

Introduzione alla Conversione alternata-continua

Appunti didattici a.a. 2008-2009

Insegnamento di
Gestione Razionale dei
Sistemi Elettrici

Antonio Quercia
Napoli, Gennaio, 2009

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA
Università degli Studi di Napoli Federico II



Indice

Nota sulla versione	4
1 Introduzione allo studio delle reti in regime variabile	5
1.1 Il passaggio dal dominio del tempo al dominio della frequenza	5
1.1.1 Richiami sulle reti in regime sinusoidale	5
1.2 Serie di Fourier. Spettro di ampiezza e di Fase. Esempi	7
1.2.1 Forma compatta	8
1.2.2 Componente continua e componente alternata	9
1.2.3 Analisi Armonica. Spettro di ampiezza e spettro di fase	9
1.2.4 Caratteri di simmetria	9
1.2.5 Troncamento della serie di Fourier	11
1.2.6 Forma esponenziale	11
1.3 Integrale di Fourier	12
1.3.1 Rappresentazione di una funzione non periodica	12
1.3.2 Proprietà e applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier	13
1.3.3 Esempi di trasformate	14
1.3.4 Trasformata di Fourier di una funzione periodica	15
1.4 Reti elettriche in regime periodico	15
1.4.1 Tensioni e/o correnti non sinusoidali	15
1.4.2 Generalizzazione del metodo simbolico. Esempi	15
1.4.3 Valore efficace. Espressione armonica della potenza	15
1.4.4 Principali effetti dell'inquinamento armonico	19
2 Convertitori Statici	20
2.1 Generalità	20
2.2 Componenti dei convertitori	20
2.2.1 Diodo ideale. Modello circuitale del diodo ideale	20
2.2.2 Diodo reale. Caratteristica corrente-tensione	20
2.2.3 Cenni sui dispositivi a semiconduttore	20
2.2.4 Drogaggio dei semiconduttori e giunzione pn	21
2.2.5 Diodo a semiconduttore	21
2.2.6 Corrente massima diretta e tensione massima inversa. Potenza nominale	21
2.2.7 Caratteristica esponenziale corrente-tensione (equazione di Shockley)	22
2.2.8 Modelli semplificati del diodo reale e circuiti equivalenti. Esempio	22
2.2.9 Cenni sull'uso del diodo come generatore di tensione di riferimento	22
2.2.10 Comportamento in commutazione	22
2.2.11 Tiristore (o SCR) ideale. Modello del tiristore ideale	23
2.2.12 Argomenti accennati	23
2.3 Conversione ac-dc	23
2.3.1 Analisi del circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda	23
2.3.2 Parametri prestazionali	24
2.3.3 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con filtro	26
2.3.4 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con induttore e diodo di ricircolo (cenni)	26
2.3.5 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: punti chiave	26
2.3.6 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda (con trasformatore a presa centrale e a ponte di Graetz)	27
2.3.7 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda con filtro	28

2.3.8	Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda: punti chiave	28
2.3.9	Dimensionamento del convertitore ac/dc	28
2.3.10	Generalità sui raddrizzatori controllati	28
2.3.11	Analisi del circuito di raddrizzamento controllato a semplice semionda	28
2.3.12	Convertitori monofase a ponte intero	28
2.3.13	Transitori di commutazione	29
2.3.14	Filtraggio in uscita dei circuiti di raddrizzamento	29
2.4	Raddrizzamento da rete trifase	29
2.4.1	Raddrizzatori polifasi a gruppi di commutazione	29
2.4.2	Raddrizzatori polifasi a ponte di Graetz	30
2.4.3	Raddrizzatori controllati polifase (cenni)	33
2.4.4	In futuro	33
A	Alcune funzioni notevoli. Cenni sulle funzioni generalizzate	34
A.1	Funzioni notevoli	34
A.2	Funzioni generalizzate	35
B	Cenni sui materiali superconduttori	37
C	Minute delle lezioni a.a. 2007-2008	38
C.1	Lezione di giovedì 4 ottobre 2007	38
C.2	Lezione di venerdì 5 ottobre 2007	38
C.3	Lezione di giovedì 11 ottobre 2007	39
C.4	Lezione di giovedì 18 ottobre 2007	39
C.5	Lezione di venerdì 19 ottobre 2007	40

Capitolo 1

Introduzione allo studio delle reti in regime variabile

1.1 Il passaggio dal dominio del tempo al dominio della frequenza

1.1.1 Richiami sulle reti in regime sinusoidale

[Somedà 1977¹² 306+]

Inserire figura bipolo

Nel regime sinusoidale isofrequenziale tutte le grandezze nella rete sono sinusoidali nel tempo, periodiche con un certo periodo T , frequenza $f_0 = \frac{1}{T}$ e pulsazione $\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$$v(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \alpha) = \sqrt{2}V \cos(\omega_0 t + \alpha) \Leftrightarrow \bar{V} = V e^{i\alpha} \quad (1.1)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \beta) = \sqrt{2}I \cos(\omega_0 t + \beta) \Leftrightarrow \bar{I} = I e^{i\beta} \quad (1.2)$$

oppure, alternativamente

$$v(t) = V_M \sin(\omega_0 t + \gamma) = \sqrt{2}V \sin(\omega_0 t + \gamma) \Leftrightarrow \bar{V} = V e^{i\gamma} \quad (1.3)$$

$$i(t) = I_M \sin(\omega_0 t + \delta) = \sqrt{2}I \sin(\omega_0 t + \delta) \Leftrightarrow \bar{I} = I e^{i\delta} \quad (1.4)$$

Si noti che, essendo ad esempio $\cos(\omega_0 t + \alpha) = \sin(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$, e $\gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$, alle due suindicate convenzioni per l'assegnazione dei fasori corrispondono dei valori assegnati ai fasori stessi che sono differenti nei due casi. Tuttavia le relazioni di fase tra due fasori qualsiasi restano invariate (nel caso indicato $\alpha - \beta = \gamma - \delta$).

Per le grandezze sinusoidali valgono le seguenti proprietà:

$$V_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt = 0 \quad \text{valore medio nullo: la grandezze sinusoidali sono grandezze } \textit{alter-nate} \quad (1.5)$$

$$V_{m\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\gamma}{\omega_0}}^{-\frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{T}{2}} v(t) dt = \frac{2}{\pi} V_M \cong 0.6366 V_M \quad \text{valore medio nella semionda } \textit{positiva} \quad (1.6)$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \cong 0.7071 V_M \cong 0.707 V_M \quad \text{valore efficace} \quad (1.7)$$

$$\frac{V}{V_{m\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cong 1.111 \quad \text{fattore di forma} \quad (1.8)$$

In generale le grandezze periodiche a valor medio nullo si dicono *alternate*.

Operazioni con il metodo simbolico [Somedà 1977¹² 318+, 309+]

- Somma tra due fasori
- Prodotto di un fasore per uno scalare costante
- Derivata $d(t) = \frac{d}{dt} a(t) \Leftrightarrow \bar{D} = i\omega_0 \bar{A}$ [Somedà 1977¹² 319]

- Prodotto e rapporto di un fasore per un operatore complesso \dot{Z}
- Prodotto di due fasori \rightarrow pulsazione doppia

Potenza in regime sinusoidale [Someda 1977¹² 330]

Inserire figure Someda 330–333

$$v(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad i(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \beta) \quad \phi = \alpha - \beta \quad \beta = \alpha - \phi \quad \alpha + \beta = 2\alpha - \phi$$

$$p(t) = v(t)i(t) = V_M I_M \cos(\omega_0 t + \alpha) \cos(\omega_0 t + \beta) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega_0 t + \alpha + \beta)]$$

$$= VI \cos \phi + VI \cos(2\omega_0 t + \alpha + \beta)$$

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \text{potenza istantanea} \quad (1.9)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = VI \cos \phi \quad \text{potenza media o reale o attiva} \quad (1.10)$$

$$Q \triangleq VI \sin \phi \quad \text{potenza reattiva} \quad (1.11)$$

$$P_a \triangleq VI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{potenza apparente} \quad (1.12)$$

La potenza reale P è il prodotto del valore efficace della tensione V per il valore della componente $I \cos \phi$, nella direzione di \bar{V} o, ciò che è lo stesso, il prodotto del valore efficace della corrente I per il valore della componente $V \cos \phi$, secondo la direzione di \bar{I} ; essa è altresì il prodotto scalare dei ‘vettori’ \bar{V} ed \bar{I} (Fig nn).

La potenza reattiva Q è il prodotto del valore efficace della tensione V per il valore della componente $I \sin \phi$, nella direzione ortogonale a \bar{V} (o simmetricamente scambiando \bar{I} e \bar{V}) (Fig nn).

La potenza reale P *assorbita dal tratto AMB* (Fig nn) è positiva per $\phi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e negativa per $\phi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$; se positiva, ciò sta ad indicare che il flusso energetico è effettivamente assorbito dal tratto di circuito considerato.

Se la corrente è in ritardo rispetto alla tensione ($\beta < \alpha$, ovvero $\phi > 0$), Q è positiva, altrimenti sarà negativa.

Inserire figura Someda 335

Nel caso di un resistore, $\bar{V} = R\bar{I}$, quindi $\phi = 0$ e $P = VI = \frac{V^2}{R} = RI^2$. Possiamo quindi dire che *il valore efficace di una corrente alternata è uguale al valore di una corrente continua che attraversando una stessa resistenza produce un'eguale quantità di calore nell'intervallo di tempo considerato*. Si verifica facilmente che questo enunciato è valido *comunque vari la corrente nell'intervallo di tempo considerato*, e non solo nel caso sinusoidale.

Nel caso dell'induttore, *pur avendosi circolazione di corrente sotto una definita differenza di potenziale, la potenza media è nulla*. La giustificazione fisica di ciò è la seguente. **Se consideriamo separatamente i quattro quarti di un periodo ... Vedi Someda 342**

La differenza essenziale fra circuito ohmico e circuito induttivo è questa: il circuito ohmico trasforma tutta l'energia che riceve in calore; il circuito induttivo immagazzina sotto forma di energia magnetica ($w_m(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$) tutta l'energia che riceve durante un quarto di periodo ($W_{mM} = \frac{1}{2} LI_M^2$) e la restituisce integralmente nel quarto successivo. Si noti che $Q = \omega_0 W_{mM} = 2\omega_0 W_{m,media}$. [Someda 1977¹² 343]

Analogamente nel caso del capacitore si ha $w_e(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$, $W_{eM} = \frac{1}{2}CV_M^2$, $Q = -\omega_0 W_{eM} = -2\omega_0 W_{e,media}$.

