

III. ELEMENTI DI ANALISI DI SISTEMI LTI DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE ... III-1

III.1	ASPETTI GENERALI DELL'ANALISI DEL COMPORTAMENTO DI SISTEMI LTI	III-1
III.1.1	<i>Risposta libera e risposta forzata</i>	<i>III-1</i>
III.1.2	<i>Segnali di ingresso test per sistemi LTI</i>	<i>III-2</i>
III.1.3	<i>Risposta in transitorio e risposta a regime</i>	<i>III-5</i>
III.1.4	<i>Alcune considerazioni sulle tecniche di analisi</i>	<i>III-5</i>
III.2	RAPPRESENTAZIONI INGRESSO-USCITA (I-U) DI SISTEMI LTI DI TIPO SISO	III-6
III.3	SISTEMI DEL PRIMO ORDINE	III-7
III.3.1	<i>Risposta in evoluzione libera</i>	<i>III-9</i>
III.3.2	<i>Risposta forzata al gradino</i>	<i>III-11</i>
III.3.3	<i>Risposta forzata ad una rampa</i>	<i>III-13</i>
III.3.4	<i>Risposta forzata ad un segnale sinusoidale</i>	<i>III-14</i>
III.3.5	<i>Risposta a regime e risposta in transitorio</i>	<i>III-14</i>
III.4	SISTEMI DEL SECONDO ORDINE	III-16
III.4.1	<i>Risposta in evoluzione libera</i>	<i>III-17</i>
III.4.2	<i>Parametri caratteristici di un sistema del secondo ordine</i>	<i>III-22</i>
III.4.3	<i>Risposta forzata al gradino</i>	<i>III-26</i>
III.4.4	<i>Risposta a regime e risposta in transitorio</i>	<i>III-34</i>
III.5	RISPOSTA A REGIME A SEGNALI SINUSOIDALI CON L'APPROCCIO FASORIALE	III-36
III.6	PARAMETRI CARATTERISTICI DELLA RISPOSTA A GRADINO	III-41
III.6.1	<i>Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del primo ordine</i>	<i>III-42</i>
III.6.2	<i>Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del secondo ordine</i>	<i>III-42</i>

III. ELEMENTI DI ANALISI DI SISTEMI LTI DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE

Come detto nel capitolo precedente, il calcolo analitico esatto e l'andamento qualitativo della risposta dei sistemi dinamici può essere effettuato facilmente solo per la classe dei sistemi lineari e stazionari (sistemi LTI). Infatti, per tali sistemi, il corpo teorico orientato all'analisi del comportamento è sufficientemente assestato e consente di analizzare sistemi complessi (sistemi MIMO di ordine comunque elevato) sotto diverse condizioni di sollecitazione.

In questo capitolo vengono anzitutto illustrate le modalità di analisi dei sistemi LTI, specificando in dettaglio i problemi da risolvere per caratterizzare il comportamento di un sistema dinamico e avere così una base di confronto con altri sistemi. Successivamente l'attenzione viene limitata a solo due tipologie particolarmente semplici di sistemi. Per essi vengono presentate alcune tecniche di analisi, e vengono poi discusse le soluzioni con l'obiettivo di riuscire a caratterizzarne sinteticamente il comportamento.

III.1 Aspetti generali dell'analisi del comportamento di sistemi LTI

In questo paragrafo vengono illustrati alcuni concetti riguardanti l'analisi del comportamento dei sistemi LTI nel caso generale, ossia validi per sistemi MIMO sia tempo continui che tempo discreti.

III.1.1 Risposta libera e risposta forzata

Consideriamo un generico sistema LTI descritto per mezzo di una rappresentazione esplicita i-s-u (X, φ, η) , posto nello stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e sollecitato con un segnale di ingresso $u_{[t_0,t]}$. Per la linearità del sistema, in base al principio di sovrapposizione degli effetti discusso nel paragrafo II.4.3, le risposte nello stato e nell'uscita possono essere espresse come somma di due termini. In particolare, posto:

$$x_0 = x_0 + 0, \quad u_{[t_0,t]} = 0 + u_{[t_0,t]}$$

in base alla (2.11a) si ottiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t-t_0, x_0, u_{[t_0,t]}) = \varphi(t-t_0, x_0 + 0, 0 + u_{[t_0,t]}) = \\ &= \varphi(t-t_0, x_0, 0) + \varphi(t-t_0, 0, u_{[t_0,t]}) = x_l(t) + x_f(t) \end{aligned} \quad (3.1a)$$

Inoltre, posto:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t), \quad u(t) = 0 + u(t)$$

in base alla (2.11b) si ottiene:

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta(x_l(t) + x_f(t), 0 + u(t)) = \\ &= \eta(x_l(t), 0) + \eta(x_f(t), u(t)) = y_l(t) + y_f(t) \end{aligned} \quad (3.1b)$$

Le (3.1) consentono di stabilire la seguente

Proprietà. In un sistema LTI la risposta nello stato e nell'uscita conseguente ad uno stato iniziale $x(t_0)=x_0$ e ad un forzamento $u(\cdot)$ possono essere ottenute come somma di due termini:

- i) il primo, detto *risposta in evoluzione libera*, rappresenta la risposta del sistema conseguente ad uno stato iniziale pari a quello effettivo $x(t_0)=x_0$ e ad un forzamento nullo;
- ii) il secondo, detto *risposta forzata*, rappresenta la risposta del sistema conseguente ad uno stato iniziale $x(t_0)=0$ e ad un forzamento pari a quello effettivo $u(\cdot)$.

Nello studio dei sistemi di controllo, in cui si è principalmente interessati a capire come comandare un dato sistema in maniera da farlo comportare in un modo desiderato, lo studio della risposta in evoluzione forzata è sicuramente di maggior interesse che non quello della risposta in evoluzione libera. Tuttavia, come si avrà modo di vedere diffusamente in seguito, l'analisi del comportamento di un sistema in evoluzione libera gioca un ruolo fondamentale anche nell'analisi della risposta forzata.

Per quanto riguarda poi più specificamente l'analisi della risposta forzata, anche se, in pratica, i segnali di ingresso di un sistema reale possono assumere andamenti molto vari, per caratterizzare il comportamento di un sistema e per avere una base di confronto con altri sistemi si è soliti utilizzare *segnali di ingresso test* e calcolare, in maniera analitica esatta o in maniera approssimata mediante parametri sintetici, le risposte a tali segnali. Ovviamente la scelta del segnale test con cui caratterizzare il comportamento di un sistema va fatta in relazione alla tipologia dei segnali con cui il sistema verrà effettivamente sollecitato durante il suo funzionamento. Nel seguito vengono presentati i segnali test più utilizzati per l'analisi dei sistemi a tempo continuo.

III.1.2 Segnali di ingresso test per sistemi LTI

I segnali di ingresso test più utilizzati sono: il gradino, la rampa, i segnali sinusoidali. Un altro segnale frequentemente utilizzato per caratterizzare il comportamento di un sistema, anche se in pratica poco ricorrente, è l'impulso.

Segnale a gradino. Il segnale a gradino di ampiezza unitaria applicato all'istante $t=0$, denotato con $1(t)$, è definito come:

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Il gradino di ampiezza U_0 applicato all'istante t_0 , denotato con $U_0 \cdot 1(t-t_0)$ o più semplicemente con $U_0 1(t-t_0)$, è definito come:

$$u(t) = U_0 1(t-t_0) = \begin{cases} U_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Esso è mostrato in Fig.3.1



Figura 3.1 Segnale a gradino di ampiezza U_0 applicato all'istante t_0

Segnale a rampa. Il segnale a rampa di pendenza U_0 applicato all'istante t_0 , denotato con $U_0 \cdot (t - t_0) \cdot 1(t - t_0)$ oppure semplicemente con $U_0(t - t_0)1(t - t_0)$, è definito come:

$$u(t) = U_0(t - t_0)1(t - t_0) = \begin{cases} U_0(t - t_0) & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Esso è mostrato in Fig.3.2

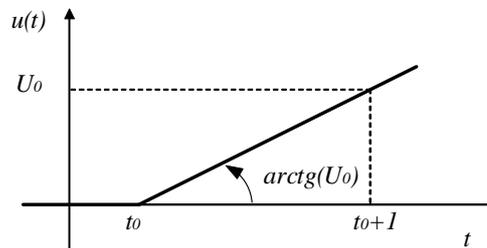


Figura 3.2 Segnale a rampa di pendenza U_0 applicato all'istante t_0

Impulso ideale (o impulso di Dirac). Il segnale impulsivo, o semplicemente impulso, è una funzione matematica che, nella pratica, non è realizzabile in maniera perfetta. Per definirlo cominciamo con il considerare l'impulso rettangolare applicato all'istante t_0 , di durata Δ e di area unitaria. Esso, denotato con $\delta_\Delta(t - t_0)$, è definito come:

$$u(t) = \delta_\Delta(t - t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & t_0 \leq t < t_0 + \Delta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ed è mostrato in Fig.3.3, per il caso di area U_0 .

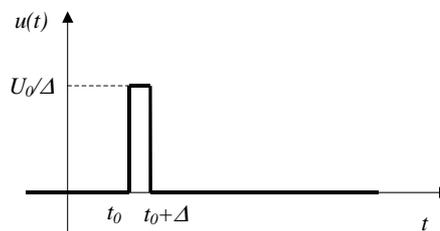


Figura 3.3 Impulso rettangolare di area U_0 applicato all'istante t_0

L'impulso ideale, anche detto *impulso di Dirac*, di ampiezza unitaria applicato all'istante t_0 , denotato con $\delta(t - t_0)$, è definito come il limite per Δ che tende a zero di $\delta_\Delta(t - t_0)$, ossia:

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t - t_0)$$

Esso, per il caso di ampiezza U_0 , è schematicamente indicato in Fig.3.4.

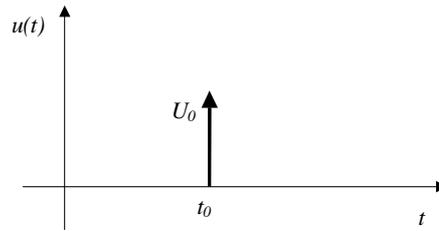


Figura 3.4 Impulso di Dirac di ampiezza U_0 applicato all'istante t_0

E' facile convincersi che: $\frac{d1(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0)$.

Segnale sinusoidale. Un segnale sinusoidale di ampiezza unitaria, *pulsazione* ω , applicato all'istante $t=0$, denotato con $u(t)=\sin(\omega t)I(t)$ è mostrato in Fig.3.5.

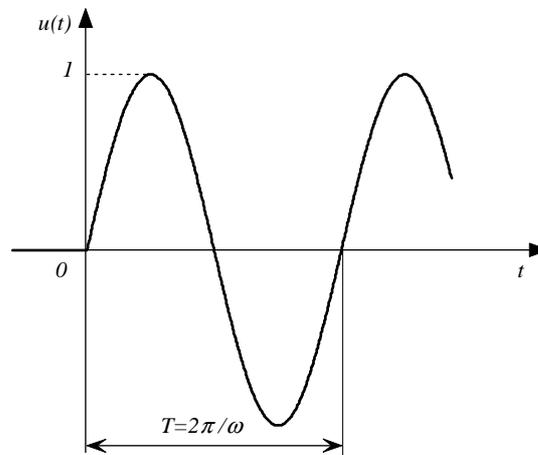


Figura 3.5 Segnale sinusoidale di ampiezza unitaria applicato all'istante $t=0$

Esso è un segnale periodico di *periodo* $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Il numero f di periodi in 1 secondo, ossia

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, è detto *frequenza* del segnale sinusoidale.

Talvolta tali segnali vengono rappresentati in diagrammi in cui in ascissa, anziché il tempo t , è riportato il tempo normalizzato ωt ; in tale scala normalizzata, il periodo dell'oscillazione vale ovviamente 2π quale che sia il periodo effettivo del segnale.

Diremo segnale sinusoidale di ampiezza U_0 , pulsazione ω , fase φ , applicato all'istante $t=0$, e lo indicheremo con $u(t)=U_0\sin(\omega t+\varphi)I(t)$ il segnale mostrato in Fig.3.6.

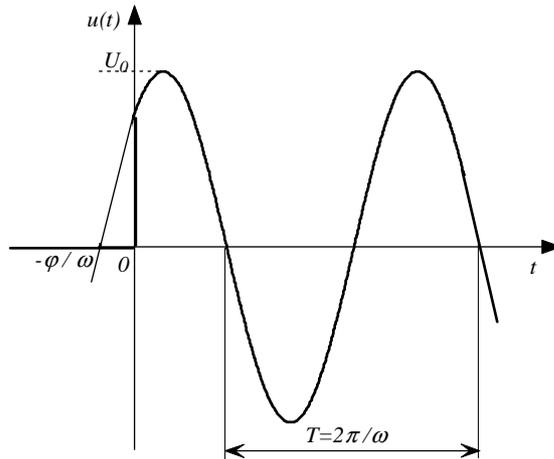


Figura 3.6 Segnale sinusoidale di ampiezza U_0 , pulsazione ω fase φ

Un segnale sinusoidale con fase φ positiva (come quello mostrato in Fig.3.6) è detto in anticipo di fase di φ radianti o di φ/ω secondi rispetto al segnale standard con fase 0; se φ è negativo il segnale è detto in ritardo di fase.

III.1.3 Risposta in transitorio e risposta a regime

Consideriamo un sistema in cui la risposta in evoluzione libera, quale che sia lo stato iniziale, tende a zero per t che tende all'infinito, ossia:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_l(t) = 0 \quad (3.2)$$

Supponiamo, inoltre, che esso sia forzato con un segnale $u(\cdot)$ (polinomiale, sinusoidale, ...), e che esista una funzione del tempo $x_r(t)$ (risp. $y_r(t)$) avente la stessa tipologia del segnale di ingresso e tale che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_f(t) - x_r(t)) = 0 \quad (\text{risp.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_f(t) - y_r(t)) = 0).$$

In tal caso diremo che il sistema ammette *risposta a regime* al segnale di ingresso $u(t)$ e tale risposta vale $x_r(t)$ (risp. $y_r(t)$).

Se un sistema ammette risposta a regime a un segnale di ingresso $u(\cdot)$, si definisce *risposta in transitorio* $x_t(t)$ (risp. $y_t(t)$) del sistema al segnale $u(\cdot)$ la differenza tra la risposta complessiva e la risposta a regime, ossia:

$$x_t(t) = x(t) - x_r(t) \quad (\text{risp.} \quad y_t(t) = y(t) - y_r(t)).$$

E' possibile dimostrare che i sistemi LTI per i quali vale la (3.2) ammettono risposta a regime a segnali a gradino, a segnali a rampa e a segnali sinusoidali. Tali risposte sono di particolare importanza nell'analisi del comportamento dei sistemi LTI.

