Robotica Probabilistica

Filtri Bayesiani

Materiale tratto tratto da: Introduction to Mobile Robotics, Univ. of Freiburg (Prof. Dr. Wolfram Burgard, Dr. Cyrill Stachniss, Dr. Giorgio Grisetti, Dr. Maren Bennewitz) e Mobile Robotics, Univ. of Oxford (Prof. Paul Newman)

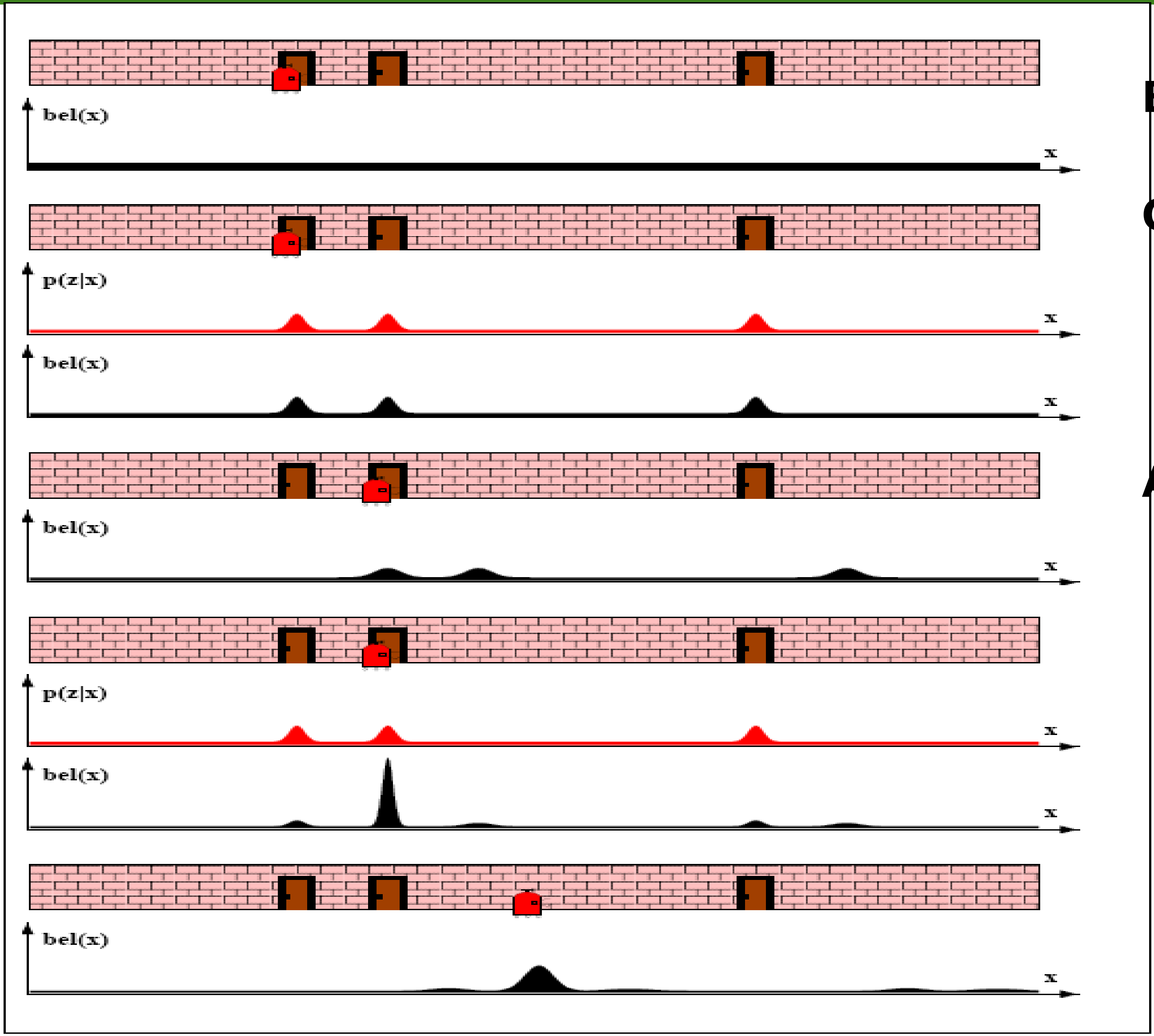
Rappresentazione dell’incertezza usando la probabilità

