quelle denominate x_1 sono le stazioni via via più lontane e più vicine alla prua. Le due curve originali $(\partial\epsilon_u/\partial\alpha)_0$ sono relative a un'ala di gradiente di portanza pari a $4,498 \text{ rad}^{-1}$. Pertanto i valori desiderati sono ottenuti moltiplicando per un fattore $C_{L\alpha,W}/4,498 \text{ rad}^{-1}$ con $C_{L\alpha,W} = 4,547 \text{ rad}^{-1}$.

Per il tronco anteriore di fusoliera si procede consultando la figura 5.5 dove sono riportate le curve che forniscono $(\partial\epsilon_u/\partial\alpha)_0$ per un'ala di gradiente di portanza pari a $4,498 \text{ rad}^{-1}$. I valori desiderati di $\partial\epsilon_u/\partial\alpha$ sono ottenuti moltiplicando $(\partial\epsilon_u/\partial\alpha)_0$ per un fattore $C_{L\alpha,W}/4,498 \text{ rad}^{-1}$ con $C_{L\alpha,W} = 4,547 \text{ rad}^{-1}$. Tali valori sono diagrammati nella figura 5.5 in funzione della coordinata adimensionale x_1/c_r e sono riportati nella tabella 5.2 (*forebody strips*).

Nella pratica ingegneristica le due strisce più vicine all'ala sono associate alla curva in alto del diagramma considerato (coordinata \tilde{x}_1), trovandosi in una zona a più elevato gradiente di *upwash*. Le rimanenti strisce che discretizzano il *forebody* sono associate al diagramma in basso (coordinata x_1).

Per il tronco posteriore della fusoliera si procede osservando che

$$\left(1 + \frac{\partial \epsilon_u}{\partial \alpha}\right)_{afterbody} \simeq \frac{x_2}{l'_H} \left[1 - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right)_{H, h_{WH}=0}\right]$$

dove $(\partial \epsilon / \partial \alpha)_{H, h_{WH}=0}$ è il gradiente di *downwash* in corrispondenza della stazione $x_2 = l'_H$ (coordinata del centro aerodinamico dell'impennaggio orizzontale) all'altezza della FRL ($Z = 0$). L'ultima formula esprime semplicemente il fatto che a valle dell'ala la corrente è deviata verso il basso dunque vi è un angolo di *upwash* ϵ_u negativo, cioè un *downwash* ϵ . Inoltre, è ragionevole supporre che la quantità $(1 + \partial \epsilon_u / \partial \alpha)$ sia pressoché nulla in prossimità del bordo d'uscita dell'ala ($x_2 = 0$) e cresca linearmente assumendo il valore $[1 - (\partial \epsilon / \partial \alpha)_H]$ in coda.

In generale, per stimare il gradiente di *downwash* in coda — ad una certa distanza a valle dell'ala e ad una certa altezza dal piano alare — si utilizza la seguente formula analitica:

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right)_H = \sqrt{1 - M^2} \left[4,44 \left(K_{\mathcal{R}} K_\lambda K_{WH} \sqrt{\cos \Lambda_{c/4}}\right)^{1,19}\right]$$

I fattori moltiplicativi $K_{\mathcal{R}}$, K_λ e K_{WH} tengono conto, rispettivamente, dell'allungamento \mathcal{R} dell'ala, della rastremazione λ dell'ala e del posizionamento del piano di coda orizzontale. Essi sono espressi dalle formule

$$K_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{1}{1 + \mathcal{R}^{1,7}}, \quad K_\lambda = \frac{10 - 3\lambda}{7}, \quad K_{WH} = \frac{1 - (h_{WH}/b)}{(2X_{WH}/b)^{1/3}} = \frac{1 - \frac{m_{WH}}{2}}{r_{WH}^{1/3}}$$

dove

- X_{WH} è la distanza longitudinale, misurata nel piano di simmetria del velivolo lungo la direttrice della corda di radice alare, tra il punto a $\frac{1}{4}$ della corda media aerodinamica dell'impennaggio orizzontale e il punto a $\frac{1}{4}$ della corda media aerodinamica dell'ala,
- h_{WH} è la distanza del punto a $\frac{1}{4}$ della corda media aerodinamica dell'impennaggio orizzontale dal piano normale al piano di simmetria del velivolo e passante per la corda di radice dell'ala (per convenzione h_{WH} è positiva se il piano di coda è situato al di sopra della corda di radice).