III.1.4 Alcune considerazioni sulle tecniche di analisi

Per i sistemi LTI sono disponibili diverse tecniche per il calcolo analitico della risposta a partire dal modello implicito i-s-u (in seguito anche detto rappresentazione implicita i-s-u) o da altri modelli. La rappresentazione di riferimento è pertanto:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (3.3)$$

nel caso tempo continuo, oppure

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\quad (3.4)$$

nel caso tempo discreto.

Tali tecniche di analisi, tuttavia, sono basate sull'uso di strumenti matematici (metodi di soluzione di sistemi di equazioni differenziali o alle ricorrenze del primo ordine, trasformata di Laplace, trasformata di Fourier, Z-trasformata, etc.) che verranno forniti in corsi successivi. Pertanto in questo capitolo ci limiteremo a trattare solo due tipologie di sistemi abbastanza semplici: **sistemi SISO tempo continui del primo e del secondo ordine**. Per l'analisi di tali sistemi, anziché considerare rappresentazioni ingresso-stato-uscita, faremo riferimento alle cosiddette *rappresentazioni ingresso-uscita (i-u)*, ossia a rappresentazioni in cui lo stato non compare esplicitamente.

III.2 Rappresentazioni ingresso-uscita (i-u) di sistemi LTI di tipo SISO

Per i sistemi lineari e stazionari SISO a tempo continuo, descritti da una rappresentazione i-s-u del tipo (3.3), è quasi sempre possibile ottenere una rappresentazione i-u in termini di un'equazione differenziale del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_n u \quad (3.5)$$

o, nel caso di sistemi a tempo discreto, da un'equazione alle ricorrenze del tipo:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = b_0 u_{k+n} + b_1 u_{k+n-1} + \dots + b_n u_k \quad (3.6)$$

Per convincersi di quanto sopra detto, si consideri un sistema SISO del secondo ordine, a tempo continuo, descritto da una rappresentazione (i-s-u) nella forma (3.3). Essa in forma esplicita si scrive:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \quad (3.7a)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u$$

$$\begin{aligned}y &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + d u = \\ &= \gamma_{01} x_1 + \gamma_{02} x_2 + \delta_{00} u\end{aligned}\quad (3.7b)$$

Derivando la (3.7b) ed utilizzando le (3.7a) si ha:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 + \dot{d} u = \\ &= (c_1 a_{11} + c_2 a_{21}) x_1 + (c_1 a_{12} + c_2 a_{22}) x_2 + (c_1 b_1 + c_2 b_2) u + \dot{d} u = \\ &= \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \delta_{10} u + \delta_{11} \dot{u}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Analogamente, derivando la (3.8) ed utilizzando sempre le (3.7a) si ha:

$$\ddot{y} = \gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \delta_{20} u + \delta_{21} \dot{u} + \delta_{22} \ddot{u} \quad (3.9)$$

Risolvendo le (3.7b) e (3.8) rispetto a x_1, x_2 si ha:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_{10} y + \alpha_{11} \dot{y} + \beta_{10} u + \beta_{11} \dot{u} \\ x_2 &= \alpha_{20} y + \alpha_{21} \dot{y} + \beta_{20} u + \beta_{21} \dot{u}\end{aligned}\quad (3.10)$$

che sostituite nella (3.9) danno l'equazione i-u:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u \quad (3.11)$$

I vantaggi di utilizzare un'equazione differenziale i-u (o un'equazione alle ricorrenze) come rappresentazione di un sistema SISO sono i seguenti:

- essa, per sistemi semplici, è direttamente ottenibile scrivendo le relazioni costitutive del fenomeno in studio;
- consente di studiare il comportamento di un sistema mediante le tecniche standard di soluzione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, tecniche trattate nei corsi di Analisi e richiamate sinteticamente in Appendice A.

In realtà l'analisi dei sistemi dinamici basata su una rappresentazione i-u è conveniente solo nel caso di sistemi di basso ordine. Per sistemi di ordine elevato essa, a livello operativo, dà luogo a seri problemi di carattere pratico, teorico e numerico, legati soprattutto alla difficoltà del calcolo delle condizioni iniziali, alle difficoltà di integrazione sia analitica che numerica allorché si hanno segnali d'ingresso non sufficientemente regolari, a problemi di instabilità nell'integrazione numerica.

III.3 Sistemi del primo ordine

Consideriamo un sistema dinamico lineare e stazionario del primo ordine, con ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$, e descritto da un'equazione differenziale ingresso-uscita del tipo:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad (3.12)$$

con a e b parametri costanti.

Osservazione 3.1. L'E.D. (3.12) descrive il comportamento ingresso-uscita di molti sistemi fisici, così come mostrato in Tabella 3.1 in cui sono riconsiderati alcuni sistemi fisici già discussi negli Esempi 2.5, 2.6, 2.14.

Osservazione 3.2. Il sistema descritto dall'E.D. (3.12) rientra nella classe più generale di sistemi SISO descritti da un E.D. del tipo:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny = b_0u(t) \quad (3.13)$$

Per tali sistemi è abbastanza semplice ottenere una rappresentazione ingresso-stato-uscita. Infatti per essi è possibile assumere come variabili di stato $y, \dot{y}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(n-1)}$ ossia:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

Con tale scelta la (3.13) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_{n-1}x_1 - a_{n-2}x_2 - \dots - a_1x_n + b_0u \end{aligned}$$

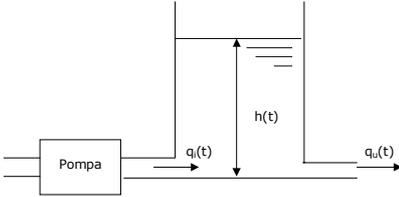
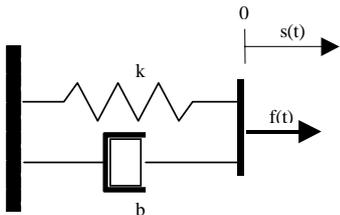
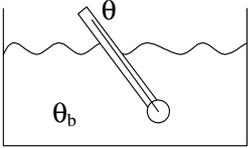
<p><i>Serbatoio con valvola di prelievo: caso di moto laminare</i></p> 	<p>$u(t) = q_i(t), \quad y(t) = h(t)$</p> <p><u>Relazioni costitutive</u></p> $S \frac{dh}{dt} = q_i(t) - q_u(t)$ $q_u(t) = kh(t)$ <p><u>E.D. in forma standard</u></p> $\dot{y} + \frac{k}{S} y = \frac{1}{S} u$
<p><i>Sistema molla - smorzatore</i></p> 	<p>$u(t) = f(t), \quad y(t) = s(t)$</p> <p><u>Relazioni costitutive</u></p> $f(t) = ks(t) + b\dot{s}(t)$ <p><u>E.D. in forma standard</u></p> $\dot{y} + \frac{k}{b} y = \frac{1}{b} u$
<p><i>Termometro</i></p> 	<p>$u(t) = \theta_b(t), \quad y(t) = \theta(t)$</p> <p><u>Relazioni costitutive</u></p> $C \frac{d\theta}{dt} = q(t)$ $q(t) = K(\theta_b(t) - \theta(t))$ <p><u>E.D. in forma standard</u></p> $\dot{y} + \frac{K}{C} y = \frac{K}{C} u$

Tabella 3.1 Esempi di sistemi fisici aventi modello matematico del tipo $\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t)$

a cui corrisponde la rappresentazione implicita ingresso-stato-uscita:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad D = [0]$$

Come si può notare, lo stato iniziale coincide con le condizioni iniziali dell'E.D..

Osservazione 3.3. L'E.D. (3.13) non comprende la totalità dei sistemi lineari e stazionari di ordine n , i quali, come visto nel paragrafo III.2, sono descritti da un'E.D. del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + b_0 u$$

Lo studio di tale classe più generale di sistemi, cioè quelli in cui nell'E.D. i-u sono presenti le derivate del segnale di ingresso, esula dagli scopi di questo corso.

III.3.1 Risposta in evoluzione libera

Si consideri un sistema del primo ordine descritto dall'E.D. (3.12) con condizione iniziale assegnata, per comodità, all'istante $t_0=0$:

$$\dot{y} + ay = bu, \quad y(0) = y_0 \quad (3.14)$$

Come detto nel paragrafo III.1.1, la *risposta in evoluzione libera* $y_l(t)$ di un sistema è quella conseguente ad uno stato iniziale pari a quello assegnato $x(t_0)=x_0$ e ad un forzamento nullo. Nel caso in cui il sistema è rappresentato per mezzo di un'E.D. del tipo (3.14), come detto nell'Osservazione 3.2, come variabili di stato si possono scegliere l'uscita e le sue derivate successive fino a quella di ordine $(n-1)$. Pertanto la risposta in evoluzione libera in uscita coinciderà con la soluzione dell'E.D. omogenea associata con le condizioni iniziali assegnate.

L'equazione caratteristica associata alla omogenea della (3.14) è:

$$\lambda + a = 0$$

Detta λ la radice di tale equazione (ovviamente è $\lambda=-a$), l'integrale generale dell'omogenea sarà:

$$\tilde{y}(t) = ke^{\lambda t}$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, risulta:

$$y_l(t) = y_0 e^{\lambda t} \quad (3.15)$$

Pertanto l'evoluzione libera di un sistema del primo ordine ha un andamento di tipo esponenziale. Tale esponenziale, come mostrato in Fig.3.7, è *convergente* se $\lambda < 0$, *costante* se $\lambda = 0$, *divergente* se $\lambda > 0$.

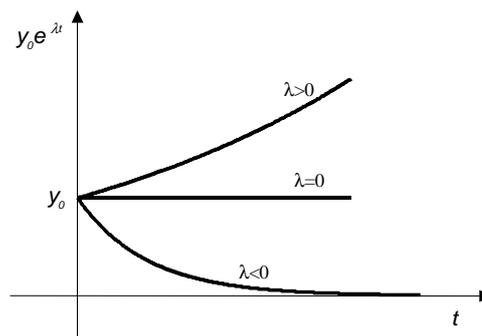


Figura 3.7 Risposta in evoluzione libera di un sistema del primo ordine

Facilmente ci si rende conto che l'andamento della risposta in evoluzione libera è completamente definito (a meno ovviamente del valore iniziale) dal valore della radice λ dell'equazione omogenea associata. Spesso, in sostituzione del valore di λ , la risposta viene caratterizzata attraverso un parametro τ , detto *costante di tempo del sistema*, legata a λ in maniera biunivoca attraverso la relazione:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} \quad (3.16)$$

In termini di tale parametro, si può affermare che:

La risposta in evoluzione libera di un sistema LTI del primo ordine descritto dalla (3.14) è data da:

$$y_l(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (3.17)$$

La costante di tempo ha un'interpretazione particolarmente utile per sistemi con risposta in evoluzione libera convergente, per i quali, essendo $\lambda < 0$, risulta $\tau > 0$. Per essi si vede facilmente che:

- **per $t=3\tau$** $y_l(3\tau) = y_0 e^{-3} \cong 0.05 y_0$, ossia **la risposta in uscita** si riduce del 95% rispetto al valore iniziale, ovvero **raggiunge un valore al di sotto del 5% del valore iniziale;**
- **per $t=4.6\tau$** $y_l(4.6\tau) = y_0 e^{-4.6} \cong 0.01 y_0$, ossia **la risposta in uscita** si riduce del 99% rispetto al valore iniziale, ovvero **raggiunge un valore al di sotto del 1% del valore iniziale;**

Pertanto, nel caso di sistemi a risposta convergente, se si è interessati a individuare il tempo dopo il quale la risposta in evoluzione libera si porta "praticamente a zero", tale tempo può essere stimato pari a 3 volte la costante di tempo se si è interessati ad un precisione del 5% rispetto al valore iniziale, oppure a 4.6 volte la costante di tempo se si è interessati ad un precisione del 1% rispetto al valore iniziale.

Un'altra interpretazioni di τ è illustrata in Fig.3.8.

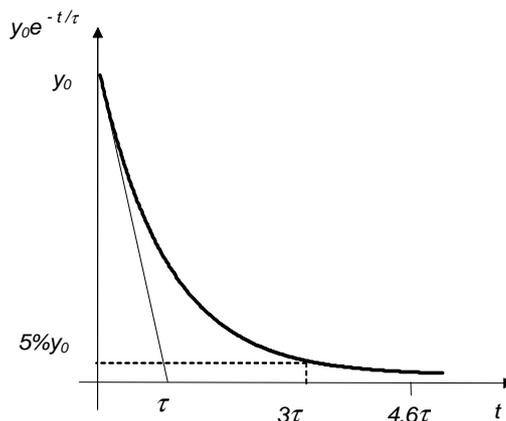


Figura 3.8 Risposta in evoluzione libera di un sistema del primo ordine convergente ($\lambda < 0$ e quindi $\tau > 0$)

Con riferimento ai sistemi fisici mostrati in Tabella 3.1, si vede facilmente che:

- Serbatoio con valvola di prelievo: $\tau = S/k$
- Sistema molla-smorzatore: $\tau = b/k$
- Termometro: $\tau = C/K$

L'interpretazione della legge trovata per i fenomeni fisici in considerazione è evidente. Così, ad esempio, se il serbatoio, in un certo istante iniziale t_0 , contiene liquido per un'altezza pari a h_0 , in assenza di altro liquido immesso esso praticamente si svuoterà in un tempo pari a $3\div 4.6$ volte la costante di tempo; questa, a sua volta, è direttamente proporzionale alla superficie di base del serbatoio (da questa, infatti, dipende il volume di acqua contenuto nel serbatoio) e inversamente proporzionale alla costante k , e quindi alla sezione della valvola di prelievo.

III.3.2 Risposta forzata al gradino

Come detto nel paragrafo III.1.1, la *risposta forzata* $y_f(t)$ di un sistema è quella ottenuta imponendo stato iniziale nullo e ingresso pari a quello assegnato.

