
SOMMARIO

LEZIONE 11. DEFLAGRAZIONE / FIAMME COMPLESSE.....	120
FIAMME PREMISCELATE STIRATE	120
FIAMME PREMISCELATE TURBOLENTE.....	124
RIFERIMENTI E NOTE.....	127
TESTI CONSIGLIATI.....	127
APPENDICE A.....	128
Mescolamento e Stiramento.....	128
APPENDICE B.....	130
Campi di moto turbolenti.....	130
Scale caratteristiche.....	134

Lezione 11. Deflagrazione / fiamme complesse

Fiamme premiscelate stirate

Nell'ipotesi che la velocità laminare della fiamma premiscelata non sia alterata dalla curvatura del fronte di fiamma si può stimare la quantità di miscela che viene consumata dall'avanzamento del fronte di fiamma nell'unità di tempo (\dot{m}). Rimandando ad un secondo momento la convalida dell'ipotesi citata si può calcolare \dot{m} con la seguente formula:

$$\dot{m} = \rho_o u_o A_{fiamma} = \rho_i v_F A_{fiamma} \quad (3.53)$$

dove A_{fiamma} è l'area geometrica del fronte di fiamma, ρ_o e ρ_i sono la densità della miscela in condizioni indisturbate e di ignizione, mentre u_o e v_F sono rispettivamente la velocità di fiamma e la velocità di propagazione laminare di fiamma.

Nel caso A_{fiamma} si riferisca ad un fronte di fiamma corrugato, limitato da un confinamento di sezione geometrica A_o , è possibile calcolare un avanzamento medio di fiamma $v_{F,T}$ riferito ad A_o . Per una migliore comprensione si consideri il caso di una propagazione di fiamma libera in un tubo di sezione A_o come disegnato in figura 3.11.

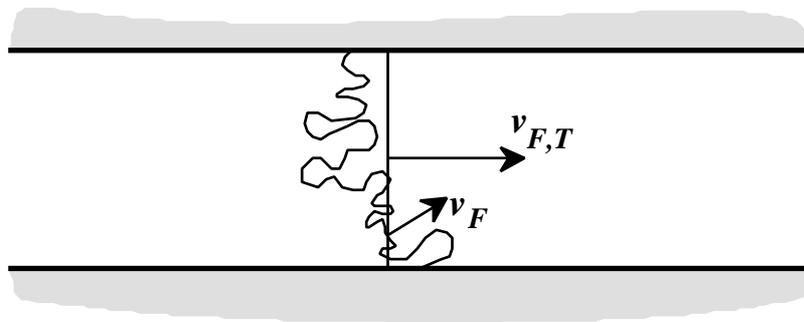


Fig. 3.11 Rappresentazione schematica del fronte di fiamma premiscelata in un mezzo turbolento.

La freccia piena si riferisce alla $v_F = \frac{\rho_o}{\rho_i} u_o$ che è la propagazione nel senso normale al fronte di fiamma, mentre la freccia vuota indica l'avanzamento rispetto alla superficie di area A_o .

Scrivendo \dot{m} non più riferito a A_{fiamma} ma ad A_o si ottiene

$$\dot{m} = \rho_o v_{F,T} A_o \quad (3.54)$$

dove $v_{F, T}$ è proprio l'avanzamento medio di tutto il fronte di fiamma e viene generalmente definito come la velocità di propagazione turbolenta di fiamma.

Imponendo l'uguaglianza tra 3.53) e 3.54) si ottiene:

$$\dot{m} = \rho_o u_o A_{fiamma} = \rho_o v_{F, T} A_o \quad (3.55)$$

da cui moltiplicando e dividendo la parte centrale delle uguaglianze per A_o si ottiene:

$$\rho_o u_o \frac{A_{fiamma}}{A_o} = \rho_o v_{F, T} A_o \quad (3.56)$$

da cui si ricava un valore di $v_{F, T}$ pari a:

$$v_{F, T} = u_o \frac{A_{fiamma}}{A_o} \quad (3.57)$$

La propagazione turbolenta è vista come un incremento della velocità laminare di fiamma proporzionale all'aumento percentuale di superficie del fronte di fiamma.

Per analizzare l'effetto della curvatura su v_F e quindi il significato della ipotesi che è alla base della 3.57 consideriamo l'evoluzione cinematica della superficie del fronte di fiamma A cercando un'espressione per l'incremento temporale della superficie per unità di superficie iniziale. Questa quantità definita stiramento (K) è espressa dalla relazione A1 (in appendice A) qui di seguito riportata:

$$K = \frac{1}{A} \frac{D A}{D t} = \frac{D}{D t} \ln(A) \quad (3.58)$$

Lo stiramento può anche essere espresso con l'equazione A.3 dell'appendice A in cui v_r e v_t sono le componenti della velocità V_f del fronte di fiamma uguale alla somma vettoriale della velocità di fiamma $v_F \underline{u}$ e della velocità del mezzo sul fronte \underline{v} ($V_f = v_F \underline{u} + \underline{v}$):

$$K = \left\{ -v_t \cdot v_t + \underline{V}_f \cdot \underline{u} - \underline{v} \cdot \underline{v} \right\} \quad (3.59)$$

dove le quantità in parentesi graffe sono calcolate sulla superficie del fronte di fiamma e sono definite con l'aiuto dello schema riportato in fig. 3.12.

\underline{V}_f è la velocità del fronte di fiamma, v_t è la proiezione di \underline{v} sulla superficie e può essere calcolato come

$$v_t = \underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{u}) \quad (3.60)$$

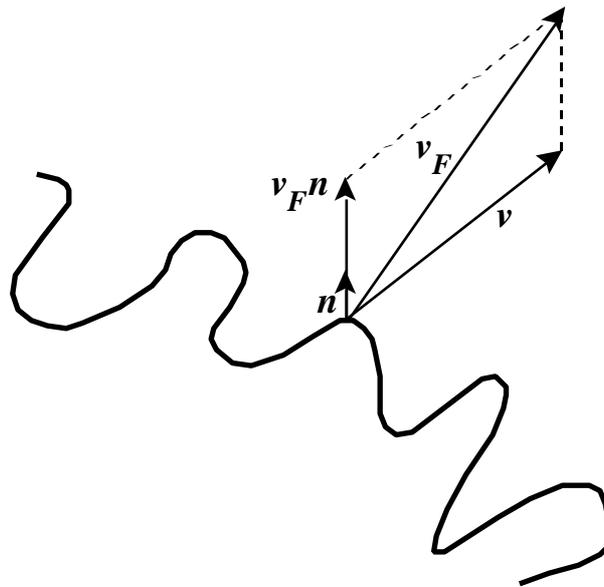


Fig. 3.12 Velocità di propagazione di fiamma in ambiente quiescente ($v_F n$), velocità del mezzo sul fronte di fiamma (v), velocità complessiva del fronte di fiamma (V_f).

infatti $|v_t| = |v| \sin \theta = |v \times n|$ e $v \times n$ ha una direzione perpendicolare al piano definito da v ed n mentre v_t appartiene a tale piano; per cui basta moltiplicare vettorialmente $(v \times n)$ per un vettore unitario disposto normalmente a v_t e $v \times n$ per ottenere proprio v_t tale vettore unitario è appunto n .