In questo esempio si può assumere per l'impennaggio orizzontale

$$X_{WH} = 33,8 \text{ m} \implies r_{WH} = \frac{X_{WH}}{b/2} = 1,13$$

Ai fini del calcolo del coefficiente $C_{\mathcal{M}\alpha, B}$ è possibile considerare il gradiente di *downwash* all'altezza della FRL, cioè per $h_{WH} = 0$. Si pone quindi

$$m_{WH} = 2 \frac{h_{WH}}{b} = 0 \implies \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right)_H \equiv \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}\right)_{H, h_{WH}=0}$$

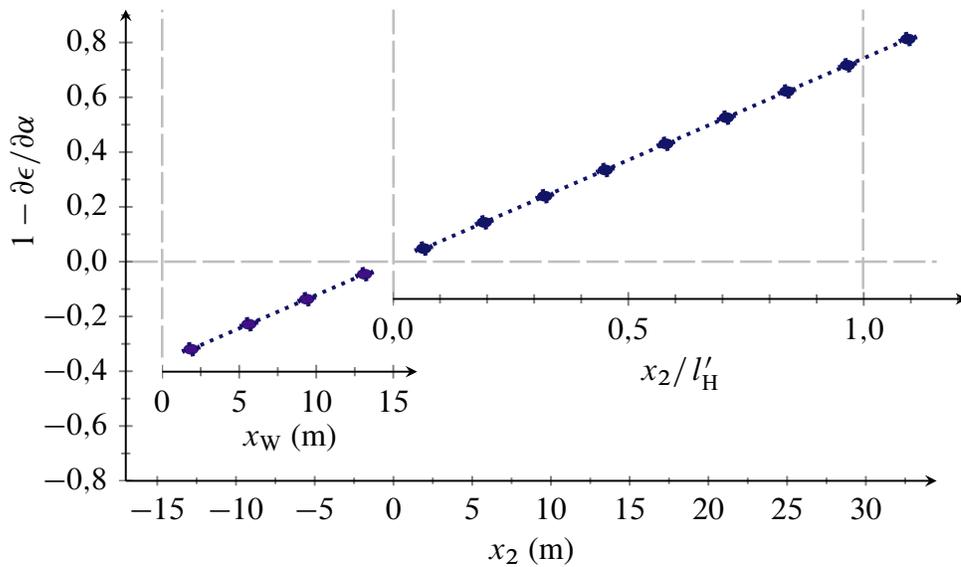


Figura 5.6 Gradiente di *downwash* alle diverse stazioni poste dietro l'ala. Le coordinate x_W e x_2 hanno origine, rispettivamente, al bordo d'attacco e al bordo d'uscita della corda di radice dell'ala. La lunghezza l'_H è la distanza del centro aerodinamico dell'impennaggio orizzontale dall'origine della coordinata x_2 .

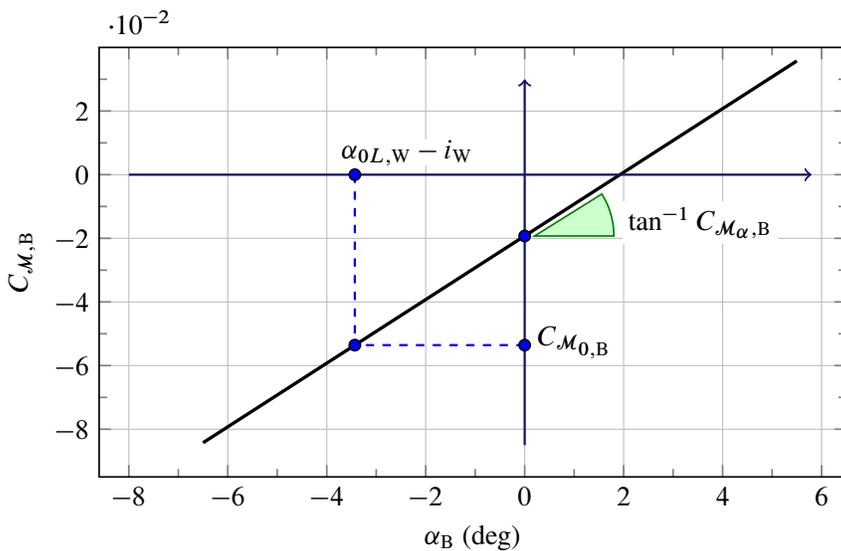


Figura 5.7 Grafico del coefficiente C_{M_B} al variare dell'angolo d'attacco α_B .