In questo paragrafo calcoleremo la risposta forzata ad un gradino di un sistema del primo ordine descritto dall'E.D. (3.12), ossia:

$$\dot{y} + ay = bu, \quad y(0) = 0, \quad u(t) = U_0 1(t) \quad (3.18)$$

La risposta in uscita di tale sistema, come richiamato in Appendice A, si ottiene sommando l'integrale generale dell'omogenea associata e una soluzione particolare dell'E.D completa. Utilizzando le notazioni standard introdotte in Appendice A nel paragrafo A.4, detta λ la radice dell'equazione omogenea associata (ovviamente è $\lambda = -a$), risulta:

$$\tilde{y}(t) = ke^{\lambda t}$$

Un integrale particolare dell'E.D. completa può essere cercato tra i polinomi di grado zero, ossia del tipo:

$$\bar{y}(t) = c$$

Sostituendo $\bar{y}(t)$ nell'E.D. si ha:

$$ac = bU_0$$

per cui:

$$c = \frac{b}{a}U_0$$

e quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(t) = \frac{b}{a}U_0$$

La soluzione generale dell'E.D. completa è pertanto:

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t) = ke^{\lambda t} + \frac{b}{a}U_0$$

La costante k va ricavata imponendo la condizione iniziale, ossia:

$$y(0) = 0 \Rightarrow ke^{\lambda t} + \frac{b}{a}U_0 \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow k = -\frac{b}{a}U_0$$

In conclusione la risposta forzata al gradino è:

$$y(t) = \frac{b}{a} U_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

Il parametro b/a dipendente solo dal sistema, ossia la costante moltiplicativa di U_0 , è detto **guadagno del sistema** ed è in genere indicata con G . Con tale posizione, ricordando anche la definizione di costante di tempo del sistema, concludiamo che:

La risposta al gradino di un sistema LTI del primo ordine è data da:

$$y(t) = GU_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad G = \frac{b}{a}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad (3.19)$$

Come si vede, l'andamento esponenziale già incontrato nella risposta in evoluzione libera caratterizza anche la risposta forzata al gradino.

In Fig.3.9 è riportata la risposta al gradino per il caso di un sistema con $\tau > 0$ ($\lambda < 0$). Come si può osservare, tale risposta tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che in pratica è raggiunto dopo un tempo pari a $3 \div 4.6 \tau$.

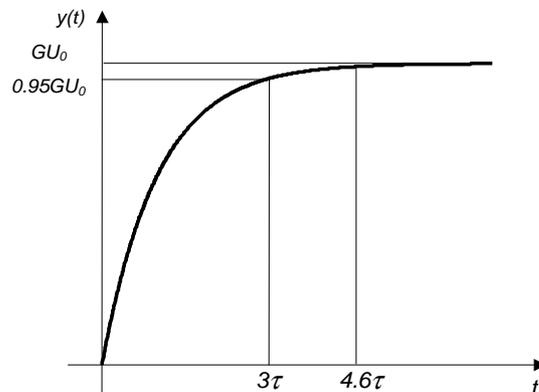


Figura 3.9 Risposta al gradino di un sistema del primo ordine avente $\tau > 0$

Con riferimento ai sistemi fisici mostrati in Tabella 3.I, si vede facilmente che:

- Serbatoio con valvola di prelievo: $\tau = S/k, \quad G = 1/k$
- Sistema molla-smorzatore: $\tau = b/k, \quad G = 1/k$
- Termometro: $\tau = C/K, \quad G = 1$

Anche in questo caso l'interpretazione delle leggi trovate per i fenomeni fisici in considerazione è evidente. Così, ad esempio, se il sistema molla smorzatore viene sollecitato con una forza a gradino di ampiezza F_0 , la posizione dell'estremo libero del sistema tende a portarsi verso un valore costante pari a $GF_0 = \frac{1}{k} F_0$, che è proprio la posizione in cui la forza di deformazione elastica della molla equilibra la forza costante applicata. Tale posizione è in pratica raggiunta dopo un tempo pari a $3 \div 4.6$ volte la costante di tempo del sistema.

Osservazione. Come si è visto in precedenza, la costante di tempo τ e il guadagno G sono parametri molto significativi per la valutazione del comportamento di un sistema del primo ordine. Per questo motivo l'E.D. i-u viene spesso scritta nella seguente forma ingegneristica ottenuta dividendo ambo i membri della (3.12) per il parametro "a":

Forma ingegneristica di un sistema del primo ordine

$$\tau \dot{y} + y = Gu, \quad G = \frac{b}{a}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (3.20)$$

III.3.3 Risposta forzata ad una rampa

In questo paragrafo, per il sistema del primo ordine descritto dall'E.D. (3.12) o, equivalentemente, (3.20), calcoleremo la risposta forzata ad una rampa, applicata all'istante $t=0$, del tipo:

$$u(t) = U_0 t 1(t)$$

Tenendo conto di quanto detto in Appendice A, e utilizzando un procedimento analogo a quello del paragrafo precedente, si ricava che:

La risposta forzata ad una rampa di un sistema LTI del primo ordine descritto dalla (3.12) o (3.20) è data da:

$$y(t) = GU_0 (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}), \quad G = \frac{b}{a}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (3.21)$$

In Fig.3.10 è riportata la risposta alla rampa per il caso di un sistema con $\tau > 0$ ($\lambda < 0$).

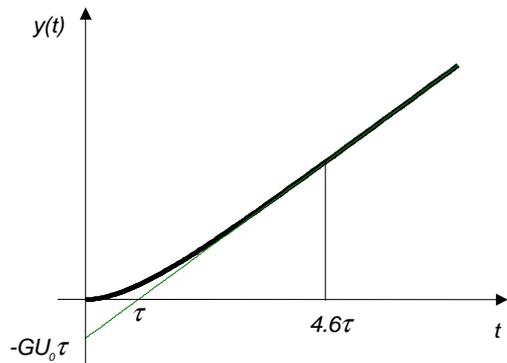


Figura 3.10 Risposta a rampa di un sistema del primo ordine avente $\tau > 0$

Come si può osservare, tale risposta, per sistemi con $\tau > 0$, per t che tende all'infinito tende alla retta asintotica di equazione:

$$y_r(t) = GU_0 (t - \tau) \quad (3.22)$$

Questa è una retta di pendenza GU_0 e che attraversa l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $(0, -GU_0 \tau)$. Tale retta è in pratica raggiunta quando il termine $\tau e^{-t/\tau}$ diventa trascurabile, ossia dopo un tempo pari circa a $3 \div 4.6 \tau$.

III.3.4 Risposta forzata ad un segnale sinusoidale

Per il sistema descritto dall'E.D. (3.20) calcoliamo ora la risposta forzata ad un segnale sinusoidale applicato all'istante $t=0$, del tipo:

$$u(t) = [U_0 \sin \omega_0 t] 1(t) \quad (3.23)$$

In questo caso, un integrale particolare dell'E.D. sarà da ricercare tra le funzioni del tipo:

$$\bar{y}(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$$

Con una procedura alquanto laboriosa analoga a quella del paragrafo III.3.3, o con una procedura molto più semplice che sarà descritta nei paragrafi III.4.4 e III.5, si ricava che:

La risposta al segnale sinusoidale (3.23) di un sistema LTI del primo ordine è data da:

$$\begin{cases} y(t) = M(\omega_0) U_0 [\sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) - \sin \varphi(\omega_0) e^{-t/\tau}] \\ \text{con} \\ M(\omega_0) = \frac{G}{\sqrt{1 + \omega_0^2 \tau^2}}, \quad \varphi(\omega_0) = -\arctg(\omega_0 \tau) \end{cases} \quad (3.24)$$

In Fig.3.11 sono riportati sia il segnale sinusoidale (3.23) con $U_0=1$, $\omega_0=2\pi$, che la risposta di un sistema del primo ordine avente $G=1$ e $\tau=1/2\pi$.

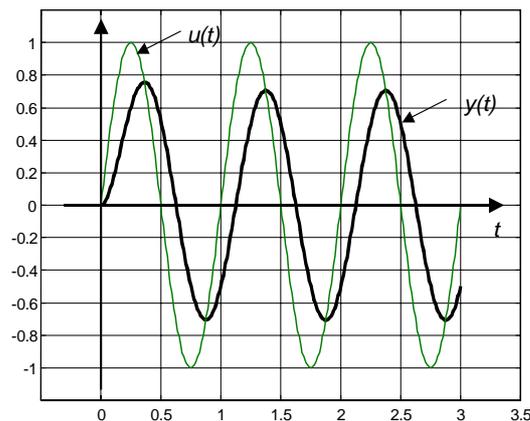


Figura 3.11 Risposta forzata di un sistema del primo ordine a un segnale sinusoidale

E' facile rendersi conto che, per sistemi con $\tau > 0$, per t che tende all'infinito, la risposta forzata tende al segnale sinusoidale di equazione:

$$y_r(t) = M(\omega_0) U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (3.25)$$

Questa è una sinusoide di pulsazione ω_0 pari a quella di ingresso, di ampiezza pari a quella di ingresso moltiplicata per $M(\omega_0)$, e sfasata rispetto a quella di ingresso di $\varphi(\omega_0)$. Tale andamento sinusoidale è in pratica raggiunto quando il termine $e^{-t/\tau}$ diventa trascurabile, ossia dopo un tempo pari circa a $3 \div 4.6 \tau$.

III.3.5 Risposta a regime e risposta in transitorio

Come detto nel paragrafo III.1.3:

"Condizione necessaria per l'esistenza della risposta a regime di un sistema è che la risposta in evoluzione libera, per qualsiasi stato iniziale, tenda a zero per t che tende all'infinito."

Nel caso di sistemi del primo ordine questa condizione è soddisfatta se e solo se $\lambda < 0$. Nel seguito di tale paragrafo, pertanto, considereremo solo sistemi con $\lambda < 0$.

Risposta a regime e in transitorio ad un gradino. Consideriamo il caso di un sistema sollecitato con ingresso a gradino. La **risposta totale al gradino**, somma della risposta in evoluzione libera e in evoluzione forzata, in base a quanto visto nei paragrafi III.3.1 e III.3.2, è data da:

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} + GU_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.26)$$

Facilmente si vede che, per t che tende all'infinito, tale risposta tende al valore costante:

$$y_r(t) = GU_0$$

Pertanto:

In un sistema LTI del primo ordine con $\lambda < 0$, la risposta a regime a un gradino di ampiezza U_0 è un segnale costante di ampiezza pari a GU_0 , ossia:

$$y_r(t) = GU_0 \quad (3.27)$$

Per quanto riguarda la risposta in transitorio, poiché essa è data dalla differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, si ha che:

In un sistema LTI del primo ordine con $\lambda < 0$, la risposta in transitorio conseguente all'applicazione di un gradino di ampiezza U_0 è data da:

$$y_t(t) = (y_0 - GU_0) e^{-t/\tau} \quad (3.28)$$

Come si vede, l'andamento temporale della risposta in transitorio è analogo a quello della risposta in evoluzione libera: essa ha un andamento esponenziale e si estingue praticamente dopo un tempo pari a $3 \div 4.6$ volte la costante di tempo del sistema.

Risposta a regime e in transitorio ad una rampa. Consideriamo ora il caso di un sistema sollecitato con ingresso a rampa. La **risposta totale alla rampa** è data da:

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} + GU_0 (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) \quad (3.29)$$

Così come visto (paragrafo III.3.3) per la risposta forzata, per t che tende all'infinito tale risposta tende alla retta di equazione:

$$y_r(t) = GU_0 (t - \tau)$$

Concludiamo che:

In un sistema LTI del primo ordine con $\lambda < 0$, la risposta a regime ad una rampa di pendenza U_0 è ancora una rampa di pendenza GU_0 , traslata di $-GU_0\tau$, la cui espressione è:

$$y_r(t) = GU_0 (t - \tau) \quad (3.30)$$

Per quanto riguarda la risposta in transitorio, essendo essa data dalla differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, si ha che:

In un sistema LTI del primo ordine con $\lambda < 0$, la risposta in transitorio conseguente all'applicazione di una rampa di pendenza U_0 è data da:

$$y_t(t) = (y_0 - \tau G U_0) e^{-t/\tau} \quad (3.31)$$

Anche in questo caso l'andamento temporale della risposta in transitorio è del tipo della risposta in evoluzione libera, per cui si estingue praticamente dopo un tempo pari a 3÷4.6 volte la costante di tempo del sistema.

Risposta a regime e in transitorio ad un segnale sinusoidale. Consideriamo il caso di un sistema sollecitato con un ingresso sinusoidale. La **risposta totale al segnale sinusoidale**, somma della risposta in evoluzione libera e in evoluzione forzata, è data da:

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} + M(\omega_0) U_0 [\sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) - \sin \varphi(\omega_0) e^{-t/\tau}] \quad (3.32)$$

Per t che tende all'infinito tale risposta tende al segnale sinusoidale di equazione:

$$y_r(t) = M(\omega_0) U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

Pertanto:

In un sistema LTI del primo ordine con $\lambda < 0$, la risposta a regime ad una segnale sinusoidale di ampiezza U_0 e pulsazione ω_0 è data da

$$y_r(t) = M(\omega_0) U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (3.33)$$

Essa, pertanto, è ancora una senoide di pulsazione pari a quella ω_0 del segnale di ingresso, di ampiezza pari a quella di ingresso moltiplicata per $M(\omega_0)$, e sfasata rispetto a quella di ingresso di $\varphi(\omega_0)$. $M(\omega_0)$ e $\varphi(\omega_0)$ hanno le seguenti espressioni (specificate nella (3.24)):

$$M(\omega_0) = \frac{G}{\sqrt{1 + \omega_0^2 \tau^2}}, \quad \varphi(\omega_0) = -\arctg(\omega_0 \tau)$$

Per quanto riguarda la risposta in transitorio, essendo essa data dalla differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, si ha che:

In un sistema LTI del primo ordine con $\lambda < 0$, la risposta in transitorio conseguente all'applicazione di segnale sinusoidale di ampiezza U_0 e pulsazione ω_0 è data da

$$y_t(t) = (y_0 - M(\omega_0) U_0 \sin \varphi(\omega_0)) e^{-t/\tau} \quad (3.34)$$

Anche in questo caso l'andamento temporale della risposta in transitorio è del tipo della risposta in evoluzione libera, per cui si estingue praticamente dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo del sistema.

