

<b>V.</b>	<b>MODELLISTICA DI SISTEMI A FLUIDO .....</b>	<b>V-1</b>
V.1	CONCETTI ELEMENTARI DI FLUIDODINAMICA .....	V-1
V.1.1	<i>Proprietà caratteristiche dei fluidi .....</i>	<i>V-1</i>
V.1.2	<i>Principali leggi per lo studio del moto di un fluido.....</i>	<i>V-3</i>
V.1.3	<i>Applicazioni del teorema di Bernoulli .....</i>	<i>V-5</i>
V.2	SISTEMI LIQUIDO-LIVELLO CON LIQUIDO IDEALE .....	V-7
V.2.1	<i>Componenti elementari di sistemi idraulici con liquido ideale .....</i>	<i>V-8</i>
V.2.2	<i>Modelli i-s-u di sistemi liquido-livello con liquido ideale .....</i>	<i>V-12</i>
V.3	SISTEMI LIQUIDO-LIVELLO CON LIQUIDO REALE .....	V-14
V.3.1	<i>Moto di un liquido reale in una condotta: regime laminare e regime turbolento .....</i>	<i>V-14</i>
V.3.2	<i>Moto di un liquido reale attraverso una strozzatura .....</i>	<i>V-16</i>
V.3.3	<i>Componenti elementari di sistemi idraulici con liquido reale.....</i>	<i>V-16</i>
V.3.4	<i>Modelli i-s-u di sistemi liquido-livello con liquido reale.....</i>	<i>V-19</i>
V.4	MODELLISTICA DI SISTEMI PNEUMATICI .....	V-22
V.4.1	<i>Flusso di un gas attraverso un orifizio: regime subsonico e regime sonico.....</i>	<i>V-22</i>
V.4.2	<i>Flusso di un gas attraverso un recipiente in pressione .....</i>	<i>V-24</i>
V.4.3	<i>Componenti elementari di sistemi pneumatici .....</i>	<i>V-25</i>
V.4.4	<i>Un sistema pneumatico di interesse.....</i>	<i>V-27</i>

## V. MODELLISTICA DI SISTEMI A FLUIDO

I fluidi sono particolari stati della materia caratterizzati dal fatto di non avere resistenza a sollecitazioni di taglio. Essi si possono presentare in due forme: liquido e gassoso. Di conseguenza i sistemi a fluido si distinguono in sistemi idraulici e sistemi pneumatici.

I sistemi idraulici e pneumatici sono di notevole interesse nei sistemi di controllo, sia perché, in taluni casi, rappresentano proprio l'impianto da controllare (controllo di livello di serbatoi collegati mediante tubazioni, controllo della portata di un liquido idraulico attraverso un orifizio, controllo della portata in un gasdotto, etc.), sia, più frequentemente, perché sono utilizzati come organi di attuazione (valvole di controllo, servosistemi idraulici o pneumatici, motori idraulici) o come organi di regolazione (regolatori standard di tipo idraulico o pneumatico).

Nel seguito vengono preliminarmente richiamati alcuni concetti elementari di fluidodinamica che serviranno per la costruzione dei modelli di tali sistemi.

In Tabella 5.I sono riportate le unità di misura utilizzate nel Sistema Internazionale per la misura di alcune grandezze ricorrenti nello studio dei sistemi a fluido, e le loro relazioni con altre unità di misura utilizzate in altri sistemi.

	Sistema Internazionale (SI)	Altre unità di misura
Portata volumetrica	m <sup>3</sup> /s	
Portata di massa	kg/s	
Pressione	N/m <sup>2</sup> = Pa (Pascal)	1kgf/cm <sup>2</sup> = atm (atmosfera) ≅ 10N/cm <sup>2</sup> = 10 <sup>5</sup> Pa

**Tabella 5.I** Unità di misura

Come si vede, in Tabella 5.I sono riportate le unità di misura sia della portata volumetrica che della portata massica. Questo perché entrambe sono utilizzate nello studio dei fluidi. In particolare la portata di massa è più utilizzata nello studio dei gas, la portata volumetrica nello studio dei liquidi.

### V.1 Concetti elementari di fluidodinamica

#### V.1.1 Proprietà caratteristiche dei fluidi

**Coefficiente di compressibilità.** E' definito come l'opposto della variazione relativa di volume che subisce un volumetto di fluido in conseguenza di una variazione unitaria di pressione. Con riferimento ad un volume  $V$  di fluido, tale parametro, generalmente indicato con  $\beta$ , è dato pertanto da:

$$\beta = -\frac{\partial V/V}{\partial p}$$

Il coefficiente di compressibilità di un fluido è sempre positivo. Nel caso di liquidi il suo valore è molto piccolo e, inoltre, esibisce piccole variazioni con la temperatura. Ad esempio, per l'acqua a 0°C, vale  $4.62 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$ , mentre a 60°C vale  $3.95 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$ . Nel caso di gas il suo valore dipende fortemente dalla temperatura.

**Coefficiente di dilatazione termica.** E' definito come la variazione relativa di volume che subisce un volumetto di fluido in conseguenza di una variazione unitaria di temperatura esterna. Esso, generalmente indicato con  $\alpha$ , è dato pertanto da:

$$\alpha = \frac{\partial V/V}{\partial T}$$

Tale grandezza, nel caso dell'acqua a 0°C, vale  $5.32 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-1}$ . Nel caso di gas il valore di tale coefficiente dipende fortemente dalla pressione.

**Viscosità.** Per definire la viscosità di un fluido facciamo riferimento ad un liquido che avanza, a bassa velocità, in un canale a pelo libero e avente un'altezza molto minore della larghezza. A differenza di quanto avviene nei solidi, il moto di un liquido avviene per scorrimento di strati uno sull'altro: lo strato di liquido a contatto con il fondo è fermo, mentre gli strati superiori hanno una velocità sempre maggiore via via che ci si sposta dal fondo verso il pelo libero. Nello scorrere l'uno sull'altro, gli strati liquidi meno veloci della corrente oppongono, per attrito, una resistenza al trascinamento sugli strati più veloci che scorrono su di essi: la resistenza per unità di superficie opposta all'avanzamento di uno strato sull'altro è proporzionale alla variazione di velocità per unità di spostamento normale (gradiente verticale della velocità), secondo un coefficiente di proporzionalità  $\mu$  detto *coefficiente di viscosità* del liquido in questione. Pertanto, se prendiamo in considerazione due strati a contatto che si trovano ad una quota  $h_0$  dal fondo, e indichiamo con  $S$  la superficie di contatto, la forza di attrito che lo strato inferiore esercita su quello superiore che scorre su di esso è data da:

$$F_a = \mu S \left. \frac{dv(h)}{dh} \right|_{h=h_0}$$

dove  $v(h)$  indica la velocità del fluido alla quota  $h$  dal fondo. I fluidi che ubbidiscono a questa legge sono detti *fluidi Newtoniani*.

L'esperienza mostra che la viscosità di un fluido diminuisce sensibilmente al crescere della temperatura, mentre aumenta al crescere della pressione.

**Calore specifico.** E' definito come la quantità di calore che bisogna fornire ad un volumetto di fluido di massa unitaria per incrementare di una unità la sua temperatura. Nel caso dell'acqua a 15°C, esso è, per definizione di caloria, pari a  $1(\text{cal/g}^\circ\text{C})$ . Nel caso di gas dipende dal tipo di trasformazione ipotizzata (a volume costante, a pressione costante, etc).

**Conducibilità termica.** E' definito come il flusso di calore o potenza termica (quantità di calore nell'unità di tempo) che si trasmette per conduzione attraverso uno strato di fluido di sezione unitaria e spessore unitario in presenza di un gradiente unitario di temperatura.

Nel caso del ghiaccio vale  $4 \cdot 10^{-3} (\text{cal/s cm } ^\circ\text{C})$ . L'acqua a 25°C è un po' meno conduttrice.

**Proprietà chimiche dei liquidi.** Da un punto di vista chimico, un fluido idraulico viene caratterizzato attraverso alcune proprietà quali: la stabilità termica (invarianza di comportamento al variare della temperatura), stabilità alla ossidazione, schiumosità, infiammabilità.

**Fluido ideale.** Per definizione, un fluido è detto ideale se è incompressibile e privo di viscosità.

### ***V.1.2 Principali leggi per lo studio del moto di un fluido***

La descrizione del moto di un fluido può essere effettuata in due modi:

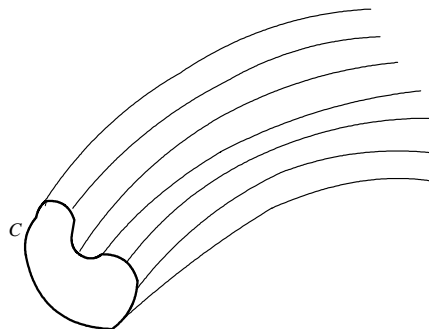
- i) *approccio Lagrangiano*, consistente nel determinare il moto dei vari volumetti di fluido come se fossero dei punti materiali, soggetti sia a forze esterne (es. forza peso) sia a forze interne di pressione dovute al contatto con gli altri volumetti di fluido, e determinandone traiettoria e legge oraria con le equazioni della dinamica;
- ii) *approccio Euleriano*, consistente nel determinare, in ogni punto  $P$  dello spazio occupato dal fluido in movimento, e in ogni istante  $t$  le grandezze caratteristiche del fluido, ossia la pressione  $p(P,t)$ , la densità di massa  $\rho(P,t)$ , e il vettore velocità  $v(P,t)$ . L'insieme dei valori assunti, in un istante  $t$ , dalla pressione, densità e velocità del fluido nei vari punti prendono i nomi di campo di pressione, campo di densità e campo di velocità del fluido all'istante  $t$ .