Dai valori su riportati si deducono i tre fattori moltiplicativi

$$K_R = 0,106, \quad K_\lambda = 1,30, \quad K_H = 0,959$$

e pertanto un

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right)_{H, h_{WH}=0} = \underline{0,258}$$

L'andamento dei valori di $(\partial \epsilon / \partial \alpha)_{H, h_{WH}=0}$ è mostrato nella figura 5.6 e nella tabella 5.3.

A questo punto risulta possibile discretizzare la formula di calcolo del $C_{M_{\alpha,B}}$ pervenendo al

Tabella 5.2 Discretizzazione della parte anteriore della fusoliera (*forebody strips*), del tronco sotteso dalla radice alare (*wing strips*) e della parte posteriore (*afterbody strips*). I valori numerici sono utilizzati nella formula di calcolo del gradiente $C_{\mathcal{M}_{\alpha,B}}$.

| <i>forebody strips</i> | | | | | | <i>wing strips</i> | | | | | | |
|------------------------|--------------|--------------|-----------|--|---|--------------------|--------------|--------------|-----------|-------------------|--------------------|---|
| k | X_{cl,f_k} | Z_{cl,f_k} | w_{f_k} | $\frac{x_1}{c_r}, \frac{\tilde{x}_1}{c_r}$ | $\frac{\partial \epsilon_u}{\partial \alpha}$ | k | X_{cl,f_k} | Z_{cl,f_k} | w_{f_k} | $\frac{x_w}{c_r}$ | $\frac{x_2}{l'_H}$ | $1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}$ |
| | (m) | (m) | (m) | | | | (m) | (m) | (m) | | | |
| 1 | 1,2 | 0,49 | 2,63 | 1,33 | 0,16 | 1 | 22,6 | 0,69 | 6,60 | 0,13 | -0,43 | -0,32 |
| 2 | 3,5 | 0,60 | 4,13 | 1,18 | 0,18 | 2 | 26,2 | 0,52 | 6,59 | 0,38 | -0,31 | -0,23 |
| 3 | 5,8 | 0,91 | 5,16 | 1,02 | 0,21 | 3 | 29,9 | 0,48 | 6,57 | 0,63 | -0,18 | -0,14 |
| 4 | 8,1 | 1,09 | 5,86 | 0,86 | 0,25 | 4 | 33,6 | 0,48 | 6,56 | 0,88 | -0,06 | -0,05 |
| 5 | 10,4 | 1,10 | 6,25 | 0,71 | 0,30 | | | | | | | |
| 6 | 12,7 | 1,07 | 6,34 | 0,55 | 0,36 | | | | | | | |
| 7 | 15,0 | 1,04 | 6,44 | 0,39 | 0,43 | | | | | | | |
| 8 | 17,3 | 0,96 | 6,53 | 0,24 | 2,42 | | | | | | | |
| 9 | 19,6 | 0,85 | 6,60 | 0,08 | 3,87 | | | | | | | |

| <i>afterbody strips</i> | | | | | |
|-------------------------|--------------|--------------|-----------|--------------------|---|
| k | X_{cl,f_k} | Z_{cl,f_k} | w_{f_k} | $\frac{x_2}{l'_H}$ | $1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}$ |
| | (m) | (m) | (m) | | |
| 1 | 37,3 | 0,47 | 6,55 | 0,06 | 0,05 |
| 2 | 41,2 | 0,47 | 6,54 | 0,19 | 0,14 |
| 3 | 45,0 | 0,53 | 6,53 | 0,32 | 0,24 |
| 4 | 48,9 | 0,74 | 6,52 | 0,45 | 0,33 |
| 5 | 52,7 | 1,11 | 6,51 | 0,58 | 0,43 |
| 6 | 56,6 | 1,53 | 5,73 | 0,71 | 0,53 |
| 7 | 60,4 | 1,95 | 4,20 | 0,84 | 0,62 |
| 8 | 64,2 | 2,38 | 2,50 | 0,97 | 0,72 |
| 9 | 68,1 | 2,93 | 0,83 | 1,10 | 0,81 |