III.4 Sistemi del secondo ordine

Prendiamo nuovamente in considerazione un sistema massa-molla-atrito del tipo di quello considerato nell'Esempio 2.11, ma con massa costante (vedi Fig.3.12). La relazione costitutiva che ne descrive il comportamento è fornita dalla seconda legge di Newton:

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - ks + f \quad (3.35)$$

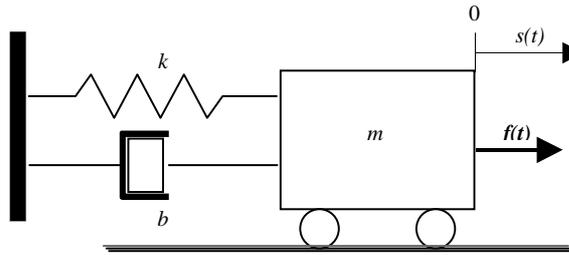


Figura 3.12 Sistema massa-molla-smorzatore

Tale sistema ci porta in maniera naturale a considerare la classe di sistemi che considereremo in questo paragrafo, ossia i sistemi SISO, dinamici, lineari e stazionari del secondo ordine, con ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$, e descritti da un'equazione differenziale ingresso-uscita del tipo:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = bu(t)$$

con a_1, a_2, b parametri costanti.

III.4.1 Risposta in evoluzione libera

La risposta in evoluzione libera del sistema:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = bu(t) \tag{3.36}$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= \dot{y}_0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

dipende dalla natura delle radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, ossia:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{3.38}$$

Le radici λ_1, λ_2 di tale equazione possono essere:

1. reali e distinte;
2. reali e coincidenti;
3. complesse coniugate.

Le soluzioni esplicite per i tre casi sono riportate in Tabella 3.2.

Caso di radici λ_1, λ_2 reali e distinte

$$y_1(t) = \frac{\dot{y}_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\dot{y}_0 - \lambda_1 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \quad (3.39)$$

Caso di radici $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reali e coincidenti

$$y_1(t) = y_0 e^{\lambda t} + (\dot{y}_0 - \lambda y_0) t e^{\lambda t} \quad (3.40)$$

Caso di radici $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ complesse e coniugate

$$y_1(t) = y_0 e^{\alpha t} \cos \omega t + \frac{(\dot{y}_0 - \alpha y_0)}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \quad (3.41)$$

con

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 - \alpha y_0}{\omega} \right)^2}, \quad \beta = \text{arctg} \frac{\omega y_0}{\dot{y}_0 - \alpha y_0}$$

Tabella 3.2 Risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine

Tali formule si ricavano con i procedimenti richiamati in Appendice A. Esse possono essere verificate per via diretta. Il lettore interessato potrebbe almeno verificare il rispetto delle condizioni iniziali.

Le espressioni della risposta in evoluzione libera riportate in Tab.3.II, tuttavia, non danno un'immediata percezione dell'andamento temporale di tale risposta. Per ricavare tali andamenti consideriamo separatamente le tre diverse situazioni.

Caso di radici reali e distinte. In questo caso la risposta in evoluzione libera, come richiamato in Appendice A e come risulta dalla (3.39), è data da:

$$y_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.42)$$

con k_1, k_2 dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da λ_1, λ_2 . Essa è pertanto data dalla combinazione lineare di due leggi esponenziali del tipo di quelle già considerate per i sistemi del primo ordine. Valgono pertanto le seguenti proprietà.

Proprietà 1. Se almeno una delle due le radici λ_1, λ_2 è positiva, la risposta in evoluzione libera è divergente.

Proprietà 2. Se una delle due le radici, supponiamo λ_1 , è nulla e l'altra è negativa, la risposta in evoluzione libera tende ad assumere asintoticamente un valore costante pari a k_1 .

Proprietà 3. Se entrambe le radici λ_1, λ_2 sono negative, la risposta in evoluzione libera tende asintoticamente a zero. Dette $\tau_i = -1/\lambda_i$, $i=1,2$ le costanti di tempo associate alle due radici, ciascuno dei due termini esponenziali va a "zero" dopo un tempo pari a 3÷4.6 volte la costante di tempo associata, per cui, in prima approssimazione, si può ritenere che l'intera risposta in evoluzione libera vada a "zero" dopo un tempo pari a 3÷4.6 volte *la più grande costante di tempo* $\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2\}$. Possibili andamenti della risposta in evoluzione libera per $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.2$ e per diversi valori di k_1, k_2 sono riportati in Fig.3.13.

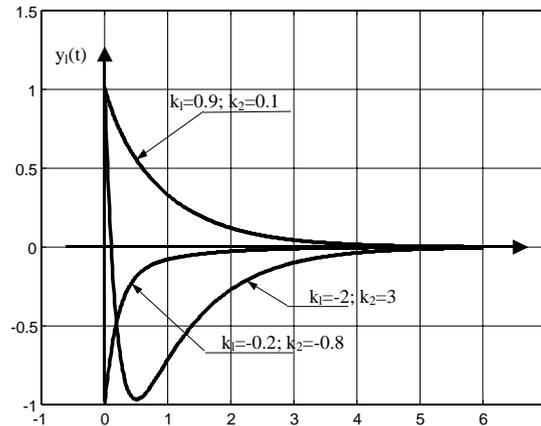


Figura 3.13 Risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine avente $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.2$

Esempio 3.5. Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore descritto dall'Eq. (3.35). Questa, posto $u(t)=f(t)$ e $y(t)=s(t)$, può essere riscritta nella forma standard:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = u$$

per cui l'omogenea associata è:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Si nota subito che, essendo i parametri fisici positivi, per la regola di Cartesio le radici sono sempre a parte reale negativa. Esse valgono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4k}{4m^2}}$$

Pertanto, nel caso di $b^2 > 4k$ (sistema sovrasmorzato) le radici sono reali e distinte. In tal caso, in dipendenza delle condizioni iniziali su posizione e velocità della massa, si possono avere situazioni di evoluzione dello spostamento $s(t)$ della massa come quelle riportate in Fig.3.13.

Caso di radici reali e coincidenti. Posto $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la risposta in evoluzione libera è data da:

$$y_i(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t} \quad (3.43)$$

con k_1, k_2 dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da λ , come risulta dalla (3.40). Per quanto riguarda il termine $k_1 e^{\lambda t}$, per esso valgono le stesse considerazioni di convergenza, costanza o divergenza fatte per i sistemi del primo ordine.

Per quanto riguarda invece il termine $t e^{\lambda t}$, valgono invece le seguenti considerazioni.

Proprietà 1. Se λ è positiva, la risposta in evoluzione libera è divergente.

Proprietà 2. Se λ è nulla, il termine si riduce a $te^{0t} = t$, per cui la risposta in evoluzione libera è divergente (vedi Fig.3.14).

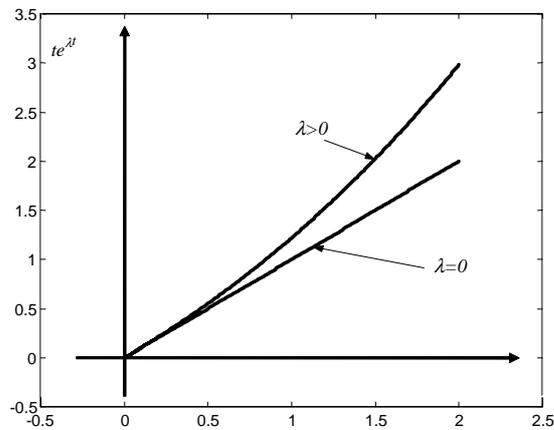


Figura 3.14 Grafico del termine $te^{\lambda t}$

Proprietà 3. Se λ è negativa, la risposta in evoluzione libera tende asintoticamente a zero con un andamento del tipo mostrato in Fig.3.15. Come si vede, contrariamente a quanto succede per i sistemi del primo ordine, il valore zero è praticamente raggiunto dopo un tempo maggiore di 4.6 volte τ . Per tali sistemi, infatti, il tempo necessario per raggiungere lo zero a meno dell'1% del valore iniziale della risposta è stimabile in 6.6 τ .

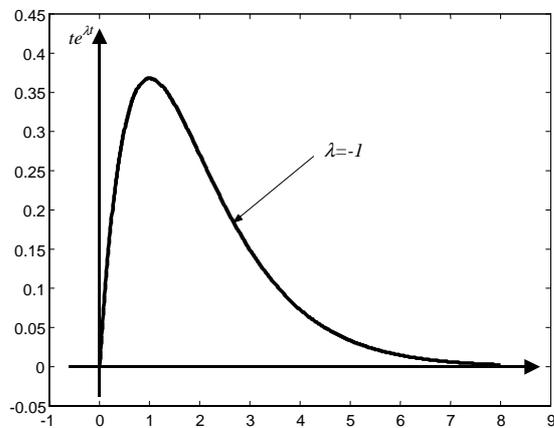


Figura 3.15 Grafico del termine $te^{\lambda t}$ nel caso di $\lambda < 0$

Caso di radici complesse e coniugate. In questo caso, posto

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

in base a quanto detto in Appendice A, e come risulta dalla (3.41), la risposta in evoluzione libera è data da:

$$y_l(t) = k_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + k_2 e^{\alpha t} \cos \omega t \quad (3.44)$$

con k_1, k_2 dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da α, ω . Esprimendo la coppia (k_1, k_2) in termini di un'altra coppia di costanti (A, β) definita come:

$$\begin{aligned} k_1 &= A \cos \beta \\ k_2 &= A \sin \beta \end{aligned} \quad (3.45)$$

ossia:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ \beta &= \operatorname{arctg} \frac{k_1}{k_2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

si ottiene:

$$y_1(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \quad (3.47)$$

con (A, β) dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da α, ω .

La legge oraria $e^{\alpha t} \sin \omega t$ è una legge di tipo oscillatoria i cui picchi hanno un inviluppo esponenziale. Il carattere di convergenza o divergenza di tale legge oraria sarà determinato esclusivamente dal segno di α : per $\alpha < 0$, l'oscillazione è convergente (vedi Fig.3.15a); per $\alpha = 0$, l'oscillazione è di ampiezza costante, ossia è sinusoidale (vedi Fig.3.15b); per $\alpha > 0$, l'oscillazione è divergente (vedi Fig.3.15c).

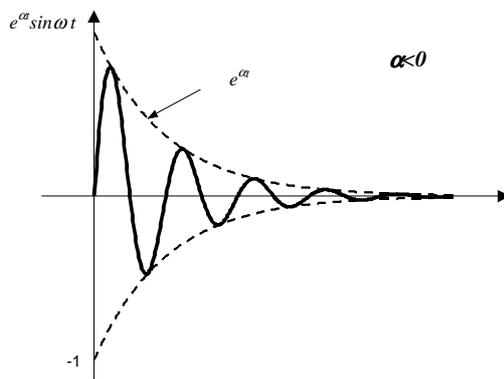


Figura 3.15a

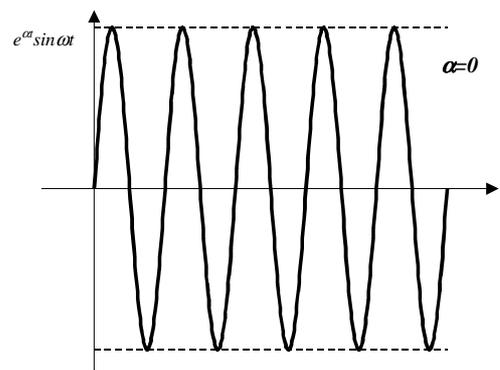


Figura 3.15b

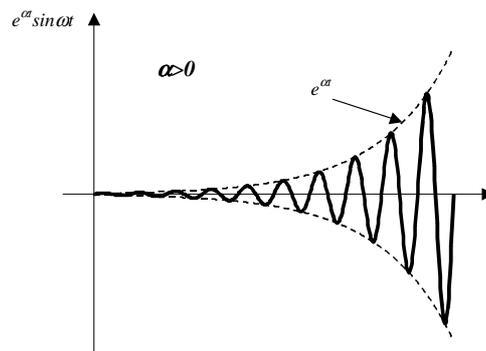


Figura 3.15c Grafici del termine $e^{\alpha t} \sin \omega t$

In chiusura di tale paragrafo facciamo notare che, mettendo insieme risultati relativi a sistemi del primo ordine e a sistemi del secondo ordine, possiamo concludere che il carattere di convergenza, non divergenza e divergenza della risposta di tali sistemi è esclusivamente determinato dal segno della parte reale delle radici dell'equazione caratteristica del sistema. Valgono infatti le seguenti proprietà:

Caso 1: risposta libera convergente. La risposta in evoluzione libera di un sistema del primo o secondo ordine è convergente per qualsiasi insieme di condizioni iniziali se e solo se le radici dell'equazione caratteristica sono tutte a parte reale negativa. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti essere *asintoticamente stabili*.

Caso 2: risposta libera non divergente. La risposta in evoluzione libera di un sistema del primo o secondo ordine è non divergente per qualsiasi insieme di condizioni iniziali se e solo l'equazione caratteristica non ha radici a parte reale positiva e, nel caso di sistemi del secondo ordine, non ha una coppia di radici nulle. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti essere *semplicemente stabili*.

Caso 3: risposta libera divergente. La risposta in evoluzione libera di un sistema del primo o secondo ordine è divergente se l'equazione caratteristica ha qualche radice a parte reale positiva oppure, nel caso di sistemi del secondo ordine, ha una coppia di radici nulle. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti essere *instabili*.

III.4.2 Parametri caratteristici di un sistema del secondo ordine

Come visto nel paragrafo precedente, l'andamento della risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine con radici complesse e coniugate è completamente caratterizzato dalla coppia di parametri (α, ω) che rappresentano parte reale e coefficiente dell'immaginario delle radici stesse. Tali parametri danno un'informazione diretta sia sulla legge esponenziale che involuppa i picchi delle oscillazioni (parametro α) che sulla pulsazione delle oscillazioni (parametro ω).

Di frequente, anziché utilizzare tali parametri, vengono utilizzate altre coppie di parametri legate ad (α, ω) attraverso semplici relazioni, e che forniscono un'informazione più direttamente legata ad altre caratteristiche della risposta, soprattutto nel caso di moto oscillatorio convergente.

Parametri (τ, T) . Il parametro τ , legato ad α dalla relazione:

$$\tau = -\frac{1}{\alpha}$$

è detto *costante di tempo* della legge oraria del moto. Nel caso di $\alpha < 0$, e quindi $\tau > 0$, esso ha lo stesso significato già discusso per i sistemi del primo ordine: fornisce un'indicazione sul tempo dopo il quale la legge oraria del moto (in questo caso convergente) raggiunge praticamente lo zero (ad es. 3÷4.6 volte τ). Ovviamente, a differenza dei sistemi del primo ordine, in questo caso il calcolo è approssimato in quanto basato sull'involuppo esponenziale della legge oraria del moto.