Nel seguito, senza ricavare le equazioni del moto, daremo solo alcune leggi fondamentali che sono sufficienti per studiare i sistemi idraulici e pneumatici di nostro interesse. In esse assumeremo che il moto del fluido sia descritto mediante le grandezze caratteristiche (pressione, densità e portata) in ogni punto. Inoltre assumeremo che tali grandezze, in un generico punto  $P$ , non varino al variare del tempo (*regime stazionario*).

Con riferimento ad un fluido in regime stazionario, si definisce *linea di flusso* una linea che, in ogni suo punto, ha per tangente il vettore velocità del fluido. Poiché in un fluido in regime stazionario il campo di velocità è costante, le linee di flusso non cambiano al variare del tempo; ciascuna di essa individua la traiettoria seguita da un generico volumetto di fluido passante per uno dei punti della linea di flusso.

E' ovvio che, in regime stazionario, per un punto passa una e una sola linea di flusso. Pertanto le linee di flusso non si intersecano.

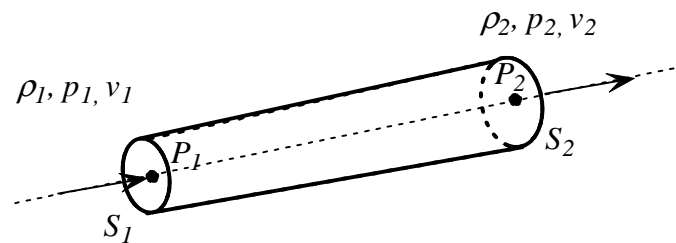
Se consideriamo una curva chiusa  $C$  nel fluido, la totalità delle linee di flusso passanti per i suoi punti formano una specie di tubo (vedi figura 5.1) detto *tubo di flusso*.



**Fig. 5.1**

Le principali leggi per lo studio del moto di un fluido sono: i) l'equazione di continuità (o legge di conservazione della massa); ii) l'equazione di Bernoulli.

**Equazione di continuità.** Nella regione di spazio interessata dal moto di un fluido consideriamo un punto  $P_1$ , la linea di flusso passante per  $P_1$ , e un punto  $P_2$  sulla stessa linea di flusso (vedi Figura 5.2). Consideriamo poi una “piccola” superficie piana, di area  $S_1$  passante per  $P_1$  e ortogonale al vettore velocità in tale punto, e il tubo di flusso da essa generato. In tutti i punti di tale superficie si può assumere che le grandezze caratteristiche del fluido siano costanti; indichiamo con  $\rho_1, p_1, v_1$  i rispettivi valori. Consideriamo infine la superficie piana passante per  $P_2$ , ortogonale al vettore velocità, e sia  $S_2$  l'area della porzione di tale superficie delimitata dal tubo di flusso. Siano  $\rho_2, p_2, v_2$  i parametri caratteristici del fluido in tale sezione.



**Fig. 5.2**

Con riferimento a tale tubo di flusso si può stabilire il seguente:

*Principio di conservazione della massa o equazione di continuità.* Se all'interno del tubo di flusso non vi sono né “sorgenti”, né “pozzi” di massa, allora la portata di massa entrante è uguale a quella uscente, ossia

$$q_{m1} = q_{m2}$$

e quindi:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2 \quad (5.1)$$

Le ipotesi alla base dell'equazione di continuità sono senz'altro verificate nel caso di fluidi incompressibili, come possono essere generalmente considerati i liquidi (a meno che non siano soggetti a variazioni di pressione estremamente elevate). Per tali fluidi, inoltre, la densità si può ritenere costante nelle varie sezioni, per cui la (5.1) si può scrivere come:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad q_{v1} = q_{v2} \quad (5.2)$$

dove  $q_{v1}, q_{v2}$  sono le portate volumetriche in ingresso e uscita.

**Legge di Bernoulli.** Consideriamo un volumetto  $dV$  di un fluido omogeneo, ideale (incompressibile e privo di viscosità), in regime stazionario, in movimento lungo una linea di flusso. In un generico istante  $t$  la sua energia è somma di tre termini:

- energia cinetica =  $\frac{1}{2} \rho dV v^2$ ,
- energia potenziale gravitazionale =  $\rho dV g z$ ,

- energia di pressione  $p dV$ .

Il teorema di Bernoulli stabilisce che, in un qualsiasi punto lungo la linea di flusso l'energia totale del volumetto di fluido è costante, ossia, facendo riferimento ad un volumetto  $dV$  unitario:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = \text{cost} \quad (5.3)$$

La (5.3) è detta *equazione di Bernoulli*.

Il teorema di Bernoulli si può scrivere anche nella seguente forma:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost} \quad (5.4)$$

I tre termini di tale somma sono suscettibili della seguente interpretazione:

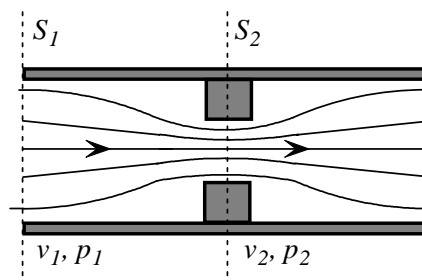
- il termine  $z$  rappresenta la quota a cui si trova il volumetto di fluido, ed è detto *altezza geometrica*;
- il termine  $\frac{p}{\rho g}$  rappresenta l'altezza che deve avere una colonna di fluido per esercitare alla sua base una pressione pari a  $p$ , ed è detto *altezza piezometrica*;
- il termine  $\frac{v^2}{2g}$  rappresenta l'altezza a cui giungerebbe un grave lanciato verso l'alto con velocità  $v$ , ed è detto *altezza di arresto*.

La somma delle tre altezze è detta *altezza totale* o *carico effettivo*. Il teorema di Bernoulli, pertanto, stabilisce che: “lungo una linea di flusso di un fluido ideale (incompressibile e privo di viscosità) in regime stazionario, la somma dell'altezza geometrica, di quella piezometrica e di quella di arresto è costante”.

### V.1.3 Applicazioni del teorema di Bernoulli

Cominciamo con l'osservare che poichè il teorema di Bernoulli si riferisce ad un fluido ideale, esso è applicabile prevalentemente ai liquidi a bassa viscosità.

**Variazione di pressione in una strozzatura.** Consideriamo una condotta orizzontale contenente una strozzatura (vedi Figura 5.3) e in cui fluisce un liquido perfetto con portata  $q_v$ . Si vuole determinare il salto di pressione nella strozzatura.



**Fig. 5.3**

Per il teorema di Bernoulli e tenendo conto dell'equazione di continuità risulta:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_1 + \frac{\rho q_v^2}{2 S_1^2} = p_2 + \frac{\rho q_v^2}{2 S_2^2}$$

da cui:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) q_v^2$$

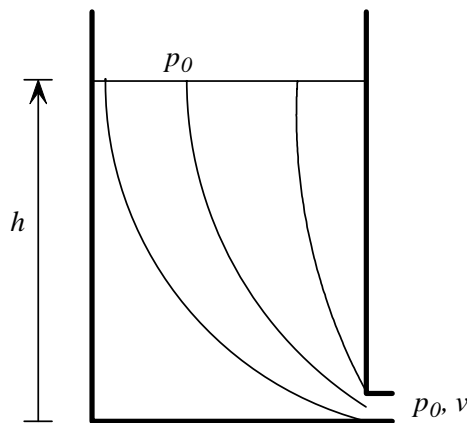
Nel caso in cui  $S_2 \ll S_1$ , risulta:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2 S_2^2} q_v^2 \quad (5.5)$$

Pertanto il salto di pressione dipende dal quadrato della portata volumetrica.

E' importante notare che, a valle della strozzatura, se la sezione della condotta ritorna al valore che aveva a monte della strozzatura, anche la pressione ritorna allo stesso valore. Ciò è in accordo col fatto che, non essendovi perdite di energia, allorchè a valle della strozzatura la velocità del fluido, e quindi l'energia cinetica, torna al valore che aveva a monte, anche l'energia di pressione torna allo stesso valore. Ciò, ovviamente, non è più vero nel caso di fluidi reali nei quali vi sono perdite per attrito interno dovuto alla viscosità.

**Portata attraverso un orifizio posto sul fondo di un serbatoio (teorema di Torricelli).** Consideriamo un serbatoio sul cui fondo è presente un orifizio di sezione  $S$ , e in cui è presente un liquido ideale (vedi Figura 5.4). Detta  $h$  l'altezza del liquido nel serbatoio in un certo istante  $t$ , si vuole determinare la portata  $q_v$  del liquido attraverso l'orifizio.



**Fig. 5.4**

Supponendo trascurabile la velocità di spostamento del liquido sul pelo libero, per il teorema di Bernoulli risulta:

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \frac{\rho}{2} v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad q_v = (S \sqrt{2g}) \sqrt{h} \quad (5.6)$$

Pertanto la portata attraverso l'orifizio dipende dalla radice quadrata dell'altezza del liquido nel serbatoio. Essa non dipende né da  $\rho$  né da  $p_0$ .