Percezione = stima dello stato (problema stima)
Azione = massimizzazione utilità (teoria decisioni)

Percezione: mappa misure dei sensori nella rappresentazione interna dello stato del robot e dell’ambiente (stato).

Sensori sono rumorosi, l’ambiente è parzialmente osservabile, non prevedibile, dinamico, modello inaccurato etc.

Belief = Probabilità dello stato date azioni ed osservazioni



Bel iniziale

Osservazione

Azione

Osservazione

Azione

Stima:

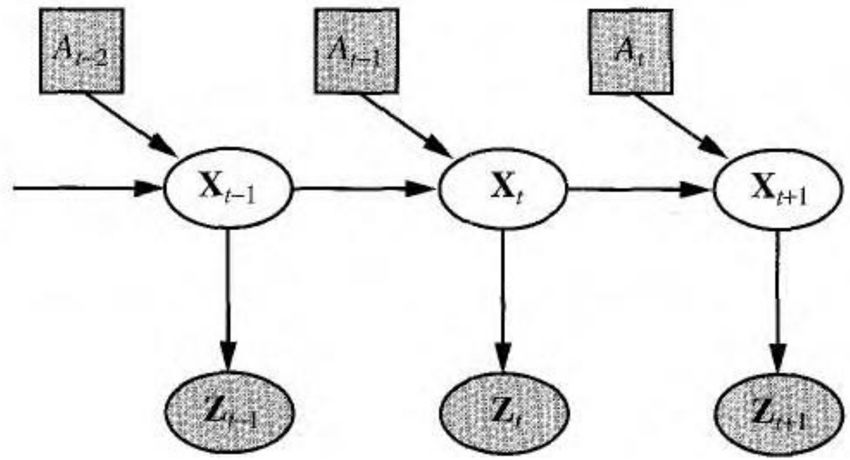
"Estimation is the process by which we infer the value of a quantity of interest, $\mathbf{x}$, by processing data that is in some way dependent on $\mathbf{x}$."

Si cerca la stima massima dello stato
X = {x1, x2, ... , xm} dato un insieme di misure
Z = **{z1, z2, ... , zn}**

Problema: trovare **P(X | Z)**

Filtro bayesiano: **P(Xt+1 | z1:t+1)** a partire da **P(Xt | z1:t)**

Distinguendo tra azioni e osservazioni:



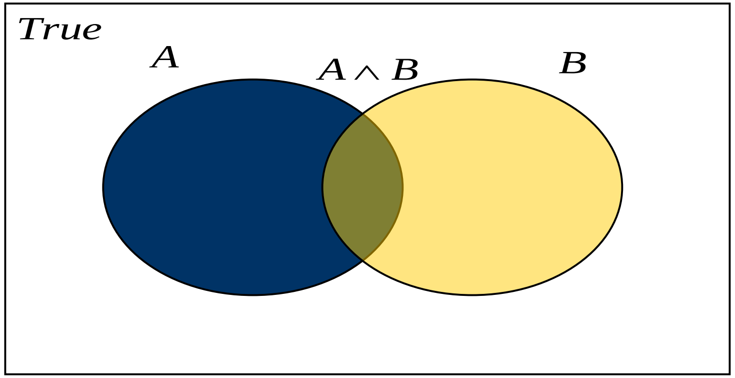
Filtro bayesiano: $\mathbf{P(X_{t+1} \mid z_{1:t+1}, a_{1:t})}$ da $\mathbf{P(X_t \mid z_{1:t}, a_{1:t-1})}$