Il parametro ω è detto *pulsazione del sistema*, mentre T , legato ad ω dalla relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

è detto *periodo di oscillazione* del sistema. Talvolta, anziché il periodo T , viene specificata la *frequenza* $f = 1/T$.

Parametri (ζ, ω_n) .

Definizione. Per definire tale coppia di parametri, facciamo riferimento alla posizione delle radici complesse coniugate $(\alpha \pm j\omega)$ nel piano complesso $(\alpha, j\omega)$.

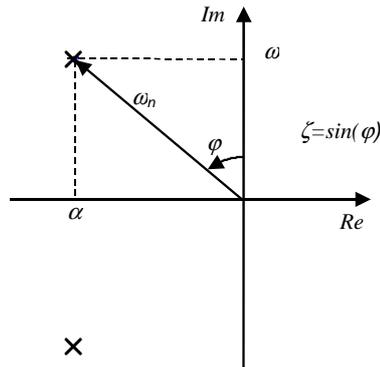


Figura 3.16 Definizione dei parametri (ζ, ω_n)

Come mostrato nella Fig.3.16, con riferimento al vettore rappresentativo del numero complesso $(\alpha + j\omega)$, ω_n è il modulo di tale vettore, mentre ζ è il seno dell'angolo formato dal semiasse positivo delle ordinate con il vettore stesso (l'angolo si intende computato positivamente in verso antiorario).

- ω_n è detta *pulsazione naturale* della legge oraria del moto
- ζ è detto *coefficiente di smorzamento*.

Facilmente si ricavano le formule di passaggio dalla coppia (α, ω) a quella (ζ, ω_n) e viceversa. Risulta:

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \\ \zeta = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \end{cases} \quad (3.48)$$

mentre le formule inverse sono:

$$\begin{cases} \alpha = -\zeta\omega_n \\ \omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases} \quad (3.49)$$

Dalla seconda delle (3.48) si evince che il segno di ζ è opposto a quello di α , inoltre $\alpha=0 \Leftrightarrow \zeta=0$. Pertanto il segno di ζ consente di stabilire la convergenza o la divergenza della legge oraria del moto:

- $\zeta > 0 \Rightarrow$ *legge oraria del moto convergente*
- $\zeta = 0 \Rightarrow$ *legge oraria del moto di tipo sinusoidale*
- $\zeta < 0 \Rightarrow$ *legge oraria del moto divergente*.

Relazione tra la coppia di parametri (ζ, ω_n) e i coefficienti (a_1, a_2) dell'E.D.

Chiediamoci ora se la coppia di parametri (ζ, ω_n) può essere ricavata in maniera diretta dai coefficienti (a_1, a_2) dell'equazione caratteristica (3.38) senza passare attraverso il calcolo delle radici e l'utilizzazione delle (3.48). A tal proposito notiamo che, dette $(\alpha + j\omega)$ le radici dell'equazione (3.38) che qui riscriviamo:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

essa può essere riscritta come:

$$[\lambda - (\alpha + j\omega)][\lambda - (\alpha - j\omega)] = 0$$

Con alcuni semplici passaggi si ottiene:

$$[\lambda - (\alpha + j\omega)][\lambda - (\alpha - j\omega)] = (\lambda - \alpha)^2 + \omega^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \omega^2$$

Pertanto, utilizzando le prime delle (3.48) e (3.49), la (3.38) può riscriversi come:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (3.50)$$

Si conclude pertanto che:

$$a_1 = 2\zeta\omega_n \quad a_2 = \omega_n^2 \quad (3.51)$$

da cui si ha:

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \quad \omega_n = \sqrt{a_2} \quad (3.52)$$

Notiamo ora che, nel caso in cui le relazioni (3.52) sono utilizzate per ricavare i valori di (ζ, ω_n) relativi ad un'equazione della forma (3.38) che presenta radici reali (ossia con $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$), in base alla (3.52) risulta anche $|\zeta| \geq 1$. Questo nuovo ζ può essere visto come una generalizzazione di quello introdotto per il caso di radici complesse coniugate. Per esso, infatti, in base a quanto detto, si ha:

- $|\zeta| < 1 \Rightarrow$ radici complesse coniugate
- $|\zeta| = 1 \Rightarrow$ radici reali e coincidenti
- $|\zeta| > 1 \Rightarrow$ radici reali e distinte.

Ovviamente l'interpretazione geometrica di (ζ, ω_n) data attraverso la Fi.3.16 è valida nel solo caso di radici complesse coniugate.

Interpretazione del significato di (ζ, ω_n) . Consideriamo il caso di un sistema avente $0 < \zeta < 1$, ossia con moto oscillatorio convergente. In tal caso, se restringiamo ulteriormente la nostra attenzione al caso di $0 < \zeta \ll 1$, è possibile dare a ζ un'interpretazione particolarmente interessante. Infatti, con semplici passaggi si ottiene:

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{-\alpha} \cong \frac{\omega}{-\alpha} = \frac{2\pi}{T} \tau \cong \frac{6\tau}{T} \quad (3.53)$$

Poiché 6τ è circa 2 volte il tempo necessario perché la legge oraria del moto vada praticamente a zero, e T è il periodo dell'oscillazione, concludiamo che:

per sistemi con $0 < \zeta \ll 1$, il valore $\frac{1}{2\zeta}$ fornisce una stima del numero di oscillazioni che la risposta in evoluzione libera del sistema compie prima di raggiungere praticamente il valore 0 (a meno del 5%).

Tornando al caso generale di $0 < \zeta < 1$, possiamo dire che ζ fornisce una misura della tendenza del sistema a oscillare: quanto più ζ è prossimo a 1, tanto più le oscillazioni sono smorzate.

Per quanto riguarda ω_n , poiché dalla seconda delle (3.49) risulta:

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

possiamo dire che:

ω_n rappresenta la pulsazione che avrebbero le oscillazioni nel caso di sistema non smorzato (ossia con $\zeta = 0$).

Un'altra interessante interpretazione di ω_n la si ottiene mettendola in relazione con la velocità di variazione dell'evoluzione libera del sistema; questa per la (3.47), è data da:

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}(Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta)) = Ae^{\alpha t} [\alpha \sin(\omega t + \beta) + \omega \cos(\omega t + \beta)]$$

da cui:

$$\left| \frac{\dot{y}}{A} \right| \leq e^{\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \leq \omega_n$$

Si conclude che:

ω_n fornisce una stima per eccesso della velocità di variazione dell'evoluzione libera del sistema.

Utilizzando le suddette interpretazioni di ζ e ω_n è possibile caratterizzare qualitativamente l'andamento della risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine in maniera molto semplice, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.6. Si consideri un sistema massa-molla-smorzatore del tipo considerato nell'esempio 3.5. Esso è descritto dall'E.D.

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{1}{m} u$$

Questa può risciversi nella forma:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{1}{m} u$$

con:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

Si vuole caratterizzare l'andamento qualitativo della risposta in evoluzione libera nel caso di: $m=1\text{kg}$, $b=2\text{Ns/m}$, $k=25\text{N/m}$.

Risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5 \text{ rad/sec}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{2}{2\sqrt{25 \cdot 1}} = 0.2$$

Concludiamo che:

- poiché $0 < \zeta < 1$, la risposta in evoluzione libera è oscillatoria smorzata;
- poiché $\zeta \ll 1$, la massa compirà 2÷3 oscillazioni (l'inverso di 2ζ è pari a 5) prima di fermarsi da un punto di vista pratico;
- $\alpha = -\zeta\omega_n = -1 \Rightarrow \tau = 1\text{sec}$, per cui le oscillazioni in uscita si smorzano dopo circa 3÷4.6 sec;
- il periodo delle oscillazioni è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cong 1.3\text{sec}$$

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta. In Fig.3.17 è riportato l'andamento "esatto" nel caso di $y_0 = 0.1\text{m}$, $\dot{y}_0 = 1\text{m/sec}$.

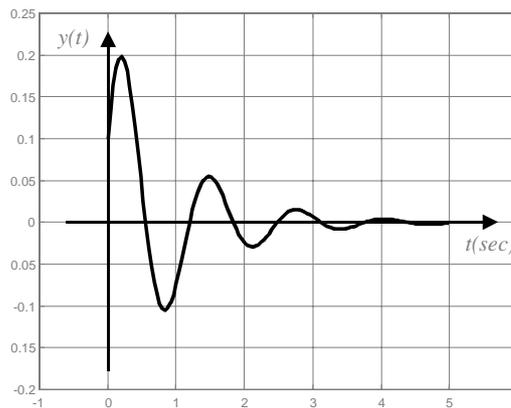


Figura 3.17 Risposta del sistema dell'Esempio 3.6

Ovviamente il tracciamento dell'andamento "esatto" per assegnate condizioni iniziali potrà essere effettuato solo calcolando la soluzione analitica esatta dell'E.D..

III.4.3 Risposta forzata al gradino

Consideriamo un sistema descritto dall'E.D. i-u:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = bu \quad (3.54)$$

e proponiamoci di calcolare la risposta forzata al gradino, ossia la risposta al segnale $u(t) = U_0 1(t)$ con condizioni iniziali nulle, ossia: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

Anche in questo caso l'espressione della risposta dipende dalle radici dell'equazione caratteristica. In tabella 3.3 sono riportate le varie forme assunte dalla risposta forzata a gradino. Tale risposta si può calcolare secondo le seguenti linee guida.

Posto:

$$G = \frac{b}{a_2} \quad (3.55)$$

si ha:

Caso di radici λ_1, λ_2 reali e distinte ($|\zeta| > 1$)

$$y(t) = GU_0 \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right] \quad (3.56)$$

Caso di radici $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reali e coincidenti ($|\zeta| = 1$)

$$y(t) = GU_0 [1 - e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}] \quad (3.57)$$

Caso di radici $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ complesse e coniugate ($|\zeta| < 1$)

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sin \theta} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \theta) \right] \quad (3.58)$$

$$\theta = \arctg(-\omega / \alpha)$$

Tabella 3.3 Risposta forzata al gradino di un sistema del secondo ordine

L'equazione omogenea associata all'E.D. (3.54) è:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Le radici di tale equazione, al variare del valore di ζ possono essere scritte come:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, & |\zeta| > 1 \\ \lambda, \lambda, & |\zeta| = 1 \\ \alpha \pm j\omega, & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Con tali notazioni, la soluzione generale dell'omogenea associata, per i vari casi, si può scrivere come segue:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, & |\zeta| > 1 \\ k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t}, & |\zeta| = 1 \\ k_1 e^{\alpha t} \sin(\omega t + k_2), & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (3.60)$$

con k_1, k_2 costanti arbitrarie.

Per quanto riguarda un integrale particolare dell'E.D. completa, esso potrà essere cercato tra i polinomi di grado zero, ossia del tipo:

$$\bar{y}(t) = c$$

Sostituendo $\bar{y}(t)$ nell'E.D. si ha

$$a_2 c = b U_0$$

per cui

$$c = \frac{b}{a_2} U_0$$

e quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(t) = \frac{b}{a_2} U_0 \quad (3.61)$$

Il parametro b/a_2 dipendente solo dal sistema, ossia la costante moltiplicativa di U_0 è detto **guadagno del sistema** e viene indicato con G .

La soluzione generale dell'E.D. completa è allora:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = \begin{cases} GU_0 + k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, & |\zeta| > 1 \\ GU_0 + k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t}, & |\zeta| = 1 \\ GU_0 + k_1 e^{\alpha t} \sin(\omega t + k_2), & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

Le costanti k_1, k_2 vanno ricavate imponendo le condizioni iniziali $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Essendo tale calcolo alquanto laborioso, nel seguito sono forniti e commentati i risultati separatamente nei tre casi.

Caso di $|\zeta| > 1$: radici reali e distinte. In tal caso la risposta forzata al gradino risulta essere:

$$y(t) = GU_0 \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right] \quad (3.63)$$

Come si vede, gli andamenti esponenziali già incontrati nella risposta in evoluzione libera caratterizzano anche la risposta forzata al gradino.

La (3.63) può anche esprimersi in termini delle costanti di tempo τ_1, τ_2 associate alle radici λ_1, λ_2 :

$$y(t) = GU_0 \left[1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \quad (3.64)$$

Ovviamente i due termini esponenziali vanno entrambi a zero se e solo se le due radici sono entrambe negative (e quindi le costanti di tempo positive), ossia se il sistema è asintoticamente stabile. In tal caso la risposta al gradino tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che, se una delle due costanti di tempo è molto maggiore dell'altra, è in pratica raggiunto dopo un tempo pari a circa $3 \div 4.6$ volte la più alta costante di tempo.

In Fig.3.18 è riportata la risposta al gradino per il caso di un sistema con $\tau_2 > \tau_1 > 0$, ossia di leggi esponenziali convergenti, ed in particolare $\tau_2 = 1 \text{ sec}$, $\tau_1 = 0.2 \text{ sec}$.

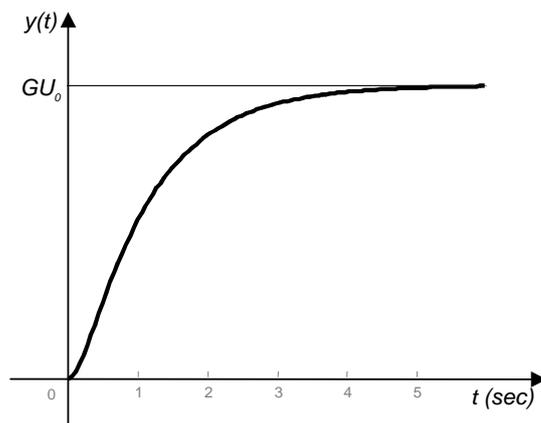


Figura 3.18 Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine avente $\tau_2 = 1\text{sec}$, $\tau_1 = 0.2\text{sec}$

Caso di $|\zeta|=1$: radici reali e coincidenti. In tal caso la risposta forzata al gradino risulta essere:

$$y(t) = GU_0 [1 - e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}] \quad (3.65)$$

Come si vede, i termini $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$ già incontrati nella risposta in evoluzione libera caratterizzano anche la risposta forzata al gradino.

La (3.65) può anche esprimersi in termini della costanti di tempo τ associata alla radice λ :

$$y(t) = GU_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (3.66)$$

Ovviamente i due termini esponenziali vanno entrambi a zero se e solo se $\lambda < 0$ (e quindi $\tau > 0$), ossia se il sistema è asintoticamente stabile. In tal caso la risposta al gradino tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che in pratica è raggiunto dopo un tempo che, come visto nell'analisi della risposta in evoluzione libera, è maggiore di 4.6 volte la costante di tempo; una stima approssimata è data da 6.6 volte la costante di tempo.