**Pressione in un fluido in quiete: legge di Stevino.** Consideriamo un fluido ideale in condizioni di quiete, come ad esempio un liquido in un serbatoio. Il teorema di Bernoulli si scrive:

$$\rho g z + p = \text{cost} \quad (5.7)$$

Se pertanto consideriamo un recipiente contenente un fluido ideale in condizioni di riposo, detta  $p_0$  la pressione atmosferica in superficie e  $p_z$  la pressione ad una generica quota  $-z$ , risulta:

$$p_0 = -\rho g z + p_z \quad \Rightarrow \quad p_z = p_0 + \rho g z \quad (5.8)$$

La (5.8) è nota come “legge di Stevino”. Da un punto di vista interpretativo, è interessante notare che il termine di pressione  $\rho g z$  rappresenta il peso di una colonna di fluido di altezza  $z$  e superficie unitaria.

E' importante osservare che, essendo il fluido in quiete, l'ipotesi di incompressibilità e di assenza di viscosità non gioca alcun ruolo, per cui la (5.8) può ritenersi valida anche per fluidi (sia liquidi che gassosi) reali.

**Osservazione.** Per le considerazioni che faremo in seguito nello studio dei sistemi idraulici è importante osservare che la (5.6), la quale fornisce la portata attraverso un orifizio sul fondo di un serbatoio contenente un liquido di altezza  $h$ , può anche essere ottenuta utilizzando la legge di Stevino e la (5.5) mediante il seguente ragionamento.

Nell'ipotesi che la sezione dell'orifizio sia piccola, si può assumere che la perturbazione allo stato di quiete del liquido nel serbatoio dovuta alla portata attraverso l'orifizio sia trascurabile. Pertanto la pressione sul fondo, e quindi immediatamente a monte dell'orifizio, la si può ottenere dalla (5.8) e vale  $p_1 = p_0 + \rho g h$ . Utilizzando poi la (5.6) che fornisce la relazione tra portata e differenza di pressione in un orifizio, e tenendo presente che la pressione all'uscita dell'orifizio è  $p_0$ , si ottiene:

$$q_v = S \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}} = S \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho}} = (S \sqrt{2g}) \sqrt{h}$$

Questo modo di procedere lo adotteremo nella scrittura del modello dei sistemi di serbatoi.

## V.2 Sistemi liquido-livello con liquido ideale

I sistemi liquido-livello sono sistemi costituiti da serbatoi collegati attraverso tratti di condotte; in tali tratti di collegamento possono anche essere presenti delle strozzature o delle valvole.

In questo paragrafo prenderemo in considerazione sistemi liquido-livello nei quali circola liquido ideale, ossia incompressibile e privo di viscosità. Mentre la prima ipotesi è verificata con buona approssimazione nel caso di liquidi, la seconda, invece, non è quasi mai verificata. Tuttavia lo studio di tali sistemi ha interesse per prendere confidenza con il problema di scrittura del modello, facendo riferimento alle leggi fisiche per essi discusse nel paragrafo precedente. A tal proposito precisiamo che, nei sistemi che prenderemo in considerazione, assumeremo che le masse di fluido che si muovono nei tratti di condotta siano trascurabili rispetto a quelle presenti nei serbatoi, e le loro velocità, anche se variabili, si mantengano comunque basse. Questo ci consente di assumere che il fluido nei



serbatoi sia praticamente in quiete, mentre, ovviamente, nei tratti di condotta il regime di moto non è stazionario, bensì le masse di fluido sono soggette ad accelerazioni.

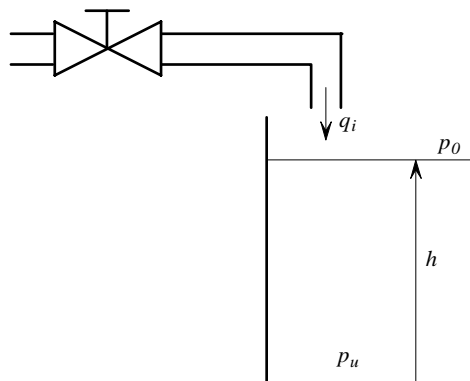
Per lo studio dei sistemi liquido-livello ci si può avvalere di alcune analogie con i sistemi elettrici. In tali analogie si fa corrispondere la portata volumetrica alla corrente, e la pressione al potenziale elettrico; di conseguenza la differenza di pressione tra due sezioni di un sistema idraulico corrisponde alla tensione tra due punti di un sistema elettrico.

Per quanto detto, i componenti elementari da prendere in considerazione in tale studio sono di tre tipi: tratto di condotta, strozzatura (o valvola), serbatoio. Per quanto riguarda le alimentazioni esterne, queste sono in genere di due tipi: alimentatori ideali di pressione, in grado di imporre il valore di pressione in una sezione del sistema; alimentatori ideali di portata, in grado di imporre la portata in un tratto di condotta.

### ***V.2.1 Componenti elementari di sistemi idraulici con liquido ideale***

In questo paragrafo vengono fornite le relazioni costitutive di ciascun componente elementare. Tra essi, tuttavia, non considereremo la strozzatura in quanto di scarso interesse nel caso di liquidi ideali.

**Serbatoio.** Consideriamo un serbatoio del tipo mostrato in Figura 5.5.



**Fig. 5.5**

Detti:

- $V$  il volume di liquido in esso contenuto,
- $S$  la sezione trasversale del serbatoio,
- $h$  l'altezza del liquido,
- $q_i$  la portata entrante,
- $p_0$  la pressione atmosferica in superficie,
- $p_u$  la pressione sul fondo

le leggi fisiche che ne descrivono il comportamento sono:

- Legge di conservazione della massa:

$$\frac{dV}{dt} = q_i \quad \Rightarrow \quad S \frac{dh}{dt} = q_i \quad (5.9a)$$

➤ Legge di Stevino (vedi (5.8)):

$$p_u = p_0 + \rho g h \quad (5.9b)$$

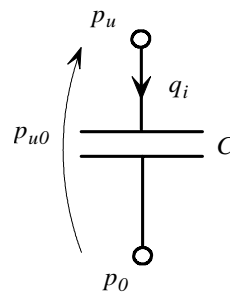
Analogo elettrico del serbatoio. Indicando con  $p_{u0}$  la differenza di pressione tra fondo e pelo libero, dalle (5.9) si ottiene:

$$\left( \frac{S}{\rho g} \right) \frac{dp_{u0}}{dt} = q_i \quad (5.10)$$

Confrontando questa con la relazione costitutiva di un condensatore, si conclude che un serbatoio può essere visto come un condensatore idraulico di capacità:

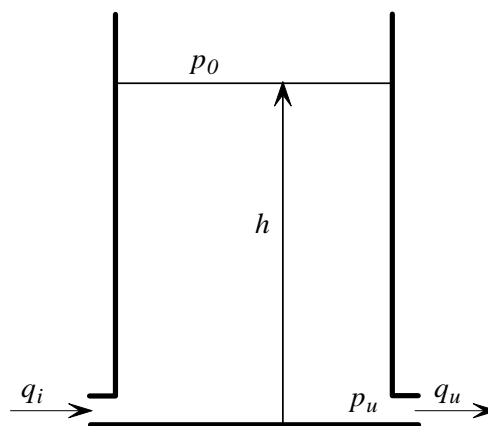
$$C = \frac{S}{\rho g} \quad (5.11)$$

In Figura 5.6 è schematizzata tale analogia elettrica.



**Fig. 5.6**

Si consideri ora il caso in cui è presente anche un orifizio di uscita, come mostrato in Figura 5.7.



**Fig. 5.7**

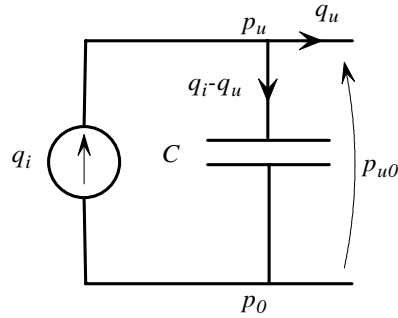
La legge di conservazione della massa si scrive:

$$\frac{dV}{dt} = q_i - q_u \quad \Rightarrow \quad S \frac{dh}{dt} = q_i - q_u$$

per cui, con operazioni analoghe alle precedenti si ha:

$$\left( \frac{S}{\rho g} \right) \frac{dp_{u0}}{dt} = q_i - q_u$$

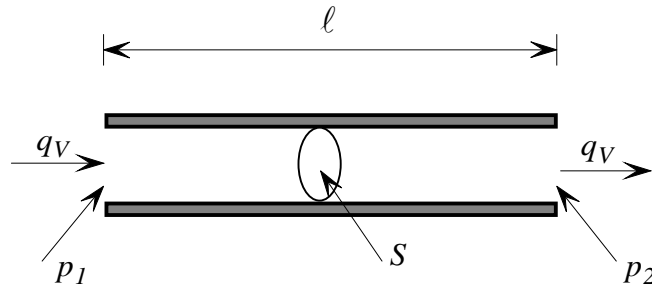
In questo caso il circuito elettrico analogo è mostrato in Figura 5.7.



**Fig. 5.7**

Per ottenere una rappresentazione i-s-u di un serbatoio, pertanto, conviene assumere come variabile di stato la differenza di pressione tra fondo e pelo libero del serbatoio. Tale variabile è legata all'altezza  $h$  del liquido nel serbatoio (solitamente usata come variabile di stato) dalla legge di Stevino (5.9b).

**Tratto di condotta.** Come detto nella parte introduttiva del paragrafo, qui assumiamo che nei tratti di condotta il regime di moto non è stazionario, bensì le masse di fluido sono soggette ad accelerazioni. Di conseguenza, nel caso di liquido ideale (assenza di attrito interno), l'unica legge necessaria per descrivere il comportamento pressione-portata in un tratto di condotta è la legge di Newton che fornisce il legame tra la forza derivante dalla differenza di pressione agli estremi e l'accelerazione della massa di fluido nella condotta. Consideriamo il tratto di condotta mostrato in Figura 5.8.