Dalla definizione di V_f segue l'espressione:

$$V_f n = v n + v_F n \quad (3.61)$$

per cui la 3.59) può anche scriversi, tenendo conto che:

$$- [n \times (v \times n)] = (v \times n) \cdot n - n \cdot n \times (v \times n) \quad (3.62)$$

e che $n \times n = 0$, come:

$$K = \left\{ \underbrace{- [n \times (v \times n)]}_{K_I} + \underbrace{v \cdot n}_{K_{II}} - \underbrace{n \cdot n}_{K_{III}} + v_F n \cdot n \right\} \quad (3.63)$$

Il primo termine, K_I , rappresenta l'influenza dello stiramento aerodinamico sullo stiramento di fiamma. Se non c'è un campo aerodinamico con componente tangenziale al fronte di fiamma non c'è tale stiramento. Questa considerazione fornisce una rappresentazione intuitiva di come v_t altro non sia che un effetto di "trazione" su tutti i lati della superficie.

Un esempio di questo tipo di stiramento è riportato in figura 3.13a; il fronte di fiamma riportato con la linea ondulata si stabilizza nell'intorno del punto di ristagno in un flusso

che impatta su una parete. Le linee di flusso riportate con linee continue tendono a divergere sul fronte di fiamma per cui la velocità tangenziale del mezzo mantiene stirata la fiamma.

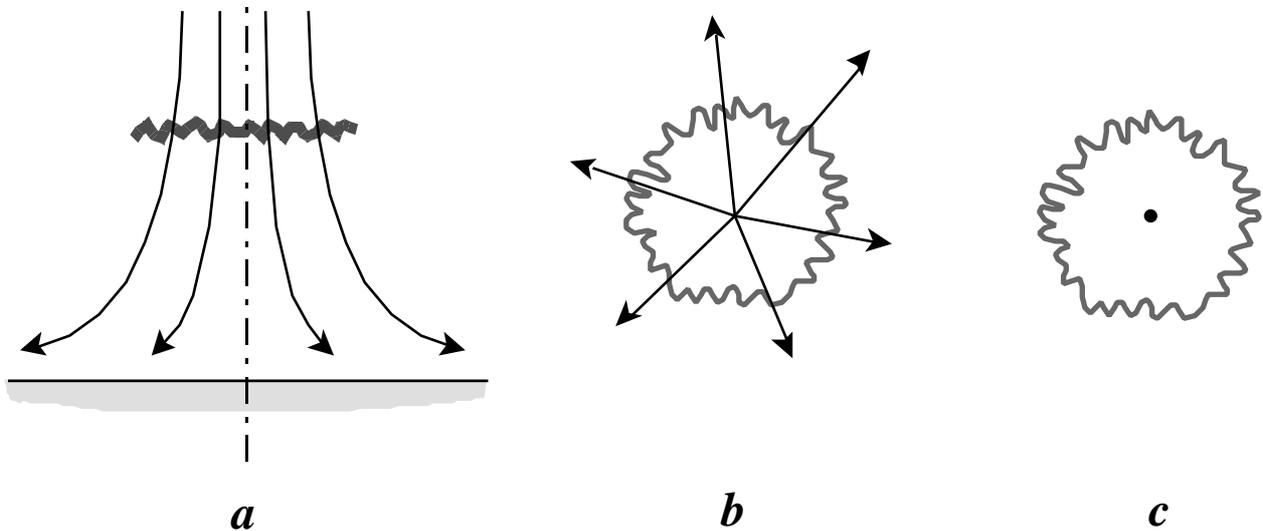


Fig. 3.13 a) Esempio di fiamma stirata di tipo aerodinamico su fronte di fiamma piatto.
 b) Esempio di fiamma stirata di tipo aerodinamico su fronte di fiamma con curvatura.
 c) Esempio di fiamma stirata in assenza di campo aerodinamico.

K_{II} rappresenta lo stiramento di fiamma dovuto al trasporto aerodinamico normale alla superficie (v_n) in presenza di una fiamma con raggi di curvatura principali R_1 e R_2 , infatti:

$$K_{II} = \frac{v_n}{v_F} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.64)$$

Uno stiramento di questo tipo è rappresentato in figura 3.13b da un fronte di fiamma sferico che viene trasportato radialmente da un campo di moto con sorgente puntiforme.

$K_{III} = \frac{v_n}{v_F} K_{II}$ definito ovviamente sulla superficie del fronte di fiamma, è l'analogo di K_{II} dove al trasporto aerodinamico $v_n = v_n$ si sostituisce la propagazione di fiamma v_F .

Un esempio di K_{III} è una fiamma sferica generata da una sorgente puntiforme che propaga in ambiente quiescente (figura 3.13c).

Si può dimostrare che K_{II} e K_{III} non alterano sostanzialmente v_F , mentre K_I non altera v_F fino al valore di soglia $(K_I)_{est}$ detto di estinzione in cui v_F decresce rapidamente fino ad annullarsi.

Fiamme premiscelate turbolente

Per analizzare l'influenza di un campo turbolento sulla propagazione laminare di fiamma è necessario avere una conoscenza, almeno rudimentale, di cosa sia un campo di moto turbolento isoterma. Per i principianti è stata inserita in appendice B una trattazione semplificata che permette di acquisire questi primi rudimenti. Ad essa si rimanda anche per la definizione di alcune grandezze e notazioni che non hanno in letteratura una definitiva formalizzazione.

La propagazione laminare della fiamma premiscelata è caratterizzata da scale caratteristiche di velocità (v_F), spazio (l_F) e tempo (t_F). Queste sono facilmente misurabili o predicibili con modelli numerici e sono solo funzioni delle condizioni termodinamiche iniziali del sistema e, quindi, sono indipendenti dal campo fluidodinamico.

