

# 1. Esercizi

## Esercizio 1.

Si considerino le seguenti due trasformazioni  $T$  nel piano. Stabilire se si tratta di trasformazioni lineari oppure no.

- 1)  $T$  è la simmetria rispetto all'asse delle ascisse.
- 2)  $T$  porta il vettore di coordinate polari  $(r, \theta)$  nel vettore di coordinate polari  $(r, 2\theta)$ . Inoltre,  $T$  lascia fermo il vettore  $O$ .

## Esercizio 2.

Si consideri lo spazio lineare  $\mathcal{A}$  dei polinomi di grado minore o eguale a 2. Si considerino poi le due seguenti trasformazioni lineari

- a)  $D : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  che a  $x(t)$  associa  $\dot{x}(t)$ ;
- b)  $T : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  che a  $x(t)$  associa  $t\dot{x}(t)$ .

Si definisca la trasformazione  $F := TD + T$ .

- 1) Dimostrare che  $F$  è lineare.
- 2) Data la base  $b = [1 \quad t \quad t^2]^T$  dello spazio  $\mathcal{A}$ , costruire la matrice rappresentativa della trasformazione  $F$ .
- 3) Costruire la nuova matrice rappresentativa della trasformazione  $F$ , relativamente alla base  $\bar{b} = [1 \quad 1+t \quad t+t^2]^T$ .

## Esercizio 3 (\*).

Riguardo le seguenti affermazioni concernenti matrici  $n \times n$  ad elementi reali, darne una dimostrazione o fornire un controesempio.

- a) Se  $A$  e  $B$  sono ortogonali, allora anche  $A + B$  è ortogonale.
- b) Se  $A$  e  $B$  sono ortogonali, allora anche  $AB$  è ortogonale.
- c) Se  $A$  e  $AB$  sono ortogonali, allora anche  $B$  è ortogonale.

**Esercizio 4.**

Calcolare le inverse delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 5.**

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

calcolare  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_2$ ,  $\|A\|_\infty$ ,  $\|A\|_F$ .

**Esercizio 6.**

Si consideri un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  e si indichino con  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  le sue componenti. Dimostrare che

$$|x_i| \leq \|x\|_p, \quad i = 1, \dots, n, \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

**Esercizio 7 (\*).**

Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , utilizzando i risultati dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$|a_{ij}| \leq \|A\|_p, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

**Esercizio 8 (\*\*).**

Si consideri un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dimostrare che

$$\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \quad (1.1)$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \sqrt{n} \quad (1.2)$$

$$\frac{\|x\|_1}{n} \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1. \quad (1.3)$$

*Suggerimento:* Dalle definizioni, si può facilmente vedere che  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$  e che  $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$ . Utilizzando poi la disuguaglianza di Schwarz  $|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$ , scegliendo opportunamente  $y$ , si può provare che ...

**Esercizio 9.**

Calcolare autovalori e autovettori delle seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 10.**

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

trovare una matrice  $U$  in modo che  $U^{-1}AU$  sia diagonale.

**Esercizio 11 (\*).**

Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , dimostrare che gli autovalori di  $A^T A$  sono reali e non negativi.

**Esercizio 12 (\*).**

Data una matrice quadrata  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dimostrare che

$$\det(\exp(A)) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right),$$

essendo  $\lambda_i$  gli autovalori di  $A$ .

*Suggerimento:* Si noti che se  $\lambda$  è un autovalore di  $A$  con autovettore  $u$ , allora  $\lambda^i$  è un autovalore di  $A^i$  con lo stesso autovettore  $u$ . Quindi, ricordando la definizione di  $\exp(A)$ , si ha ...