
Robotica Probabilistica

Filtri Bayesiani

Materiale tratto da: Introduction to Mobile Robotics, Univ. of Freiburg (Prof. Dr. Wolfram Burgard, Dr. Cyrill Stachniss, Dr. Giorgio Grisetti, Dr. Maren Bennewitz) e Mobile Robotics, Univ. of Oxford (Prof. Paul Newman)



Rappresentazione dell'incertezza usando la probabilità

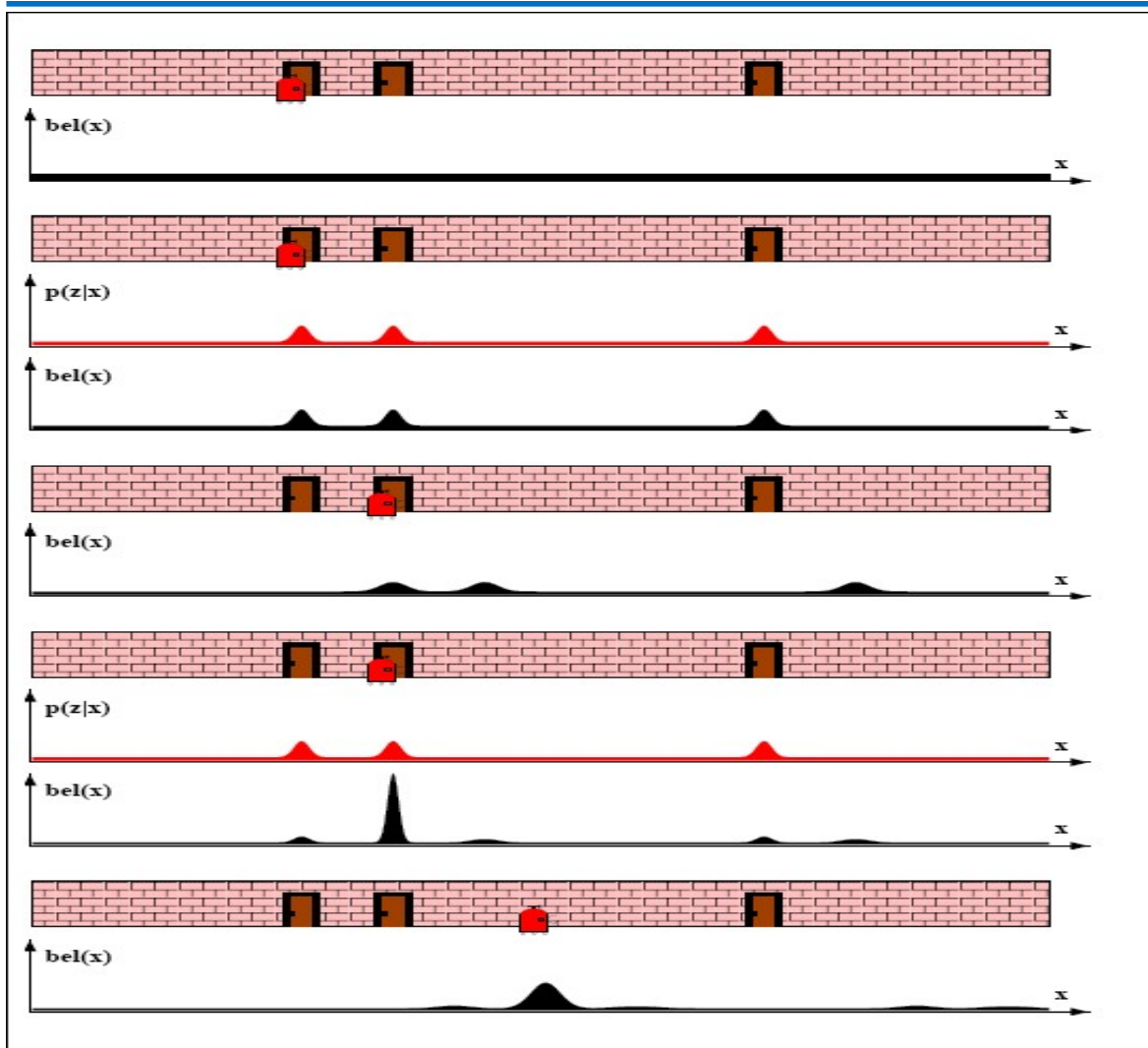
Percezione = stima dello stato (problema stima)

Azione = massimizzazione utilità (teoria decisioni)

Percezione: mappa misure dei sensori nella rappresentazione interna dello stato del robot e dell'ambiente.