In Fig.3.19 è riportata la risposta al gradino per il caso di un sistema del secondo ordine con $\tau_1 = \tau_2 = 1\text{sec}$. Essa raggiunge praticamente il valore costante GU_0 dopo circa 6sec, ossia dopo circa 6.6 volte la costante di tempo.

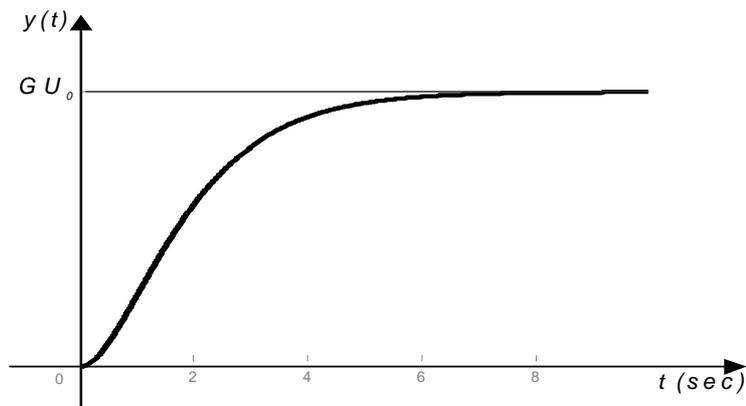


Figura 3.19 Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine avente $\tau_1 = \tau_2 = 1\text{sec}$

Caso di $|\zeta| < 1$: radici complesse coniugate. In tal caso la risposta forzata al gradino risulta essere:

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sin\theta} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \theta) \right] \quad (3.67)$$

$$\theta = \arctg(-\omega / \alpha)$$

E' da notare che l'angolo θ è il complementare dell'angolo φ già introdotto nella Fig.3.16 per definire il coefficiente di smorzamento.

Utilizzando le (3.49), con semplici passaggi si ottiene anche:

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \right] \quad (3.68)$$

Come si vede, l'andamento oscillatorio già incontrato nella risposta in evoluzione libera caratterizza anche la risposta forzata al gradino. Inoltre, come si vede, introducendo il *tempo normalizzato* $t^* = \omega_n t$, la risposta a gradino dipende solo dal coefficiente di smorzamento ζ .

La (3.67) può anche esprimersi in termini della costante di tempo τ associata alla legge esponenziale:

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sin\theta} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \theta) \right] \quad (3.69)$$

Come si vede il termine oscillatorio va a zero se e solo se le due radici complesse coniugate sono a parte reale negativa (e quindi la costante di tempo positiva), ossia se il sistema è asintoticamente stabile. In tal caso la risposta al gradino tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che in pratica è raggiunto dopo un tempo pari a circa $3 \div 4.6$ volte la costante di tempo.

L'andamento della risposta al gradino, come espressa dalla (3.68), è riportata in Fig.3.20 per le seguenti situazioni:

- $GU_0=1$;
- vari valori di $\zeta > 0$;
- sulle ascisse è riportato il tempo normalizzato $t^* = \omega_n t$.

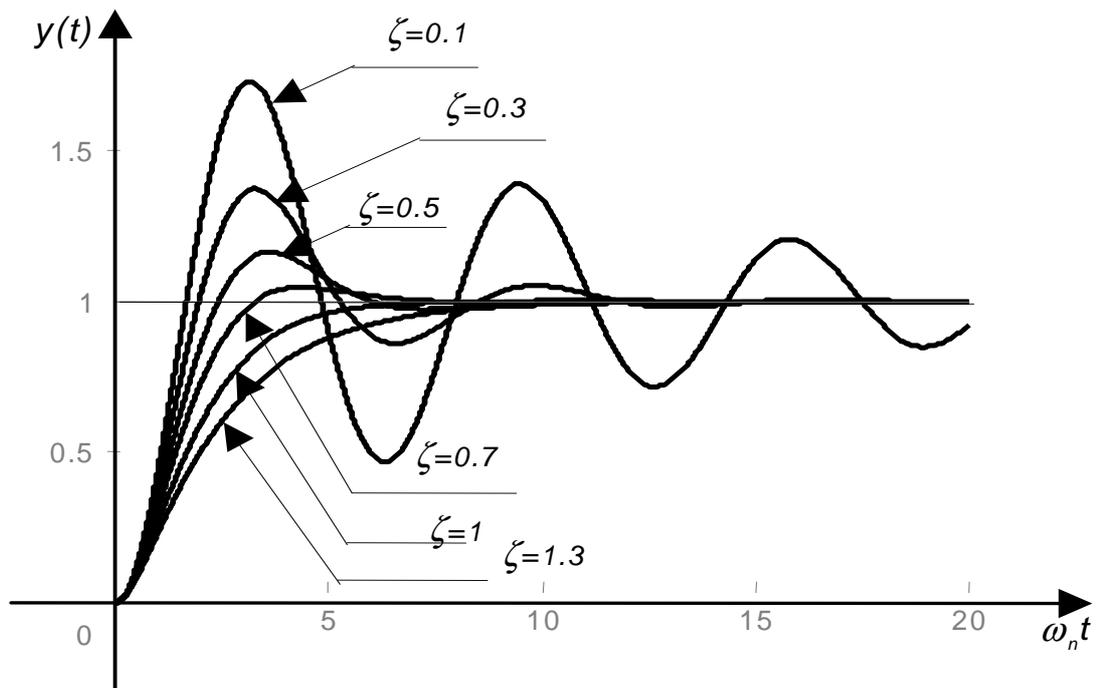


Figura 3.20 Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine con $GU_0=1$

Osservazione. Sulla base delle considerazioni svolte, si può affermare che per la valutazione del comportamento di un sistema del secondo ordine è utile far riferimento ai parametri G , ζ , ω_n . Per questo motivo l'E.D. i-u viene spesso scritta nella seguente forma ingegneristica:

Forma ingegneristica di un sistema del secondo ordine

$$\ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{y} + y = Gu \quad \begin{cases} G = \frac{b}{a_2} \\ \zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \\ \omega_n = \sqrt{a_2} \end{cases} \quad (3.70)$$

Esempio 3.7. Si consideri il sistema meccanico mostrato in Fig.3.21, costituito da un sistema molla-smorzatore verticale, su cui, all'istante $t=0$, viene poggiato un corpo di massa m . Assumiamo che la massa m venga poggiata senza perturbare istantaneamente le condizioni iniziali (posizione e velocità iniziali assunte nulle) del piano di appoggio. Ci proponiamo di studiare il moto del corpo nel caso di: $m=1\text{kg}$, $k=25\text{N/m}$, e assumendo per il coefficiente di attrito viscoso i seguenti tre valori: $b_1=2\text{Ns/m}$, $b_2=10\text{Ns/m}$, $b_3=20\text{Ns/m}$.

E' facile convincersi che il sistema in considerazione, a partire dall'istante $t=0$, può essere considerato come un classico sistema massa-molla-smorzatore soggetto ad una forza a gradino applicata all'istante $t=0$ e di ampiezza pari al peso del corpo. Detta g l'accelerazione di gravità, il moto del corpo sarà descritto da:

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - ks + mg1(t), \quad s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$$

Ponendo, come al solito, $y(t)=s(t)$, $u(t)=f(t)$, dove $f(t)$ indica genericamente la forza applicata all'elemento di massa, si ottiene:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{1}{m} u, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \quad u(t) = mg1(t)$$

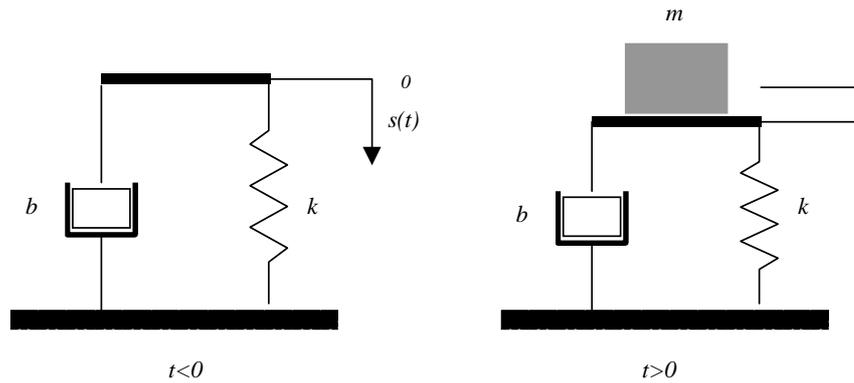


Figura 3.21 Il sistema meccanico dell'Esempio 3.7

L'ingresso del sistema è, in tutti e tre i casi, un segnale a gradino di ampiezza pari a $mg=1(\text{kg})9.81(\text{m}/\text{sec}^2)=9.81\text{N}$.

L'E.D. può risciversi nella forma ingegneristica:

$$\frac{\ddot{y}}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{y} + y = Gu$$

con:

$$G = \frac{1}{k}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Le seguenti considerazioni, valide per tutti e tre i casi, sono alla base della determinazione dell'andamento qualitativo della risposta:

- la pulsazione naturale non dipende dal coefficiente b per cui, in tutti e tre casi, risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5 \text{ rad/sec}$$

- poiché $\zeta > 0$, la risposta al gradino tende asintoticamente al valore costante GU_0 , dove U_0 è l'ampiezza del gradino e vale 9.81, mentre G è la costante di guadagno del sistema e vale: $G = 1/k = 0.04$; pertanto risulta: $GU_0 \approx 0.4$.

Il coefficiente b influenza il coefficiente di smorzamento ζ il quale, nei tre casi, risulta rispettivamente pari a: $\zeta_1=0.2$, $\zeta_2=1$, $\zeta_3=2$.

Studiamo separatamente le 3 situazioni.

Caso 1: $b=2\text{Ns}/\text{m} \Rightarrow \zeta=0.2$ (sistema sottosmorzato). L'andamento qualitativo della risposta a gradino può essere determinato in base alle seguenti considerazioni aggiuntive:

- poiché $\zeta < 1$, la risposta al gradino è oscillatoria;
- poiché $\zeta \ll 1$, la massa compirà 2÷3 oscillazioni (l'inverso di 2ζ è pari a 2.5) prima di fermarsi (a meno del 5%);
- $\alpha = -\zeta\omega_n = -1 \Rightarrow \tau = 1\text{sec}$, per cui le oscillazioni in uscita si smorzano dopo circa 5 sec (a meno dell'1%);
- il periodo delle oscillazioni è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cong 1.3 \text{sec}$$

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino. In Fig.3.22 è riportato l'andamento "esatto" di tale risposta che conferma la correttezza delle considerazioni fatte.

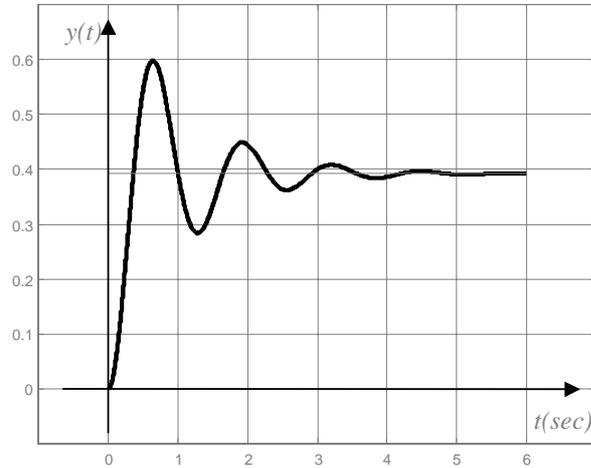


Figura 3.22 Risposta del sistema massa-molla-smorzatore dell'Esempio 3.7 nel caso di $b=2Ns/m$

Caso 2: $b=10Ns/m \Rightarrow \zeta=1$ (sistema criticamente smorzato). In tal caso si ha:

- poiché $\zeta = 1$, la risposta al gradino non è oscillatoria;
- con $\zeta = 1$ si hanno due radici reali coincidenti in $\lambda = -\zeta\omega_n = -5 \Rightarrow \tau = 0.2 \text{sec}$, per cui la risposta raggiungerà praticamente il valore di regime dopo un tempo pari a circa 1.4 sec (circa 6.6 volte la costante di tempo)

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino. In Fig.3.23 è riportato l'andamento "esatto" di tale risposta che conferma la correttezza delle considerazioni fatte.

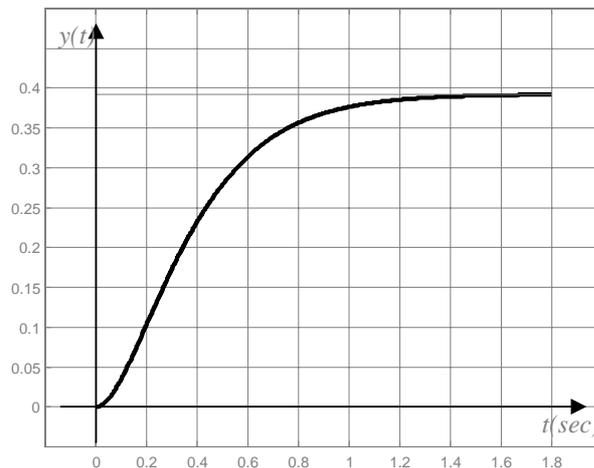


Figura 3.23 Risposta del sistema massa-molla-smorzatore dell'Esempio 3.7 nel caso di $b=10Ns/m$

Caso 3: $b=20Ns/m \Rightarrow \zeta=2$ (sistema sovra-smorzato). In tal caso si ha:

- poiché $\zeta > 1$, la risposta al gradino non è oscillatoria;
- con $\zeta > 1$ si hanno due radici reali e distinte in

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -10 \pm 5\sqrt{3} \Rightarrow \tau_1 = 0.75 \text{sec}, \quad \tau_2 = 0.05 \text{sec}$$

per cui la risposta raggiungerà praticamente il valore di regime dopo un tempo pari a circa 3.4sec (4.6 volte la massima costante di tempo)

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino. In Fig.3.24 è riportato l'andamento "esatto" di tale risposta che conferma la correttezza delle considerazioni fatte.

