
Robotica Probabilistica

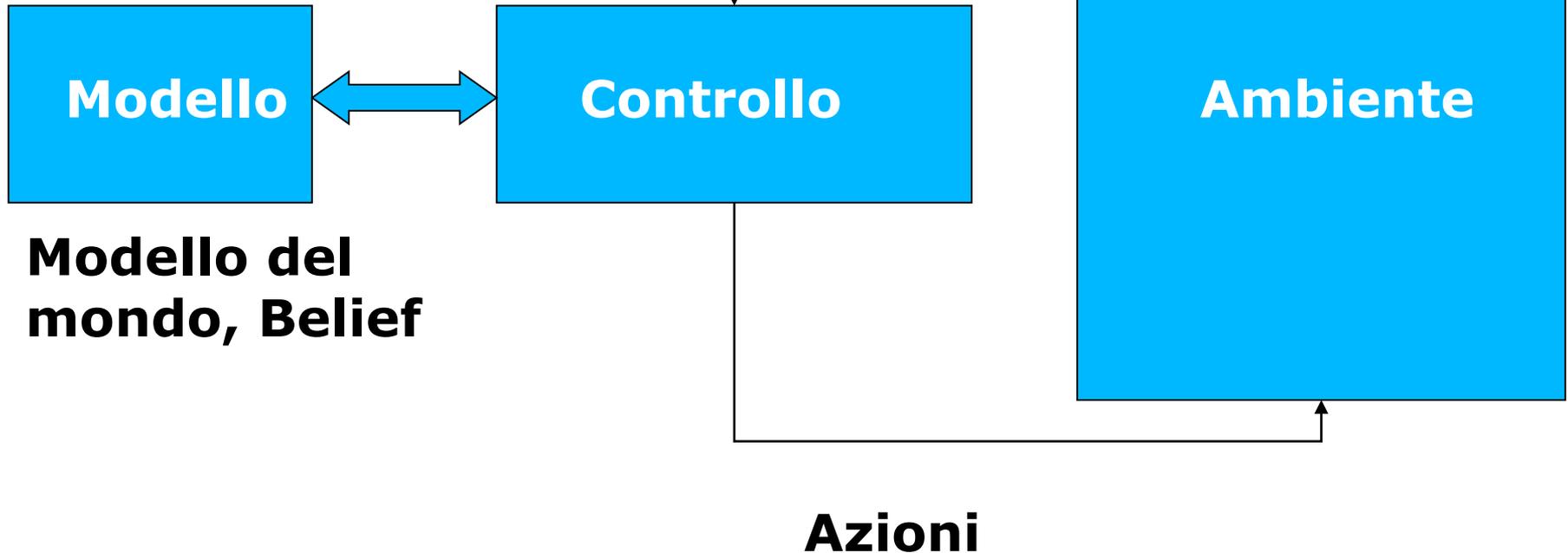
Filtri Bayesiani



- Spesso il mondo è dinamico
 - **Azioni (del robot o di altri agenti)**
 - **Tempo**
- Come introdurre queste azioni?
- Azioni Tipiche: girare ruote, manopolare oggetti, etc.
- Sensori imprecisi
- Azioni aumentano l'incertezza



Percezioni imprecise
Azioni imprecise





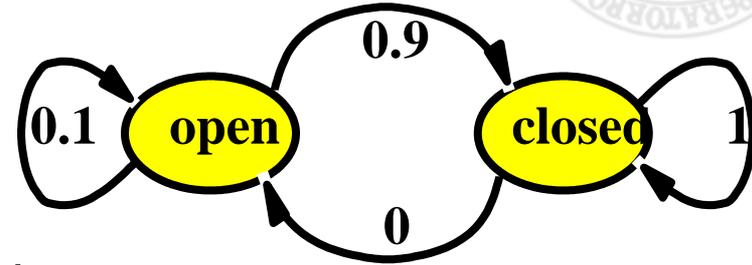
- Per incorporare il risultato di una azione u nel “belief”, se usa un pdf condizionale

$$P(x | u, x')$$

- pdf **eseguendo u cambia lo stato da x' a x .**



- $P(x|u, x')$ con $u =$ "chiudi la porta":



- Se la porta è aperta, "chiudi la porta" ha successo nel 90% dei casi.



