Robotica Probabilistica

Filtri Bayesiani

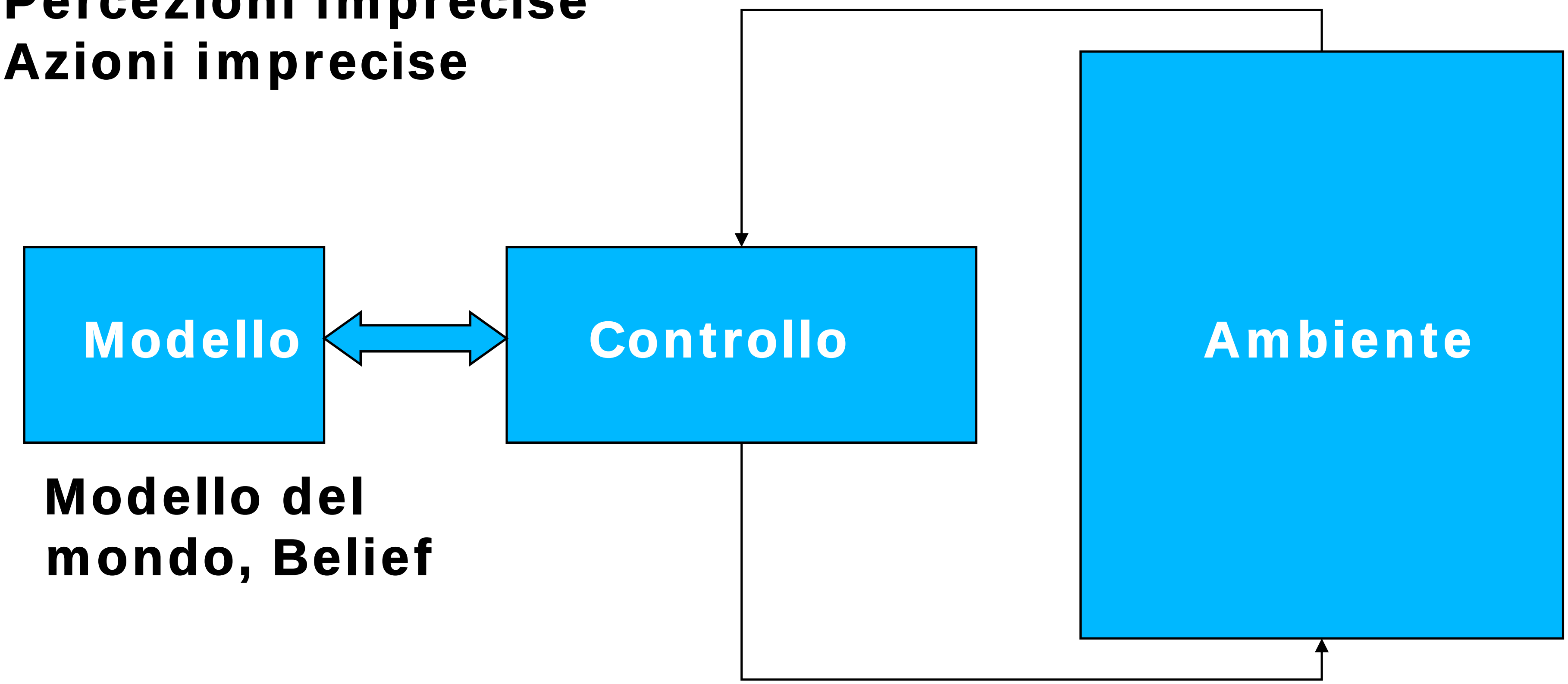
Materiale tratto tratto da: Introduction to Mobile Robotics, Univ. of Freiburg (Prof. Dr. Wolfram Burgard, Dr. Cyrill Stachniss, Dr. Giorgio Grisetti, Dr. Maren Bennewitz) e Mobile Robotics, Univ. of Oxford (Prof. Paul Newman)