1.2 Serie di Fourier. Spettro di ampiezza e di Fase. Esempi

Grandezze periodiche di periodo T

$$f(t) = f(t+T) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 \quad f\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) = f\left(\frac{\theta+2\pi}{\omega_0}\right) \quad (1.13)$$

La funzione $f(t)$ è periodica di periodo T ; normalizzando rispetto al periodo si ottiene la funzione $g(\theta) = f\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right)$ che è periodica di periodo 2π .

Condizioni di Dirichlet [Bobbio and Gatti 1991² 769]

Si dice che una funzione $f(t)$, periodica con periodo T , soddisfa le *condizioni di Dirichlet*, se è continua nel periodo insieme con la sua derivata $f'(t)$, fatta eccezione eventualmente per un numero finito di punti in cui la $f(t)$ (e/o la $f'(t)$) ha discontinuità di prima specie. (Ciò si può anche esprimere dicendo che $f(t)$ e $f'(t)$ sono generalmente continue e limitate (Fiorenza 1986 vol2 p187))

Teorema B.2.1 [Bobbio and Gatti 1991² 769]

Ogni funzione $f(t)$, periodica con periodo T , soddisfacente le condizioni di Dirichlet, può essere rappresentata dalla seguente serie di Fourier:

$$f(t) \stackrel{qo}{=} \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad qo = \text{quasi ovunque} \quad (1.14)$$

con (le espressioni di destra si ottengono con il cambio di variabili $\omega_0 t = \theta$)

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta \quad \text{valor medio} \quad (1.15)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \cos n\theta d\theta \quad (1.16)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \sin n\theta d\theta \quad (1.17)$$

In altre parole si ha che:

- in ogni punto t in cui la f è continua ed in cui esistono finite la derivata sinistra e la derivata destra della f (in particolare in cui la f è derivabile), la serie di Fourier converge ed ha per somma $f(t)$;
- in ogni punto t in cui la f ha discontinuità di prima specie ed in cui esistono finite la derivata sinistra e la derivata destra della f , la serie di Fourier converge ed ha per somma un valore pari alla media fra il limite sinistro e il limite destro di $f(t)$.

Si noti che le condizioni richieste alla $f(t)$ per la sviluppabilità in serie di Fourier sono *condizioni sufficienti* ma *non necessarie*. L'istante t_0 (o l'angolo $\theta_0 = \omega_0 t_0$) è arbitrario; valori tipici sono ad esempio $t_0 = 0$ o $t_0 = -\frac{T}{2}$ (e corrispondentemente $\theta_0 = 0$ o $\theta_0 = -\pi$).

Il primo termine sinusoidale, di pulsazione ω_0 , è detto *onda fondamentale* o semplicemente *fondamentale*; tutti gli altri termini sinusoidali, di frequenza multipla della fondamentale, che possono essere in numero finito o infinito, sono detti *armoniche* (o *armoniche superiori*).

Verifichiamo l'espressione dei coefficienti dello sviluppo. Calcoliamo ad esempio l'integrale $\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt$. Essendo le due funzioni $f(t) \cos n\omega_0 t$ e $[a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega_0 t + b_m \sin m\omega_0 t)] \cos n\omega_0 t$ uguali quasi ovunque, i loro integrali sono uguali:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} \left[a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega_0 t + b_m \sin m\omega_0 t) \right] \cos n\omega_0 t dt \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} a_0 \cos n\omega_0 t dt}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} a_m \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt}_{=0 \text{ per } m \neq n} + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} b_m \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt}_{=0 \forall m} \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_n \cos^2 n\omega_0 t dt = a_n \frac{T}{2} \end{aligned}$$

cioè $a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt$ come volevasi provare.

1.2.1 Forma compatta

Si consideri il numero complesso $a_n + ib_n$ di modulo C_{nM} e argomento α'_n (se a_n e b_n sono entrambi positivi essi costituiscono i cateti di un triangolo rettangolo, con α'_n angolo adiacente al cateto a_n e ν_n angolo adiacente al cateto b_n , come in Fig nn). La serie di Fourier può essere scritta più concisamente nel seguente modo

$$f(t) \stackrel{\text{qo}}{=} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \sin(n\omega_0 t + \nu_n) \quad (1.18)$$

dove

$$C_0 = a_0 \quad (1.19)$$

$$C_{nM} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} > 0 \quad (1.20)$$

$$\alpha_n = -\alpha'_n = -\arg(a_n + ib_n) = -\arctan \frac{b_n}{a_n} + \pi u_r(a_n) \quad (1.21)$$

$$\nu_n = \frac{\pi}{2} + \alpha_n \quad (1.22)$$

$$u_r(x) = H_0(-x) = \operatorname{sgn} x \frac{\operatorname{sgn} x - 1}{2} = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

avendo indicato con il simbolo \arg l'argomento del numero complesso (anche denotato con \angle), sgn è la funzione segno, definita in §A.1, e u_r è una versione riflessa rispetto all'asse delle ordinate della funzione *gradino unitario di Heaviside* (anch'essa definita in §A.1), per la quale è espressamente specificato che debba valere 0 in $x = 0$.

Inserire figura triangolo rettangolo a_n b_n C_{nM}
 α'_n è l'angolo adiacente al cateto orizzontale a_n e ν_n è l'angolo adiacente al cateto verticale b_n

Infatti, dalla Fig nn si vede che

$$\begin{aligned} C_{nM} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & \frac{a_n}{C_{nM}} &= \cos \alpha'_n & \frac{b_n}{C_{nM}} &= \sin \alpha'_n & \tan \alpha'_n &= \frac{b_n}{a_n} \\ \alpha'_n &= \arg(a_n + ib_n) & &= \arctan \frac{b_n}{a_n} + \pi u_r(a_n) & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t &= C_{nM}(\cos \alpha'_n \cos n\omega_0 t + \sin \alpha'_n \sin n\omega_0 t) \\
&= C_{nM} \cos(n\omega_0 t - \alpha'_n) = C_{nM} \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) = C_{nM} \sin(n\omega_0 t + \nu_n) \\
\alpha_n = -\alpha'_n \quad \nu_n &= \frac{\pi}{2} - \alpha'_n \quad \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Si noti che i coefficienti C_{nM} sono sempre tutti positivi (o nulli), mentre ciò non vale per gli a_n e b_n . L'informazione contenuta nel segno di a_n e b_n è trasferita sulla fase iniziale α_n (o ν_n). C_0 può anche essere negativo.

Considerando i valori efficaci delle singole componenti armoniche $C_n = \frac{C_{nM}}{\sqrt{2}}$ abbiamo

$$f(t) \stackrel{\text{qo}}{=} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} C_n \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) \quad (1.24)$$

1.2.2 Componente continua e componente alternata

$$F_{\text{dc}} \triangleq C_0 = a_0 \quad \text{componente continua} \quad (1.25)$$

$$f_{\text{ac}}(t) \triangleq f(t) - F_{\text{dc}} \quad \text{componente alternata} \quad (1.26)$$

$$f(t) = F_{\text{dc}} + f_{\text{ac}}(t) \quad (1.27)$$

$$f_{\text{ac}}(t) \stackrel{\text{qo}}{=} \frac{f_{\text{ac}}(t^-) + f_{\text{ac}}(t^+)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) \quad (1.28)$$

Esempio [Bobbio and Gatti 1991² 769-770]
Esempio [Somedra 1977¹² 407-408]

1.2.3 Analisi Armonica. Spettro di ampiezza e spettro di fase

La *analisi armonica* di una funzione periodica consiste nella determinazione dei coefficienti C_0 C_n α_n (o ν_n), o equivalentemente dei a_0 a_n b_n .

Le successioni $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ e $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (o $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) sono dette rispettivamente *spettro di ampiezza* e *spettro di fase* della funzione periodica.

1.2.4 Caratteri di simmetria

Molte delle funzioni periodiche che sono di interesse per le applicazioni godono di particolari caratteri di simmetria il cui riconoscimento è importante in quanto permette di escludere la presenza di alcuni termini della serie e di semplificare perciò l'analisi armonica.

[Somedra 1977¹² 405] (incluso il par. "5-94. Esempi" a pag. 406)
[Guarnieri and Stella 2004⁵ 359]
[Rashid 2007¹⁰ 400]

I più importanti caratteri di simmetria sono i seguenti:

1. $f(t)$ è *alternata*, cioè l'area positiva e il modulo dell'area negativa sono uguali $\Rightarrow a_0 = 0$
2. $f(t)$ è *pari*, $f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0 \forall n \Rightarrow$ le armoniche sono tutte coseni ($\forall n: \alpha_n = 0, \pi; \nu_n = \pm \frac{\pi}{2}$)
3. $f(t)$ è *dispari*, $f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_0 = 0$ e $a_n = 0 \forall n \Rightarrow$ la componente continua è nulla e le armoniche sono tutte seni ($\forall n: \alpha_n = \pm \frac{\pi}{2}; \nu_n = 0, \pi$)

4. $f(t)$ presenta una *simmetria a semionda*, cioè la semionda negativa, ribaltata rispetto all'asse delle ascisse, è sovrapponibile con una traslazione alla semionda positiva, $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$, oppure $f(\frac{\theta}{\omega_0}) = -f(\frac{\theta+\pi}{\omega_0}) \Rightarrow a_0 = 0$ e $C_{2k} = 0 \forall k$, mancano la componente continua e tutte le armoniche di ordine pari (ovvero per $n = 2, 4, 6, \dots$), e sono presenti solo le armoniche di ordine dispari (ovvero per $n = 1, 3, 5, \dots$)

Esempio

Inserire figura dente di sega alternato, fatto di una successione di triangoli rettangoli positivi e negativi