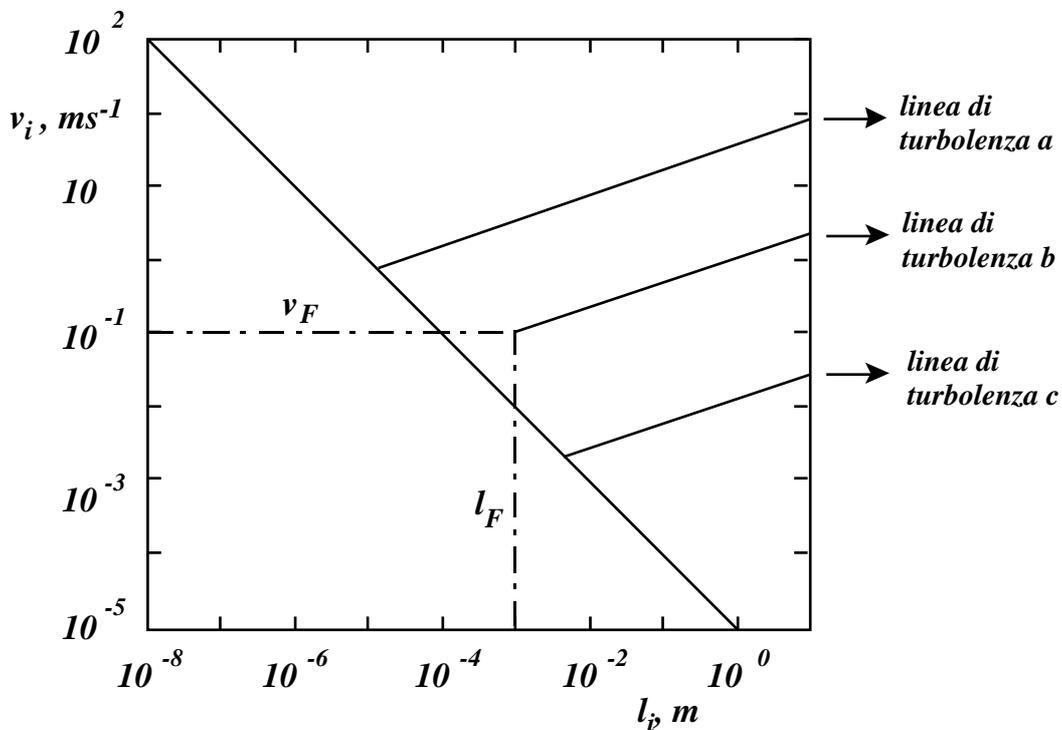


Fig. 3.14 Diagramma spettrale di turbolenza con tre linee di turbolenza. Il punto di coordinate v_F, l_F rappresenta un valore tipico di velocità e spessore di fiamma.

In presenza di un campo di moto turbolento la fiamma evolverà in un sistema caratterizzato da uno spettro di scale che vanno dalla più piccola, detta di Kolmogorov (v_K, l_K, t_K), alla più grande, detta di "turbolenza" (v_T, l_T, t_T). Su un diagramma spettrale di turbolenza, presentato in appendice B, è possibile paragonare le scale intrinseche alla fiamma laminare con quelle della turbolenza. In figura 3.14 viene riportato un diagramma spettrale in cui sono fissate una velocità e uno spessore di fiamma laminare $v_F = 10^{-1} \text{ms}^{-1}$

ed $l_F = 10^{-3}$ m, nonchè una linea di turbolenza che rappresenta un modello di turbolenza isotropa con equilibrio locale, per il quale lo spettro delle scale di turbolenza seguirà una legge del tipo $v_i^3/l_i = \cos t$. Ne consegue che sulla "linea di turbolenza" (linea b) che passa per (v_F, l_F) con questo tipo di legge, vi saranno tutte le possibili scale di turbolenza (v_T, l_T) , per le quali esisterà un vortice intermedio con scala (v_i, l_i) paragonabile con quella della propagazione laminare (v_F, l_F) . Le altre due linee di turbolenza a) e c) non passano per il punto determinato dalla coppia di scale v_F ed l_F . Nel primo caso le velocità su tutte le scale sono sempre più alte di v_F ed il campo di scale spettrali comprende l_F . Nel secondo caso le velocità su tutte le scale sono più piccole della v_F e tutte le scale spaziali sono più alte di l_F . Questi due casi rappresentano delle situazioni limite in cui la turbolenza interagisce "fortemente" (linea di turbolenza a) e "debolmente" (linea di turbolenza b) con la fiamma. In passato sono stati proposti vari criteri per identificare i diversi regimi caratterizzati dal tipo di interazione.

Il criterio proposto da Poinot T., Veynante D. e Candel S. (1990) si basa sulla simulazione diretta di coppie di vortici modello, con fissate dimensioni e velocità periferiche, interagenti con un fronte di fiamma che si propaga a partire da una configurazione piana, in direzione perpendicolare al piano che contiene gli assi dei vortici. Il modello numerico segue l'evoluzione del fronte di fiamma e permette la catalogazione delle scale associate alla coppia di vortici (v_i, l_i) in base al tipo di interazione.

Su un diagramma spettrale di turbolenza in cui le scale sono adimensionalizzate rispetto alla velocità ed allo spessore di fiamma, sono identificati i campi in cui prevale l'estinzione, la propagazione indisturbata ed il regime definito di fiamme sottili.

In quest'ultimo dominio la fiamma può propagarsi conservando la struttura unidimensionale descritta precedentemente. Questo regime viene generalmente denominato regime di "fiamme sottili" e può ulteriormente essere suddiviso in regimi con fiamme "modulate" e "corrugate", volendo con ciò intendere un diverso grado di convoluzione che altera l'area geometrica del fronte di fiamma. Ogni linea di turbolenza, a cui è associato il campo di moto in un punto dello spazio, determina l'interazione complessiva della fiamma con un insieme di scale turbolenti. Ad esempio alla linea di turbolenza b) non sono associate scale per cui il fronte di fiamma si estingue, mentre alla linea di turbolenza a) è associato un intervallo di scale per cui tale evento accade, di conseguenza il fronte di fiamma in parte si segmenta ed in parte si inspessisce.

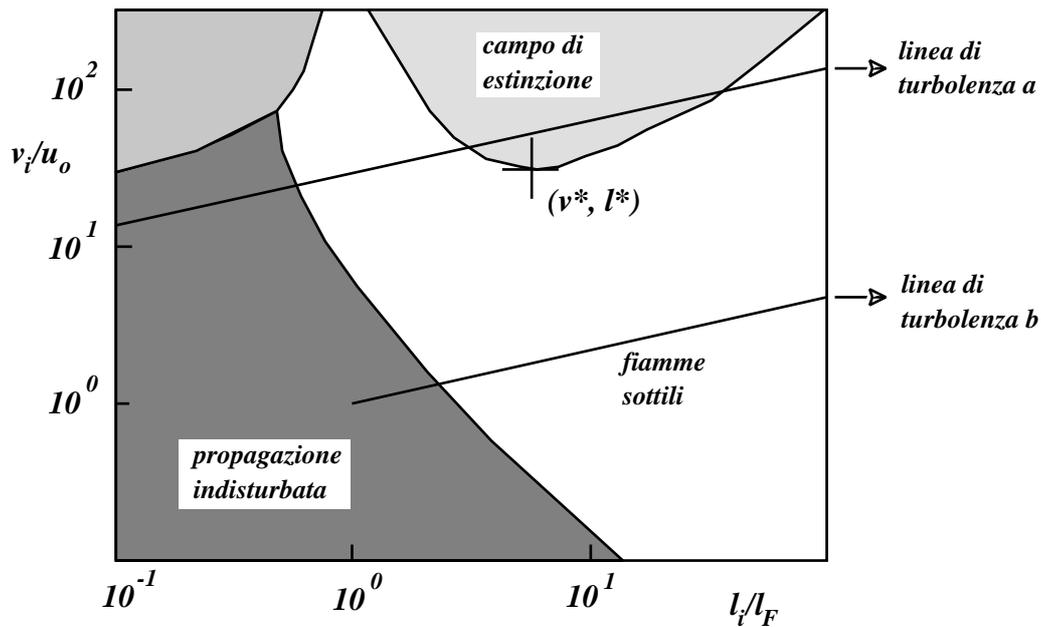


Fig. 3.15 Diagramma spettrale di combustione turbolenta premiscelata.

E' interessante notare che, indipendentemente dal modello di turbolenza, se la scala esterna della velocità turbolenta (v_T) è minore dei valori delle scale riportati con apice stellato (v^*) la propagazione evolverà comunque in regime di fiamme sottili. Il valore numerico di v^*/u_o riportato dagli autori del diagramma è circa 20, per cui supponendo una velocità del fronte di fiamma dell'ordine di 0.5 ms^{-1} questo significa che per scale esterne della turbolenza minori di 10 ms^{-1} la fiamma rimarrà connessa e sottile. Un tal valore della v_T è riscontrabile solo per campi altamente turbolenti con velocità medie superiori almeno a 30 ms^{-1} .