- Spesso il mondo è dinamico
  - **Azioni (del robot o di altri agenti**)
  - **Tempo**

- Come introdurre queste azioni?
- Azioni Tipiche: girare ruote, manopolare oggetti, etc.
- Sensori imprecisi
- Azioni aumentano l'incertezza

Interazione Robot-Ambiente

Percezioni imprecise
Azioni imprecise

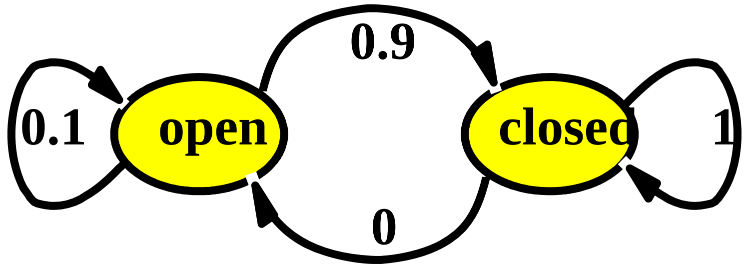


Modello del mondo, Belief

- Per incorporare il risultato di una azione *u* nel “belief”, se usa un pdf condizionale

$$P(x|u,x')$$

- pdf **eseguendo *u* cambia lo stato da *x’ a x*.**



- ***P(x|u,x')*** con *u* = "chiudi la porta":
- Se la porta è aperta, "chiudi la porta" ha successo nel 90% dei casi.

Continuo:

$$P(x \mid u) = \int P(x \mid u, x')P(x')dx'$$

Discreto:

$$P(x \mid u) = \sum P(x \mid u, x')P(x')$$

$$P(closed \mid u) = \sum P(closed \mid u, x')P(x')$$

$$= P(closed \mid u, open)P(open) + P(closed \mid u, closed)P(closed)$$

$$= \frac{9}{10}\frac{5}{8} + \frac{1}{1} * \frac{3}{8} = \frac{15}{16}$$

$$P(open \mid u) = \sum P(open \mid u, x')P(x')$$

$$= P(open \mid u, open)P(open) + P(open \mid u, closed)P(closed)$$

$$= \frac{1}{10}\frac{5}{8} + \frac{0}{1} * \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$$

$$= 1 - P(closed \mid u)$$

- Stato: Tutte le variabili x_i salienti per l'evoluzione del sistema dinamico
  - **Posa:** Localizzazione e Orientazione rispetto ad un sistema di coordinate assoluto (include la *configurazione* nel caso di manipolatori)
  - **Stato dimanico:** Velocità del robot e delle sue componenti/giunti
  - **Locazione di Features** degli oggetti nell'ambiente (landmarks)
  - Uno stato x_t è completo se l'insieme delle variabili selezionate consente la migliore previsione.

Si lavora pero' con stato incompleto

Assunzione Markoviana: la previsione migliore si puo' fare a partire dallo stato attuale (lo stato passato non aggiunge nulla)

Stato ibrido: variabili continue e discrete

Tempo discreto: X_{t+1}, X_t

- **Dati:**

  Flusso di osservazioni *z* e azioni *u:*

$$d_t = \{u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t\}$$

  Modello del sensore *P(z|x).*

  Modello delle Azioni *P(x|u,x').*

  Prior probabilità dello stato del sistema *P(x).*

- **Desiderta:**
  - Stima dello stato *X* del sistema dinamico il posterior dello stato è il **Belief**:

$$Bel(x_t) = P(x_t \mid u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t)$$