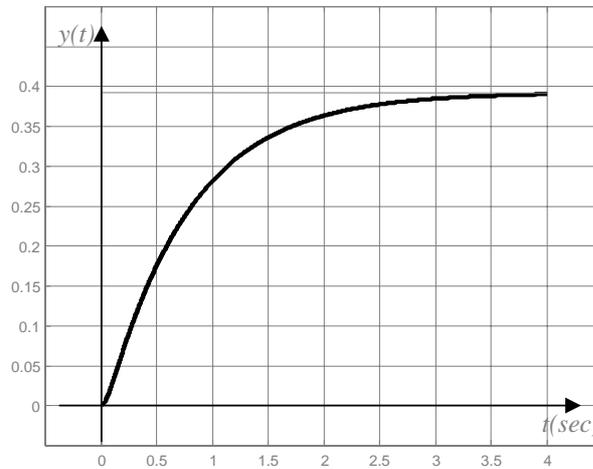


Figura 3.22 Risposta del sistema massa-molla-smorzatore dell'Esempio 3.7 nel caso di $b=20Ns/m$

III.4.4 Risposta a regime e risposta in transitorio

Come detto in Appendice A, la risposta totale di un sistema dinamico LTI descritto da una E.D. i-u può essere determinata come somma dell'integrale generale $\tilde{y}(t)$ dell'omogenea associata e di un integrale particolare $\bar{y}(t)$. Nel caso di ingressi polinomiali o sinusoidali, è stato suggerito di cercare un integrale particolare nell'ambito dei segnali della stessa tipologia del segnale di ingresso. Tale approccio è particolarmente conveniente allorché si vuole calcolare la risposta a regime dei sistemi asintoticamente stabili. Per tali sistemi, infatti, si ha che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y}(t) = 0,$$

per cui, ricordando la definizione di risposta a regime, si ha:

$$y_r(t) = \bar{y}(t);$$

inoltre, tenendo presente che, per definizione, la risposta in transitorio è $y_t(t) = y(t) - y_r(t)$, risulta:

$$y_t(t) = \tilde{y}(t).$$

La risposta in transitorio, pertanto, ha la stessa espressione della risposta in evoluzione libera; le condizioni iniziali, ovviamente, dovranno rispettare il valore delle condizioni iniziali su $y_t(t)$; queste, a loro volta, sono date da:

$$y_{t0} = y_t(0) = y(0) - y_r(0)$$

$$\dot{y}_{t0} = \dot{y}_t(0) = \dot{y}(0) - \dot{y}_r(0)$$

Ne consegue che *la risposta in transitorio di un sistema del secondo ordine* risulta:

Risposta in transitorio di un sistema del secondo ordine

Posto:

$$\begin{aligned} y_{t0} &= y_t(0) = y(0) - y_r(0) \\ \dot{y}_{t0} &= \dot{y}_t(0) = \dot{y}(0) - \dot{y}_r(0) \end{aligned} \quad (3.71)$$

si ha:

Caso di radici λ_1, λ_2 reali e distinte

$$y_t(t) = \frac{\dot{y}_{t0} - \lambda_2 y_{t0}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\dot{y}_{t0} - \lambda_1 y_{t0}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \quad (3.72)$$

Caso di radici $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reali e coincidenti

$$y_t(t) = y_{t0} e^{\lambda t} + (\dot{y}_{t0} - \lambda y_{t0}) t e^{\lambda t} \quad (3.72)$$

Caso di radici $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ complesse e coniugate

$$y_t(t) = y_{t0} e^{\alpha t} \cos \omega t + \frac{(\dot{y}_{t0} - \alpha y_{t0})}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \quad (3.73)$$

con

$$A = \sqrt{y_{t0}^2 + \left(\frac{\dot{y}_{t0} - \alpha y_{t0}}{\omega} \right)^2}, \quad \beta = \arctg \frac{\omega y_{t0}}{\dot{y}_{t0} - \alpha y_{t0}}$$

Tabella 3.4 Risposta in transitorio di un sistema del secondo ordine

Ovviamente il calcolo delle condizioni iniziali della risposta in transitorio richiede la conoscenza della risposta a regime. Questa, per il caso di segnali polinomiali (gradino e rampa), ha le seguenti espressioni molto semplici che possono essere controllate per verifica diretta sostituendone l'espressione nell'E.D.:

◆ ***Risposta a regime ad un gradino***

$$y_r(t) = G U_0, \quad G = \frac{b}{a_2}$$

La risposta a regime a un gradino è, quindi, un segnale costante di valore pari a quello del gradino in ingresso per la costante di guadagno G del sistema.

◆ ***Risposta a regime ad una rampa***

$$y_r(t) = G U_0 t + G_1 U_0, \quad G = \frac{b}{a_2}, \quad G_1 = -\frac{b a_1}{a_2^2} = -\frac{2\zeta G}{\omega_n}$$

La risposta a regime a una rampa di pendenza U_0 è ancora una rampa di pendenza $G U_0$ traslata di $G_1 U_0$.

Il caso della risposta a regime a segnali sinusoidali, di notevole importanza in molti problemi dell'ingegneria, viene trattato separatamente di seguito.

III.5 Risposta a regime a segnali sinusoidali con l'approccio fasoriale

Il fatto che in sistemi LTI asintoticamente stabili la risposta a regime a segnali sinusoidali è, a sua volta, un segnale sinusoidale avente la stessa pulsazione del segnale di ingresso, consente di ricavarne l'espressione con una tecnica particolarmente semplice detta *metodo fasoriale*.

Cominciamo con il definire cosa si intende per fasore associato ad un segnale sinusoidale di pulsazione ω . Consideriamo a tal fine un segnale sinusoidale $f(t)$ di ampiezza F e fase β :

$$f(t) = F \sin(\omega t + \beta)$$

E' detto fasore del segnale sinusoidale $f(t)$ il numero complesso \bar{F} avente come modulo l'ampiezza F e come argomento la fase β , ossia:

$$\bar{F} = Fe^{j\beta} = F \cos \beta + jF \sin \beta = F_c + jF_s$$

Poiché la derivata di un segnale sinusoidale è ancora un segnale sinusoidale, vediamo che relazione esiste tra i fasori dei due segnali. Con riferimento al segnale $f(t)$ precedentemente introdotto, si ha che:

$$\dot{f}(t) = \omega F \cos(\omega t + \beta) = \omega F \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Indicando allora con \bar{F}' il fasore del segnale sinusoidale $\dot{f}(t)$ si ha:

$$\bar{F}' = \omega F e^{j\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega F e^{j\beta} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega F e^{j\beta} = j\omega \bar{F}$$

Generalizzando tale risultato possiamo concludere che:

detto \bar{F} il fasore di un segnale sinusoidale $f(t)$, allora il fasore di $\dot{f}(t)$ sarà $j\omega \bar{F}$, il fasore di $\ddot{f}(t)$ sarà $(j\omega)^2 \bar{F} = -\omega^2 \bar{F}$, e così via; allo stesso modo, il fasore di $\int f(t) dt$ sarà dato da $\frac{\bar{F}}{j\omega}$.

Vediamo ora come si può calcolare in maniera semplice la risposta a regime di un sistema dinamico con l'approccio fasoriale. Detto:

$$u(t) = U \sin(\omega t + \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{U} = U e^{j\alpha}$$

il segnale sinusoidale di ingresso e il corrispondente fasore, sappiamo che anche l'uscita è un segnale sinusoidale della stessa pulsazione ω del segnale di ingresso. Sia:

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{Y} = Y e^{j\gamma}$$

il segnale sinusoidale di uscita e il corrispondente fasore. Il problema si riduce al calcolo di \bar{Y} . Trattiamo separatamente il caso dei sistemi del primo e secondo ordine.

Sistemi del primo ordine

Consideriamo la rappresentazione ingegneristica i-u (3.20), ossia:

$$\tau \dot{y} + y = Gu$$

La risposta in regime sinusoidale dovrà soddisfare la relazione fasoriale:

$$j\omega\tau\bar{Y} + \bar{Y} = G\bar{U}$$

da cui:

$$\bar{Y} = \frac{G}{1 + j\omega\tau} \bar{U}$$

Ricordando che il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli, e l'argomento è pari alla somma degli argomenti, si ha che *l'ampiezza Y della sinusoide in uscita è pari all'ampiezza U di quella in ingresso moltiplicata per il guadagno frequenziale M(ω) del sistema* dato da:

$$M(\omega) = \frac{|G|}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

mentre lo sfasamento $\varphi = (\gamma - \alpha)$ dell'uscita rispetto all'ingresso è dato dalla *fase frequenziale φ(ω) del sistema*:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg(\omega\tau) & \text{se } G > 0 \\ \arctg(\omega\tau) & \text{se } G < 0 \end{cases}$$

In Fig.3.22 è riportato il diagramma normalizzato di $M(\omega)$.

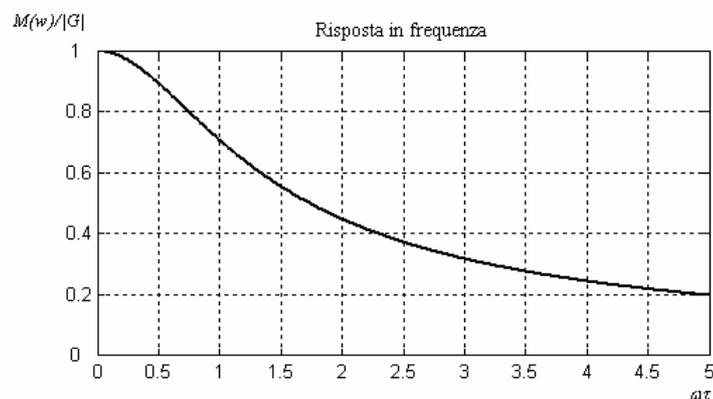


Figura 3.22 Diagramma normalizzato del guadagno $M(\omega)$ in un sistema del I ordine

Sistemi del secondo ordine

Consideriamo un sistema del secondo ordine descritto dall'equazione i-u:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu$$

o, equivalentemente, dall'equazione nella forma ingegneristica:

$$\frac{\ddot{y}}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{y} + y = Gu \quad \begin{cases} G = \frac{b}{a_2} \\ \omega_n = \sqrt{a_2} \\ \zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \end{cases}$$

La risposta in regime sinusoidale dovrà soddisfare la relazione fasoriale:

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \bar{Y} + \frac{2\zeta(j\omega)}{\omega_n} \bar{Y} + \bar{Y} = G\bar{U}$$

da cui:

$$\bar{Y} = \frac{G}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \bar{U}$$

Risulta pertanto che l'ampiezza Y della sinusoidale in uscita è pari all'ampiezza U di quella in ingresso moltiplicata per il *guadagno frequenziale* $M(\omega)$ del sistema dato da:

$$M(\omega) = \frac{|G|}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

mentre lo sfasamento $(\gamma - \alpha)$ dell'uscita rispetto all'ingresso è data dalla *fase frequenziale* $\varphi(\omega)$ del sistema:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} - \nu\pi, \quad \begin{cases} \nu = 0 & \text{se } G \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) > 0 \\ \nu = 1 & \text{se } G \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) < 0 \end{cases}$$

E' facile dimostrare che si ha anche:

$$\bar{Y} = \frac{b}{a_2 - \omega^2 + ja_1\omega} \bar{U}$$

e quindi:

$$M(\omega) = \frac{|b|}{\sqrt{(a_2 - \omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{a_1 \omega}{a_2 - \omega^2} - \nu \pi, \quad \begin{cases} \nu = 0 & \text{se } b(a_2 - \omega^2) > 0 \\ \nu = 1 & \text{se } b(a_2 - \omega^2) < 0 \end{cases}$$

In Fig.3.23 è riportato il diagramma normalizzato di $M(\omega)$ per diversi valori di ζ .

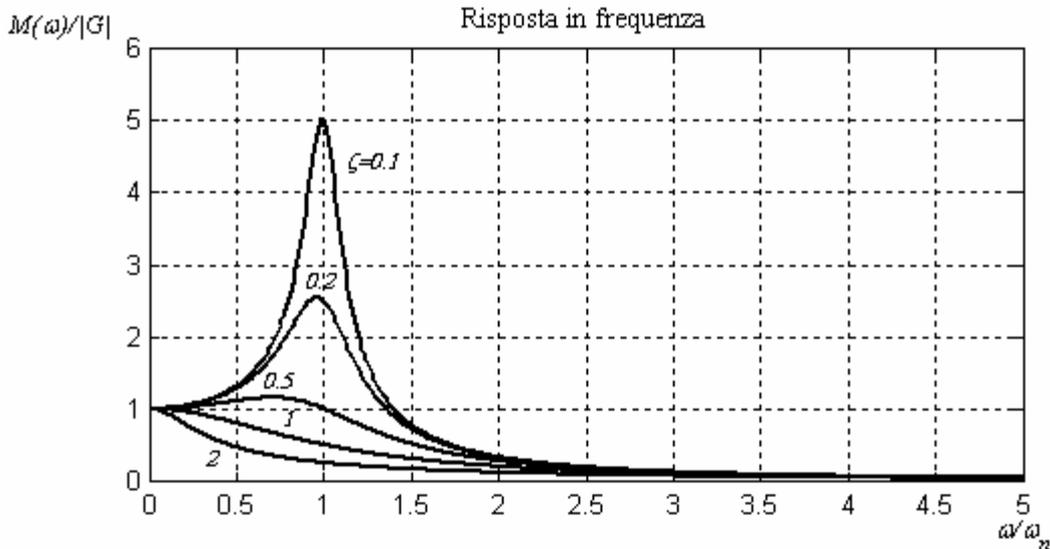


Figura 3.23 Diagramma normalizzato di $M(\omega)$ in un sistema del II ordine

Come si può notare, quando $\omega \cong \omega_n$ e $\zeta \ll 1$, l'ampiezza dell'uscita risulta essere molto elevata (∞ se $\zeta = 0$). Tale fenomeno prende il nome di *risonanza*.

Esempio 3.7. Si consideri il sistema descritto dall'equazione:

$$\frac{\ddot{y}}{(2\pi 500)^2} + \frac{0.2\dot{y}}{2\pi 500} + y = u$$

Sollecitando tale sistema mediante i segnali:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin(2\pi 100t) \\ u_2 &= \sin(2\pi 500t) \\ u_3 &= \sin(2\pi 1500t), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} M(2\pi 100) &= 1.041, & \varphi(2\pi 100) &= -2.386^\circ \\ M(2\pi 500) &= 5.000, & \varphi(2\pi 500) &= -90.00^\circ \\ M(2\pi 1500) &= 0.1246, & \varphi(2\pi 1500) &= -175.7^\circ, \end{aligned}$$

le rispettive risposte a regime risultano:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.041 \sin(2\pi 100t - 2.386^\circ) \\ y_2 &= 5.000 \sin(2\pi 500t - 90.00^\circ) \\ y_3 &= 0.1246 \sin(2\pi 1500t - 175.7^\circ) \end{aligned}$$

Si noti che, essendo:

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{1}{0.1 * 2\pi 500} = 3.18 \text{ msec}$$

dopo $3 \div 4.6\tau = 9.6 \div 13.8 \text{ msec}$ le risposte a regime calcolate coincidono praticamente con le risposte forzate.