5. $f(t)$ presenta una *simmetria a quarto d'onda*, $f(t) = -f(t + \frac{T}{4})$, oppure $f(\frac{\theta}{\omega_0}) = -f(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{\omega_0})$ [Rashid 2007¹⁰ 401]
6. sia la prima semionda ($0 < t < \frac{T}{2}$) che la seconda semionda ($\frac{T}{2} < t < T$) *si compongono di due parti simmetriche rispetto al proprio asse verticale centrale*, cioè $f(t) = f(\frac{T}{2} - t)$ per $0 < t < \frac{T}{2}$, e $f(t) = f(\frac{3}{2}T - t)$ per $\frac{T}{2} < t < T$
 (in termini indipendenti dal periodo cioè si scrive $f(\frac{\theta}{\omega_0}) = f(\frac{\pi-\theta}{\omega_0})$ per $0 < \theta < \pi$, e $f(\frac{\theta}{\omega_0}) = f(\frac{3\pi-\theta}{\omega_0})$ per $\pi < \theta < 2\pi$)
 $\Rightarrow a_n = 0 \forall n$, mancano tutti i termini in coseno, cioè tutte le armoniche hanno valore nullo nei nodi della fondamentale
 caso c) su [Someda 1977¹² 405-6], da verificarne il senso/significato
 ho verificato che $\int_0^\pi f(\frac{\theta}{\omega_0}) \cos n\theta d\theta = (1 + (-1)^n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\frac{\theta}{\omega_0}) \cos n\theta d\theta$, cioè vale zero solo per n dispari
 devo verificare che lo stesso vale per $\int_\pi^{2\pi} f(\frac{\theta}{\omega_0}) \cos n\theta d\theta$ (per $n = 1$ direi che è visivamente immediato)

Esempi

Inserire figura con prima semionda a trapezio positivo e asse centrale a $t = \frac{T}{4}$, e seconda semionda a triangolo negativo e asse centrale a $t = \frac{3}{4}T$

Inserire figura dell'andamento della corrente raddrizzata da un raddrizzatore a singola semionda

$$i(t) = \begin{cases} I_M \sin \omega_0 t & \text{quando } \sin \omega_0 t \geq 0 \\ 0 & \text{quando } \sin \omega_0 t < 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

$$= I_M \frac{\sin \omega_0 t + |\sin \omega_0 t|}{2} \quad (1.30)$$

Inserire figura con prima semionda come parte positiva del seno, e seconda semionda come parte negativa del seno ma con ampiezza ridotta

$$i(t) = \begin{cases} I_M \sin \omega_0 t & \text{quando } \sin \omega_0 t \geq 0 \\ \frac{I_M}{3} \sin \omega_0 t & \text{quando } \sin \omega_0 t < 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

$$= I_M \frac{\sin \omega_0 t + |\sin \omega_0 t|}{2} + \frac{I_M}{3} \frac{\sin \omega_0 t - |\sin \omega_0 t|}{2} \quad (1.32)$$

1.2.5 Troncamento della serie di Fourier

La serie di Fourier può avere un numero infinito di armoniche. Se alla somma infinita si sostituisce la somma finita delle sole armoniche di ordine fino a k , si introduce un errore di troncamento che è tipicamente tanto più contenuto quanto maggiore è k .

Dato che le funzioni periodiche di interesse applicativo presentano armoniche di ampiezze rapidamente decrescenti all'aumentare dell'ordine n , limitando la somma a poche armoniche inferiori (spesso sono sufficienti le prime tre o quattro armoniche), si introduce un'approssimazione generalmente accettabile.

esempio [Guarnieri and Stella 2004 ⁵ 360]

1.2.6 Forma esponenziale

È possibile scrivere la serie di Fourier nella seguente *forma esponenziale*

$$f(t) \stackrel{\text{qo}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n e^{in\omega_0 t} \quad (1.33)$$

con coefficienti complessi

$$\bar{F}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f(\omega_0 t) e^{-in\omega_0 t} d(\omega_0 t) \quad (1.34)$$

Infatti, dalla $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (che in questo contesto possiamo considerare come la definizione di esponenziale con argomento immaginario) e conseguente $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, si ricavano le seguenti

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{formule di Eulero} \quad (1.35)$$

e si ha

$$C_{nM} \cos(n\omega_0 t - \alpha'_n) = C_{nM} \frac{e^{i(n\omega_0 t - \alpha'_n)} + e^{-i(n\omega_0 t - \alpha'_n)}}{2} = \frac{C_{nM}}{2} e^{-i\alpha'_n} e^{in\omega_0 t} + \frac{C_{nM}}{2} e^{i\alpha'_n} e^{-in\omega_0 t}$$

Ponendo

$$\bar{F}_0 \triangleq a_0 \quad \bar{F}_n \triangleq \frac{C_{nM}}{2} e^{-i\alpha'_n}, \text{ per } n > 0 \quad \bar{F}_n \triangleq \check{F}_{|n|}, \text{ per } n < 0$$

si ottiene

$$C_{nM} \cos(n\omega_0 t - \alpha'_n) = \bar{F}_n e^{in\omega_0 t} + \check{F}_n e^{-in\omega_0 t}$$

$$f(t) \stackrel{\text{qo}}{=} \bar{F}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{F}_n e^{in\omega_0 t} + \check{F}_n e^{-in\omega_0 t}) = \bar{F}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_n e^{in\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \check{F}_{|n|} e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{F}_n e^{in\omega_0 t}$$

Di converso risulta, per $n > 0$

$$\begin{aligned} \bar{F}_n &= \frac{C_{nM}}{2} e^{-i\alpha'_n} = \frac{C_{nM} \cos \alpha'_n - i C_{nM} \sin \alpha'_n}{2} = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

e anche, per $n < 0$

$$\begin{aligned} \bar{F}_n = \check{F}_{|n|} &= \frac{C_{|n|M}}{2} e^{i\alpha'_{|n|}} = \frac{C_{|n|M} \cos \alpha'_{|n|} + i C_{|n|M} \sin \alpha'_{|n|}}{2} = \frac{a_{|n|} + ib_{|n|}}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos |n|\omega_0 t dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin |n|\omega_0 t dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i|n|\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

La () consente di associare ad una data $f(t)$ una successione di numeri complessi \bar{F}_n , e questa permette a sua volta, tramite la (), di *ricostruire* la $f(t)$. La () può dunque essere riguardata come una operazione che trasforma la funzione *reale* $f(t)$ della variabile continua t in una funzione *complessa* \bar{F}_n della variabile *discontinua* n , mentre la () può essere interpretata come l'operazione inversa.

Ai fini delle applicazioni sono infine molto importanti i seguenti due teoremi:

derivabilità e integrabilità termine a termine, vedi Teorema B.2.1 [Bobbio and Gatti 1991² 771-2]

1.3 Integrale di Fourier

1.3.1 Rappresentazione di una funzione non periodica

[Balestrino and Celentano 1982¹ 148-150]
 Esempi [Bobbio and Gatti 1991² 773-5]
 [Ghizzetti and Ossicini 1971³]

La scomposizione di una funzione in un intervallo secondo la serie di Fourier può essere applicata anche per intervalli *molto ampi*. Ovvero si può pensare di considerare, per una funzione non periodica $f(t)$, il procedimento limite relativo alla scomposizione per un intervallo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ con $T \rightarrow \infty$. In tal caso la pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ tende a zero, e si può immaginare di sostituire una variabile continua ω alla variabile discontinua $n\omega_0$. Si comprende allora come la distribuzione delle armoniche tenda ad essere una distribuzione continua lungo l'asse ω . La formula di scomposizione implicherà, anziché la sommatoria di termini di valore finito, una conveniente integrazione.

Si dimostra infatti che, *condizione sufficiente* affinché la suddetta estensione al caso delle funzioni non periodiche sia valida è che la funzione $f(t)$ verifichi le condizioni di Dirichlet in ogni intervallo limitato dell'asse reale e che, inoltre, f sia *sommabile*, cioè esista e sia finito l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$.

Effettuando formalmente le sostituzioni sopra indicate si ottiene (in luogo della (?.?.?))

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (1.36)$$

con

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad \text{e} \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad \omega \geq 0 \quad (1.37)$$

Osserviamo che il termine A_0 è scomparso dalla (?.?.?), essendo ciò legato all'ipotesi di sommabilità della f .

Tali relazioni sono utili quando si voglia collegare il comportamento di un sistema elettrico sottoposto ad un regime qualsiasi al suo comportamento in regime sinusoidale.

Analogamente, la (?.?.?) diventa

$$f(t) = \int_0^{\infty} C(\omega) \cos(\omega t - \varphi'(\omega)) d\omega \quad (1.38)$$

dove (Fig nn)

$$C(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} > 0 \quad (1.39)$$

$$\varphi'(\omega) = \arg(a(\omega) + ib(\omega)) = \arctan \frac{b(\omega)}{a(\omega)} + \pi u_r(a(\omega)) \quad (1.40)$$

Inserire figura triangolo $a(\omega)$ $b(\omega)$ $C(\omega)$ $\varphi'(\omega)$

e, infine, la (1.41) diventa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.41)$$

con

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \omega \in R \quad (1.42)$$

L'integrale a secondo membro della (1.41) consente quindi di passare dalla funzione reale $f(t)$ alla funzione complessa $F(\omega)$: questa è detta *trasformata di Fourier* di $f(t)$, e si indica anche con $\mathcal{F}f(t)$. L'operazione di antitrasformazione si indica con \mathcal{F}^{-1} .

Si verifica che la parte reale $\Re F(\omega)$ di $F(\omega)$ è una funzione pari, mentre il coefficiente della parte immaginaria $\Im F(\omega)$ è dispari, e analogamente per il modulo $M(\omega) = |F(\omega)|$ e l'argomento $\varphi(\omega) = \angle F(\omega)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \\ &= \underbrace{\Re F(\omega)}_{\text{pari}} + i \underbrace{\Im F(\omega)}_{\text{dispari}} = |F(\omega)| e^{i\angle F(\omega)} = \underbrace{M(\omega)}_{\text{pari}} e^{i \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{dispari}}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

A $M(\omega)$ si dà il nome di *spettro di ampiezza* della $f(t)$; a $\varphi(\omega)$ quello di *spettro di fase*.

Segue anche che $F(-\omega) = F^*(\omega)$, dunque

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= - \int_{\infty}^0 F(-\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} F^*(\sigma) e^{-i\sigma t} d\sigma + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \left(\int_0^{\infty} F(\sigma) e^{i\sigma t} d\sigma \right)^* + \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\Re \left(\int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) \end{aligned}$$

e pertanto la (1.41) può essere riscritta nella forma

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re[F(\omega) e^{i\omega t}] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re[|F(\omega)| e^{i \arg F(\omega)} e^{i\omega t}] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \arg F(\omega)] d\omega$$

Confrontando quest'ultima con la (1.42) si ottiene

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} |F(\omega)| = \frac{1}{\pi} M(\omega) \quad (1.44)$$

$$\varphi'(\omega) = -\arg F(\omega) = -\varphi(\omega) \quad (1.45)$$

1.3.2 Proprietà e applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier

Le proprietà che enunceremo con riferimento all'integrale di Fourier (e alla trasformata omonima) di una funzione aperiodica valgono naturalmente anche per la serie di Fourier di una funzione periodica.