E' infine interessante notare che la linea di divisione tra le fiamme singole e le fiamme indisturbate non coincide con la linea $Re_k = 1$ che divide in un regime isoterma la parte del campo laminare da quella turbolenta. Questo fenomeno è noto come "laminarizzazione" del campo turbolento e consiste nel fatto che la fiamma preriscalda la miscela incombusta ed innalza il valore locale della viscosità cinematica abbassando il numero di Reynolds al momento del suo transito.

Riferimenti e note

- Aris R.: "Vectors, Tensors and Basic Equations of Fluid Mechanics", Prentice-Hall, Inc., Englewoods Cliffs, N.J., 1962
- Candel S.M.: "Flame Stretch and the Balance Equation for the Flame Area", Comb. Sci. Tech., **70**, 1-15, 1990
- Poinsot T., Veynante D., Candel S. : "Diagrams of Premixed Turbulent Combustion Based on Direct Simulation" The Twenty-third Symposium(International) on Combustion , The Combustion Institute, Pittsburgh, 613-619,1990
- Zel'dovich Y.B. et al.: "The Mathematical Theory of Combustion and Explosions", Consultants Bureau, N.Y., 1985

Testi consigliati

- Aris R.: "Vectors, Tensors and Basic Equations of Fluid Mechanics", Prentice-Hall, Inc., Englewoods Cliffs, N.J., 1962
- Kanury A.M.: "Introduction to Combustion Phenomena", Gordon and Breach Science Publ., N.Y., 1975
- Peters N.: "Length Scales in Laminar and Turbulent Flames", in "Numerical Approaches to Combustion Modeling", E.S. Oran, J.P. Boris Eds., 1989
- Young P.K., Girimeji, J.S., Pope S.B.: Comb. Flame **79**, 340, 1990.

Appendice A

Mescolamento e Stiramento

La rilevanza della turbolenza nei sistemi reattivi ed in particolare nella combustione consiste nella proprietà dei campi turbolenti di migliorare il mescolamento sia nel caso dei sistemi premiscelati che di quelli a diffusione. Nel primo caso è favorito lo scambio di massa e calore tra la parte di miscela che ha già reagito con quella che non ha subito trasformazioni, nel secondo caso è favorito lo scambio tra le due fasi reagenti. In entrambi i casi l'incremento dello scambio è associato a due effetti legati tra loro dalle condizioni fluidodinamiche locali. Il primo effetto consiste nell'estensione geometrica delle zone dove la reattività è alta e genera sempre un incremento complessivo della quantità di combustibile ossidata nell'unità di tempo perché a parità di velocità di reazione estende le zone coinvolte nell'ossidazione.

Il secondo effetto è legato all'incremento dei gradienti delle grandezze intensive (concentrazioni, temperature etc.) e quindi dei flussi ad esse associati sulle superfici ad alta reattività e genera fenomenologie diverse a seconda che agisca nei sistemi premiscelati o diffusivi. I due effetti sono legati tra loro per mezzo di una relazione che lega lo stiramento di una superficie A definita come:

$$K = \frac{1}{A} \frac{D A}{Dt} \quad (\text{A1})$$

al gradiente e alla divergenza di velocità $(\nabla \cdot \mathbf{v})$ nonché alla normale \mathbf{n} alla superficie. In base a considerazioni cinematiche riportate in questa appendice lo stiramento prende la forma:

$$K = \frac{1}{A} \frac{D A}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \ln A \quad (\text{A2})$$

E' importante sottolineare che la velocità \mathbf{v} è quella della superficie A ; nel caso in cui questa sia un fronte di fiamma sarà la somma della velocità di propagazione del fronte e della velocità del fluido sulla superficie. Nel caso la A sia associata ad una superficie materiale la \mathbf{v} coincide con la velocità cinematica.

Un'altra espressione dello stiramento direttamente derivabile dalla eq. A2, e dimostrata alla fine di quest'appendice, è data dalla seguente equazione

$$K = \frac{1}{A} \frac{D A}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}_t - v_n C \quad (\text{A3})$$

dove la velocità è scritta come $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - v_n \mathbf{n}$ in modo che v_n sia la velocità normale alla superficie e C sia la curvatura media uguale a: $- \frac{1}{R}$.

Sotto l'ipotesi di mezzo incompressibile ($\rho = \text{cost}$) e di superficie piatta ($C = 0$) l'equazione A3 diventa:

$$K = \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = - \frac{1}{R} \frac{v_n}{x_n} \tag{A4}$$

da cui si può comprendere la relazione tra i due effetti sopra descritti. In questo caso infatti lo stiramento di una superficie è associato ad un gradiente di velocità normale ad essa per cui le variazioni spaziali delle grandezze intensive verranno "schiacciate" sulla superficie ed i gradienti a loro legati saranno più alti rispetto al caso in cui non sussistono stiramenti.

La seguente derivazione dello stiramento K di una superficie (A) è riportata da Candel e Poinot (1990) e prende spunto dal teorema del trasporto come derivato da Aris (1962) a pag. 86:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{A5}$$

da cui ricordando che:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} \tag{6}$$

si ha

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{A7}$$

L'equazione A3) viene applicata a qualsiasi vettore \mathbf{a} definibile sulla superficie $S(t) = A(t)$. Nel nostro caso \mathbf{a} è preso uguale al vettore unitario normale alla superficie \mathbf{n} , per cui:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{A8}$$

poiché:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial t} = 0 \tag{A9}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial t} = 0 \tag{A10}$$

si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{dA}{A(t)} = \frac{d}{A(t)} \left[-\underline{m} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} \right] \frac{dA}{A} \quad (A11)$$

da cui, considerando costante l'integrando a secondo membro si ottiene:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = -\underline{m} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} \quad (A12)$$

Analogamente si può dimostrare, come è riportato da Ottino (1989), che un elemento lineare l ed un elemento di volume V vengono stirati in accordo alle seguenti leggi

$$\frac{1}{l} \frac{Dl}{Dt} = \underline{v} \cdot \underline{m} \quad (A13)$$

$$\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{v} \cdot \underline{v} \quad (A14)$$

dove \underline{m} ed \underline{u} sono rispettivamente la tangente all'elemento di linea ed il versore unitario.