Localizzazione: X è la posizione
Mapping: X è la mappa
SLAM: X è mappa e posizione

Regola 1 (positività):
$0 \leq Pr(A) \leq 1$;

Regola 2 (certezza):
$Pr(True) = 1$, $Pr(False)=0$;

Regola 3 (unione):
$Pr(A \text{ or } B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \text{ and } B)$



Interpretazione insiemistica:

Pr(False) ≤ Pr(A) ≤ Pr(True) = 1

Pr(A or B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A and B)

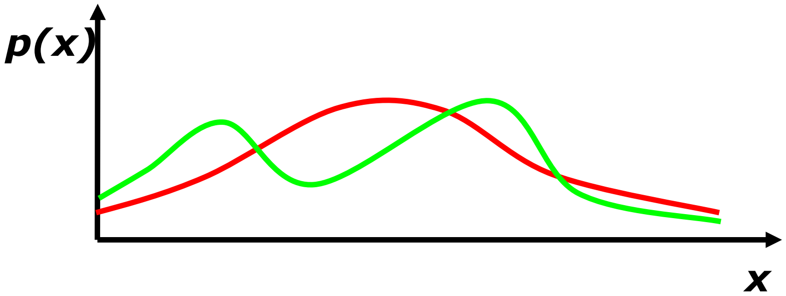
Conseguenze assiomi probabilità

$$
\begin{aligned}
\Pr(A \vee \neg A) &= \Pr(A) + \Pr(\neg A) - \Pr(A \wedge \neg A) \\
\Pr(True) &= \Pr(A) + \Pr(\neg A) - \Pr(False) \\
1 &= \Pr(A) + \Pr(\neg A) - 0 \\
\Pr(\neg A) &= 1 - \Pr(A)
\end{aligned}
$$

- **X** è una variable aleatoria che assume valori nell'insieme numerabile $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- $P(X=x_i)$, o $P(x_i)$, è la probabilità che la variable aleatoria *X* assuma valore x_i.
- P( ) è la funzione di distribuzione di probabilità (massa o densità).
- E.g.

$$P(Room) = \langle 0.7, 0.2, 0.08, 0.02 \rangle$$

- **X** prende valori in un insieme continuo.
- p(X=x), o p(x), è la funzione di funzione di densità di probabilità.



$$\Pr(x \in (a,b)) = \int_a^b p(x)dx$$

Gaussiana

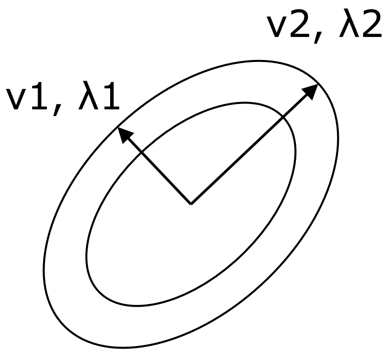
$$p(x) \quad = \quad (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

Multivariata:

$$p(x) \;=\; \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

Σ è la matrice di covarianza, μ vettore dei valori medi

$$E(X) = \bar{X} = \int x f_X(x) dx$$
$$\Sigma = E((X-\bar{X})(X-\bar{X})^T)$$



Le linee di equidensità si dispongono lungo ellissoidi definiti da autovettori e autovalori della matrice di covarianza

- $P(X{=}x \text{ and } Y{=}y) = P(x,y)$
- Se X e Y sono independenti allora

  $$P(x,y) = P(x)\,P(y)$$

- $P(x \mid y)$ *è la probabilità di* x dato y

  $$P(x \mid y) = P(x,y) / P(y)$$

  $$P(x,y) \quad = P(x \mid y)\,P(y)$$

- Se X e Y sono independenti allora

  $$P(x \mid y) = P(x)$$

Caso discreto

$$\sum_x P(x) = 1$$

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$P(x) = \sum_y P(x \mid y) P(y)$$