Proprietà (linearità, derivazione): [Bobbio and Gatti 1991² 775+]

Cenni sulle applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier: [Bobbio and Gatti 1991² 775+]

Se $f(t)$ è non derivabile, discontinua di prima specie, nei punti $t = t_i$, $i = 1, \dots, n$, e la derivata $\frac{df}{dt}$ è intesa *in senso classico* (piuttosto che *nel senso delle distribuzioni* o *funzioni generalizzate*, come vedremo in seguito), allora risulta

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega) - \sum_{i=1}^n [f(t_i^+) - f(t_i^-)]e^{-i\omega t_i} \quad (1.46)$$

Ad esempio

$$f(t) = \begin{cases} ae^{t-t_1} & t < t_1 \\ be^{-(t-t_1)} & t > t_1 \end{cases} \quad \frac{df}{dt} = \begin{cases} ae^{t-t_1} & t < t_1 \\ -be^{-(t-t_1)} & t > t_1 \end{cases} \quad (1.47)$$

$$F(\omega) = \frac{a+b+i\omega(a-b)}{1+\omega^2}e^{-i\omega t_1} \quad \mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{a-b+i\omega(a+b)}{1+\omega^2}e^{-i\omega t_1} \quad (1.48)$$

e si verifica immediatamente che $i\omega F(\omega) - (b-a)e^{-i\omega t_1}$ risulta uguale a $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right)$.

Se invece $f(t)$ è non derivabile, ma continua, nei punti $t = t_i$, allora ovviamente discende $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega)$.

Come vedremo, se la derivata $\frac{df}{dt}$ è intesa nel senso della teoria delle funzioni generalizzate, la (?.?) non si applica, e resta valida soltanto la $\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right) = i\omega F(\omega)$, anche per funzioni non derivabili in senso classico.

Aggiungere proprietà [Balestrino and Celentano 1982¹ 149]

1.3.3 Esempi di trasformate

Nell'ambito della teoria delle distribuzioni praticamente tutte le funzioni sono dotate di trasformata di Fourier.

far vedere che l'integrale $\mathcal{F}1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$ non esiste in senso classico

$$\mathcal{F}1 = 2\pi\delta(\omega) \quad (1.49)$$

$$\mathcal{F}1(t) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \quad (1.50)$$

$$\mathcal{F}\delta(t) = 1 \quad (1.51)$$

$$\mathcal{F}e^{i\omega_0 t} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (1.52)$$

$$\mathcal{F}\sin\omega_0 t = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}\right) = -i\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (1.53)$$

$$\mathcal{F}\cos\omega_0 t = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}\right) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (1.54)$$

$$\mathcal{F}\sin(\omega_0 t + \alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i(\omega_0 t + \alpha)} - e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}}{2i}\right) = -i\pi[\delta(\omega - \omega_0)e^{i\alpha} - \delta(\omega + \omega_0)e^{-i\alpha}] \quad (1.55)$$

$$\mathcal{F}\cos(\omega_0 t + \alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{i(\omega_0 t + \alpha)} + e^{-i(\omega_0 t + \alpha)}}{2}\right) = \pi[\delta(\omega - \omega_0)e^{i\alpha} + \delta(\omega + \omega_0)e^{-i\alpha}] \quad (1.56)$$

Trasformate di funzioni frequentemente utilizzate su [Balestrino and Celentano 1982¹ 149-150]

1.3.4 Trasformata di Fourier di una funzione periodica

Esempio

$f(t)$ funzione periodica \Rightarrow è sviluppabile in serie di Fourier.

$$f(t) \stackrel{\text{qo}}{=} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \cos(n\omega_0 t + \alpha_n) \quad (1.57)$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left(C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \cos(n\omega_0 t + \alpha_n)\right) = 2\pi C_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} C_{nM} \pi [\delta(\omega - n\omega_0) e^{i\alpha_n} + \delta(\omega + n\omega_0) e^{-i\alpha_n}] \quad (1.58)$$

Se ad esempio $C_0 = 1$, $C_{nM} = \frac{1}{n}$ e $\alpha_n = 0$

Inserire figura spettro a righe

Spettro continuo e spettro a righe

La serie di Fourier è un caso particolare della trasformata di Fourier

1.4 Reti elettriche in regime periodico

1.4.1 Tensioni e/o correnti non sinusoidali

Bipoli in regime periodico non sinusoidale [Guarnieri and Stella 2004⁵ 360]
 Caso lineare: principio di sovrapposizione degli effetti [Someda 1977¹² 408], [Guarnieri and Stella 2004⁵ 364]
 Caso non lineare: inquinamento armonico, anche se i forzamenti sono sinusoidi pure e isofrequenziali [Guarnieri and Stella 2004⁵ 360]
 Generatori di tensione in serie e generatori di corrente in parallelo [Guarnieri and Stella 2004⁵ 364]
 Esempio [Someda 1977¹² 409-10]: serie RL alimentata da un generatore di tensione

1.4.2 Generalizzazione del metodo simbolico. Esempi

1.4.3 Valore efficace. Espressione armonica della potenza

Valore efficace

Inserire figura generatore di tensione

$$e(t) \stackrel{\text{qo}}{=} E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{nM} \sin(n\omega_0 t + \gamma_n) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\omega_0 t + \gamma_n) \quad (1.59)$$

$$E = E_{\text{rms}} \triangleq \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^2\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta} \quad (1.60)$$

Infatti, facendo uso della appropriata formula di Werner

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \quad \sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2} \quad \cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2} \quad (1.61)$$

si ha

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+T} e^2(t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} \left[E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\omega_0 t + \gamma_n) \right] \left[E_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} E_m \sin(m\omega_0 t + \gamma_m) \right] dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} E_0^2 dt + 2 \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_n \sin(n\omega_0 t + \gamma_n) dt}_{=0} + \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 E_n E_m \sin(n\omega_0 t + \gamma_n) \sin(m\omega_0 t + \gamma_m) dt \\
&= T E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_n E_m \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\underbrace{\cos((n-m)\omega_0 t + \gamma_n - \gamma_m)}_{\text{non dà contributo per } n \neq m} - \underbrace{\cos((n+m)\omega_0 t + \gamma_n + \gamma_m)}_{\text{non dà contributo } \forall n, m} \right] dt \\
&= T E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2 \int_{t_0}^{t_0+T} dt = T E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} T E_n^2 = T \sum_{n=0}^{\infty} E_n^2
\end{aligned}$$

$$E = E_{\text{rms}} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} E_n^2} = \sqrt{E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2} = \sqrt{E_{\text{dc}}^2 + E_{\text{ac}}^2} \quad (1.62)$$

$$E_{\text{ac}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} E_n^2} \quad \text{valore efficace della componente alternata} \quad (1.63)$$

Il valore efficace di una grandezza periodica è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci dei termini della serie di Fourier.

Potenza attiva e reattiva

Inserire figura bipolo

$$p(t) = v(t)i(t) \quad \text{potenza istantanea} \quad (1.64)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} p\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta \quad \text{potenza media o reale o attiva} \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} v\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) i\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta &= \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left[V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} V_n \sin(n\theta + \alpha_n) \right] \left[I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} I_m \sin(m\theta + \beta_m) \right] d\theta \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} V_0 I_0 d\theta + \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} V_0 \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{2} I_m \sin(m\theta + \beta_m) d\theta}_{=0} + \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} I_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} V_n \sin(n\theta + \alpha_n) d\theta}_{=0} \\
&\quad + \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 V_n I_m \sin(n\theta + \alpha_n) \sin(m\theta + \beta_m) d\theta \\
&= V_0 I_0 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_n I_m \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \underbrace{\left[\cos((n-m)\theta + \alpha_n - \beta_m) - \cos((n+m)\theta + \alpha_n + \beta_m) \right]}_{=0 \text{ per } n \neq m} d\theta \quad \text{prima formula di Werner} \\
&= V_0 I_0 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} [\cos(\alpha_n - \beta_n) - \cos(2n\theta + \alpha_n + \beta_n)] d\theta \\
&= V_0 I_0 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \cos \phi_n dt \quad \phi_n = \alpha_n - \beta_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V_0 I_0 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \phi_n 2\pi \\
P &= V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \phi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$P_n = V_n I_n \cos \phi_n$ è la potenza attiva associata alla n -esima armonica e $\cos \phi_n$ ne è il fattore di potenza.

L'espressione stabilisce che in regime periodico la potenza attiva è pari alla somma della potenza in continua e delle potenze associate alle singole armoniche.

A prima vista tale conclusione appare sorprendente, perchè ammette la sovrapposizione delle potenze che in generale (e ad esempio in termini di potenze istantanee) non è valida. Tale proprietà deriva dal fatto che gli integrali dei prodotti di armoniche di tensione e corrente aventi ordine diverso forniscono contributo nullo alla potenza media in un periodo.

Come esempio chiarificatore preliminare si può riportare l'espressione di $p(t)$ nel caso in cui sono presenti solo la componente continua e la fondamentale [come in Chua, Desoer, Ku]

In analogia si definisce la potenza reattiva

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \sin \phi_n \tag{1.67}$$

Si noti che, se ad esempio la tensione non è distorta, solo la V_1 è non nulla, cioè $v(t) = \sqrt{2}V_1 \sin(n\omega_0 t + \alpha_1)$, e risulta $P = V_1 I_1 \cos \phi_1$ e $Q = V_1 I_1 \sin \phi_1$.

Potenza apparente

$$P_a = VI = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} I_m^2} = \sqrt{(V_0^2 + V_{ac}^2)(I_0^2 + I_{ac}^2)} \tag{1.68}$$

$$P_a^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \tag{1.69}$$

$$P_a^2 = P^2 + N^2 \tag{1.70}$$

Potenza deformante

$$\phi_0 \triangleq 0 \Rightarrow P = \sum_{n=0}^{\infty} V_n I_n \cos \phi_n \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} V_n I_n \sin \phi_n$$

$$P_a^2 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \sum_{m=0}^{\infty} I_m^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n^2 I_m^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(V_n^2 I_n^2 + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n^2 I_m^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 I_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n^2 I_m^2$$

$$P^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos \phi_n \cos \phi_m$$

$$Q^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \sin \phi_n \sin \phi_m$$

$$P^2 + Q^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 I_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m)$$

$$D^2 = P_a^2 - P^2 - Q^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n^2 I_m^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} (V_n^2 I_m^2 + V_m^2 I_n^2) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m)$$

$$D^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} [V_n^2 I_m^2 - V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m)] \quad (1.71)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} [V_n^2 I_m^2 + V_m^2 I_n^2 - 2V_n I_n V_m I_m \cos(\phi_n - \phi_m)] \quad (1.72)$$

la sommatoria è estesa a tutte le coppie di armoniche di ordine n e m (con $n \neq m$).