**Fig. 5.8**

La massa di fluido da accelerare è  $S\ell\rho$ , mentre la forza agente su essa vale  $S(p_1 - p_2)$ . Detta  $v$  la velocità del fluido, la legge di Newton si scrive:

$$S\ell\rho \frac{dv}{dt} = S(p_1 - p_2) \quad (5.12)$$

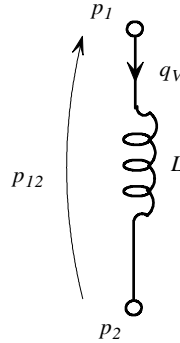
Poiché  $q_v = Sv$ , indicando con  $p_{12} = p_1 - p_2$ , si ha:

$$p_{12} = \left( \frac{\rho\ell}{S} \right) \frac{dq_v}{dt} \quad (5.13)$$

Confrontando questa con la relazione costitutiva di un induttore elettrico, si conclude che un tratto di condotta in cui scorre un liquido ideale può essere visto come un induttore idraulico di induttanza:

$$L = \frac{\rho \ell}{S} \quad (5.14)$$

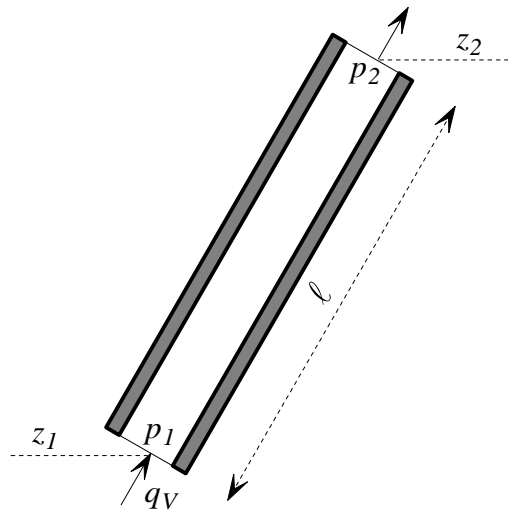
In Figura 5.9 è schematizzata tale analogia elettrica.



**Fig. 5.9**

Per ottenere una rappresentazione i-s-u di un tratto di condotta, pertanto, conviene assumere come variabile di stato la portata volumetrica di liquido che fluisce in essa.

Consideriamo ora il caso in cui il tratto di condotta non è in posizione orizzontale (vedi Figura 5.10).

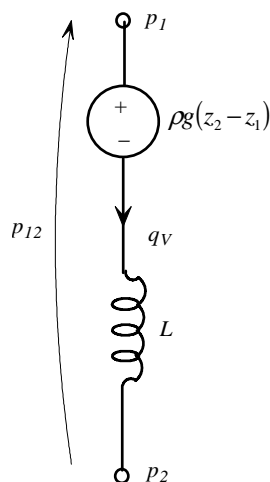


**Fig. 5.10**

Mediante una diretta estensione del teorema di Bernoulli, ai termini di pressione piezometrica  $p_1$  e  $p_2$  vanno aggiunti i termini di pressione geometrica, per cui la relazione costitutiva completa diventa:

$$(p_1 - p_2) = \left( \frac{\rho \ell}{S} \right) \frac{dq_V}{dt} + \rho g (z_2 - z_1) \quad (5.15)$$

In questo caso il circuito elettrico analogo è mostrato in Figura 5.11.



**Fig. 5.11**

### ***V.2.2 Modelli i-s-u di sistemi liquido-livello con liquido ideale***

Per la scrittura di un modello i-s-u di un sistema liquido-livello si procede in maniera del tutto analoga a quella seguita per i sistemi elettrici.

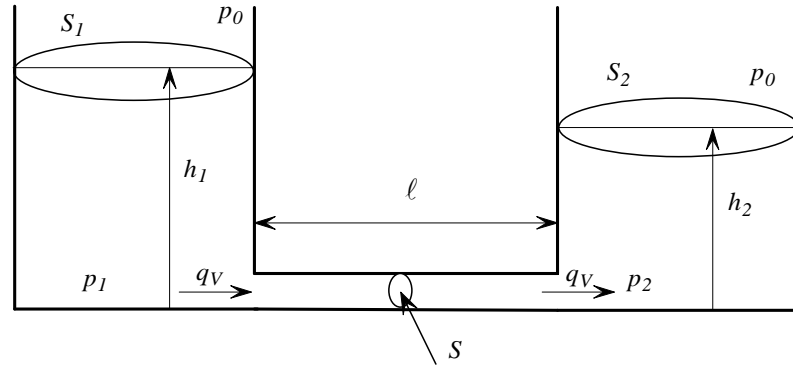
La prima operazione consiste, come al solito, nella scelta delle variabili di stato. Queste, sulla base di quanto precedentemente detto, nella quasi totalità dei casi possono essere assunte coincidenti con le differenze di pressione tra fondo e pelo libero dei serbatoi, e con le portate nei tratti di condotta, fatta eccezione per quei componenti (serbatoi o condotte) in cui tali grandezze siano imposte da qualche generatore di pressione o di portata. A differenza di quanto visto nel caso elettrico, tuttavia, per i sistemi in considerazione non è infrequente il caso in cui l'induttanza idraulica di un tratto di condotta è trascurabile, e questo o perché la condotta è di piccola lunghezza oppure di grossa sezione. Sia  $n$  il numero di tali variabili di stato.

Successivamente si passa alla scrittura delle relazioni fisiche tra tali grandezze. Queste sono fornite da leggi analoghe ai principi di Kirchhoff per i sistemi elettrici. Per la scrittura di tali leggi, spesso è necessario introdurre, oltre alle variabili di stato, altre variabili di comodo, come ad esempio differenze di pressioni ai capi di tratti di condotte. Poiché ogni aggiunta di una variabile implica la scrittura di un'equazione in più, conviene cercare di ridurre il numero di tali variabili aggiuntive cercando di esprimerle direttamente in termini delle variabili di stato sfruttando sia le relazioni costitutive relative ai vari componenti sia le ben note proprietà relative ai collegamenti di serbatoi e tratti di condotte, come ad esempio "la portata in uscita di un serbatoio è uguale a quella che circola nell'unica condotta di uscita", oppure "la differenza tra le pressioni agli estremi di un tratto di condotta che collega due serbatoi è ricavabile dalle differenze di pressione associate ai serbatoi". Se indichiamo con  $z$  il numero di variabili aggiuntive, dovremo scrivere  $n+z$  equazioni indipendenti.

Spesso, per semplificare la scrittura del modello, conviene ricavare il circuito elettrico analogo del sistema liquido-livello in studio, e successivamente applicare a tale analogo elettrico i principi di Kirchhoff.

L'esempio che segue è utile per chiarire i concetti suesposti.

**Esempio 5.1** Nell'ipotesi di liquido ideale, scrivere un modello i-s-u del sistema liquido-livello mostrato in Figura 5.12a che consenta di studiare l'andamento dell'altezza di liquido nel serbatoio 2.



**Fig. 5.12a**

La condizione di connessione tra i serbatoi impone che la portata  $q_v$  uscente dal serbatoio 1 è uguale a quella che circola nella condotta, ed è uguale a quella entrante nel secondo serbatoio (collegamento in serie).

Le relazioni costitutive per ciascun componente si scrivono allora:

- Relazione pressione-portata per il primo serbatoio:  $\left(\frac{S_1}{\rho g}\right) \frac{dp_{10}}{dt} = C_1 \frac{dp_{10}}{dt} = -q_v$
- Relazione pressione-portata per la condotta:  $\left(\frac{\rho \ell}{S}\right) \frac{dq_v}{dt} = L \frac{dq_v}{dt} = p_{12}$
- Relazione pressione-portata per il secondo serbatoio:  $\left(\frac{S_2}{\rho g}\right) \frac{dp_{20}}{dt} = C_2 \frac{dp_{20}}{dt} = q_v$

In tale sistema si possono scegliere come variabili di stato le differenze di pressione tra fondo e pelo libero in ciascun serbatoio e la portata volumetrica nella condotta, ossia:

$$x_1(t) = p_{10}(t); \quad x_2(t) = p_{20}(t); \quad x_3(t) = q_v(t)$$

Come si vede, tuttavia, nelle equazioni scritte figura la variabile addizionale  $p_{12}$ . Per eliminarla possiamo servirci della seguente relazione:

- Relazione tra le pressioni:  $p_{12} = p_1 - p_2 = p_{10} - p_{20}$

Infine abbiamo bisogno di una relazione che fornisca la variabile di uscita, ossia l'altezza del liquido nel secondo serbatoio. Questa è data dalla seguente:

- Legge di Stevino:  $p_{20} = \rho g h_2$

Eliminando la variabile  $p_{12}$  mediante la relazione tra le pressioni, con semplici manipolazioni si ottiene:

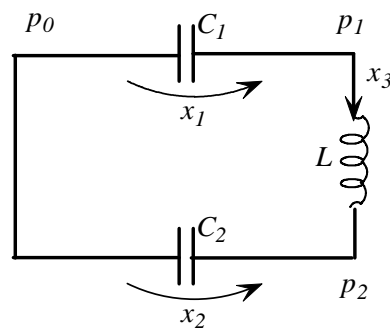
$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{C_1} x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{C_2} x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{L} x_1(t) - \frac{1}{L} x_2(t) \\ y(t) &= \frac{1}{\rho g} x_2(t) \end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} x$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho g} & 0 \end{pmatrix} x$$

Come si è visto nell'esempio, mentre la scrittura delle relazioni costitutive di ciascun componente è semplice, la scrittura delle altre relazioni non è altrettanto diretta. Per ovviare a tale inconveniente conviene costruirsi il circuito elettrico analogo del sistema liquido livello in studio. Così facendo la metodologia di costruzione del modello è abbastanza automatica, potendosi utilizzare i principi di Kirchhoff. Facilmente si vede che, per il caso in studio, l'analogo elettrico è il circuito mostrato in Figura 5.12b.