Caso continuo

$$\int p(x)\ dx = 1$$

$$p(x) = \int p(x, y)\ dy$$

$$p(x) = \int p(x \mid y) p(y)\ dy$$

$$P(x, y) = P(x \mid y)P(y) = P(y \mid x)P(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$P(x \mid y) = \frac{P(y \mid x)\, P(x)}{P(y)} = \frac{\text{likelihood} \cdot \text{prior}}{\text{evidence}}$$

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)\, p(x)}{p(y)} = \frac{p(y \mid x)\, p(x)}{\sum_{x'} p(y \mid x')\, p(x')}$$

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)\, p(x)}{p(y)} = \frac{p(y \mid x)\, p(x)}{\int p(y \mid x')\, p(x')\, dx'}$$

Espressa a meno del fattore di nomalizzazione (p(y) non dipende da x)

$$p(x \mid y) = \eta\, p(y \mid x)\, p(x)$$

Nel caso di probabilità condizionate vale la proprietà analoga:

$$P(x \mid y, z) = \frac{P(y \mid x, z)\ P(x \mid z)}{P(y \mid z)}$$

Legge delle probabilità totali per probabilità condizionata:

$$P(x) = \int P(x, z)dz$$

$$P(x) = \int P(x \mid z)P(z)dz$$

$$P(x \mid y) = \int P(x \mid y, z)\, P(z \mid y)\, dz$$

Indipendenza condizionata:

$$P(x, y \mid z) = P(x \mid z)P(y \mid z)$$

e

$$P(x \mid z) = P(x \mid z, y)$$

$$P(y \mid z) = P(y \mid z, x)$$

$$E[X] = \sum_x x\, p(x) \,,$$

Valore Atteso

$$E[X] = \int x\, p(x)\, dx \,.$$

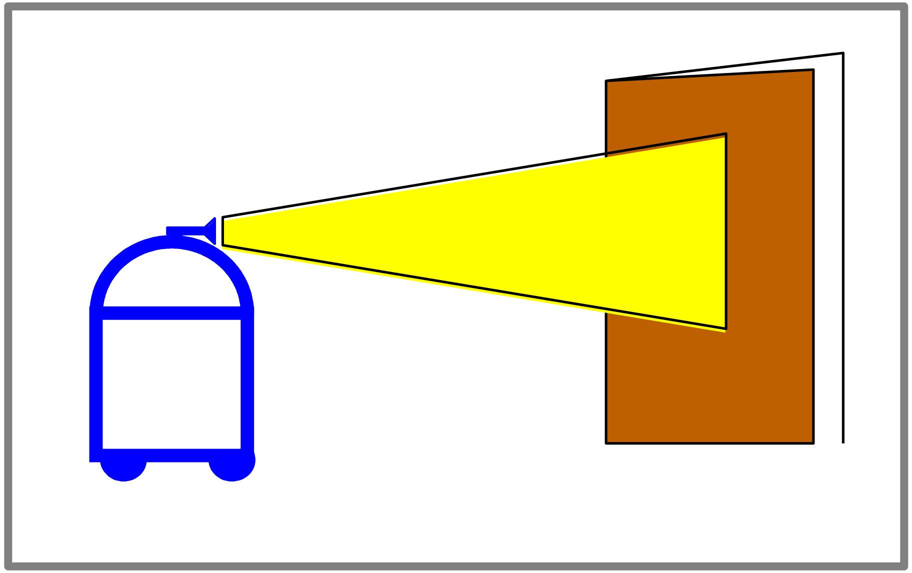
$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Lineare nella var aleatoria

$$\mathrm{Cov}[X] = E[X - E[X]]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

Deviazione quadratica media

- Il robot ha la misura *z*
- Stato: open o closed
- Quanto vale *P(open|z)?*



Stima Stato

- $P(open|z)$ prob. diagnostica.
- $P(z|open)$ prob. causale.
- Spesso la prob. causale è il dato di partenza (modello, dato empirico, frequenze).
- La legge di Bayes permette di ottenere la diagnosi dalla legge causale:

$$P(open \mid z) = \frac{P(z \mid open)P(open)}{P(z)}$$

- $P(z|open) = 0.7$ $\qquad$ $P(z|\neg open) = 0.2$
- $P(open) = P(\neg open) = 0.5$

$$P(open \mid z) = \frac{P(z \mid open)P(open)}{P(z \mid open)P(open) + P(z \mid \neg open)P(\neg open)}$$

$$P(open \mid z) = \frac{0.7 \cdot 0.5}{0.7 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = 0.778$$

- z determina la probabilità che la porta sia aperta.