Continuo:

$$P(x | u) = \int P(x | u, x')P(x')dx'$$

Discreto:

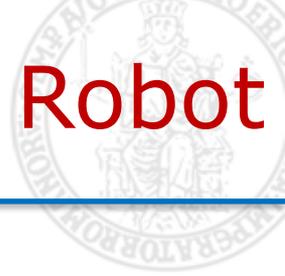
$$P(x | u) = \sum P(x | u, x')P(x')$$

$$\begin{aligned}P(\text{closed} / u) &= \sum P(\text{closed} / u, x') P(x') \\&= P(\text{closed} / u, \text{open}) P(\text{open}) + P(\text{closed} / u, \text{closed}) P(\text{closed}) \\&= \frac{9}{10} \frac{5}{8} + \frac{1}{1} * \frac{3}{8} = \frac{15}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\text{open} / u) &= \sum P(\text{open} / u, x') P(x') \\&= P(\text{open} / u, \text{open}) P(\text{open}) + P(\text{open} / u, \text{closed}) P(\text{closed}) \\&= \frac{1}{10} \frac{5}{8} + \frac{0}{1} * \frac{3}{8} = \frac{1}{16} \\&= 1 - P(\text{closed} / u)\end{aligned}$$



- Stato: Tutte le variabili x_i salienti per l'evoluzione del sistema dinamico
 - **Posa:** Localizzazione e Orientazione rispetto ad un sistema di coordinate assoluto (include la *configurazione* nel caso di manipolatori)
 - **Stato dinamico:** Velocità del robot e delle sue componenti/giunti
 - **Locazione di Features:** degli oggetti nell'ambiente (landmarks)
 - Uno stato x_t è completo se l'insieme delle variabili selezionate consente la migliore previsione.



Si lavora però con stato incompleto

Assunzione Markoviana: la previsione migliore si può fare a partire dallo stato attuale (lo stato passato non aggiunge nulla)

Stato ibrido: variabili continue e discrete

Tempo discreto: X_{t+1} , X_t



- **Dati:**

Flusso di osservazioni z e azioni u :

$$d_t = \{u_1, z_1 \dots, u_t, z_t\}$$

Modello del sensore

$$P(z | x).$$

Modello delle Azioni

$$P(x | u, x').$$

Prior

probabilità dello stato del sistema $P(x)$.

- **Desiderata:**

- Stima dello stato X del **sistema dinamico** il posterior dello stato è il **Belief**:

$$Bel(x_t) = P(x_t | u_1, z_1 \dots, u_t, z_t)$$



Notazione:

Osservazioni

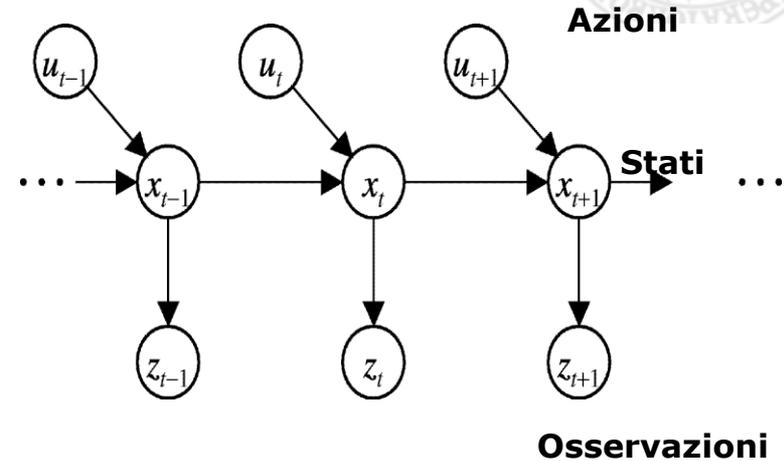
$$z_{t_1:t_2} = z_{t_1}, z_{t_1+1}, z_{t_1+2}, \dots, z_{t_2}$$

Azioni

$$u_{t_1:t_2} = u_{t_1}, u_{t_1+1}, u_{t_1+2}, \dots, u_{t_2}$$

Assunzioni:

- Mondo statico
- Rumore indipendente
- Modello perfetto, non errori di approssimazione