**Fig.5.12b**

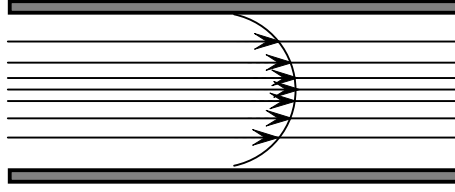
Facilmente si può controllare che la scrittura del modello di tale circuito conduce alle stesse relazioni precedentemente scritte.

### V.3 Sistemi liquido-livello con liquido reale

Nei sistemi liquido-livello usualmente considerati nelle applicazioni, il liquido utilizzato non può più essere considerato ideale essenzialmente perché, avendo una certa viscosità, non è più possibile trascurare l'attrito interno. Per lo studio di tali sistemi, quindi, la diretta utilizzazione del teorema di Bernoulli porterebbe a risultati sbagliati. In questo corso, senza pretesa di completezza di trattazione del problema, ci limiteremo a descrivere i principali fenomeni derivanti dalla viscosità, ed enunceremo soltanto i risultati più significativi.

#### V.3.1 Moto di un liquido reale in una condotta: regime laminare e regime turbolento

**Regime laminare.** Consideriamo una condotta cilindrica, di piccola sezione, in cui scorre, a bassa velocità, un liquido reale dotato di una certa viscosità. In questo caso le traiettorie percorse dai singoli volumetti di fluido saranno costituite da linee regolari, ben definite, le quali ben si accordano con il moto di tutta la corrente (vedi Figura 5.13). Questo regime di moto è detto *regime laminare*.



**Fig. 5.13** Moto laminare

In tale regime di moto, per effetto della viscosità, lo strato cilindrico di fluido a diretto contatto con la parete sarà praticamente fermo, mentre la velocità aumenterà via via che si procede verso il centro della condotta. Inoltre è chiaro che, per bilanciare le perdite per attrito interno del fluido, sarà necessario compiere sul fluido un certo lavoro per tenerlo in movimento. Tale lavoro sarà effettuato dalle forze di pressione, per cui, procedendo lungo la condotta nella direzione del flusso, si avrà una caduta di pressione. Detto  $p_1 - p_2$  il salto di pressione ai capi della condotta, è possibile dimostrare che la portata volumetrica  $q_v$  di liquido nella condotta è legata a tale differenza di pressione dalla relazione:

$$q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu\ell} (p_1 - p_2) \quad (5.16)$$

dove  $R$  è il raggio della condotta,  $\ell$  la lunghezza,  $\mu$  la viscosità del liquido. La (5.16) è nota con il nome di “legge di Hagen-Poiseuille”. Come si vede, quindi, in regime laminare la portata è proporzionale alla differenza di pressione ai capi della condotta.

**Regime turbolento.** Se, nel tratto di condotta precedentemente considerato, la velocità media  $v_m$  del fluido supera un certo valore critico  $v_{cm}$ , il moto cambia bruscamente e le traiettorie assumono un andamento tortuoso, irregolare, nel quale al moto di trasporto delle particelle nella direzione della corrente si sovrappone un moto vorticoso; tale regime di moto è detto *regime turbolento*. La velocità critica dipende dalla densità e dalla viscosità del fluido. Se però si introduce il seguente parametro adimensionale

$$\Re = \frac{v_m \rho R}{\mu} \quad (5.17)$$

detto *numero di Reynolds*, sperimentalmente si vede che il passaggio al moto turbolento si ha in corrispondenza di un valore critico  $\Re_c = 1200$  di  $\Re$  indipendente dal fluido. Per  $\Re > \Re_c$ , quindi, il moto diventa turbolento. In tale regime di moto è possibile dimostrare che vale la seguente relazione:

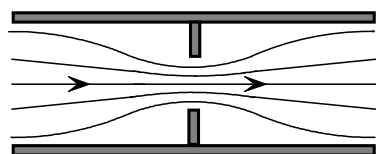
$$q_v = \left( \pi R^2 \sqrt{\frac{2\Re_c}{k\rho\ell}} \right) \sqrt{p_1 - p_2} \quad (5.18)$$

dove  $k$  è chiamato coefficiente di resistenza ed ha un valore costante per le tubazioni usualmente impiegate. Come si vede, quindi, in regime turbolento la portata è proporzionale alla radice quadrata della differenza di pressione ai capi della condotta.

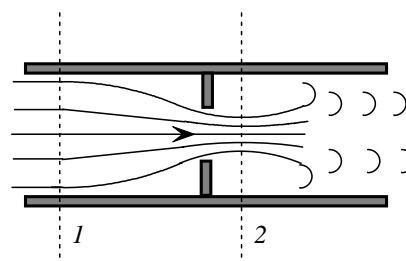


### V.3.2 Moto di un liquido reale attraverso una strozzatura

Consideriamo una condotta cilindrica, di piccola sezione, contenente al suo interno una strozzatura che può essere a sezione costante o variabile (valvola di regolazione) attraverso cui fluisce un liquido reale, dotato di una certa viscosità. In analogia con quanto detto per il moto di un liquido in una condotta, anche in questo caso il moto del liquido potrà essere di tipo laminare o turbolento (vedi Figura 5.14).



**Fig. 5.14a** Moto laminare



**Fig. 5.14b** Moto turbolento

E' possibile dimostrare che, detta  $S_0$  la sezione della strozzatura e dette  $p_1$  e  $p_2$  le pressioni nelle sezioni immediatamente a monte e immediatamente a valle della strozzatura, la relazione tra la portata volumetrica  $q_v$  e la differenza di pressione è data da:

➤ Regime laminare  $q_v = C_{Dl} S_0 (p_1 - p_2)$  (5.19a)

➤ Regime turbolento  $q_v = C_{Dr} S_0 \sqrt{p_1 - p_2}$  (5.19b)

I parametri  $C_{Dl}, C_{Dr}$  sono detti “coefficienti di scarico”. Nel caso in cui  $S_0$  è costante nel tempo, si può scrivere:

➤ Regime laminare  $q_v = k_l (p_1 - p_2)$  (5.20a)

➤ Regime turbolento  $q_v = k_t \sqrt{p_1 - p_2}$  (5.20b)

### V.3.3 Componenti elementari di sistemi idraulici con liquido reale

I componenti elementari sono di tre tipi: tratto di condotta, strozzatura (o valvola), serbatoio. Nel seguito vengono fornite le relazioni costitutive di ciascun componente elementare.

**Tratto di condotta.** Per i tratti di condotta viene fatta l'ipotesi che il moto del liquido sia sempre di tipo laminare. Questo è giustificato dal fatto che, alle normali pressioni di esercizio, la velocità media del liquido nei vari tratti di condotta non va mai al di sopra del valore critico.

Cominciamo con il considerare un tratto di condotta orizzontale e in cui sia trascurabile il comportamento induttivo. In tal caso la relazione costitutiva tra salto di pressione e portata è fornita dalla (5.16) che può essere riscritta nella forma:

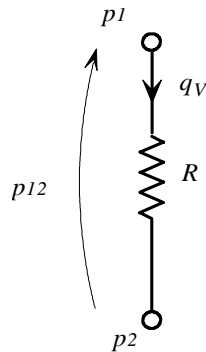
$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu\ell}{\pi R^4} q_v \quad (5.21)$$

Nella (5.21) il coefficiente moltiplicativo di  $q_v$  è interpretabile come una resistenza idraulica della condotta. Nella pratica, allorché i tratti di condotta hanno piccola lunghezza e/o la viscosità è bassa, tale resistenza è trascurabile e la caduta di pressione nel tratto di condotta è nulla; questo equivale a considerare il tratto di condotta alla stregua di un conduttore ideale privo di resistenza.

Confrontando la (5.21) con la relazione costitutiva di un resistore elettrico, si conclude che un tratto di condotta in cui scorre un liquido reale può essere visto come un resistore idraulico di resistenza:

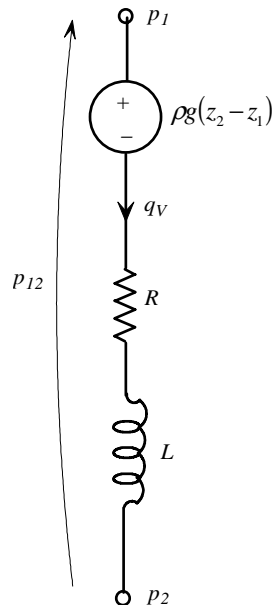
$$R = \frac{8\mu\ell}{\pi R^4} \quad (5.22)$$

In Figura 5.15 è schematizzata tale analogia elettrica.



**Fig. 5.15**

La generalizzazione al caso di tratti di condotta non orizzontali e in cui non sia trascurabile il comportamento induttivo si ottiene con considerazioni analoghe a quelle svolte nel paragrafo precedente. E' possibile allora mostrare che l'equivalente elettrico generale di un tratto di condotta è del tipo mostrato in Figura 5.16.



**Fig. 5.16**

Ovviamente, di volta in volta, bisognerà vedere se dei vari componenti alcuni possono essere trascurati.