Se risulta $\frac{V_n}{I_n} = \frac{V_m}{I_m}$ e $\phi_n = \phi_m \forall n, m$, allora $D = 0$. Ciò si verifica quando il bipolo è un resistore, per cui si ha anche $Q = 0$ e $|P| = P_a$. In tutti gli altri casi D è diversa da zero e la forma d'onda della corrente assorbita dal bipolo non è simile a quella della tensione ad esso applicata [Someda 1977¹² 413].

Esempio: potenza media assorbita da un resistore

Inserire figura resistore

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (1.73)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} Ri^2(t) dt = RI^2 = R \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \quad (1.74)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{V^2}{R} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2}{R} \quad (1.75)$$

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad V^2 = R^2 I^2 \quad V = RI \quad P = VI = P_a \quad (1.76)$$

La potenza media assorbita da un induttore o da un capacitore è zero.

Si ricordi quanto detto in precedenza riguardo il significato fisico del valore efficace

Potenza non attiva

$$N = \sqrt{P_a^2 - P^2} \quad (1.77)$$

Fattore di potenza

$$\cos \phi = \frac{P}{P_a} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + N^2}} \leq 1 \quad (1.78)$$

in questo contesto $\cos \phi$ è un mero simbolo privo di significato trigonometrico.

Esempio [Someda 1977¹² 413+], dove si vede come, in presenza di armoniche, cio' che rende la potenza apparente diversa dalla potenza attiva non è la sola potenza reattiva, ma è qualcosa di più grande

1.4.4 Principali effetti dell'inquinamento armonico

- Sottoutilizzo della potenza apparente P_a (che in teoria sarebbe tutta disponibile, utilizzabile), e conseguenti maggiori perdite sulle linee
- Le armoniche costituiscono disturbi indesiderati, in particolare (ma non solo) nelle frequenze audio
- ora [Guarnieri and Stella 2004⁵ 360-3]
- cenni su rifasamento e compensazione delle armoniche

Capitolo 2

Convertitori Statici

appunti aq 9+

2.1 Generalità

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 89]

2.2 Componenti dei convertitori

2.2.1 Diodo ideale. Modello circuitale del diodo ideale

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 89]
[Sedra and Smith 1991¹¹ 117]

esempio Diode OR Gate: battery backup [Horowitz and Hill 1989⁷ 49]

2.2.2 Diodo reale. Caratteristica corrente-tensione

inserire figura [Grove 1993⁴ 195]
inserire figura [Horowitz and Hill 1989⁷ 44]

I componenti considerati in precedenza, come resistore, induttore e condensatore (con R , L e C costanti) sono lineari, per cui raddoppiando l'ampiezza della tensione applicata ad esempio ad un resistore, raddoppierà la corrente in esso circolante.

Il diodo è invece un componente non lineare, per cui nelle reti in cui sono presenti diodi si generano armoniche diverse da quelle imposte dai generatori. In una rete contenente diodi non si può applicare il teorema di Thevenin/Norton, o meglio lo si può applicare ad una sottorete non contenente diodi.

2.2.3 Cenni sui dispositivi a semiconduttore

[Mencuccini and Silvestrini 1988⁸ 531+]
[Sedra and Smith 1991¹¹ 169,1055]
[Grove 1993⁴]
[Sze 1991¹⁴ 1]
[Soncini 1986¹³]
Millman
Millman-Halkias

- valori tipici di conducibilità per isolanti, semiconduttori e conduttori
- elettroni nei singoli atomi isolati
- quantizzazione dell'energia
- principio di esclusione di Pauli

- elettroni nei solidi
- bande permesse e bande proibite
- distribuzione statistica degli elettroni nei livelli energetici permessi secondo la legge di distribuzione di Fermi-Dirac
- nell'occupare i livelli energetici permessi gli elettroni, avendo spin semi-intero, debbono comunque soddisfare il principio di Pauli. Essi tendono inoltre a sistemarsi assumendo gli stati di minima energia
- conduzione nei solidi. l'intervallo di variabilità della resistività (Fig 2.1 [Sze 1991¹⁴ 1]) copre più di 25 ordini di grandezza: $\sim 10^{-8} \Omega\text{m}$ per il rame, $\sim 10^{16} \Omega\text{m}$ per il quarzo fuso (SiO_2)

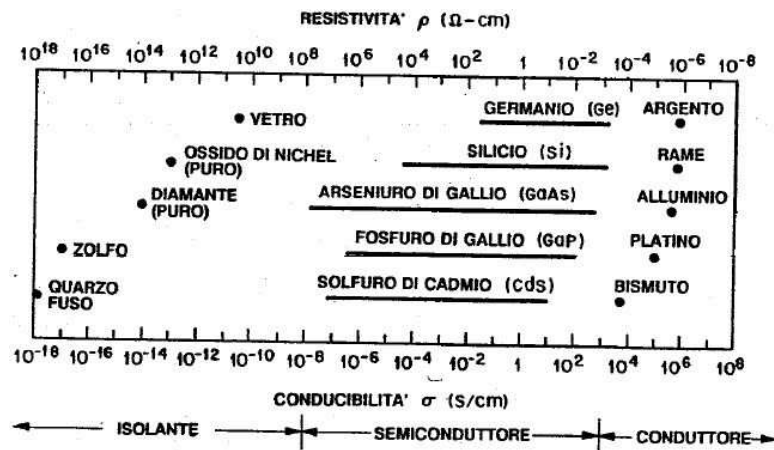


Figura 2.1 Valori tipici di resistività per isolanti, semiconduttori e conduttori

- nei semiconduttori la banda di valenza è separata da quella di conduzione da una banda proibita (gap) di ampiezza E_G nel mezzo della quale cade l'energia di Fermi E_F

2.2.4 Drogaggio dei semiconduttori e giunzione pn

2.2.5 Diodo a semiconduttore

[Guarnieri and Stella 2004⁵ 36]

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 89-92]

[Rashid 2007¹⁰ 4]

[Rashid 2007¹⁰ 10-12]

2.2.6 Corrente massima diretta e tensione massima inversa. Potenza nominale

La corrente massima diretta $I_{F\max}$ e tensione massima inversa $V_{R\max}$ sono specificate dal produttore.

Tensione e corrente nominale diretta $V_F @ I_F$

valore tipico $V_F = 0.7 \text{ V}$

valore tipico $V_F = 0.4 \text{ V}$ per i diodi Schottky, che sono diodi veloci, utili in certe applicazioni

valore tipico $V_F = 1.1 \text{ V}$ per i diodi di potenza

$V_{R\max} = 600 - 1200 \text{ V}$ per i nuovi diodi Schottky SiC, veloci

vedi [Rashid 2007¹⁰ 4]

Potenza nominale di un diodo reale $V_{R\max} I_{F\max}$

2.2.7 Caratteristica esponenziale corrente-tensione (equazione di Shockley)

[Rashid 2007¹⁰ 35]

Dipendenza della curva $i(v)$ dalla temperatura $-2\text{mV}/^\circ\text{C}$

$$I_S \propto n_i^2 \propto T^3 e^{-\frac{E_{G0}}{KT}} \Rightarrow i \propto T^3 e^{-\frac{E_{G0}-qV}{KT}} \quad (2.1)$$

inserire figura [Sedra and Smith 1991¹¹ 128]

2.2.8 Modelli semplificati del diodo reale e circuiti equivalenti. Esempio

[Sedra and Smith 1991¹¹ 132+]

inserire figure [Sedra and Smith 1991¹¹ 133,134]

La caratteristica del diodo ...

$$i_D = \frac{u^{(-1)}(v_D - V_{D0})}{r_F} = \begin{cases} 0 & v_D \leq V_{D0} \\ \frac{v_D - V_{D0}}{r_F} & v_D > V_{D0} \end{cases} \quad (2.2)$$

dove $u^{(-1)}$ è la funzione *rampa unitaria*, definita in §A.1, e r_F è la resistenza differenziale in modalità forward del modello semplificato del diodo, $r_F = \left. \frac{dv_D}{di_D} \right|_{v_D > V_{D0}}$. Nel limite $r_F \rightarrow 0$ la semiretta inclinata diventa verticale.

inserire figure [Sedra and Smith 1991¹¹ 135]

- Corretta polarizzazione del diodo (circuito esterno tale da non far danneggiare il diodo, ad esempio resistenza in serie che limiti la corrente) [Sedra and Smith 1991¹¹ 118], appunti miei 9
- Caduta di tensione diretta V_D

2.2.9 Cenni sull'uso del diodo come generatore di tensione di riferimento

- in configurazione forward [Sedra and Smith 1991¹¹ 142+]
- operazione in regione di breakdown - diodo Zener (Clarence Melvin Zener descrisse questa proprietà) [Sedra and Smith 1991¹¹ 144+]

2.2.10 Comportamento in commutazione

[Rashid 2007¹⁰ 38+]

Tempo di recupero inverso (*reverse recovery time*) t_{rr}

Tempo di recupero diretto (*forward recovery time*) o tempo di accensione (*turn on time*) t_{fr}

Per *ideale* si intende un diodo che, oltre ad avere la caratteristica $i-v$ ideale vista prima, e con tensione di soglia diretta $V_D = 0$, abbia anche il tempo di recupero inverso $t_{rr} = 0$. [Rashid 2007¹⁰ 42,63]

2.2.11 Tiristore (o SCR) ideale. Modello del tiristore ideale

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 94-6]

2.2.12 Argomenti accennati

- Panoramica sui vari tipi di diodi (PiN, Schottky, Schottky SiC) e parametri caratteristici tipici [Rashid 2007¹⁰ n]

2.3 Conversione ac-dc

La conversione alternata-continua consiste nel trasformare tensioni e correnti alternate in tensioni e correnti unidirezionali. I circuiti più semplici, che impiegano semplici diodi, consentono di ottenere tensioni e correnti unidirezionali di valore non regolabile; si parla allora semplicemente di *conversione ac/dc* o *raddrizzamento*.