Probabilità di misura

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$

Transizione di stato

$$p(x_t | x_{1:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

Indipendenza condizionata

- Il robot deve dedurre la sua posizione dalle misure;
- Si distingue stato reale e stato stimato;
- $Bel(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t-1})$
probabilità di x_t date le misure $z_{1:t}$ e le azioni $u_{1:t}$
- $Bel'(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t-1})$
predizione (stima dello stato prima dell'ultima osservazione)
- *Calcolo di $Bel(x_t)$ da $Bel'(x_t)$ è la correzione o aggiornamento di misura*

$$Bel(x_t) = P(x_t | u_{1:t}, z_{1:t})$$

Bayes $= \eta P(z_t | x_t, u_{1:t}, z_{1:t-1}) P(x_t | u_{1:t}, z_{1:t-1})$

Markov $= \eta P(z_t | x_t) P(x_t | u_{1:t}, z_{1:t-1})$

Total prob. $= \eta P(z_t | x_t) \int P(x_t | u_{1:t}, z_{1:t-1}, x_{t-1}) P(x_{t-1} | u_{1:t}, z_{1:t-1}) dx_{t-1}$

Markov $= \eta P(z_t | x_t) \int P(x_t | u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1} | u_{1:t}, z_{1:t-1}) dx_{t-1}$

Markov $= \eta P(z_t | x_t) \int P(x_t | u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1} | u_{1:t-1}, z_{1:t-1}) dx_{t-1}$

(Omissione di u_t)

$$= \eta P(z_t | x_t) \int P(x_t | u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$



L'algoritmo generale per il calcolo del Belief:

Filtro Bayesiano

Algoritmo ricorsivo: $Bel(x_t)$ calcolato da $Bel(x_{t-1})$, u_t , z_t

$$Bel'(x_t) = P(z_t | x_t) Bel(x_t)$$

$$Bel(x_t) = \eta P(z_t | x_t) \int P(x_t | u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

for all x_t

$$Bel'(x_t) = \int P(x_t | u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1} \quad \text{predizione}$$

$$Bel(x_t) = \eta P(z_t | x_t) Bel'(x_{t-1}) \quad \text{misura}$$

endFor

return $Bel(x_t)$

$$Bel(x_t) = \eta P(z_t | x_t) \int P(x_t | u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

1. Algoritmo **Filtro_Bayes**($Bel(x), d$):
2. $\eta = 0$
3. If d perceptual data z then
4. For all x do
5. $Bel'(x) = P(z | x) Bel(x)$
6. $\eta = \eta + Bel'(x)$
7. For all x do
8. $Bel'(x) = \eta^{-1} Bel'(x)$
9. else if d action data item u then
10. For all x do
11. $Bel'(x) = \int P(x | u, x') Bel(x') dx'$
12. Return $Bel'(x)$



Per il calcolo:

- Occorre il Belif iniziale: $Bel(x_0)$
- Se conosco, prob 1 sullo stato iniziale (Delta Dirac)
- Se non conosco allora distribuzione uniforme sul dominio di x_0
- Altrimenti altra distribuzione

Distribuzione iniziale:

$$bel(X_0 = \text{open}) = 0.5$$

$$bel(X_0 = \text{closed}) = 0.5$$

Errore sensore:

$$p(Z_t = \text{sense_open} \mid X_t = \text{is_open}) = 0.6$$

$$p(Z_t = \text{sense_closed} \mid X_t = \text{is_open}) = 0.4$$

$$p(Z_t = \text{sense_open} \mid X_t = \text{is_closed}) = 0.2$$

$$p(Z_t = \text{sense_closed} \mid X_t = \text{is_closed}) = 0.8$$

Transizione:

$$p(X_t = \text{is_open} \mid U_t = \text{push}, X_{t-1} = \text{is_open}) = 1$$

$$p(X_t = \text{is_closed} \mid U_t = \text{push}, X_{t-1} = \text{is_open}) = 0$$

$$p(X_t = \text{is_open} \mid U_t = \text{push}, X_{t-1} = \text{is_closed}) = 0.8$$

$$p(X_t = \text{is_closed} \mid U_t = \text{push}, X_{t-1} = \text{is_closed}) = 0.2$$

$$p(X_t = \text{is_open} \mid U_t = \text{do_nothing}, X_{t-1} = \text{is_open}) = 1$$

$$p(X_t = \text{is_closed} \mid U_t = \text{do_nothing}, X_{t-1} = \text{is_open}) = 0$$

$$p(X_t = \text{is_open} \mid U_t = \text{do_nothing}, X_{t-1} = \text{is_closed}) = 0$$

$$p(X_t = \text{is_closed} \mid U_t = \text{do_nothing}, X_{t-1} = \text{is_closed}) = 1$$

In x_0 il robot osserva **open_door**:

