

1. Esercizi

Esercizio 1.

Si considerino le seguenti due trasformazioni T nel piano. Stabilire se si tratta di trasformazioni lineari oppure no.

- 1) T è la simmetria rispetto all'asse delle ascisse.
- 2) T porta il vettore di coordinate polari (r, θ) nel vettore di coordinate polari $(r, 2\theta)$. Inoltre, T lascia fermo il vettore O .

Esercizio 2.

Si consideri lo spazio lineare \mathcal{A} dei polinomi di grado minore o eguale a 2. Si considerino poi le due seguenti trasformazioni lineari

- a) $D : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ che a $x(t)$ associa $\dot{x}(t)$;
- b) $T : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ che a $x(t)$ associa $tx(t)$.

Si definisca la trasformazione $F := TD + T$.

- 1) Dimostrare che F è lineare.
- 2) Data la base $b = [1 \ t \ t^2]^T$ dello spazio \mathcal{A} , costruire la matrice rappresentativa della trasformazione F .
- 3) Costruire la nuova matrice rappresentativa della trasformazione F , relativamente alla base $\bar{b} = [1 \ 1+t \ t+t^2]^T$.

Esercizio 3 (*).

Riguardo le seguenti affermazioni concernenti matrici $n \times n$ ad elementi reali, darne una dimostrazione o fornire un controesempio.

- a) Se A e B sono ortogonali, allora anche $A + B$ è ortogonale.
- b) Se A e B sono ortogonali, allora anche AB è ortogonale.
- c) Se A e AB sono ortogonali, allora anche B è ortogonale.

Esercizio 4.

Calcolare le inverse delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

calcolare $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$.

Esercizio 6.

Si consideri un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e si indichino con x_i , $i = 1, \dots, n$ le sue componenti. Dimostrare che

$$|x_i| \leq \|x\|_p, \quad i = 1, \dots, n, \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Esercizio 7 (*).

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, utilizzando i risultati dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$|a_{ij}| \leq \|A\|_p, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Esercizio 8 ().**

Si consideri un vettore $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che

$$\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \quad (1.1)$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \sqrt{n} \quad (1.2)$$

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1. \quad (1.3)$$

Suggerimento: Dalle definizioni, si può facilmente vedere che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ e che $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$. Utilizzando poi la disuguaglianza di Schwarz $|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, scegliendo opportunamente y , si può provare che ...

Esercizio 9.

Calcolare autovalori e autovettori delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 10.

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

trovare una matrice U in modo che $U^{-1}AU$ sia diagonale.

Esercizio 11 (*).

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dimostrare che gli autovalori di $A^T A$ sono reali e non negativi.

Esercizio 12 (*).

Data una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dimostrare che

$$\det(\exp(A)) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right),$$

essendo λ_i gli autovalori di A .

Suggerimento: Si noti che se λ è un autovalore di A con autovettore u , allora λ^i è un autovalore di A^i con lo stesso autovettore u . Quindi, ricordando la definizione di $\exp(A)$, si ha ...