Circuiti più complessi, che utilizzano ad esempio tiristori, permettono di ottenere tensioni e correnti di valore regolabile entro un certo campo; in questo caso si parla di *conversione controllata ac/dc* o *raddrizzamento controllato*.

inserire figura schema a blocchi di un circuito raddrizzatore (trasformatore, diodi, filtro, regolatore di tensione, carico), preso da [Sedra and Smith 1991¹¹ 151], ma aggiungendo il blocco filtro all'ingresso che attenua le armoniche in entrambe le direzioni

inserire figure UPS e schema generico di conversione di potenza [Rashid 2007¹⁰ 24,27]

Effetti indesiderati [Rashid 2007¹⁰ 25]

2.3.1 Analisi del circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda

[Rashid 2007¹⁰ 63]

Marino 7-8

interessante su [Sedra and Smith 1991¹¹ 153]

- corrente unidirezionale in linea [Rashid 2007¹⁰ 64]
- *tensione inversa di picco (peak inverse voltage)* sui diodi $PIV = V_M$
- analisi armonica nel caso in cui il diodo è considerato ideale [Rashid 2007¹⁰ p72 esempio 3.3]

$$\begin{aligned}
 v_s(t) &= V_M \sin \omega_0 t \\
 v_o(t) &= \begin{cases} V_M \sin \omega_0 t & \text{quando } \sin \omega_0 t \geq 0, \text{ cioè } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \text{ cioè } 0 \leq \omega_0 t \leq \pi \\ 0 & \text{quando } \sin \omega_0 t \leq 0, \text{ cioè } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \text{ cioè } \pi \leq \omega_0 t \leq 2\pi \end{cases} \\
 &= u^{(-1)}(v_s(t)) = V_M \frac{\sin \omega_0 t + |\sin \omega_0 t|}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v_o(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_M \sin \theta d\theta = \frac{V_M}{2\pi} [-\cos \theta]_0^\pi = -\frac{V_M}{2\pi} [-1 - 1] = \frac{V_M}{\pi} \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_M \sin \theta \cos n\theta d\theta \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [\sin(1-n)\theta + \sin(1+n)\theta] d\theta \quad \begin{array}{l} \text{seconda} \\ \text{formula} \\ \text{di Werner} \end{array} \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta] d\theta}_{= 0 \text{ per } n=1} \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} \right]_0^\pi = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right] \\
&\begin{cases} a_{2k+1} = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{2k+2}}{2k+2} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} \right] = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1-1}{2k+2} + \frac{1-1}{2k} \right] = 0 & n = 2k+1 \text{ (n dispari)} \\ a_{2k} = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)^{2k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k-1} - 1}{2k-1} \right] = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{1 - (-1)}{2k+1} + \frac{(-1) - 1}{2k-1} \right] = -\frac{V_M}{\pi} \frac{2}{(2k)^2 - 1} & n = 2k \text{ (n pari)} \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_M \sin \theta \sin n\theta d\theta \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(1-n)\theta - \cos(1+n)\theta] d\theta \quad \begin{array}{l} \text{prima} \\ \text{formula} \\ \text{di Werner} \end{array} \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] d\theta \\
&= \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right]_0^\pi = \frac{V_M}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\pi - 0}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\pi - 0}{n+1} \right] = 0 \quad n \geq 2 \\
b_1 &= \frac{V_M}{2\pi} \int_0^\pi [1 - \cos 2\theta] d\theta = \frac{V_M}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_o(t) &= \frac{V_M}{\pi} + \frac{V_M}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2V_M}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 2k\omega_0 t \\
&= \frac{V_M}{\pi} + \frac{V_M}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2V_M}{3\pi} \cos 2\omega_0 t - \frac{2V_M}{15\pi} \cos 4\omega_0 t - \frac{2V_M}{35\pi} \cos 6\omega_0 t - \dots \quad (2.3)
\end{aligned}$$

2.3.2 Parametri prestazionali

[Rashid 2007¹⁰ 64]

- valor medio della tensione d'uscita (di carico)

$$V_{dc}$$

- valor medio della corrente d'uscita (di carico)

$$I_{dc}$$

- potenza d'uscita in continua

$$P_{dc} = V_{dc} I_{dc}$$

- valore efficace (*root-mean-square, rms*) della tensione d'uscita

$$V_{\text{rms}}$$

- valore efficace della corrente d'uscita

$$I_{\text{rms}}$$

- potenza apparente d'uscita

$$P_{\text{ao}} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$$

- efficienza (o rapporto di raddrizzamento)

$$\eta = \frac{P_{\text{dc}}}{P_{\text{ao}}}$$

- valore efficace della componente alternata della tensione d'uscita

$$V_{\text{ac}} = \sqrt{V_{\text{rms}}^2 - V_{\text{dc}}^2}$$

- fattore di forma (*form factor*)

$$FF = \frac{V_{\text{rms}}}{V_{\text{dc}}}$$

- fattore di ripple (*ripple factor*, letteralmente 'fattore di ondulazione')

$$RF = \frac{V_{\text{ac}}}{V_{\text{dc}}} = \sqrt{\frac{V_{\text{rms}}^2}{V_{\text{dc}}^2} - 1} = \sqrt{FF^2 - 1}$$

(attenzione: la definizione di fattore di ondulazione data su [Guarnieri and Stella 2003⁶ 100] e' diversa, talvolta piu' facile da calcolare, ma meno corretta a mio parere)

- angolo di spostamento

$$\phi_1$$

è l'angolo di sfasamento fra le componenti fondamentali della corrente di ingresso $i_s(t)$ e della tensione di ingresso $v_s(t)$

- fattore di spostamento (*displacement factor*) o fattore di potenza di spostamento (*displacement power factor*)

$$DF = DPF = \cos \phi_1$$

- fattore armonico (*harmonic factor*) o distorsione armonica totale (*total harmonic distortion*)

$$HF = THD = \sqrt{\frac{I_s^2 - I_{s1}^2}{I_{s1}^2}} = \sqrt{\frac{I_s^2}{I_{s1}^2} - 1}$$

dove I_s è il valore efficace della corrente di ingresso e I_{s1} è il valore efficace della componente fondamentale della corrente di ingresso.

- potenza apparente di ingresso

$$P_{\text{as}} = V_s I_s = V_{s1} I_s$$

dove V_s e I_s sono i valori efficace della tensione e della corrente di ingresso, e $V_s = V_{s1}$ perchè $v_s(t)$ è sinusoidale pura ($V_{sn} = 0$ per $n \neq 1$)

- *potenza media di ingresso*

$$P_s = \sum_{n=0}^{\infty} V_{sn} I_{sn} \cos \phi_n = V_{s1} I_{s1} \cos \phi_1 = P_{s1} = V_s I_{s1} \cos \phi_1$$

- *fattore di potenza di ingresso (power factor)*

$$PF = \cos \phi = \frac{P_s}{P_{as}} = \frac{I_{s1}}{I_s} \cos \phi_1$$

Se la corrente di ingresso è una sinusoide pura, allora $I_{s1} = I_s$ e il fattore di potenze diventa uguale al fattore di spostamento

- *fattore di cresta (crest factor)*

$$CF = \frac{I_{s(\text{peak})}}{I_s}$$

Un raddrizzatore ideale dovrebbe avere $\eta = 100\%$, $V_{ac} = 0$, $RF = 0$, $HF = THD = 0$ e $DF = DPF = 1$

Parametri prestazionali di un raddrizzatore a semplice semionda

[Rashid 2007¹⁰ 67]

2.3.3 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con filtro

[Sedra and Smith 1991¹¹ 158-9]

- condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
- ampiezza ripple picco-picco $\Delta V_r \cong V_M \frac{T}{\tau}$
- corrente massima nel resistore $I_{RM} \cong \frac{V_M}{R}$
- nel diodo picchi di elevata corrente e di breve durata
- corrente media nel diodo $i_{D_{av}} \cong I_{RM} \left(1 + \pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- corrente massima nel diodo $i_{D_{max}} \cong I_{RM} \left(1 + 2\pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- $\Delta V_r \ll V_M \Rightarrow i_{D_{max}} \cong 2i_{D_{av}} \cong I_{RM} 2\pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}} \gg I_{RM}$

2.3.4 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con induttore e diodo di ricircolo (cenni)

[Rashid 2007¹⁰ 69-70]

2.3.5 Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: punti chiave

[Rashid 2007¹⁰ 73]

2.3.6 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda (con trasformatore a presa centrale e a ponte di Graetz)

[Rashid 2007¹⁰ p73-77 fino a prima di Esempio 3.6]

anche figura [Sedra and Smith 1991¹¹ 155]

- ripple a frequenza doppia
- *tensione inversa di picco (peak inverse voltage) PIV* sui diodi
 - $PIV = 2V_M$ per il circuito con trasformatore a presa centrale
 - $PIV = V_M$ per il circuito a ponte di Graetz
- diodi ideali $\Rightarrow v_o(t) = |v_s(t)|$
- se invece modello semplificato per i diodi con $V_{D0} \neq 0$
 $\Rightarrow v_o(t) = u^{(-1)}(v_s(t) - V_{D0}) + u^{(-1)}(-v_s(t) - V_{D0})$, dove $u^{(-1)}$ è definita in § A.1

figura [Sedra and Smith 1991¹¹ 155]
- $V_{dc}, I_{dc}, P_{dc}, V_{rms}, I_{rms}, P_a, \eta, RF$
- Analisi armonica nel caso che i diodi siano ideali
 Essendo $v_o(t) = |v_s(t)| = V_M |\sin \omega_0 t|$ risulta $v_o(-t) = V_M |\sin \omega_0(-t)| = V_M |-\sin \omega_0 t| = V_M |\sin \omega_0 t| = v_o(t)$ cioè $v_o(t)$ è una funzione pari (come è ovvio dal grafico). Dato che le funzioni $\cos n\omega_0 t$ e $\sin n\omega_0 t$ sono rispettivamente pari e dispari, i prodotti $v_o(t) \cos n\omega_0 t$ e $v_o(t) \sin n\omega_0 t$ saranno anch'essi rispettivamente pari e dispari. Come conseguenza si ha che per il calcolo dei coefficienti b_n è banale, mentre per gli a_n ci si riconduce al caso già visto del raddrizzatore non controllato a semplice semionda, infatti risulta

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_o(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v_o(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_M \sin \theta d\theta = \frac{2V_M}{\pi} \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_M \sin \theta \cos n\theta d\theta \\
 &\begin{cases} a_{2k+1} = 0 & n = 2k + 1 \text{ (n dispari)} \\ a_{2k} = -\frac{V_M}{\pi} \frac{4}{(2k)^2 - 1} & n = 2k \text{ (n pari)} \end{cases} \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_o\left(\frac{\theta}{\omega_0}\right) \sin n\theta d\theta = 0 \quad \text{(funzione integranda dispari)}
 \end{aligned}$$

La tensione di uscita assume quindi l'espressione

$$\begin{aligned}
 v_o(t) &= \frac{2V_M}{\pi} - \frac{4V_M}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 2k\omega_0 t \\
 &= \frac{2V_M}{\pi} - \frac{4V_M}{3\pi} \cos 2\omega_0 t - \frac{4V_M}{15\pi} \cos 4\omega_0 t - \frac{4V_M}{35\pi} \cos 6\omega_0 t - \dots
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Come era già chiaro dall'analisi, manca la fondamentale e tutte le armoniche dispari. Da ciò risulta che il ripple ha frequenza doppia rispetto alla fondamentale. Dunque l'uscita di un raddrizzatore a doppia semionda contiene esclusivamente armoniche di ordine pari. L'armonica dominante è la seconda e la sua frequenza è $2f_0$ ($2f_0 = 100$ Hz in Italia, 120 Hz negli USA).