Sensori sono rumorosi, l'ambiente è parzialmente osservabile, non prevedibile, dinamico, modello inaccurato etc.

Belief = Probabilità dello stato date azioni ed osservazioni



Bel iniziale

Osservazione

Azione

Osservazione

Azione



Stima:

Si cerca la stima massima dello stato

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ dato un insieme di misure

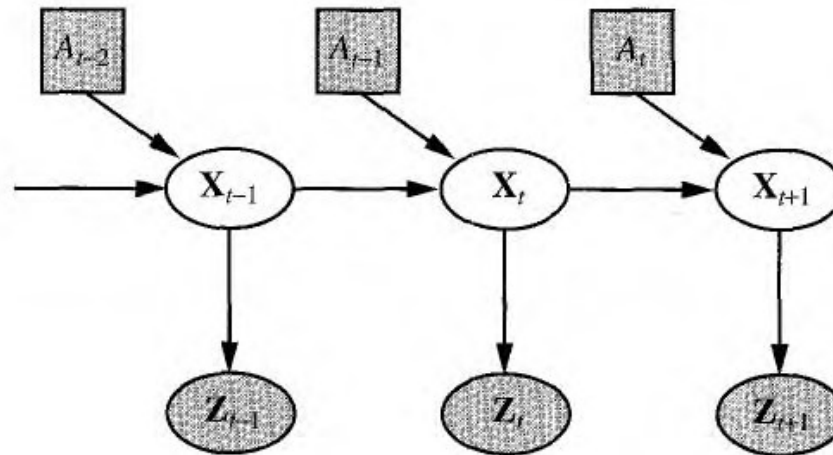
$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$

Problema: trovare $P(X | Z)$

Filtro bayesiano: $P(X_{t+1} | z_{1:t+1})$ a partire da $P(X_t | z_{1:t})$



Distinguendo tra azioni e osservazioni:



Filtro bayesiano: $P(X_{t+1} | z_{1:t+1}, a_{1:t})$ da $P(X_t | z_{1:t}, a_{1:t-1})$

Localizzazione: X è la posizione

Mapping: X è la mappa

SLAM: X è mappa e posizione

**Assiomi di Kolmogorov**

Con $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ spazio di misura,
per ogni $A \in \mathcal{F}$

Regola 1 (positività):

$$0 \leq \Pr(A) \leq 1;$$

Regola 2 (certezza):

$$\Pr(\text{True}) = \Pr(\Omega) = 1$$

Regola 3 (unione):

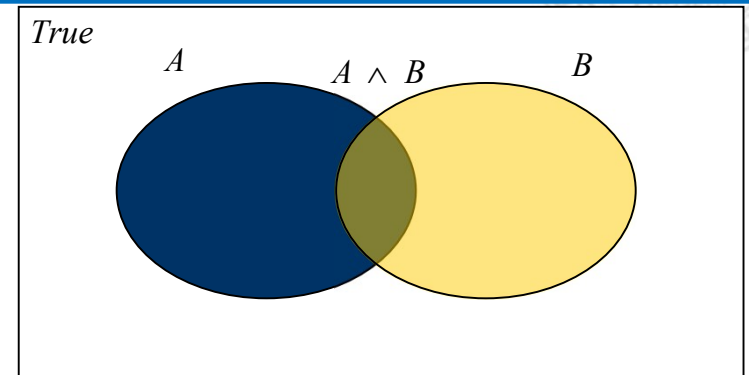
$$\Pr(\cup_i A_i) = \sum_i \Pr(A_i) \text{ (per } A_i \text{ sequenze num. di ins. disgiunti)}$$