Ponendo $\underline{v} = v_t + \underline{u}v_n$ nella A8) si ottiene:

$$-\left(v_t + \underline{u}v_n\right) \cdot \underline{u} \underline{u} : -\left(v_t + \underline{u}v_n\right) = -v_t + \underline{u}v_n - \underline{u} \underline{u} : -v_t - \underline{u} \underline{u} : -\underline{u}v_n \quad (15)$$

essendo $\underline{u} \underline{u} : -v_t = 0$ segue:

$$\begin{aligned} &-\left(v_t + \underline{u}v_n\right) \cdot \underline{u} \underline{u} : -\left(v_t + \underline{u}v_n\right) = \\ &= -v_t + \underline{u} \underline{u} : -v_n + v_n - \underline{u} \underline{u} : -\left(\underline{u} v_n\right) \end{aligned} \quad (A16)$$

essendo ancora $\underline{u} \underline{u} : -v_n$ uguale a $\underline{u} \underline{u} : -\left(\underline{u}v_n\right)$ si ottiene che:

$$K_A = -v_t - \underline{u} \underline{u} : -\left(\underline{u}v_n\right) = -v_t + v_n - \underline{u} \underline{u} : -\left(\underline{u}v_n\right) \quad (A17)$$

Appendice B

Campi di moto turbolenti

La caratteristica principale dei campi di moto turbolenti è l'irregolarità della loro evoluzione nel tempo. A questa sono associate l'alto livello di diffusività delle grandezze estensive (ad esempio massa, quantità di moto, entalpia) e la forte tridimensionalità su scale spaziali più piccole di quelle associate al moto nel suo insieme. Inoltre i campi di moto turbolenti sono fortemente dissipativi nel senso che parte dell'energia cinetica associata al

moto disordinato viene trasformata in energia interna e pertanto deve essere reinserita a spese del moto ordinato, altrimenti il campo turbolento "degenera" in un regime laminare. Di tutte queste caratteristiche quella che influisce più direttamente sull'evoluzione di una miscela reagente è l'elevata diffusività, perchè è appunto questa proprietà che favorisce il mescolamento tra diverse specie chimiche, sia in presenza che in assenza di reazione chimica.

E' comunque difficile separare nettamente le varie proprietà, perchè esse sono aspetti diversi dello stesso fenomeno (l'incoerenza del moto). Ad esempio l'alta diffusività dei campi turbolenti è legata sia all'alta irregolarità che alla tridimensionalità del moto.

Un modo più operativo di definire un campo di moto turbolento può essere sviluppato a partire dalla misura di velocità in un mezzo continuo. Questa deve essere compiuta contemporaneamente sulle tre componenti della velocità, ma per semplicità supponiamo di misurare una sola componente (u) e che le proprietà che andremo a descrivere per questa componente siano vere anche per le altre due.

Una misura di velocità è sempre riferita ad una integrazione su un volume τ^3 e un intervallo di tempo t finiti e centrati in un punto dello spazio τ e del tempo t . Si suppone che τ e t siano più grandi del cammino libero medio molecolare e del tempo medio di collisione tra le molecole e che la misura non dipenda dalla distribuzione di velocità delle molecole. Sotto questa ipotesi, che verrà discussa più avanti è possibile misurare una $u(r, t)$, che, come quella esemplificata in fig. B1, è per un punto fissato dello spazio ($\tau = \tau^*$) funzione solo del tempo.

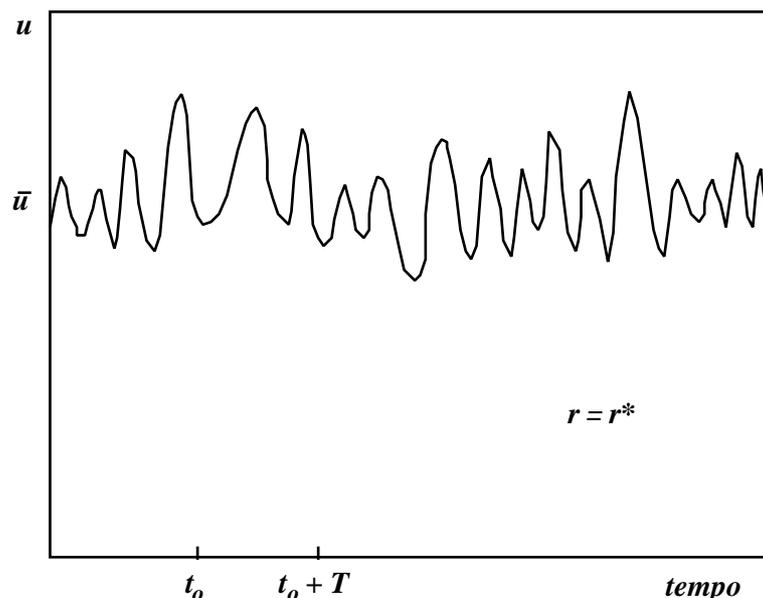


Fig. B.1 Esempio di evoluzione temporale di una componente di velocità e del suo valore medio in un punto fissato nello spazio.

Nel caso in cui questa funzione oscilli intorno ad un valore medio, è possibile definire una velocità media \bar{u} come il limite per T tendente all'infinito dell'integrale della funzione $u(t)$ tra un generico tempo t_o ed un tempo $t_o + T$, diviso per l'intervallo di tempo T

$$\bar{u} = \lim_T \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} u(t) dt \quad (\text{B1})$$

In questo caso il valore istantaneo della velocità può essere scomposto in due parti \bar{u} e u'

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \quad (\text{B2})$$

dove $u'(t)$ è una delle tre componenti delle fluttuazioni di velocità. Analogamente si possono definire l'energia cinetica media e turbolenta associata alla componente di velocità u . Se questa è, ad esempio, la componente lungo l'asse cartesiano x , l'energia cinetica per unità di massa può essere scritta come:

$$\bar{e}_x = \lim_T \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} (u + u')^2 dt = \bar{u}^2 + \overline{u'^2} = K_x + k_x \quad (\text{B3})$$

dove il segno orizzontale sulla componente fluttuante u'^2 indica l'operazione di media temporale così come è stata definita in precedenza per \bar{u} .

L'esistenza di una parte fluttuante della velocità u' o dell'energia cinetica k_x associati ad un dominio spaziale del campo aerodinamico, ancora non permette di concludere che siamo in presenza di un campo turbolento. Infatti le fluttuazioni potrebbero avere un carattere periodico, cosicché non sarebbe possibile identificarne l'aspetto di irregolarità che più di ogni altra proprietà è proprio della turbolenza.

In termini più rigorosi lo stesso concetto può essere espresso con l'aiuto di uno dei coefficienti di correlazione definiti come il rapporto della covarianza rispetto al prodotto delle deviazioni standard di due componenti fluttuanti. Per covarianza si intende la media temporale del prodotto di due qualsiasi componenti fluttuanti (per esempio a u' e v' è associata la covarianza $\overline{u'v'}$) e per deviazione standard si intende la radice della media del quadrato delle componenti fluttuanti (per esempio a u' e v' sono associate le deviazioni $\sqrt{\overline{u'^2}}$ e $\sqrt{\overline{v'^2}}$). Pertanto un coefficiente di correlazione su un singolo punto può essere espresso come $C^{u'v'}$:

$$C^{u'v'} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{v'^2}}} \quad (\text{B4})$$

Un coefficiente di correlazione può essere definito su una sola componente fluttuante nel caso in cui si riferisca a due punti diversi dello spazio o del tempo.

Sono così definiti un coefficiente di autocorrelazione spaziale $C_r^{u'}$ e temporale $C_t^{u'}$

$$C_r^{u'} = \frac{\overline{u'(r,t)u'(r+r,t)}}{\sqrt{\overline{u'^2(r,t)}}\sqrt{\overline{u'^2(r+r,t)}}} \quad (\text{B5})$$

$$C_t^{u'} = \frac{\overline{u'(r,t)u'(r,t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u'^2(r,t)}}\sqrt{\overline{u'^2(r,t+\tau)}}} \quad (\text{B6})$$

il limite dei quali per r e t tendenti a zero è uno.