2.3.7 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda con filtro

[Sedra and Smith 1991¹¹ 162]

- ripple a frequenza doppia
- condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
- ampiezza ripple picco-picco $\Delta V_r \cong V_M \frac{T}{2\tau}$
- nei diodi picchi di elevata corrente e di breve durata
- corrente media nei diodi $i_{D_{av}} \cong I_{RM} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- corrente massima nei diodi $i_{D_{max}} \cong I_{RM} \left(1 + \pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}}\right)$
- $\Delta V_r \ll V_M \Rightarrow i_{D_{max}} \cong 2i_{D_{av}} \cong I_{RM} \pi \sqrt{\frac{2V_M}{\Delta V_r}} \gg I_{RM}$
- a parità di $V_M, f, R, \Delta V_r$, occorre una C di valore metà rispetto al caso del circuito a semplice semionda, e anche la corrente nei diodi è dimezzata

2.3.8 Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda: punti chiave

[Rashid 2007¹⁰ 79, tranne limite d'impiego in potenza]

2.3.9 Dimensionamento del convertitore ac/dc

- diodi in serie per incrementare $V_{R_{max}}$
- diodi in parallelo (per incrementare $I_{F_{max}}$); occorre porre un resistore in serie a ciascun diodo per evitare derive distruttive
- negli schemi misti serie/parallelo si hanno n rami in parallelo, e ciascun ramo è costituito dalla serie di m diodi e di un resistore

2.3.10 Generalità sui raddrizzatori controllati

[Rashid 2007¹⁰ 293]

2.3.11 Analisi del circuito di raddrizzamento controllato a semplice semionda

[Rashid 2007¹⁰ 293-297 fino a prima del par. 9.3]

- angolo di innesco (o di ritardo o di accensione, delay angle) α [Rashid 2007¹⁰ 294]
- espressione della tensione V_{dc} in funzione dell'angolo di innesco [Rashid 2007¹⁰ 295]
- (argomento non svolto) differenza di fase in ingresso fra tensione $v_s(t)$ e corrente $i_s(t)$ a frequenza fondamentale e potenza reattiva risultante (calcolare i coefficienti di fourier analiticamente o numericamente con matlab)

2.3.12 Convertitori monofase a ponte intero

cenni, fatto vedere il circuito [Rashid 2007¹⁰ p298 fig 9.2a solamente, senza induttanza e generatore]) e analizzato rapidamente

2.3.13 Transitori di commutazione

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 106]

2.3.14 Filtraggio in uscita dei circuiti di raddrizzamento

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 106-7]

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 107]

L'energia magnetica immagazzinata nell'induttore $w_m(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t)$ si deve conservare, per cui $w_m(t)$ non può essere una funzione discontinua, e di conseguenza lo stesso vale per la corrente nell'induttore. Analogamente dovendosi conservare l'energia elettrica immagazzinata nel condensatore $w_e(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t)$, la tensione ai capi del condensatore deve essere una funzione continua.

L'induttore si oppone a variazioni brusche della corrente che in esso circola, e il condensatore si oppone a variazioni brusche della tensione presente ai suoi capi.

2.4 Raddrizzamento da rete trifase

[Guarnieri and Stella 2003⁶ 100]

[Rashid 2007¹⁰ 86]

2.4.1 Raddrizzatori polifasi a gruppi di commutazione

Analisi del circuito di raddrizzamento trifase con 3 diodi

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 101]

Se l'alimentazione a disposizione è trifase senza filo neutro, il neutro si può ottenere impiegando un trasformatore trifase con secondario a stella

inserire figura raddrizzatore trifase a stella con trasformatore [Rashid 2001⁹ 145]

$$e_1(t) = E_M \sin \omega_0 t \quad e_2(t) = E_M \sin \left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad e_3(t) = E_M \sin \left(\omega_0 t - \frac{4\pi}{3} \right) \quad (2.5)$$

$$v_o(t) = \max(e_1(t), e_2(t), e_3(t)) \quad (2.6)$$

$$V_{dc} = \frac{1}{T} \int_0^T v_o(t) dt = \frac{3}{T} \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}} E_M \sin \omega_0 t dt = \frac{3}{T} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} E_M \cos \omega_0 \tau d\tau = \frac{3E_M}{T} \left[\frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3E_M}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} \quad (2.7)$$

$$\Delta V_r = v_{o\max} - v_{o\min} = E_M \left(1 - \cos \frac{\omega_0 T}{6} \right) = E_M \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{E_M}{2} \quad (2.8)$$

Analisi del circuito di raddrizzamento ad m -fasi con m diodi

$$e_k(t) = E_M \sin \left(\omega_0 t - \frac{2k-2}{m} \pi \right) \quad k = 1, \dots, m \quad (2.9)$$

$$v_o(t) = \max_{k=1, \dots, m} e_k(t) \quad (2.10)$$

$$V_{dc} = \frac{m}{T} \int_{-\frac{T}{2m}}^{\frac{T}{2m}} E_M \cos \omega_0 \tau d\tau = \frac{mE_M}{T} \left[\frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0} \right]_{-\frac{T}{2m}}^{\frac{T}{2m}} = E_M \frac{m}{\pi} \sin \frac{\pi}{m} \quad (2.11)$$

$$\Delta V_r = v_{o\max} - v_{o\min} = E_M \left(1 - \cos \frac{\omega_0 T}{2m} \right) = E_M \left(1 - \cos \frac{\pi}{m} \right) = E_M 2 \sin^2 \frac{\pi}{2m} \quad (2.12)$$

$$m = 3 \text{ (alimentazione trifase)} \Rightarrow V_{dc} \cong 0.8270 E_M \quad \Delta V_r = 0.5000 E_M \quad (2.13)$$

$$m = 6 \text{ (alimentazione esafase)} \Rightarrow V_{dc} \cong 0.9549 E_M \quad \Delta V_r \cong 0.1340 E_M \quad (2.14)$$

$$m = 12 \text{ (alimentazione dodecafase)} \Rightarrow V_{dc} \cong 0.9886 E_M \quad \Delta V_r \cong 0.03407 E_M \quad (2.15)$$

Il caso esafase ($m = 6$) si può ad esempio realizzare impiegando un trasformatore trifase con secondario a stella nella configurazione a presa centrale, come in Fig 2.2 [Rashid 2001⁹ 148].

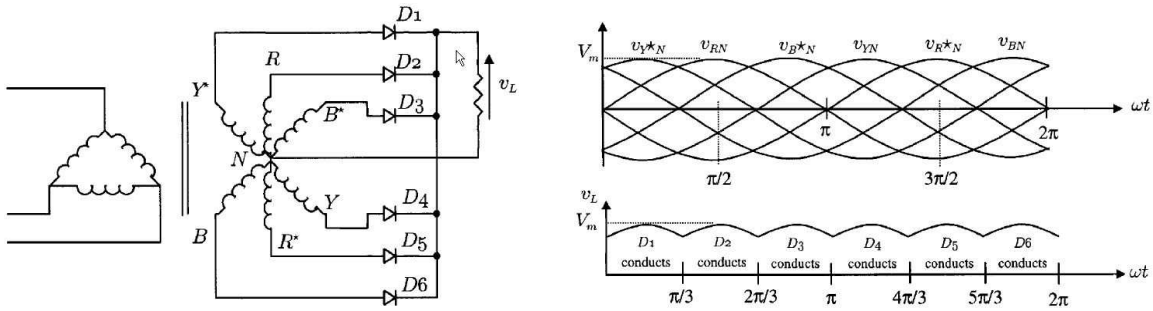


Figura 2.2 Raddrizzatore esafase a stella con trasformatore a presa centrale

2.4.2 Raddrizzatori polifasi a ponte di Graetz

Analisi del circuito di raddrizzamento trifase a ponte di Graetz (raddrizzatore a 6 impulsi)

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 102]

inserire figura intervalli di conduzione e corrente nei diodi [Rashid 2001⁹ 147]

Le sei tensioni concatenate si possono valutare agevolmente considerando il triangolo delle tensioni (Fig 2.3)

$$v_{21}(t) = e_2(t) - e_1(t) = \sqrt{3} E_M \sin \left(\omega_0 t - \frac{5\pi}{6} \right) \quad (2.16)$$

$$v_{23}(t) = e_2(t) - e_3(t) = \sqrt{3} E_M \sin \left(\omega_0 t - \frac{3\pi}{6} \right) = \sqrt{3} E_M \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.17)$$

$$v_{13}(t) = e_1(t) - e_3(t) = \sqrt{3} E_M \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{6} \right) \quad (2.18)$$

$$v_{12}(t) = e_1(t) - e_2(t) = \sqrt{3} E_M \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6} \right) \quad (2.19)$$

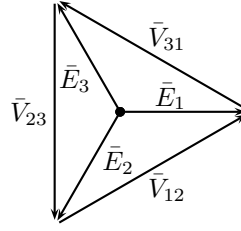


Figura 2.3 Fasi delle sei tensioni concatenate dal triangolo delle tensioni

$$v_{32}(t) = e_3(t) - e_2(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_0 t + \frac{3\pi}{6}\right) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.20)$$

$$v_{31}(t) = e_3(t) - e_1(t) = \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_0 t + \frac{5\pi}{6}\right) \quad (2.21)$$