Interpretazione insiemistica:

$$\Pr(\text{False}) \leq \Pr(A) \leq \Pr(\text{True}) = 1$$

$$\Pr(A \text{ or } B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \text{ and } B)$$





Conseguenze assiomi probabilità

$$\Pr(A \vee \neg A) = \Pr(A) + \Pr(\neg A) - \Pr(A \wedge \neg A)$$

$$\Pr(True) = \Pr(A) + \Pr(\neg A) - \Pr(False)$$

$$1 = \Pr(A) + \Pr(\neg A) - 0$$

$$\Pr(\neg A) = 1 - \Pr(A)$$

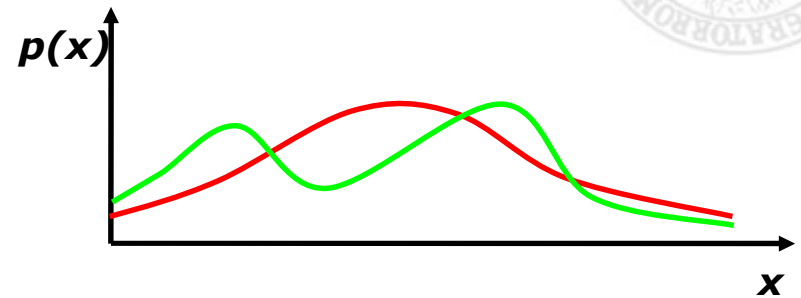


- X è una **variable** aleatoria che assume valori nell'insieme numerabile $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- $P(X=x_i)$, o $P(x_i)$, è la **probabilità** che la variable aleatoria X assuma valore x_i .
- $P(\)$ è la funzione di **distribuzione di probabilità**.
- E.g.

$$P(\text{Room}) = \langle 0.7, 0.2, 0.08, 0.02 \rangle$$



- X prende valori in un insieme continuo.
- $p(X=x)$, o $p(x)$, è la funzione di densità di probabilità.



$$\Pr(x \in (a, b)) = \int_a^b p(x) dx$$

Gaussiana

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$



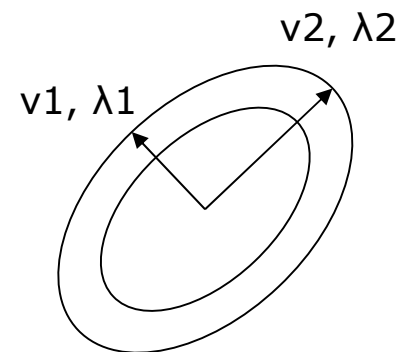
Multivariata:

$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\}$$

Σ è la matrice di covarianza, μ vettore dei valori medi

$$E(X) = \bar{X} = \int x f_X(x) dx$$
$$\Sigma = E((X - \bar{X})(X - \bar{X})^T)$$

Le linee di equidensità si dispongono lungo ellissoidi definiti da autovettori e autovalori della matrice di covarianza





- $P(X=x \text{ and } Y=y) = P(x,y)$
- Se X e Y sono **independenti** allora
$$P(x,y) = P(x) P(y)$$
- $P(x | y)$ è la *probabilità di x dato y*
$$P(x | y) = P(x,y) / P(y)$$
$$P(x,y) = P(x | y) P(y)$$
- Se X e Y sono **independenti** allora
$$P(x | y) = P(x)$$

**Caso discreto**

$$\sum_x P(x) = 1$$

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$P(x) = \sum_y P(x | y)P(y)$$