Questi coefficienti possono assumere valore unitario anche nel caso siano funzioni periodiche del tempo o dello spazio ed i valori di r o t per cui ciò accade sono legati ai periodi P_t e P_r dalle relazioni $nP_t = t$ e $nP_r = r$, dove n è un intero qualsiasi. Due esempi limite di coefficienti di autocorrelazione temporale sono riportati in fig B2.

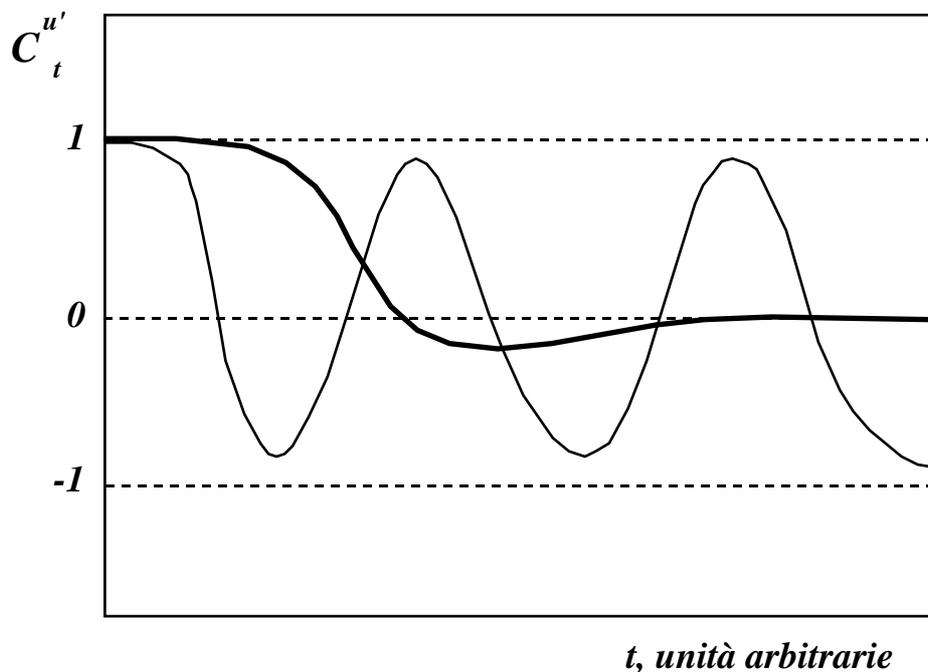


Fig. B.2 Esempio di coefficienti di autocorrelazione temporale di una componente di velocità fluttuante contro l'intervallo di tempo t .

La linea più spessa rappresenta un coefficiente in cui non emerge nessun periodo caratteristico mentre la linea più sottile mostra una curva con più massimi relativi di cui alcuni raggiungono quasi il valore unitario.

La prima curva è rappresentativa di un campo turbolento, in cui non vi è nessuna scala temporale dominante, per cui le fluttuazioni diventano statisticamente indipendenti al crescere del tempo. La seconda curva è rappresentativa di un campo in cui vi è un grado di

organizzazione nell'evoluzione del moto, per cui è difficile definire turbolento il campo nel suo insieme.

Pertanto in termini più scientifici potremmo definire un campo turbolento come il campo in cui i coefficienti di autocorrelazione spaziale e temporale di tutte le componenti di velocità decrescono con continuità e tendono a zero per r e t tendenti all'infinito.

La presenza di massimi relativi è, comunque, l'espressione di una coerenza spaziale e temporale che in linea di principio può essere filtrata, ma che in pratica è difficile misurare a causa del carattere tridimensionale sia della turbolenza che di eventuali strutture coerenti immerse nel campo.

Scale caratteristiche

I coefficienti di autocorrelazione permettono di definire diverse scale importanti nello studio della turbolenza. Alcune di queste sono definite con l'aiuto della fig. B.3 in cui viene riportato come esempio il coefficiente di autocorrelazione spaziale della componente u della velocità lungo l'asse cartesiano x .

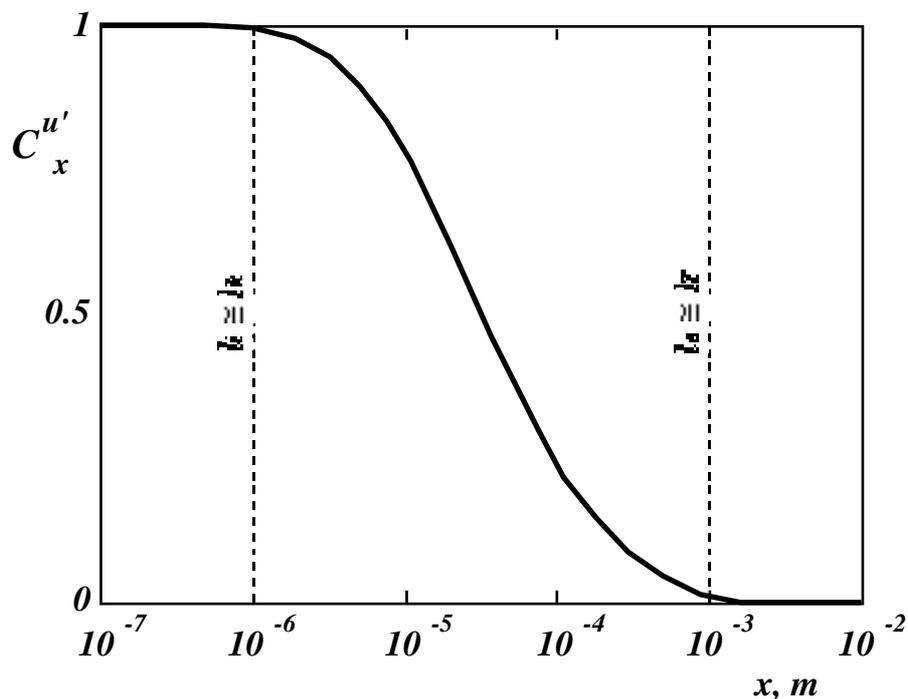


Fig. B.3 Esempio di coefficiente di autocorrelazione spaziale di una componente di velocità fluttuante contro l'intervallo spaziale di correlazione x .

La scala riportata sull'ascissa è puramente esemplificativa ed è logaritmica per mettere in evidenza che il campo di moto può essere coerente su scale molto piccole anche dell'ordine di micron ($C_{x=1\mu m}^{u'} = 1$), ma queste devono essere sempre più grandi del

cammino libero medio che per gran parte dei gas in condizioni standard è più piccolo di 10^{-8} μm .

Si definiscono scala interna (l_i) ed esterna (l_e) della turbolenza i valori più grandi e più piccoli di l_x per cui C_x^u sia rispettivamente più grande di 1- e più piccola di ϵ , dove ϵ è un numero piccolo a piacere. Pertanto un campo di moto è coerente su tutte le scale più piccole di l_i ; due particelle a distanze minori di l_i non alterano la loro distanza relativa nel tempo, mentre due particelle a distanze maggiori di l_e sono praticamente non correlate.