**Strozzatura.** Per una strozzatura valgono i risultati forniti nel paragrafo precedente che sono di seguito riassunti:

$$\text{➤ Regime laminare} \quad q_v = k_l (p_1 - p_2) \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{k_l} q_v \quad (5.23a)$$

$$\text{➤ Regime turbolento} \quad q_v = k_t \sqrt{p_1 - p_2} \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{k_t^2} q_v^2 \quad (5.23b)$$

Si ricordi che i parametri  $k_l$  e  $k_t$  dipendono linearmente dalla sezione della strozzatura.

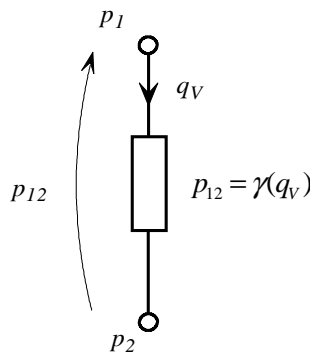
La condizione di regime laminare o turbolento va riconosciuta in base alle grandezze note. Nel caso in cui è nota la portata  $q_v$ , dalla conoscenza della sezione della strozzatura si ricava la velocità media, e poi, in base alla (5.17), il numero di Reynolds; se esso è maggiore di 1200 si è in regime turbolento. Nel caso in cui è nota la differenza di pressione, si fa preliminarmente l'ipotesi di moto laminare e, in base alla (5.16), si calcola la portata; con questa si procede poi come nel caso precedente.

Confrontando le (5.23) con la relazione costitutiva di un resistore elettrico, si conclude che una strozzatura in cui scorre un liquido reale può essere vista come un resistore idraulico lineare nel caso di moto laminare, nonlineare nel caso di moto turbolento. Posto allora nel caso generale:

$$p_{12} = \gamma(q_v) \quad (5.24)$$

dove  $\gamma(\cdot)$  rappresenta la funzione di  $q_v$  fornita dalle (5.23) che esprime la differenza di pressione ai capi della strozzatura, la schematizzazione elettrica della strozzatura è data in Figura 5.17. Si noti inoltre che la funzione istantanea  $\gamma(\cdot)$  è una funzione invertibile, per cui si può scrivere:

$$q_v = \gamma^{-1}(p_{12}) \quad (5.25)$$



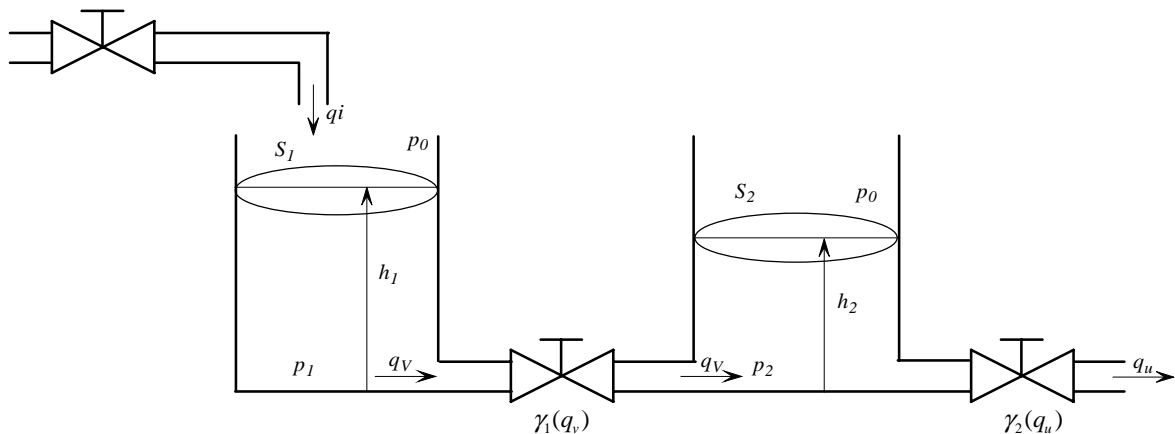
**Fig. 5.17**

**Serbatoio.** Per il serbatoio valgono le stesse considerazioni fatte nel paragrafo precedente.

### V.3.4 Modelli i-s-u di sistemi liquido-livello con liquido reale

Per la scrittura del modello i-s-u di tali sistemi valgono le stesse considerazioni fatte per sistemi con liquido ideale. Passiamo, pertanto, direttamente a degli esempi.

**Esempio 5.2** Si consideri il sistema liquido-livello mostrato in Figura 5.18a. Facendo l'ipotesi di liquido reale, e supponendo trascurabile sia la resistenza che l'induttanza idraulica dei tratti di condotta, determinare un modello i-s-u che consenta di studiare l'andamento della portata in uscita.



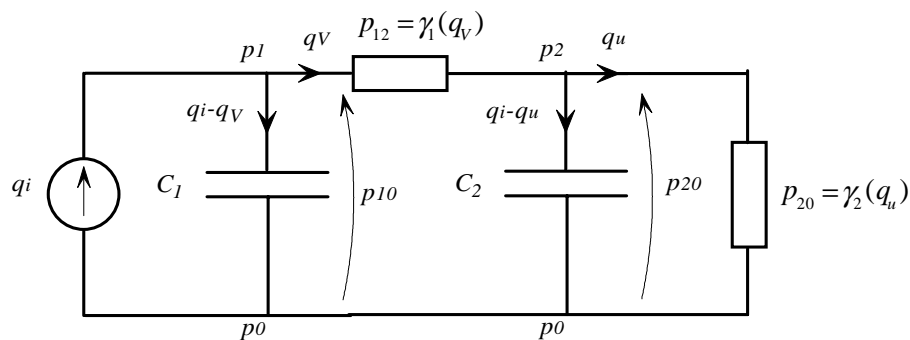
**Fig. 5.18a**

Per quanto visto nell'esempio 5.1, per la determinazione del modello i-s-u conviene preventivamente disegnare il circuito elettrico analogo del sistema liquido-livello in studio.

Posto:

- $C_1 = \frac{S_1}{\rho g}$
- $C_2 = \frac{S_2}{\rho g}$

Il circuito elettrico equivalente è mostrato in Figura 5.18b.



**Fig.5.18b**

Come si vede, in tale circuito, oltre alle variabili di stato  $p_{10}$  e  $p_{20}$  sono state introdotte le variabili di comodo  $q_v$ ,  $p_{12}$ , necessarie per la scrittura dei principi di Kirchhoff, e  $q_u$  che è l'uscita da studiare. Le equazioni del sistema elettrico sono:

- $C_1 \frac{dp_{10}}{dt} = q_i - q_v$
- $p_{12} = p_1 - p_2 = p_{10} - p_{20}$
- $C_2 \frac{dp_{20}}{dt} = q_v - q_u$
- $q_v = \gamma_1^{-1}(p_{12})$
- $q_u = \gamma_2^{-1}(p_{20})$

Posto:

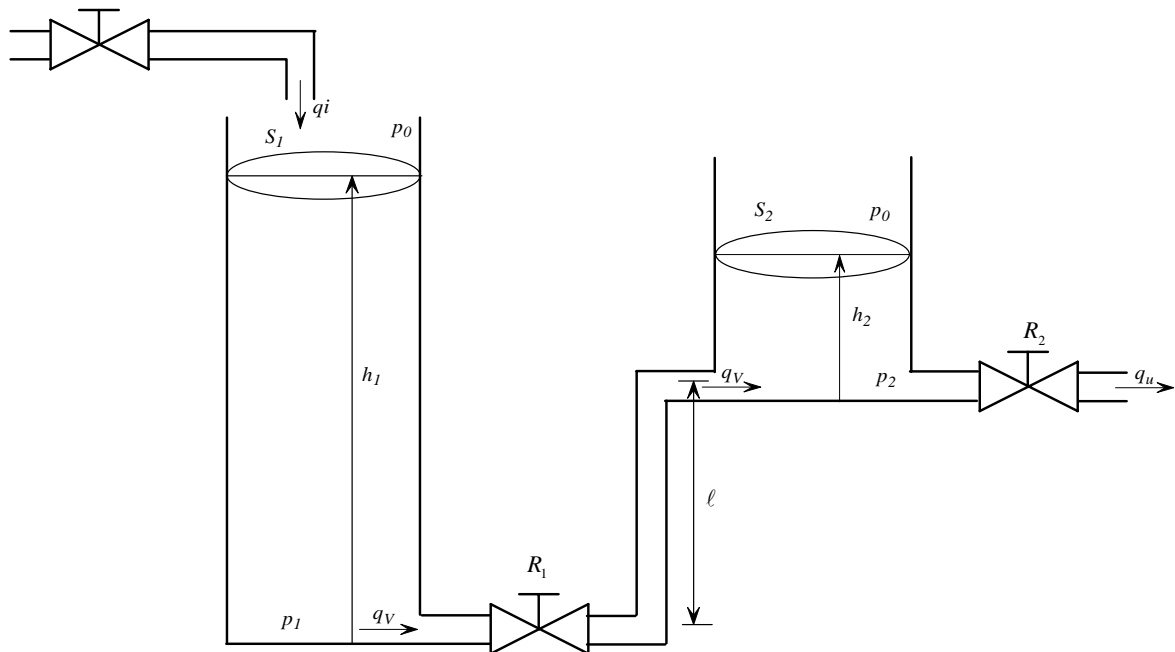
$$x_1(t) = p_{10}(t); \quad x_2(t) = p_{20}(t); \quad u(t) = q_i(t)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{C_1} \gamma_1^{-1}(x_1(t) - x_2(t)) + \frac{1}{C_1} u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{C_2} \gamma_1^{-1}(x_1(t) - x_2(t)) + \frac{1}{C_2} \gamma_2^{-1}(x_2(t)) \\ y(t) &= \gamma_2^{-1}(x_2(t)) \end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è stazionario. La linearità dipende dal regime di funzionamento (laminare o turbolento) delle valvole 1 e 2.