Nella Fig. 3.24, per maggior concretezza, sono stati diagrammati i segnali d'ingresso e le rispettive risposte a regime. Da tali diagrammi, come da quello di Fig.3.23 per $\zeta = 0.1$, si deduce che il sistema è molto sensibile a sinusoidi d'ingresso con frequenze prossime a 500Hz. Tale *eccessiva sensibilità del sistema a determinate frequenze* a volte costituisce una proprietà indesiderata perché piccoli segnali d'ingresso possono produrre pericolose effetti sul sistema (si pensi a un edificio in zona sismica, a un'auto che viaggia su una strada dissestata, a una nave in mare mosso, ...).

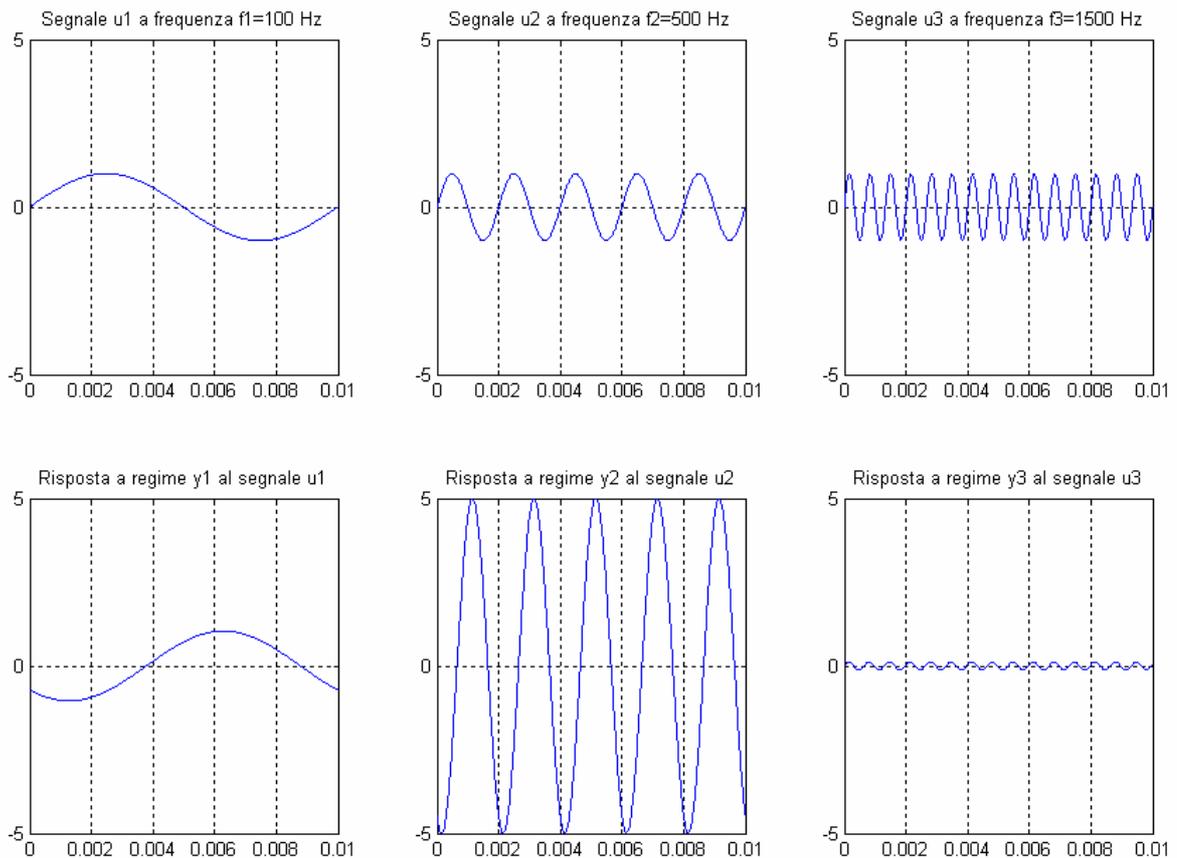


Figura 3.24 Risposte a regime per frequenze crescenti del segnale d'ingresso

Nella Fig. 3.25 sono stati invece diagrammati il segnale d'ingresso $u = u_1 + u_2 + u_3$ e la rispettiva risposta a regime $y = y_1 + y_2 + y_3$. Come si può notare, l'uscita, a meno di un fattore di amplificazione, è praticamente uguale alla sola componente d'ingresso u_2 ; in altre parole il sistema estrae dal segnale d'ingresso praticamente solo la componente u_2 . Tale *proprietà filtrante* del sistema a volte viene espressamente richiesta se si vuole rivelare un segnale "utile" miscelato ad altri segnali (si pensi ad un telefonino, a un frequenzimetro, ...).

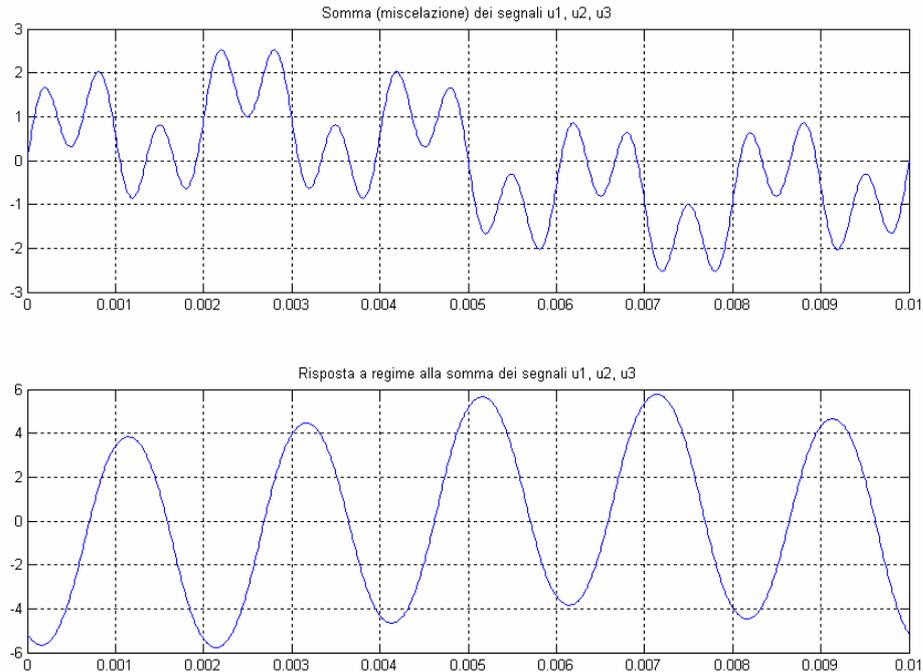


Figura 3.25 Risposta a regime a un segnale multifrequenziale

III.6 Parametri caratteristici della risposta a gradino

La risposta a gradino di un sistema LTI asintoticamente stabile può essere caratterizzata attraverso alcuni parametri detti *parametri globali*. Per definirli facciamo riferimento all'andamento tipico della risposta a gradino di un sistema asintoticamente stabile, normalizzata rispetto al valore asintotico GU_0 , mostrato in Fig.3.26.

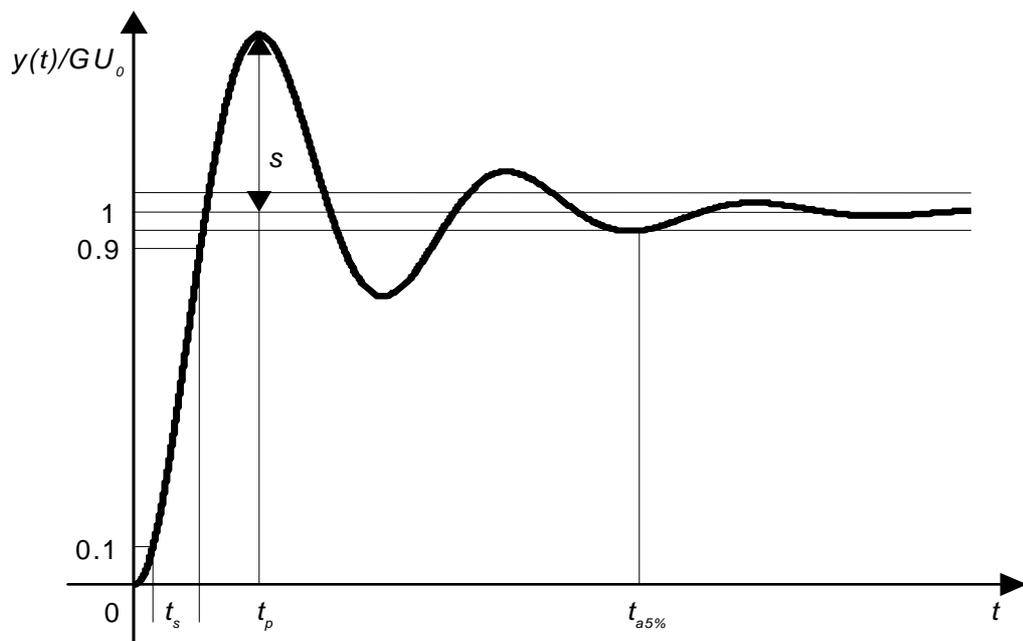


Figura 3.26 Risposta al gradino normalizzata

Essi sono:

- ◆ **tempo di salita o di risposta** t_s definito come il tempo necessario perché la risposta si porti, per la prima volta, dal 10% al 90% del valore finale;
- ◆ **tempo di assestamento al 5%** $t_{a5\%}$ definito come il tempo necessario perché la risposta raggiunga definitivamente il valore finale a meno del 5%;
- ◆ **istante di picco** t_p definito come l'istante in cui la risposta normalizzata raggiunge il suo valore massimo;
- ◆ **sovraelongazione** s definita come la differenza tra il valore della risposta normalizzata all'istante di picco e il valore finale.

III.6.1 Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del primo ordine

Nel caso di sistemi del primo ordine la risposta al gradino normalizzata è data da (vedi eq.(3.19)):

$$\frac{y(t)}{GU_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.72)$$

I valori dei parametri globali si ricavano analiticamente in maniera abbastanza semplice.

Risulta:

- $t_s = 2.2\tau$
- $t_a = 3\tau$
- $t_p = \infty$
- $s = 0$

III.6.2 Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del secondo ordine

Nel caso di sistemi del secondo ordine, come visto nel paragrafo III.4.3, la risposta al gradino normalizzata assume tre forme diverse: una per $\zeta < 1$ (si ricordi che qui consideriamo solo il caso di $\zeta > 0$), una per $\zeta = 1$, una per $\zeta > 1$. Tali espressioni sono tuttavia abbastanza complesse, e il calcolo dei parametri globali della risposta al gradino non è agevole. Per questo motivo diamo di seguito, senza dimostrazione, espressioni, talvolta approssimate, solo di due di tali parametri, tempo di assestamento e sovraelongazione, per i casi di maggiore interesse.

Tempo di assestamento. E possibile dimostrare che:

$$t_a \cong \begin{cases} \frac{3}{\zeta\omega_n} & \zeta \ll 1 \\ \frac{4.75}{\omega_n} & \zeta = 1 \\ 3\tau_{\max} & \zeta \gg 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

Tali espressioni razionalizzano e confermano quanto già detto nel paragrafo III.4.3.

Sovraelongazione. La sovraelongazione è esprimibile in maniera esatta in funzione del coefficiente di smorzamento ζ . È possibile dimostrare che:

$$s = \begin{cases} e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} & \zeta < 1 \\ 0 & \zeta \geq 1 \end{cases} \quad (3.74)$$

La Fig.3.27 riporta l'andamento della sovraelongazione in funzione di ζ .

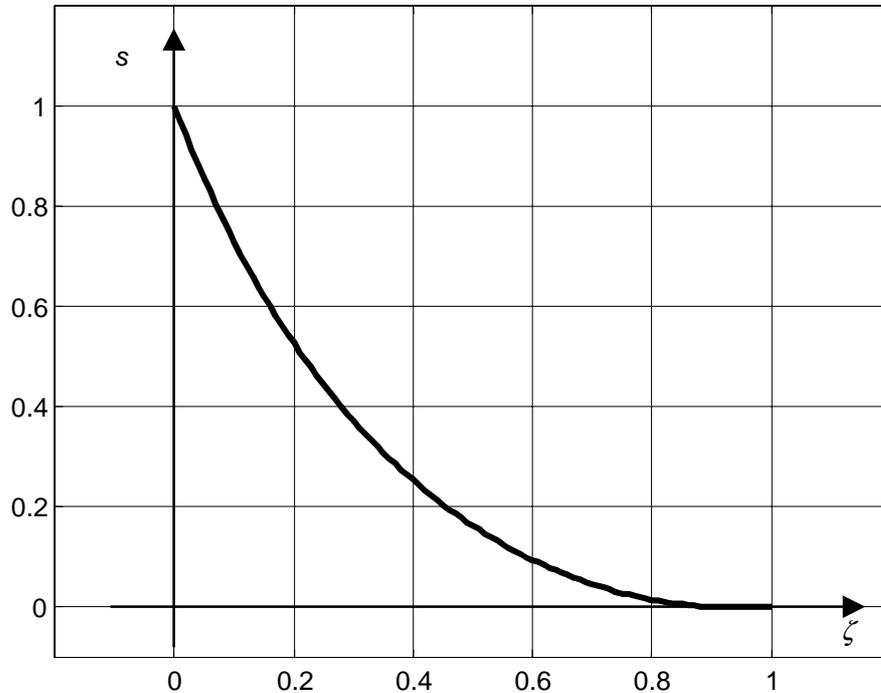


Figura 3.27 La sovraelongazione in funzione del coefficiente di smorzamento in un sistema del II ordine

Come si può notare, la sovraelongazione in sistemi del secondo ordine è pari al 100% per $\zeta = 0$, minore del 30% per $\zeta > 0.35$, e trascurabile per $\zeta > 0.8$.