Questa definizione è arbitraria a causa della scelta arbitraria del valore di ϵ ; è, invece, completamente determinata la definizione di scala integrale l_T detta anche scala di turbolenza. Questa è definita come l'integrale tra zero ed infinito del coefficiente C_x^u

$$l_T = \int_0^\infty C_x^u dx \quad (\text{B7})$$

Le scale integrali ed esterne sono in pratica coincidenti perchè tutti i valori di C_x^u decrescono e sono piccoli per scale maggiori di l_e .

La scala integrale può essere anche interpretata come una misura della grandezza di un insieme di molecole che si muovono con un minimo, identificabile grado di coerenza oppure come la dimensione dei vortici più grandi del campo di moto turbolento.

Analogamente a come è stata definita la scala integrale di turbolenza, può essere definita e misurata una scala temporale integrale t_T a partire dal coefficiente di correlazione C_t^u . Il rapporto tra queste due scale (l_T e t_T) è dello stesso ordine di grandezza della radice quadratica media della fluttuazione $u_T = \sqrt{u'^2}$. Inoltre le stesse definizioni valgono per le scale associate alle altre due componenti della velocità. Nel caso di turbolenza isotropa le scale coincidono, altrimenti è pratica comune riferirsi per l_T alla media aritmetica delle scale spaziali ottenute per ogni singola componente e per la scala integrale di velocità v_T alla radice quadrata della somma delle energie cinetiche fluttuanti riferite alle tre componenti di velocità:

$$v_T = \sqrt{K_x + K_y + K_z}.$$

A differenza delle scale integrali, che hanno una definizione basata su quantità che sono facilmente misurabili, le scale interne non sono sempre misurabili a causa delle loro piccole dimensioni. Infatti nei campi di moto di interesse nella combustione esse possono essere anche nell'ordine di decine di micron e solo con l'avvento di tecniche ottiche bidimensionali si è potuta raggiungere una loro identificazione sperimentale. In altre

condizioni, come quelle dei moti nell'atmosfera terrestre, esse sono facilmente misurabili ed hanno fornito la verifica sperimentale di alcune relazioni tra le scale interne temporali e spaziali che sono di grande utilità nella caratterizzazione del campo turbolento. La prima relazione è quasi ovvia e si basa sulla considerazione che per scale molto piccole gli effetti dovuti alla diffusività di quantità di moto prevalgono su quelli convettivi, per cui localmente all'interno di queste scale il moto deve considerarsi laminare. Ciò accade quando il numero di Reynolds, calcolato con velocità e lunghezze caratteristiche delle zone del campo dove il trasporto convettivo e diffusivo della quantità di moto si equivalgono, diventa dell'ordine dell'unità per cui $\frac{u_k l_k}{\nu} = 1$, dove ν è la viscosità cinematica. Le scale u_k e l_k vengono chiamate scale di Kolmogorov dal nome del ricercatore russo che ne ha ipotizzato l'esistenza. Su queste scale è concentrata anche la dissipazione della quantità di moto, infatti l'energia cinetica per unità di massa trasferita all'energia interna nell'unità di tempo (ϵ) è uguale a:

$$\epsilon = \overline{u_k \frac{du_k}{dt}} = \nu \frac{u_k^2}{l_k^2} \quad (B8)$$

ed è quindi proporzionale al flusso diffusivo di quantità di moto.

L'espressione è soprastegnata in quanto anche in questo caso rappresenta la media temporale su un intervallo tendente all'infinito.

Sotto l'ipotesi di isotropia delle fluttuazioni sulle scale piccole il gradiente della velocità può essere valutato come il rapporto tra una generica componente della velocità u_k e l'unica scala spaziale l_k . Questa ipotesi ha una forte rilevanza concettuale perchè viene considerata universalmente valida in base alla considerazione che, qualunque sia l'orientamento del campo di moto sulle scale integrali, le strutture del campo associate alle zone ad alta dissipatività sono il frutto di instabilità fluidodinamiche che non si sviluppano su direzioni preferenziali e generano strutture sempre più piccole e sempre più orientate casualmente. Pertanto si può riassumere che le scale interne, nel caso in cui siano associate ad alta dissipatività, siano statisticamente isotrope nel senso che passano attraverso un volume fissato con orientamento completamente casuale.

In base a questa considerazione la B8 diventa

$$\epsilon = \frac{u_k^2}{l_k^2} = \frac{u_k^3}{l_k} = \frac{u_k^3}{l_k^4} = \frac{u_k^4}{l_k} \quad (9)$$

a) b) c) d)

infatti l'espressione a) origina direttamente dalla valutazione dell'ordine di grandezza del $\frac{u_k^2}{l_k^2}$, mentre b), c), d), derivano da a) e dalla relazione $u_k l_k = \nu$.

Una valutazione quantitativa della dissipazione di quantità di moto può essere basata su un'altra ipotesi. L'energia cinetica per unità di massa che viene dissipata è considerata uguale, al massimo, all'energia cinetica turbolenta, associata alla scala esterna, che viene trasferita all'energia cinetica turbolenta associata a scale più piccole. Il trasferimento dell'energia cinetica dalle scale più grandi, denominato P , può, a sua volta, essere al massimo uguale a $\frac{v_T^2}{t_T}$, cioè all'energia cinetica turbolenta per unità di massa diviso il tempo caratteristico di vita dalle strutture più grandi del campo di moto turbolento. Infatti v_T è una misura di tutta l'energia cinetica turbolenta e quindi più grande di quella associata solo a strutture di dimensioni caratteristiche l_T mentre t_T è il tempo di scomparsa di queste strutture quindi è il tempo minimo di trasferimento dell'energia cinetica turbolenta verso scale più piccole. Essendo $t_T = \frac{l_T}{u_T}$, si può concludere che

$$P = \frac{v_T^3}{l_T} \quad (\text{B10})$$

Questa ipotesi è soddisfatta rigorosamente col segno di uguaglianza nei campi di moto stazionari $\frac{u}{t} = 0$, isotropi ($\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2}$), omogenei ($\overline{u^2}(r) = \cos t$), in cui $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{v^2}$ sia costante (flusso di taglio).

Il segno di uguaglianza esprime una condizione di equilibrio locale, per cui nello stesso volume di controllo l'energia cinetica turbolenta persa per unità di tempo sulla scala integrale viene trasferita verso strutture turbolente più piccole che a loro volta stanno cedendo l'energia cinetica a strutture con scale sempre più piccole con la stessa velocità di trasferimento. Questo processo è effettivo per tutte le scale più grandi di quelle di Kolmogorov, a cui è invece associata la dissipazione dell'energia cinetica.

La relazione ha quindi una forte rilevanza pratica, perchè in alcune zone circoscritte del campo fluidodinamico di puro taglio in cui anche le ipotesi di stazionarietà, isotropia e omogeneità sono soddisfatte definisce una relazione tra le scale associate alla dissipazione

$$= \frac{u_k^3}{l_k} \text{ e quelle associate alle scale esterne } P = \frac{v_T^3}{l_T} .$$

Infatti dalla uguaglianza $\frac{u_k^3}{l_k} = P$ segue

$$\frac{u_k^3}{l_k} = \frac{v_T^3}{l_T} \quad \frac{u_k}{v_T} = \left(\frac{l_k}{l_T}\right)^{1/3} \quad (\text{B11})$$

E' implicito nell'assunzione di eguaglianza $\nu_i = P$ il concetto di equilibrio locale di energia cinetica turbolenta su tutte le scale ν_i, l_i intermedie tra quelle integrali ν_T, l_T , e di Kolmogorov ν_k, l_k per cui si può porre $\frac{\nu_i^3}{l_i} = \text{cost}$.