**Esempio 5.3** Si consideri il sistema liquido-livello mostrato in Figura 5.19a. Facendo l'ipotesi di liquido reale, di regime laminare di funzionamento delle valvole, e supponendo non trascurabile la resistenza e l'induttanza idraulica del tratto verticale di condotta, determinare un modello i-s-u che consenta di studiare l'andamento della portata in uscita.



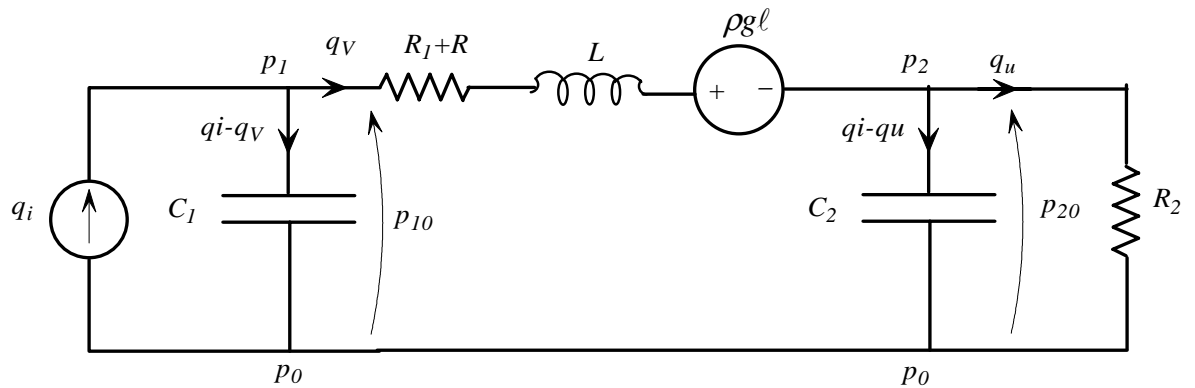
**Fig. 5.19a**

Disegniamo il circuito elettrico analogo del sistema liquido-livello in studio.

Posto:

- $C_1 = \frac{S_1}{\rho g}$
- $C_2 = \frac{S_2}{\rho g}$
- $L = \frac{\rho}{\ell \pi R^2}$
- $R = \frac{8\mu\ell}{\pi R^4}$

il circuito elettrico equivalente è mostrato in Figura 5.19b.



**Fig.5.19b**

Come si vede, in tale circuito, oltre alle variabili di stato  $p_{10}$ ,  $p_{20}$  e  $q_v$ , sono state introdotte le variabili di comodo  $p_{12}$ , necessaria per la scrittura dei principi di Kirchhoff, e  $q_u$  che è l'uscita da studiare. Le equazioni del sistema elettrico sono:

- $C_1 \frac{dp_{10}}{dt} = q_i - q_v$
- $p_{12} = p_1 - p_2 = p_{10} - p_{20}$
- $C_2 \frac{dp_{20}}{dt} = q_v - q_u$
- $p_{12} = (R_1 + R)q_v + L \frac{dq_v}{dt} + \rho g \ell$
- $q_u = \frac{p_{20}}{R_2}$

Posto:

$$x_1(t) = p_{10}(t); \quad x_2(t) = p_{20}(t); \quad x_3(t) = q_v(t); \quad u_1(t) = q_i(t); \quad u_2 = \rho g \ell$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{C_1} x_3(t) + \frac{1}{C_1} u_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{R_2 C_2} x_2(t) + \frac{1}{C_2} x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= \frac{1}{L} x_1(t) - \frac{1}{L} x_2(t) - \frac{R_1 + R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} u_2 \\
y(t) &= \frac{1}{R_2} x_2(t)
\end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R_1 + R}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} u \\
y &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \end{pmatrix} x
\end{aligned}$$

## V.4 Modellistica di sistemi pneumatici

I sistemi pneumatici sono, allo stato attuale, i sistemi più diffusi nel controllo di processi industriali, sia per la realizzazione di regolatori standard grazie alla estrema semplicità realizzativa di azioni proporzionali, integrali e derivate combinate, sia per la realizzazione di amplificatori, valvole di controllo e attuatori di media potenza con caratteristiche di semplicità costruttiva, basso costo, elevata affidabilità, e sicurezza nei riguardi di incendi o esplosioni.

Il funzionamento dei sistemi pneumatici è abbastanza simile a quello dei sistemi idraulici, fatta eccezione per le caratteristiche di compressibilità dei fluidi (aria o gas) con cui sono realizzati.

### V.4.1 Flusso di un gas attraverso un orifizio: regime subsonico e regime sonico

Si consideri il sistema mostrato in Figura 5.20 in cui un flusso di gas in una condotta passa attraverso un orifizio. Supponiamo che la condotta abbia pareti adiabatiche.

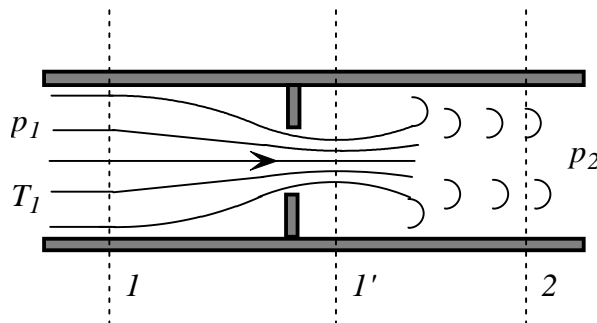


Fig. 5.20

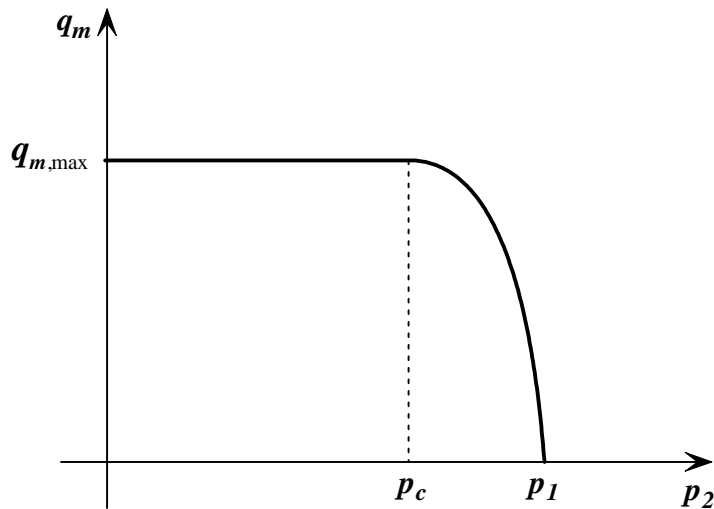
Come si può notare in tale figura, per la caratterizzazione del moto del gas attraverso l'orifizio, si fa riferimento a tre sezioni. La prima, sezione 1, è sufficientemente a monte dell'orifizio da poter ritenere che le traiettorie delle particelle non siano ancora state perturbate dalla presenza dell'orifizio; la seconda, sezione 1', immediatamente a valle dell'orifizio; la terza, sezione 2, sufficientemente a valle dell'orifizio da poter ritenere che il moto delle particelle non risenta più dell'effetto della strozzatura.

Per quanto riguarda la sezione 1', essa è caratterizzata dal fatto che in essa l'area del getto è minima; infatti le particelle di gas, dopo l'attraversamento dell'orifizio, a causa dell'elevata velocità, tendono a seguire un cammino curvo, per cui l'area del getto uscente dall'orifizio è più piccola dell'area dell'orifizio stesso. Nel punto in cui la sezione del getto è minima, si può ritenere che le particelle di fluido abbiano velocità uguali e parallele tra loro: a tale sezione si dà il nome di *sezione contratta* (sezione 1' della Figura 5.20) o *vena contratta*. L'area  $S_{1'}$  del getto in tale sezione è legata a quella  $S_0$  dell'orifizio da una relazione del tipo:

$$S_{1'} = cS_0$$

dove  $c$  è detto *coefficiente di contrazione*.

Per un fissato valore  $p_1$  della pressione nella sezione 1, l'andamento della portata massica  $q_m$  del gas in funzione della pressione  $p_2$  nella sezione 2 è mostrato in Figura 5.21.