seguinte risultato finale:

$$\begin{aligned}
 C_{\mathcal{M}_{\alpha,B}} &\approx \frac{\pi}{2S\bar{c}} \left(\sum_{k=1}^9 w_{f_k}^2 \left[1 + \left(\frac{\partial \epsilon_u}{\partial \alpha} \right)_k \right] \Delta x_1 + \sum_{k=14}^{22} w_{f_k}^2 \frac{x_{2k}}{l'_H} \left[1 - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right)_{H,h_{WH}=0} \right] \Delta x_2 \right) \\
 &= \underline{0,598 \text{ rad}^{-1}} = \underline{0,0100 \text{ deg}^{-1}}
 \end{aligned}$$

I valori dell'indice k nella formula precedente corrispondono a quelli riportati nella tabella riassuntiva 5.3.

Noti i coefficienti $C_{\mathcal{M}_{0,B}}$ e $C_{\mathcal{M}_{\alpha,B}}$ si può costruire il grafico del $C_{\mathcal{M}_B}$ in funzione dell'angolo α_B . Esso corrisponde alla retta disegnata nella figura 5.7. Si osservi il valore $C_{\mathcal{M}_{0,B}}$, per

Tabella 5.3 Riassunto dei valori discreti utilizzati nella formula di calcolo del gradiente $C_{M_{\alpha,B}}$. La discretizzazione della fusoliera è quella mostrata nelle figure 5.3 e 5.4. I tre tronchi di fusoliera — anteriore, centrale e posteriore — sono suddivisi, rispettivamente, in $N_{f1} = 9$, $N_{fW} = 4$, ed $N_{f2} = 9$ strisce. Le strisce che contano nel calcolo di $C_{M_{\alpha,B}}$ sono quelle numerate da 1 a 9 e da 14 a 22.

| k | $X_{cl,fk}$ (m) | ΔX (m) | w_{fk} (m) | w_{fk}^2 (m ²) | $1 + \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}$ | $w_{fk}^2 \left(1 + \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial \alpha}\right) \Delta X$ (m ³) |
|-----|--------------------|-------------------|-----------------|---------------------------------|--|--|
| 1 | 1,2 | 2,30 | 2,63 | 6,91 | 1,16 | 18,41 |
| 2 | 3,5 | 2,30 | 4,13 | 17,04 | 1,18 | 46,44 |
| 3 | 5,8 | 2,30 | 5,16 | 26,66 | 1,21 | 74,45 |
| 4 | 8,1 | 2,30 | 5,86 | 34,33 | 1,25 | 98,65 |
| 5 | 10,4 | 2,30 | 6,25 | 39,05 | 1,30 | 116,48 |
| 6 | 12,7 | 2,30 | 6,34 | 40,23 | 1,36 | 126,07 |
| 7 | 15,0 | 2,30 | 6,44 | 41,43 | 1,43 | 136,57 |
| 8 | 17,3 | 2,30 | 6,53 | 42,64 | 3,42 | 336,31 |
| 9 | 19,6 | 2,30 | 6,60 | 43,63 | 4,87 | 489,58 |
| 14 | 37,3 | 3,84 | 6,55 | 42,93 | 0,05 | 7,89 |
| 15 | 41,2 | 3,84 | 6,54 | 42,78 | 0,14 | 23,58 |
| 16 | 45,0 | 3,84 | 6,53 | 42,62 | 0,24 | 39,16 |
| 17 | 48,9 | 3,84 | 6,52 | 42,47 | 0,33 | 54,63 |
| 18 | 52,7 | 3,84 | 6,51 | 42,32 | 0,43 | 69,98 |
| 19 | 56,6 | 3,84 | 5,73 | 32,86 | 0,53 | 66,40 |
| 20 | 60,4 | 3,84 | 4,20 | 17,62 | 0,62 | 42,09 |
| 21 | 64,2 | 3,84 | 2,50 | 6,25 | 0,72 | 17,24 |
| 22 | 68,1 | 3,84 | 0,83 | 0,69 | 0,81 | 2,16 |

definizione, è associato all'angolo $\alpha_B = \alpha_{0L,W} - i_W$.