A differenza delle scale esterne (integrali) e interne (Kolmogorov) le scale intermedie ν_i e l_i non sono state definite rigorosamente.

Per semplicità supponiamo che esse rappresentino le velocità e dimensioni caratteristiche ν_i, l_i di "vortici" in cui può essere scomposto il campo fluidodinamico. La rappresentazione è piuttosto semplicistica in quanto le fluttuazioni del campo possono essere associate a zone spaziali esterne a zone veramente vorticosi, ma l'uso di virgolette ricorderà che il significato di "vortice" in questo contesto è puramente convenzionale.

Le relazioni, fin qui presentate, possono essere sintetizzate con l'aiuto del diagramma riportato in fig.B4. Le ascisse e le ordinate rappresentano rispettivamente le scale spaziali e le velocità caratteristiche dei "vortici" in cui può essere pensato scomposto il campo turbolento nell'intorno di un punto fissato nello spazio.

La retta tracciata con linea continua spessa in corrispondenza di Reynolds uguale ad uno rappresenta il luogo delle coppie ν_i, l_i per cui il prodotto è uguale alla viscosità cinematica dell'aria, posta a sua volta uguale a $10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Pertanto le coppie di valori sono quelle associate alle scale di Kolmogorov ν_k, l_k e definiscono un limite inferiore delle possibili scale rilevabili in un campo turbolento.

Per ogni punto dello spazio è inoltre possibile misurare una coppia di scale esterne ν_T, l_T che a loro volta delimitano superiormente le possibili scale rilevabili. In figura è riportata esemplificativamente la coppia $\nu_T = 1 \text{ ms}^{-1}$ e $l_T = 10^{-1} \text{ m}$, per cui il numero di Reynolds turbolento è $Re = 10^4$.

E' immediato notare che il numero di Reynolds definisce la massima variazione delle scale ν_i ed l_i . Per esempio in figura B4 si può verificare che i due segmenti riportati con tratteggio, delimitanti superiormente tutte le scale plausibili, corrono per quattro ordini di grandezza (come il numero di Reynolds) prima di incontrare il segmento relativo alla scala di Kolmogorov.

In realtà gli spettri di scale sia della velocità che delle dimensioni sono più limitati e variano da un campo turbolento all'altro e da un punto ad un altro in un fissato campo. Sono stati formulati dei modelli di turbolenza che legano le scale di velocità a quelle spaziali; questi non possono essere considerati universali e rappresentano casi limite che guidano l'analisi

dei campi di moto e vengono a volte utilizzati come sottomodelli empirici per la chiusura di modelli nella simulazione dei campi.

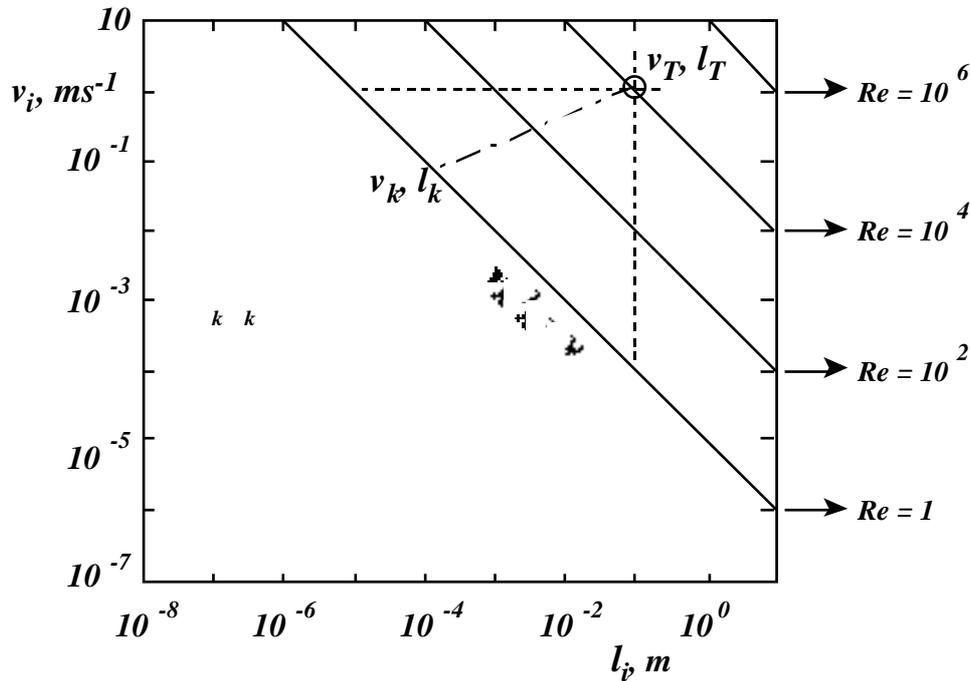


Fig. B.4 Diagramma spettrale della turbolenza.

Quello maggiormente utilizzato sia per la sua semplicità, sia per l'aderenza alla realtà fisica nel campo delle scale prossime a quelle di Kolmogorov si basa proprio sull'assunzione prima citata di equilibrio ed isotropia locale dell'energia cinetica. In questo caso non solo le scale associate alla produzione (v_T, l_T) e alla dissipazione (v_k, l_k) dell'energia cinetica, ma anche quelle intermedie (v_i, l_i) sono legate dalla relazione

$$\frac{v_T^3}{l_T^3} = \frac{v_i^3}{l_i^3} = \frac{v_k^3}{l_k^3} \tag{B12}$$

Una dipendenza di v_i da l_i di questo tipo è riportata sul diagramma di fig. B 4 con la linea tratto punto a partire dalla coppia di valori v_T ed l_T scelta prima a scopo esemplificativo. Nell'esempio è evidente che le possibili scale di velocità coprono un solo ordine di grandezza a partire da 1 ms^{-1} fino a 10^{-1} ms^{-1} , mentre, i tre ordini di grandezze coperte dalle scale spaziali permettono di raggiungere scale di Kolmogorov dell'ordine di decimi di millimetro.

Questo modello di turbolenza è inadeguato a descrivere le scale più vicine a quelle integrali, perchè su queste grandi scale la generazione di "vortici" è orientata dal campo di moto medio per cui le ipotesi di isotropia e di equilibrio non sono soddisfatte. In

compenso è più facile seguirne l'evoluzione fluidodinamica in virtù del fatto che le scale possono essere appena un ordine di grandezza più piccole della scala complessiva del sistema reagente e quindi potrebbero direttamente essere modellate o osservate sperimentalmente. E' questo infatti l'approccio utilizzato in alcuni tipi di simulazione numerica (Large eddy simulation) e di diagnostica ottica (visualizzazione quantitativa bidimensionale) nello studio dei sistemi turbolenti.

Il modello di turbolenza isotropa con equilibrio locale rimane comunque un valido mezzo didattico per descrivere gli effetti che un insieme di scale fluidodinamiche generano su processi caratterizzati a loro volta da una o più scale caratteristiche e verrà utilizzato in seguito a tale scopo con l'aiuto del diagramma di fig. B4, che verrà sinteticamente citato come diagramma spettrale della turbolenza.