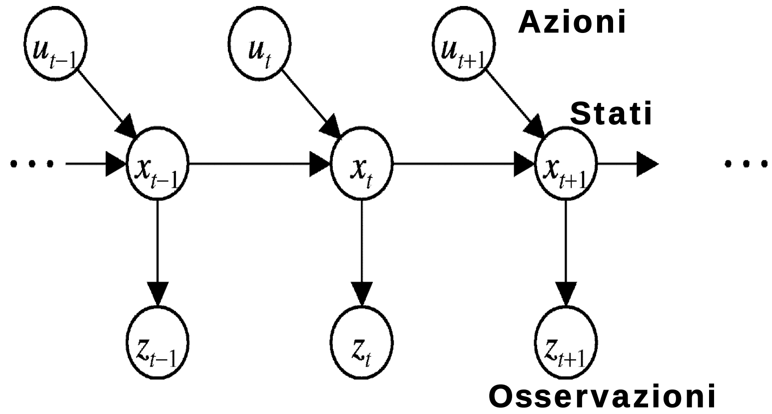
Notazione:

Osservazioni $$z_{t_1:t_2} = z_{t_1}, z_{t_1+1}, z_{t_1+2}, \ldots, z_{t_2}$$

Azioni $$u_{t_1:t_2} = u_{t_1}, u_{t_1+1}, u_{t_1+2}, \ldots, u_{t_2}$$

Assunzioni:

- Mondo satico
- Rumore indipendente
- Modello perfetto, non errori di approssimazione



Probabilità di misura

$$p(z_t \mid x_{0:t}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(z_t \mid x_t)$$

Transizione di stato

$$p(x_t \mid x_{1:t-1}, z_{1:t}, u_{1:t}) = p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)$$

Indipendenza condizionata

- Il robot deve dedurre la sua posizione dalle misure;
- Si distingue stato reale e stato stimato;

- *$Bel(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t})$*
  probablità di x_t date le misure $z_{1:t}$ e le azioni $u_{1:t}$

- *$Bel'(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t-1}, u_{1:t})$*
  predizione (stima dello stato prima dell'ultima osservazione)

- *Calcolo di $Bel(x_t)$ da $Bel'(x_t)$ è la correzione o aggiornamento di misura*

$$\boxed{Bel(x_t) = P(x_t \mid u_{1:t}, z_{1:t})}$$

Bayes $$= \eta \; P(z_t \mid x_t, u_{1:t}, z_{1:t-1}) \; P(x_t \mid u_{1:t}, z_{1:t-1})$$

Markov $$= \eta \; P(z_t \mid x_t) \; P(x_t \mid u_{1:t}, z_{1:t-1})$$

Total prob. $$= \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_{1:t}, z_{1:t-1}, x_{t-1}) P(x_{t-1} \mid u_{1:t}, z_{1:t-1}) \; dx_{t-1}$$

Markov $$= \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \; P(x_{t-1} \mid u_{1:t}, z_{1:t-1}) \; dx_{t-1}$$

Markov $$= \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \; P(x_{t-1} \mid u_{1:t-1}, z_{1:t-1}) \; dx_{t-1}$$

(Omissione di u_t)

$$\boxed{= \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \; Bel(x_{t-1}) \; dx_{t-1}}$$

L'algoritmo generale per il calcolo del Belief:
Filtro Bayesiano

Algoritmo ricorsivo: *Bel*(x$_t$) calcolato da *Bel*(x$_{t-1}$), u_t, z_t

$$Bel'(x_t) = P(z_t \mid x_t) Bel(x_t)$$

$$Bel(x_t) = \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \, Bel(x_{t-1}) \, dx_{t-1}$$

for all x_t

$$Bel'(x_t) = \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) Bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$ predizione

$$Bel(x_t) = \eta \; P(z_t \mid x_t) \;\; Bel'(x_{t-1})$$ misura

endFor

return *Bel*(x_t)

Bayes Filter Algorithm

$$Bel(x_t) = \eta \ P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \ Bel(x_{t-1}) \ dx_{t-1}$$

```
Algoritmo Filtro_Bayes( Bel(x),d ):
η=0
If d perceptual data z then
    For all x do
        Bel'(x) = P(z | x)Bel(x)
        η = η + Bel'(x)
    For all x do
        Bel'(x) = η^{-1} Bel'(x)
else if d  action data item u then
    For all x do
        Bel'(x) = ∫ P(x | u, x') Bel(x') dx'
Return Bel'(x)
```