Caso continuo

$$\int p(x) dx = 1$$

$$p(x) = \int p(x, y) dy$$

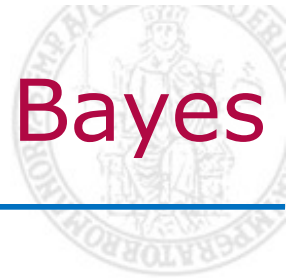
$$p(x) = \int p(x | y)p(y) dy$$



$$P(x, y) = P(x | y)P(y) = P(y | x)P(x)$$

⇒

$$P(x | y) = \frac{P(y | x) P(x)}{P(y)} = \frac{\text{likelihood} \cdot \text{prior}}{\text{evidence}}$$



$$p(x | y) = \frac{p(y | x) p(x)}{p(y)} = \frac{p(y | x) p(x)}{\sum_{x'} p(y | x') p(x')}$$
$$p(x | y) = \frac{p(y | x) p(x)}{p(y)} = \frac{p(y | x) p(x)}{\int p(y | x') p(x') dx'}$$

Espressa a meno del fattore di normalizzazione ($p(y)$ non dipende da x)

$$p(x | y) = \eta p(y | x) p(x)$$



Nel caso di probabilità condizionate vale la proprietà analoga:

$$P(x|y, z) = \frac{P(y|x, z) P(x|z)}{P(y|z)}$$



Legge delle probabilità totali per probabilità condizionata:

$$P(x) = \int P(x, z) dz$$

$$P(x) = \int P(x | z) P(z) dz$$

$$P(x | y) = \int P(x | y, z) P(z | y) dz$$



Indipendenza condizionata:

$$P(x,y | z) = P(x | z)P(y | z)$$

e

$$P(x | z) = P(x | z, y)$$

$$P(y | z) = P(y | z, x)$$



$$E[X] = \sum_x x p(x), \quad \text{Valore Atteso}$$

$$E[X] = \int x p(x) dx .$$

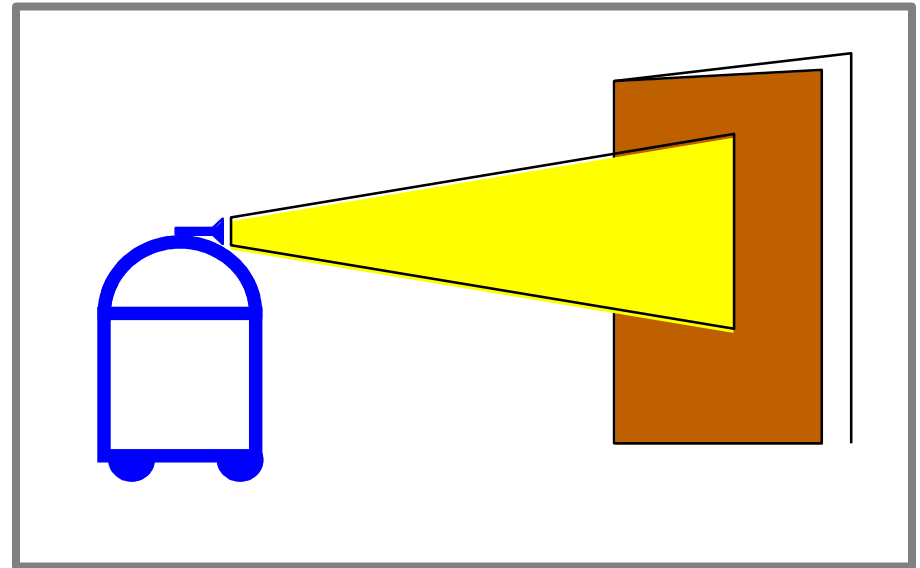
$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad \text{Lineare nella var aleatoria}$$

$$\text{Cov}[X] = E[X - E[X]]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

Deviazione
quadratica media



- Il robot ha la misura z
- Stato: open o closed
- Quanto vale $P(open|z)$?