Max A-posteriori: se si conosce il prior p(x) sceglie la x che massimizza: $\mathbf{P}(z \mid x)\,\mathbf{P}(x)$

Max likelihood: se non si conosce il prior p(x) sceglie la x che massimizza: $\mathbf{P}(z \mid x)$

- Se il robot ottiene un'altra osservazione z_2 come la integra?
- Come si stima $P(x| z_1 \ldots z_n)$?

$$P(x \mid z_1,\ldots,z_n) = \frac{P(z_n \mid x, z_1,\ldots,z_{n-1})\, P(x \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}$$

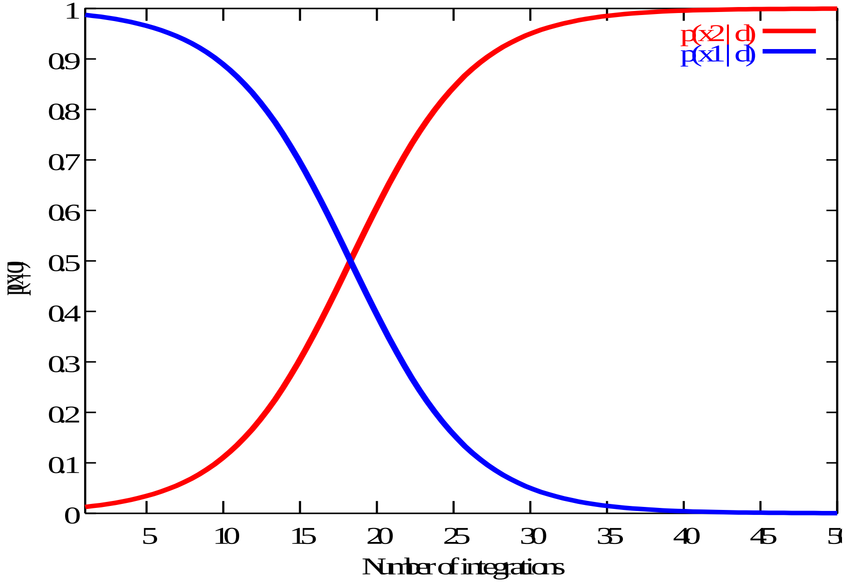
Assunzione di Markov:
dato x, la nuova z_n è indipendente da $z_1,\ldots,z_{n-1}$

$$P(x \mid z_1,\ldots,z_n) = \frac{P(z_n \mid x)\, P(x \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}{P(z_n \mid z_1,\ldots,z_{n-1})}$$

$$= \eta\, P(z_n \mid x)\, P(x \mid z_1,\ldots,z_{n-1})$$

$$= \eta_{1\ldots n} \prod_{i=1\ldots n} P(z_i \mid x)\, P(x)$$

- Due locazioni possibili x_1 e x_2
- $P(x_1)=0.99$, $P(x_2) = 0.01$
- $P(z|x_2)=0.09$ $P(z|x_1)=0.07$



- $P(z_2|open) = 0.5$ $P(z_2|\neg open) = 0.6$
- $P(open|z_1)=2/3$

$$P(open \mid z_2, z_1) = \frac{P(z_2 \mid open)\, P(open \mid z_1)}{P(z_2 \mid open)\, P(open \mid z_1) + P(z_2 \mid \neg open)\, P(\neg open \mid z_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

- z_2 abbassa la probabilità che la porta sia aperta.