Algoritmo **Filtro_Bayes**(*Bel(x)*,*d*):

η=0

If *d* perceptual data *z* then

For all *x* do

$$Bel'(x) = P(z \mid x) Bel(x)$$

$$\eta = \eta + Bel'(x)$$

For all *x* do

$$Bel'(x) = \eta^{-1} Bel'(x)$$

else if *d* action data item *u* then

For all *x* do

$$Bel'(x) = \int P(x \mid u, x') \ Bel(x') \ dx'$$

Return *Bel'(x)*

Per il calcolo:

- Occorre il Belif iniziale: $Bel(x_0)$
- Se conosco prob 1 sullo stato iniziale (Delta Dirac)
- Se non conosco allora distribuzione uniforme sul dominio di x_0
- Altrimenti altra distribuzione

Distribuzione iniziale:

$$\begin{aligned} bel(X_0 = \text{open}) &= 0.5 \\ bel(X_0 = \text{closed}) &= 0.5 \end{aligned}$$

Errore sensore:

$$\begin{aligned} p(Z_t = \text{sense\_open} \mid X_t = \text{is\_open}) &= 0.6 \\ p(Z_t = \text{sense\_closed} \mid X_t = \text{is\_open}) &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(Z_t = \text{sense\_open} \mid X_t = \text{is\_closed}) &= 0.2 \\ p(Z_t = \text{sense\_closed} \mid X_t = \text{is\_closed}) &= 0.8 \end{aligned}$$

Transizione:

$$\begin{aligned} p(X_t = \text{is\_open} \mid U_t = \text{push}, X_{t\_1} = \text{is\_open}) &= 1 \\ p(X_t = \text{is\_closed} \mid U_t = \text{push}, X_{t\_1} = \text{is\_open}) &= 0 \\ p(X_t = \text{is\_open} \mid U_t = \text{push}, X_{t\_1} = \text{is\_closed}) &= 0.8 \\ p(X_t = \text{is\_closed} \mid U_t = \text{push}, X_{t\_1} = \text{is\_closed}) &= 0.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(X_t = \text{is\_open} \mid U_t = \text{do\_nothing}, X_{t\_1} = \text{is\_open}) &= 1 \\ p(X_t = \text{is\_closed} \mid U_t = \text{do\_nothing}, X_{t\_1} = \text{is\_open}) &= 0 \\ p(X_t = \text{is\_open} \mid U_t = \text{do\_nothing}, X_{t\_1} = \text{is\_closed}) &= 0 \\ p(X_t = \text{is\_closed} \mid U_t = \text{do\_nothing}, X_{t\_1} = \text{is\_closed}) &= 1 \end{aligned}$$

In x_0 il robot osserva **open_door**:

Predizione:

$$\begin{aligned}\overline{bel}(x_1) &= \int p(x_1 \mid u_1, x_0)\, bel(x_0)\, dx_0 \\ &= \sum_{x_0} p(x_1 \mid u_1, x_0)\, bel(x_0) \\ &= p(x_1 \mid U_1 = \text{do\_nothing}, X_0 = \text{is\_open})\, bel(X_0 = \text{is\_open}) \\ &\quad + p(x_1 \mid U_1 = \text{do\_nothing}, X_0 = \text{is\_closed})\, bel(X_0 = \text{is\_closed})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\overline{bel}(X_1 = \text{is\_open}) \\ &\quad = p(X_1 = \text{is\_open} \mid U_1 = \text{do\_nothing}, X_0 = \text{is\_open})\, bel(X_0 = \text{is\_open}) \\ &\qquad + p(X_1 = \text{is\_open} \mid U_1 = \text{do\_nothing}, X_0 = \text{is\_closed})\, bel(X_0 = \text{is\_closed}) \\ &\quad = 1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 0.5 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}&\overline{bel}(X_1 = \text{is\_closed}) \\ &\quad = p(X_1 = \text{is\_closed} \mid U_1 = \text{do\_nothing}, X_0 = \text{is\_open})\, bel(X_0 = \text{is\_open}) \\ &\qquad + p(X_1 = \text{is\_closed} \mid U_1 = \text{do\_nothing}, X_0 = \text{is\_closed})\, bel(X_0 = \text{is\_closed}) \\ &\quad = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Calcolo del belief:

$$bel(x_1) = \eta\, p(Z_1 = \text{sense\_open} \mid x_1)\, \overline{bel}(x_1)$$

$$\begin{aligned}&bel(X_1 = \text{is\_open}) \\ &\quad = \eta\, p(Z_1 = \text{sense\_open} \mid X_1 = \text{is\_open})\, \overline{bel}(X_1 = \text{is\_open}) \\ &\quad = \eta\, 0.6 \cdot 0.5 = \eta\, 0.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&bel(X_1 = \text{is\_closed}) \\ &\quad = \eta\, p(Z_1 = \text{sense\_open} \mid X_1 = \text{is\_closed})\, \overline{bel}(X_1 = \text{is\_closed}) \\ &\quad = \eta\, 0.2 \cdot 0.5 = \eta\, 0.1\end{aligned}$$

normalizzazione

$$\eta = (0.3 + 0.1)^{-1} = 2.5$$

$$\begin{aligned}bel(X_1 = \text{is\_open}) &= 0.75 \\ bel(X_1 = \text{is\_closed}) &= 0.25\end{aligned}$$

Per **u_2 = push** e **z_2 = sense_open**

Si calcola la predizione:

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(X_2 = \text{is\_open}) &= 1 \cdot 0.75 + 0.8 \cdot 0.25 = 0.95 \\
\overline{bel}(X_2 = \text{is\_closed}) &= 0 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25 = 0.05
\end{aligned}
$$

Si calcola il belief:

$$
\begin{aligned}
bel(X_2 = \text{is\_open}) &= \eta\, 0.6 \cdot 0.95 \approx 0.983 \\
bel(X_2 = \text{is\_closed}) &= \eta\, 0.2 \cdot 0.05 \approx 0.017
\end{aligned}
$$

$$Bel(x_t) = \eta \; P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \; Bel(x_{t-1}) \; dx_{t-1}$$

- Filtro di Kalman
- Particle Filter
- Hidden Markov Model
- Dynamic Bayesian Network
- Partially Observable Markov Decision Processes (POMDPs)

Tutti i filtri richiedono:

1. Belif iniziale: $P(x_0)$
2. Probabilità di misura: $P(z_t \mid x_t)$
3. Transizione di stato: $P(x_t \mid u_t, x_{t-1})$

Violazione dell'assunzione markoviana:

1. Dinamiche non modellate dell'ambiente
2. Inaccuratezze nel modello probabilistico
3. Rappresentazione probabilistiche approssimate
4. Variabili di controllo con influenze multiple

Però l'assunzione markoviana è robusta

Localizzazione:	$P(X_t \mid M, u_{1:t}, z_{1:t})$	Stima della pisizione data la Mappa
Mapping:	$P(M_t \mid X_t, u_{1:t}, z_{1:t})$	Sima della mappa data la posizione
SLAM:	$P(X_t, M_t \mid u_{1:t}, z_{1:t})$	Stima di mappa e posizione

- La legge di Bayes permette di calcolare le probabilità condizionate inverse.
- Data l'assunzione di Markov, si può combinare l'evidenza in modo efficiente con l'update recursivo Bayesian.
- I Filtri Bayesiani permettono di stimare lo stato di un sistema dinamico.