Per finire, si calcola lo spostamento, tipicamente in avanti, del centro aerodinamico al passare dalla configurazione ad ala isolata alla configurazione ala-fusoliera. Come è noto l'entità dello spostamento è data dal rapporto

$$-\frac{C_{M_{\alpha,B}}}{C_{L_{\alpha,W}}} \equiv \Delta \bar{x}_{ac,W \rightarrow WB} = -\frac{0,598 \text{ rad}^{-1}}{4,55 \text{ rad}^{-1}} = \underline{\underline{-0,132}}$$

Nota la distanza dal bordo d'attacco della corda media aerodinamica dell'ala isolata, che nel caso analizzato è $x_{ac,W} \bar{c} = 0,537 \bar{c}$, la posizione adimensionale del centro aerodinamico del velivolo parziale è dunque:

$$\bar{x}_{ac,WB} \equiv \frac{x_{ac,WB}}{\bar{c}} = \frac{x_{ac,W}}{\bar{c}} - \frac{C_{M_{\alpha,B}}}{C_{L_{\alpha,W}}} = 0,537 - 0,132 = \underline{\underline{0,405}}$$

Le distanze $x_{ac,W}$ e $x_{ac,WB}$ per il velivolo considerato sono mostrate nella figura 5.8.



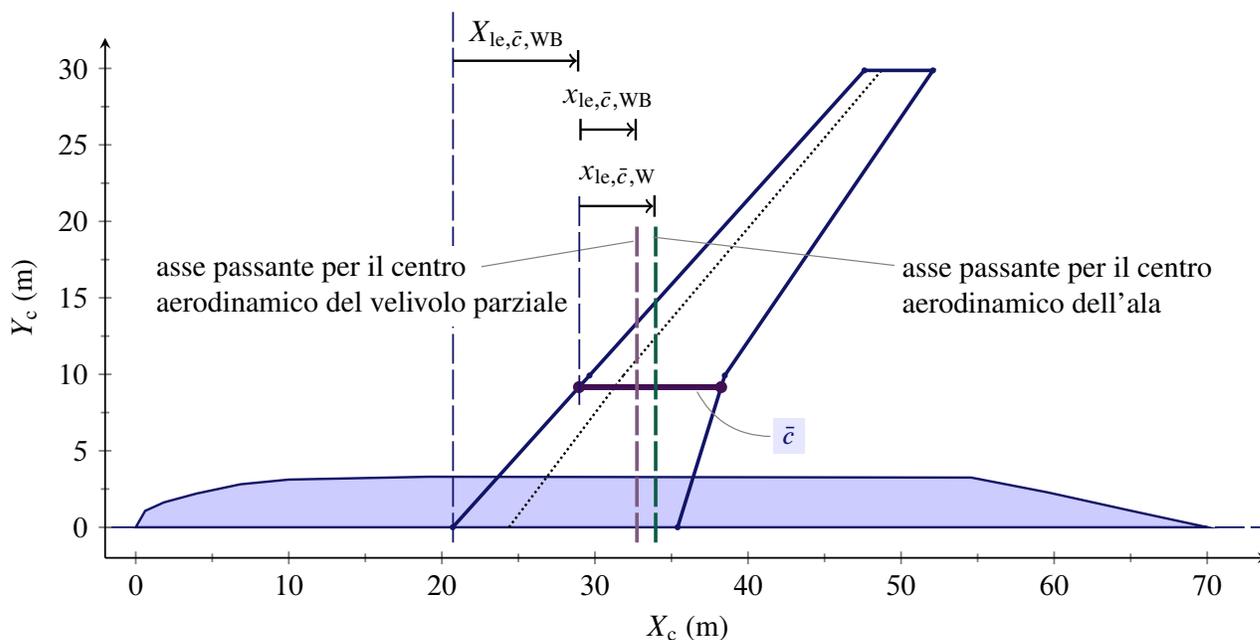


Figura 5.8 Effetto della presenza della fusoliera sul centro aerodinamico. Per chiarezza si sono evidenziate le coordinate (X_c, Y_c) del sistema di riferimento *costruttivo* del velivolo, usando il simbolo ‘ X ’ per le distanze longitudinali riferite all’apice dell’ala e ‘ x ’ per quelle riferite al bordo d’attacco della corda media aerodinamica. Il centro aerodinamico dell’ala, nel passaggio alla configurazione ala-fusoliera, si sposta tipicamente in avanti. Nell’esempio proposto si passa da un valore $x_{ac,W}/\bar{c} = 0,537$ a un valore $x_{ac,WB}/\bar{c} = 0,405$.