**Fig. 5.21**

Il valore  $p_c$  della pressione  $p_2$  è detto *pressione critica*. Essa dipende da  $p_1$  secondo la relazione:

$$p_c = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} p_1 \quad (5.26)$$

dove  $k$  è una costante, detta *esponente adiabatico*, il cui valore dipende dal gas in questione. Nel caso dell'aria si ha  $k=1,40$ , e quindi:

$$p_{c(aria)} = 0.528 p_1 \quad (5.27)$$



Come si vede in Figura 5.21, per  $p_2 < p_c$  la portata di massa  $q_m$  è costante. Ciò si spiega col fatto che, allorché  $p_2 < p_c$ , il flusso di gas attraverso l'orifizio viaggia alla velocità del suono (*flusso sonico*): in tali condizioni è possibile verificare sperimentalmente che la pressione in corrispondenza della sezione contratta diventa indipendente da  $p_2$  e assume il valore  $p_c$ . La portata massica, allora, diventa anch'essa indipendente da  $p_2$ ; nel caso dell'aria vale:

$$q_m = q_{m,\max} = 0.0404 c S_0 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \quad (5.28)$$

dove:

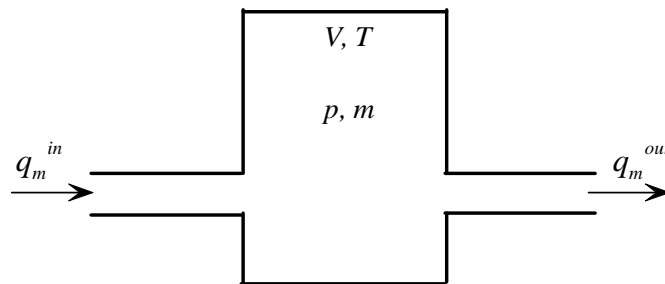
- $c$  coefficiente di scarico
- $S_0$  area dell'orifizio (in  $\text{m}^2$ )
- $p_1$  pressione del gas nella sezione 1 (in  $\text{N/m}^2$ )
- $T_1$  temperatura del gas nella sezione 1 (in  $^\circ\text{K}$ )

Nel caso in cui  $p_2 > p_c$ , il flusso è in regime subsonico e, sempre nel caso dell'aria, risulta:

$$q_m = 0.0822 c S_0 \frac{1}{\sqrt{T_1}} \sqrt{p_2 (p_1 - p_2)} \quad (\text{kg/s}) \quad (5.29)$$

#### V.4.2 Flusso di un gas attraverso un recipiente in pressione

Si consideri il recipiente in pressione mostrato in Figura 5.22 in cui entra una portata massica di gas  $q_m^{\text{in}}$  e esce una portata  $q_m^{\text{out}}$ .



**Fig. 5.22**

Detta  $m$  la massa di gas contenuta nel recipiente, l'equazione di continuità fornisce:

$$\frac{dm}{dt} = q_m^{\text{in}} - q_m^{\text{out}} \quad (5.30)$$

Per lo studio dei sistemi pneumatici è necessario ricavare la variazione della pressione  $p$  del gas all'interno del recipiente. Detto  $V$  il volume del recipiente e  $T$  la temperatura del gas, nell'ipotesi che il gas si comporti come un gas perfetto, in ogni istante vale la legge dei gas perfetti:

$$pV = nRT \quad (5.31)$$

dove  $n$  è il numero di moli del gas contenute nel recipiente e  $R$  è la “costante universale” dei gas perfetti. Tale relazione, se si indica con  $\mu$  la massa molecolare del gas in questione, si può scrivere:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (5.32)$$

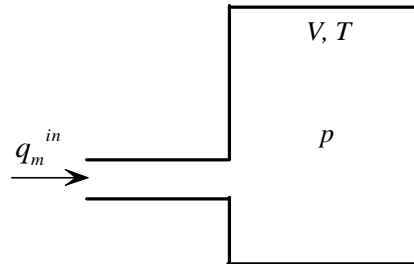
Da tale relazione si evince che la variazione di pressione all'interno del recipiente dipende dal tipo di trasformazione che subisce il gas durante il flusso. Nel caso, spesso ricorrente in pratica, di trasformazione isoterma ( $T=cost$ ), si ha:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{RT}{\mu V} \frac{dm}{dt} = \frac{RT}{\mu V} (q_m^{in} - q_m^{out}) \quad (5.33)$$

#### V.4.3 Componenti elementari di sistemi pneumatici

I sistemi pneumatici di interesse nei sistemi di controllo sono costituiti da recipienti in pressione connessi da tratti di condotte in pressione contenenti strozzature e/o valvole. Così come fatto per i sistemi idraulici liquido-livello, anche per lo studio dei sistemi pneumatici ci si avvale delle relazioni costitutive dei singoli componenti elementari. Nel fornire tali relazioni, si mettono anche in questo caso in evidenza analogie con i sistemi elettrici, così da ricondurre il problema della scrittura dell'intero modello a quello di un circuito elettrico. In tali analogie si fa corrispondere la portata massica alla corrente, e la pressione al potenziale elettrico.

**Recipienti in pressione.** Consideriamo un recipiente in pressione del tipo mostrato in Figura 5.23.



**Fig. 5.23**

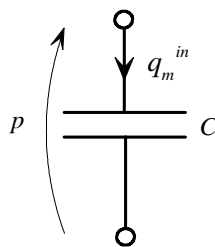
Supponendo che le trasformazioni del gas all'interno del recipiente siano isoterme, sulla base della (5.33) la relazione tra pressione e portata massica si scrive:

$$q_m^{in} = \frac{\mu V}{RT} \frac{dp}{dt} \quad (5.34)$$

Analogo elettrico del recipiente in pressione. Dalla (5.34) si evince che un recipiente in pressione può essere visto come un condensatore pneumatico di capacità:

$$C = \frac{\mu V}{RT} \quad (5.35)$$

In Figura 5.24 è schematizzata tale analogia elettrica.



**Fig. 5.24**

**Strozzatura.** Per una strozzatura valgono i risultati forniti nel paragrafo precedente. Essi sono di seguito riassunti nell'ipotesi che la temperatura  $T_1$  si mantenga costante durante il funzionamento,:

➤ Regime subsonico 
$$q_m = k_{ss} \sqrt{p_2 (p_1 - p_2)} \quad (5.35a)$$

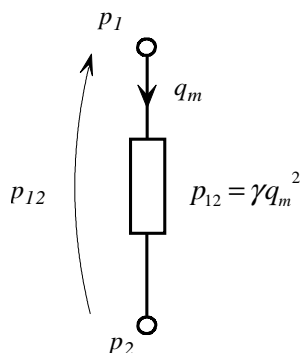
➤ Regime sonico 
$$q_m = k_s p_1 \quad (5.35b)$$

Si ricordi che i parametri  $k_{ss}$  e  $k_s$  dipendono linearmente dalla sezione della strozzatura e quindi variano nel caso di valvole di regolazione.

Le relazioni (5.35) sono fortemente nonlineari e non si prestano ad una semplice interpretazione in termini elettrici, salvo in alcuni casi particolari. Uno di questi è il caso di flusso subsonico, laddove si possa fare l'ipotesi addizionale che la pressione  $p_2$  vari di poco nell'intorno di un valore costante  $\bar{p}_2$ . In tal caso si può assumere:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{k_{ss}^2 \bar{p}_2} q_m^2 = \gamma q_m^2 \quad (5.36)$$

Confrontando la (5.36) con la relazione costitutiva di un resistore elettrico, si conclude che una strozzatura in cui fluisce un gas in regime subsonico può essere vista come un resistore pneumatico non-lineare la cui schematizzazione è mostrata in Figura 5.25.



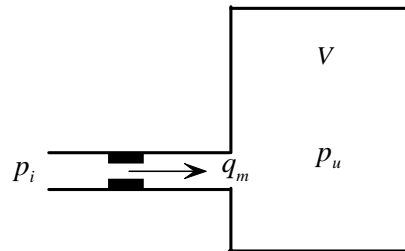
**Fig. 5.25**

**Tratto di condotta.** La modellistica di un tratto di condotta per un sistema pneumatico comprende, in linea di principio, relazioni analoghe a quelle dei sistemi idraulici. Così ad esempio, a causa della viscosità del gas, il tratto di condotta tenderebbe ad esibire una resistenza pneumatica; allo stesso modo, essendo la massa di gas contenuta nella condotta

dotata di una certa inerzia, nella modellizzazione sarebbe da portare in conto un elemento di tipo induttivo, A differenza dei sistemi idraulici, inoltre, poiché il tratto di condotta ha un proprio volume in cui si può avere accumulo di massa di gas, a differenza di quanto visto per i sistemi idraulici, per le condotte pneumatiche sarebbe da portare in conto anche un fenomeno capacitivo analogo a quello visto per i recipienti in pressione. Tuttavia, se, così come si ha nel caso dei sistemi pneumatici utilizzati nei sistemi di controllo, il tratto di condotta ha lunghezza trascurabile e la sua sezione è abbastanza piccola, tutti i suddetti fenomeni diventano irrilevanti e il tratto di condotta si comporta come l'analogo di un conduttore elettrico ideale (privo di resistenza, induttanza e capacità).

#### V.4.4 Un sistema pneumatico di interesse.

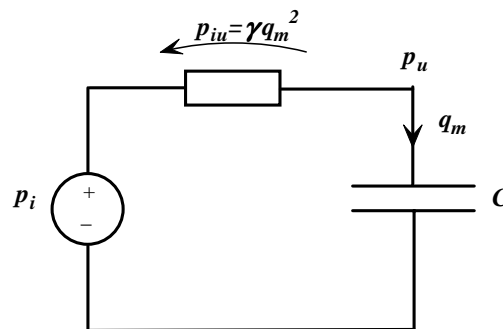
Si consideri il sistema pneumatico mostrato in Figura 5.26.



**Fig. 5.26**

Nell'ipotesi di trasformazioni isoterme del gas, e di piccole variazioni della pressione interna del recipiente, scrivere un modello i-s-u che consenta di studiare l'andamento della pressione interna del serbatoio al variare della pressione di alimentazione.

Sulla base di quanto detto nel paragrafo precedente, tale sistema è equivalente al sistema elettrico mostrato in Figura 5.27.



**Fig.5.27**

Pertanto le equazioni sono:

- $p_i - p_u = \gamma q_m^2$
- $q_m = C \frac{dp_u}{dt}$

Di conseguenza, posto  $u(t) = p_i(t)$ ,  $y(t) = p_u(t)$ ,  $x(t) = p_u(t)$ , risulta:

$$\dot{x} = \frac{1}{C\sqrt{\gamma}}\sqrt{u-x}$$

$$y = x$$