Predizione:

$$\begin{aligned} \overline{bel}(x_1) &= \int p(x_1 | u_1, x_0) bel(x_0) dx_0 \\ &= \sum_{x_0} p(x_1 | u_1, x_0) bel(x_0) \\ &= p(x_1 | U_1 = \text{do_nothing}, X_0 = \text{is_open}) bel(X_0 = \text{is_open}) \\ &\quad + p(x_1 | U_1 = \text{do_nothing}, X_0 = \text{is_closed}) bel(X_0 = \text{is_closed}) \end{aligned}$$

$\overline{bel}(X_1 = \text{is_open})$

$$\begin{aligned} &= p(X_1 = \text{is_open} | U_1 = \text{do_nothing}, X_0 = \text{is_open}) bel(X_0 = \text{is_open}) \\ &\quad + p(X_1 = \text{is_open} | U_1 = \text{do_nothing}, X_0 = \text{is_closed}) bel(X_0 = \text{is_closed}) \\ &= 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 0.5 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$\overline{bel}(X_1 = \text{is_closed})$

$$\begin{aligned} &= p(X_1 = \text{is_closed} | U_1 = \text{do_nothing}, X_0 = \text{is_open}) bel(X_0 = \text{is_open}) \\ &\quad + p(X_1 = \text{is_closed} | U_1 = \text{do_nothing}, X_0 = \text{is_closed}) bel(X_0 = \text{is_closed}) \\ &= 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Calcolo del belief:

$$bel(x_1) = \eta p(Z_1 = \text{sense_open} | x_1) \overline{bel}(x_1)$$

$bel(X_1 = \text{is_open})$

$$\begin{aligned} &= \eta p(Z_1 = \text{sense_open} | X_1 = \text{is_open}) \overline{bel}(X_1 = \text{is_open}) \\ &= \eta 0.6 \cdot 0.5 = \eta 0.3 \end{aligned}$$

$bel(X_1 = \text{is_closed})$

$$\begin{aligned} &= \eta p(Z_1 = \text{sense_open} | X_1 = \text{is_closed}) \overline{bel}(X_1 = \text{is_closed}) \\ &= \eta 0.2 \cdot 0.5 = \eta 0.1 \end{aligned}$$

normalizzazione

$$\eta = (0.3 + 0.1)^{-1} = 2.5$$

$$bel(X_1 = \text{is_open}) = 0.75$$

$$bel(X_1 = \text{is_closed}) = 0.25$$

Per $u_2 = \text{push}$ e $z_2 = \text{sense_open}$

Si calcola la predizione:

$$\begin{aligned}\overline{bel}(X_2 = \text{is_open}) &= 1 \cdot 0.75 + 0.8 \cdot 0.25 = 0.95 \\ \overline{bel}(X_2 = \text{is_closed}) &= 0 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.05\end{aligned}$$

Si calcola il belief:

$$\begin{aligned}bel(X_2 = \text{is_open}) &= \eta \cdot 0.6 \cdot 0.95 \approx 0.983 \\ bel(X_2 = \text{is_closed}) &= \eta \cdot 0.2 \cdot 0.05 \approx 0.017\end{aligned}$$



$$Bel(x_t) = \eta P(z_t | x_t) \int P(x_t | u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

- Filtro di Kalman
- Particle Filter
- Hidden Markov Model
- Dynamic Bayesian Network
- Partially Observable Markov Decision Processes (POMDPs)



Tutti i filtri richiedono:

1. Belief iniziale: $P(x_0)$
2. Probabilità di misura: $P(z_t | x_t)$
3. Transizione di stato: $P(x_t | u_t, x_{t-1})$



Violazione dell'assunzione markoviana:

1. Dinamiche non modellate dell'ambiente
2. Inaccuratezze nel modello probabilistico
3. Rappresentazione probabilistiche approssimate
4. Variabili di controllo con influenze multiple

Però l'assunzione markoviana è robusta



Localizzazione: $P(X_t \mid M, u_{1:t}, z_{1:t})$ Stima della
posizione data
la Mappa

Mapping: $P(M_t \mid X_t, u_{1:t}, z_{1:t})$ Stima della
mappa data la
posizione

SLAM: $P(X_t, M_t \mid u_{1:t}, z_{1:t})$ Stima di mappa
e posizione



- La legge di Bayes permette di calcolare le probabilità condizionate inverse.
- Data l'assunzione di Markov, si può combinare l'evidenza in modo efficiente con l'update recursivo Bayesian.
- I Filtri Bayesiani permettono di stimare lo stato di un sistema dinamico.