AERODINAMICA DEI PIANI DI CODA

Esempio 6.1: *Gradiente dell'angolo di downwash*



Si vuole calcolare il gradiente $d\epsilon/d\alpha$ di un'ala finita simile a quella dell'esercizio 4.4.

L'ala assegnata ha un allungamento

$$\mathcal{R} = \frac{b^2}{S} = \frac{(16 \text{ m})^2}{28 \text{ m}^2} = \underline{9,14}$$

Le caratteristiche della superficie portante e dei profili di sezione permettono di ricavare un valore medio del gradiente

$$\begin{aligned} \bar{C}_{l\alpha} &= \frac{2}{S} \int_0^{b/2} c(Y) C_{l\alpha}(Y) dY \\ &= \frac{2}{28 \text{ m}^2} \int_0^{8 \text{ m}} [-0,01250 (\text{rad m})^{-1} Y + 6,150 \text{ rad}^{-1}] \\ &\quad \cdot [-0,188 Y + 2,50 \text{ m}] dY \\ &= \underline{6,107 \text{ rad}^{-1}} = \underline{0,1066 \text{ deg}^{-1}} \end{aligned}$$

Esso può essere utilizzato per il calcolo del gradiente di portanza dell'ala finita

$$C_{L\alpha} = \frac{\bar{C}_{l\alpha}}{1 + \frac{\bar{C}_{l\alpha}}{\pi \mathcal{R} e_w}} = \frac{6,107 \text{ rad}^{-1}}{1 + \frac{6,107 \text{ rad}^{-1}}{3,14 \cdot 9,14 \cdot 0,90}} = \underline{4,942 \text{ rad}^{-1}} = \underline{0,0863 \text{ deg}^{-1}}$$

avendo assunto uno *span efficiency factor* dato dalla formula empirica¹

$$e_w = \frac{2}{2 - \mathcal{R} + \sqrt{4 + \mathcal{R}^2(1 + \tan^2 \Lambda_{t_{\max}})}} = 0,90$$

con $\Lambda_{t_{\max}}$ l'angolo di freccia della linea dei punti di spessore percentuale massimo dei profili. Nel caso considerato tutti gli spessori percentuali si trovano al 30% delle corde e $\Lambda_{t_{\max}} = -0,54$ deg e $\tan \Lambda_{t_{\max}} = -0,009$.

Si ricava dunque

$$\left. \frac{d\epsilon}{d\alpha} \right|_{M=0} = 2 \frac{\bar{C}_{l\alpha}}{\pi \mathcal{R} e_w} = 2 \frac{6,107 \text{ rad}^{-1}}{3,14 \cdot 9,14 \cdot 0,90} = 0,38$$

e infine

$$\frac{d\epsilon}{d\alpha} = \sqrt{1 - M^2} \left. \frac{d\epsilon}{d\alpha} \right|_{M=0} = \sqrt{1 - 0,40^2} \cdot 0,38 = 0,35$$



Esempio 6.2: Gradiente dell'angolo di downwash (metodo DATCOM)

Si consideri la medesima ala assegnata nell'esercizio 4.4 e dell'esempio 6.1. Si vuole calcolare il gradiente $d\epsilon/d\alpha$ con una formula semiempirica che tiene conto sia della posizione longitudinale del piano orizzontale di coda sia della sua altezza rispetto all'ala.