Stima Stato



- $P(open|z)$ prob. **diagnostica**
- $P(z|open)$ prob. **causale**
- Spesso la prob. **causale** è il dato di partenza (modello, dato empirico, frequenze)
- La legge di Bayes permette di ottenere la diagnosi dalla legge causale:

$$P(open | z) = \frac{P(z | open)P(open)}{P(z)}$$



- $P(z|open) = 0.7$ $P(z|\neg open) = 0.2$
- $P(open) = P(\neg open) = 0.5$

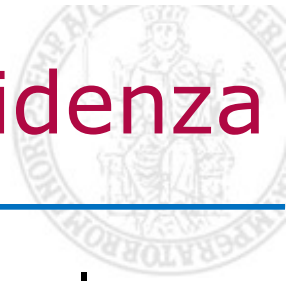
$$P(open | z) = \frac{P(z | open)P(open)}{P(z | open)P(open) + P(z | \neg open)P(\neg open)}$$
$$P(open | z) = \frac{0.7 \cdot 0.5}{0.7 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = 0.778$$

- z determina la probabilità che la porta sia aperta.



Max a-posteriori: se si conosce il prior $P(x)$ sceglie la x che massimizza: $P(z | x) P(x)$

Max likelihood: se non si conosce il prior $P(x)$ sceglie la x che massimizza: $P(z | x)$



- Se il robot ottiene un'altra osservazione z_2 come la integra?
- Come si stima $P(x | z_1 \dots z_n)$?



$$P(x | z_1, \dots, z_n) = \frac{P(z_n | x, z_1, \dots, z_{n-1}) P(x | z_1, \dots, z_{n-1})}{P(z_n | z_1, \dots, z_{n-1})}$$

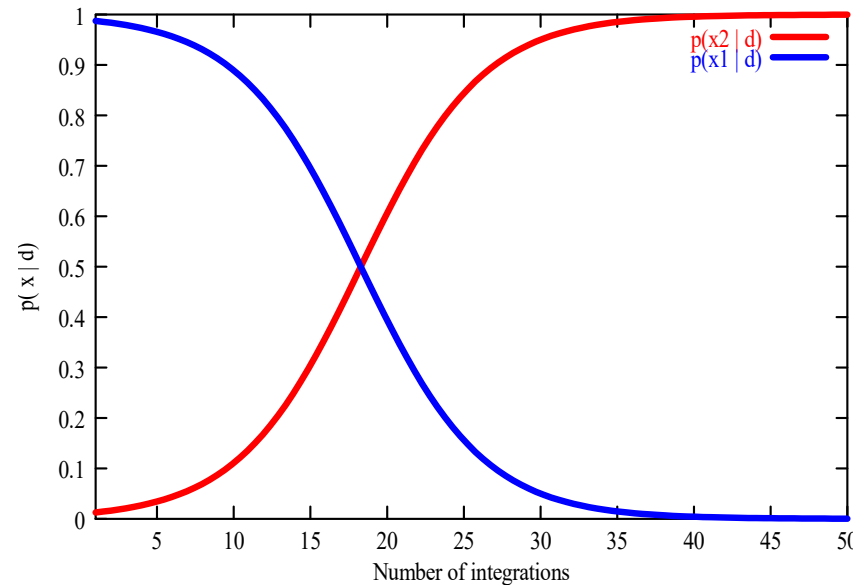
Assunzione di Markov:

dato x , la nuova z_n è indipendente da z_1, \dots, z_{n-1}

$$\begin{aligned} P(x | z_1, \dots, z_n) &= \frac{P(z_n | x) P(x | z_1, \dots, z_{n-1})}{P(z_n | z_1, \dots, z_{n-1})} \\ &= \eta P(z_n | x) P(x | z_1, \dots, z_{n-1}) \\ &= \eta_{1\dots n} \prod_{i=1\dots n} P(z_i | x) P(x) \end{aligned}$$



- Due locazioni possibili x_1 e x_2
- $P(x_1)=0.99$, $P(x_2) = 0.01$
- $P(z|x_2)=0.09$ $P(z|x_1)=0.07$





- $P(z_2 | open) = 0.5$ $P(z_2 | \neg open) = 0.6$
- $P(open | z_1) = 2/3$

$$\begin{aligned} P(open | z_2, z_1) &= \frac{P(z_2 | open) P(open | z_1)}{P(z_2 | open) P(open | z_1) + P(z_2 | \neg open) P(\neg open | z_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{8} = 0.625 \end{aligned}$$

- z_2 abbassa la probabilità che la porta sia aperta.