Per stimare il gradiente di $d\epsilon/d\alpha$ in coda, per regimi di volo subsonico si può utilizzare la seguente formula analitica:

$$\frac{d\epsilon}{d\alpha} = \sqrt{1 - M^2} \left[4,44 \left(K_{\mathcal{R}} K_{\lambda} K_H \sqrt{\cos \Lambda_{c/4,W}} \right)^{1,19} \right]$$

con $\Lambda_{c/4}$ l'angolo di freccia della linea dei fuochi. I fattori moltiplicativi $K_{\mathcal{R}}$, K_{λ} e K_H tengono conto, rispettivamente, dell'allungamento \mathcal{R} , della rastremazione λ dell'ala e del posizionamento del piano di coda orizzontale. Essi sono espressi dalle formule

$$K_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_W} - \frac{1}{1 + \mathcal{R}_W^{1,7}}, \quad K_{\lambda} = \frac{10 - 3 \lambda_W}{7}, \quad K_H = \frac{1 - (h_{HW}/b_W)}{(2X_{HW}/b_W)^{1/3}}$$

dove h_{HW} è la distanza verticale del centro aerodinamico dell'impennaggio orizzontale dalla corda media aerodinamica dell'ala (o, per alcuni autori, dalla corda $c_{t,W}$ di radice dell'ala). Per convenzione h_{HW} è positiva se il piano di coda è situato al di sopra della corda di radice. La

¹S. A. Brandt, R. J. Stiles, J. J. Bertin, *Introduction to Aeronautics, A design Perspective*, AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 2004.

TO DO: aggiungere alla bibliografia.

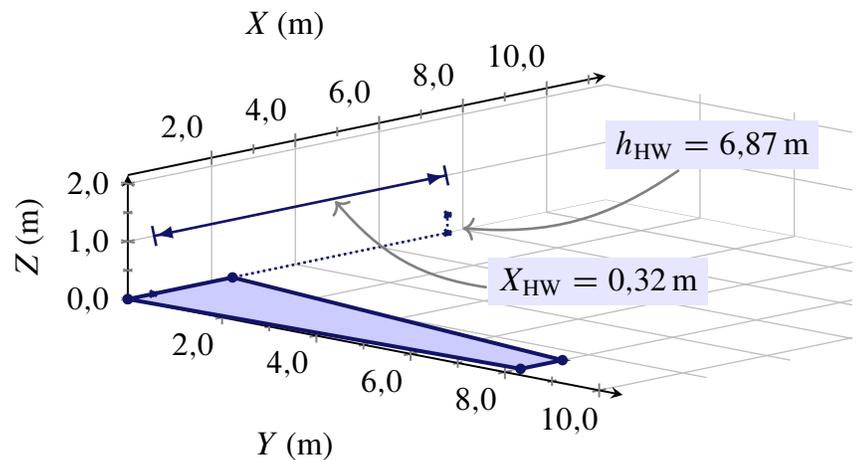


Figura 6.1 Ala assegnata nell'esempio 6.1. In un dato punto a valle dell'ala viene calcolato il gradiente $d\epsilon/d\alpha$.

quantità X_{HW} è la distanza longitudinale del centro aerodinamico dell'impennaggio orizzontale dal punto a un quarto della corda media aerodinamica dell'ala (o, per alcuni autori, dal punto a un quarto della corda $c_{r,w}$ di radice dell'ala).

Nell'esempio considerato si assumano

$$X_{HW} = 6,87 \text{ m}, \quad h_{HW} = 0,32 \text{ m}$$

dove $\lambda_w = 0,40$ e $b_w = 16 \text{ m}$. Il punto a valle dell'ala in cui si vuole valutare il gradiente di downwash è rappresentato nella figura 6.1. Si ottiene

$$K_R = 0,087, \quad K_\lambda = 1,257, \quad K_H = 1,031$$

$$\left. \frac{d\epsilon}{d\alpha} \right|_{M=0} = \left[4,44 \left(0,087 \cdot 1,257 \cdot 1,031 \sqrt{\cos 0} \right)^{1,19} \right] = \underline{0,33}$$

e infine per un numero di Mach di volo $M = 0,40$

$$\frac{d\epsilon}{d\alpha} = \sqrt{1 - M^2} \left. \frac{d\epsilon}{d\alpha} \right|_{M=0} = \sqrt{1 - 0,40^2} \cdot 0,33 = \underline{0,30}$$

Esercizio 6.1: *Gradiente dell'angolo di downwash (metodo DATCOM)*

Calcolare il gradiente $d\epsilon/d\alpha$ per un'ala simile a quella dell'esempio 6.2 ma con angolo di freccia $\Lambda_{c/4,w} = 24 \text{ deg}$ e per i numeri di Mach di volo $M = 0,1, 0,4$ e $0,6$.

Confrontare i risultati ottenuti con quelli ricavabili dalle formule di calcolo dell'esempio 6.1.