La formula generale che esprime le suindicate tensioni concatenate si può calcolare utilizzando la formula di prostaferesi $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ e l'insieme

$$S_3 = \{(2, 1), (2, 3), (1, 3), (1, 2), (3, 2), (3, 1)\} = \{(h, k) : h, k = 1, 2, 3; |h - k| = 1, 2\} \quad (2.22)$$

Si ha

$$\begin{aligned} e_h(t) - e_k(t) &= E_M \sin\left(\omega_0 t - \frac{2h-2}{3}\pi\right) - E_M \sin\left(\omega_0 t - \frac{2k-2}{3}\pi\right) \\ &= E_M 2 \cos\left(\omega_0 t - \frac{h+k-2}{3}\pi\right) \sin \frac{k-h}{3}\pi \\ &= 2E_M \operatorname{sgn}(k-h) \sin \frac{|k-h|}{3}\pi \sin\left(\omega_0 t - \frac{2h+2k-7}{6}\pi\right) \\ &= \operatorname{sgn}(h-k) \sqrt{3}E_M \sin\left(\omega_0 t + \frac{13-2h-2k}{6}\pi\right) \quad (h, k) \in S_3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

da cui

$$v_o(t) = \max_{(h,k) \in S_3} (e_h(t) - e_k(t)) \quad (2.24)$$

$$V_{dc} = \frac{6}{T} \int_{-\frac{T}{12}}^{\frac{T}{12}} \sqrt{3}E_M \cos \omega_0 \tau d\tau = \frac{6\sqrt{3}E_M}{T} \left[\frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0} \right]_{-\frac{T}{12}}^{\frac{T}{12}} = \sqrt{3}E_M \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} \quad (2.25)$$

$$\Delta V_r = v_{o\max} - v_{o\min} = \sqrt{3}E_M \left(1 - \cos \frac{\omega_0 T}{12}\right) = \sqrt{3}E_M \left(1 - \cos \frac{\pi}{6}\right) \quad (2.26)$$

Analisi del circuito di raddrizzamento ad m -fasi a ponte di Graetz (raddrizzatore a $2m$ impulsi)

inserire figura [Guarnieri and Stella 2003⁶ 103]

caso esa-fase, $m = 6$, 12 impulsi: inserire figura 6 tensioni stellate e_1, \dots, e_6 e 6 tensioni concatenate ad ampiezza massima $\pm v_{14}, \pm v_{25}, \pm v_{36}$

inserire figura 12 tensioni stellate e_1, \dots, e_{12} e 24 tensioni concatenate $\pm v_{1,5}, \pm v_{2,6}, \pm v_{3,7}, \pm v_{4,8}, \pm v_{5,9}, \pm v_{6,10}, \pm v_{7,11}, \pm v_{8,12}, \pm v_{9,1}, \pm v_{10,2}, \pm v_{11,3}, \pm v_{12,4}$

In realtà le figure riportate su [Guarnieri and Stella 2003⁶ 103-104] non sono corrette. Infatti, nella semplice configurazione a ponte, nel caso di m fasi con m dispari è vero che si ottiene una tensione di uscita che ha $2m$ impulsi nel periodo T , ma viceversa per m pari l'uscita ha invece soltanto m impulsi nel periodo.

inserire figura fasoriale che mostra questo fatto

Poichè non è agevole realizzare sistemi polifasi con m dispari, bisogna ricorrere ad altri schemi.

Raddrizzamento esafase a ponte in configurazione serie (raddrizzatore a 12 impulsi)

Adoperando un trasformatore trifase con due secondari, uno a triangolo e l'altro a stella, e raddrizzando separatamente le uscite dei due secondari mediante ponti di Graetz trifase indipendenti, come in Fig 2.4, si ottengono due uscite $v_1(t)$ e $v_2(t)$, che hanno 6 impulsi nel periodo e sono temporalmente sfasate tra loro di $\frac{T}{12}$ [Rashid 2001⁹ 149]. Ponendo i due ponti in serie si ha l'uscita desiderata a 12 impulsi

$$v_L(t) = v_1(t) + v_2(t) \quad (2.27)$$

Questo circuito si usa nelle applicazioni dove è richiesta una elevata tensione in uscita.

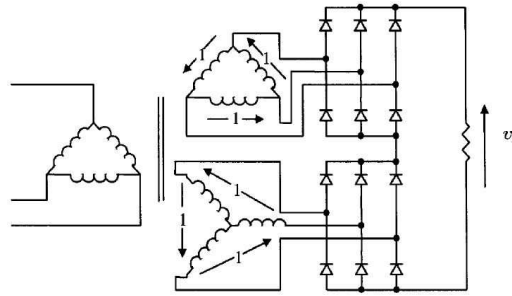


Figura 2.4 Raddrizzatore esafase a ponte in configurazione serie

Raddrizzamento esafase a ponte in configurazione parallelo (raddrizzatore a 12 impulsi)

Nelle applicazioni in cui è richiesta una elevata corrente in uscita si usa il circuito raddrizzatore esafase a ponte in configurazione parallelo [Rashid 2001⁹ 150], mostrato in Fig 2.5, in cui si rende anche necessario inserire un *trasformatore interfase* che connette le uscite dei due ponti al carico, altrimenti, come precisato, non si avrebbero 12 impulsi in uscita, ma soltanto 6.

Il trasformatore interfase lo si può vedere (trascurando l'accoppiamento mutuo) come costituito da due induttori di uguale valore, quindi si può calcolare la generica componente armonica della tensione sul carico $v_{Ln}(t)$, e poi la $v_L(t)$ applicando la sovrapposizione degli effetti. A tale scopo, il circuito da considerare per il calcolo del fasore \bar{V}_{Ln} per la n -ma armonica, si trova nella configurazione di Millmann, essendo costituito da 3 rami in parallelo, dunque

$$\bar{V}_{Ln} = \frac{\frac{\bar{V}_{1n}}{Z_n} + \frac{\bar{V}_{2n}}{Z_n}}{\frac{1}{Z_n} + \frac{1}{Z_n} + \frac{1}{R_L}} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2 + \frac{Z_n}{R_L}} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2 + \frac{jn\omega_0 L}{R_L}} \quad (2.28)$$

da cui si vede che, per n sufficientemente piccolo, risulta $\bar{V}_{Ln} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2}$, mentre per valori maggiori di n , il fasore corrispondente sul carico \bar{V}_{Ln} risulterà attenuato e sfasato rispetto al valore medio $\frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2}$. Scegliendo allora il valore delle due induttanze L in modo da avere $n\omega_0 L \ll R_L$ per le armoniche maggiormente significative, si

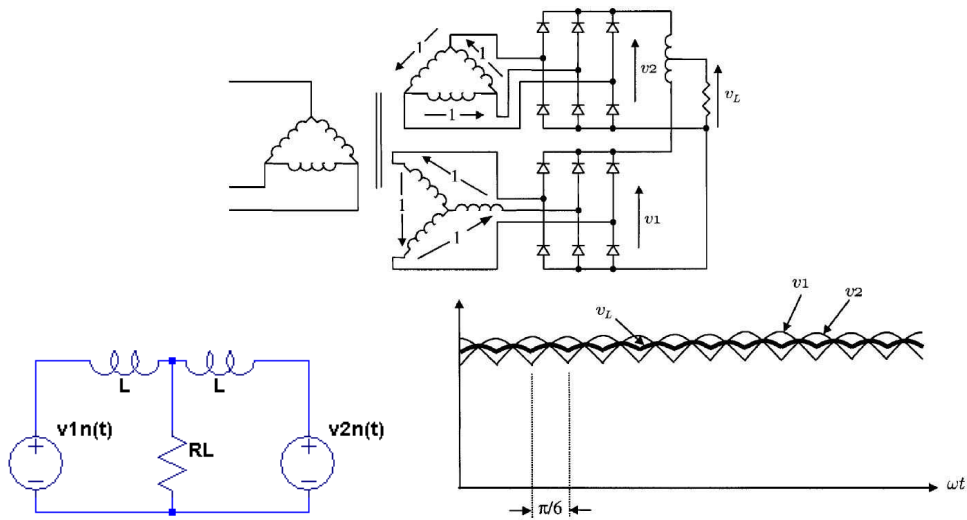


Figura 2.5 Raddrizzatore esafase a ponte in configurazione parallelo

avrà

$$\bar{V}_{Ln} \cong \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2} \quad v_{Ln}(t) \cong \frac{v_{1n}(t) + v_{2n}(t)}{2}$$

da cui, sommando tutte le armoniche

$$v_L(t) \cong \frac{v_1(t) + v_2(t)}{2} \quad (2.29)$$

L'uso del simbolo \cong riflette il fatto che le armoniche superiori sono filtrate, e ciò corrisponde ad uno smussamento dei punti angolosi sulla tensione di uscita $v_L(t)$.

L'interposizione del trasformatore interfase tra le uscite dei due ponti consente quindi di ottenere un'uscita sul carico che ha 12 impulsi nel periodo, ed è pari alla media delle uscite dei due ponti.

Nel caso in cui si pensasse di utilizzare, al posto del trasformatore interfase, due condensatori di eguale valore C , si avrebbe $\bar{V}_{Ln} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2 + \frac{1}{in\omega_0\tau}} = \frac{in\omega_0\tau}{2in\omega_0\tau + 1} (\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n})$, con $\tau = R_L C$ da cui, se $C \gg \frac{1}{\omega_0 R_L}$ allora $\bar{V}_{Ln} = \frac{\bar{V}_{1n} + \bar{V}_{2n}}{2} \forall n$. Di conseguenza le armoniche superiori non risulterebbero filtrate e i punti angolosi sulla tensione di uscita sarebbero riprodotti fedelmente, la quale cosa è indesiderabile.

2.4.3 Raddrizzatori controllati polifase (cenni)

2.4.4 In futuro

Chopper

Guarnieri-Stella 113

Appendice A

Alcune funzioni notevoli. Cenni sulle funzioni generalizzate

A.1 Funzioni notevoli

Inserire immagini
 grafico funzione segno $\operatorname{sgn} x$
 grafico funzione di Heaviside o funzione gradino unitario $H(x) = 1(x) = u(x)$
 grafico funzione finestra rettangolare $\Pi(x) = 1(x + \frac{1}{2}) - 1(x - \frac{1}{2})$
 grafico funzione finestra triangolare $\Lambda(x) = \Pi(\frac{x}{2})(1 - |x|)$

La *funzione segno* è definita come

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

sgn è quindi discontinua per $x = 0$; essa può essere approssimata, per piccoli valori di σ , mediante una funzione continua

$$\sigma \ll |x| \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn} x \cong \tanh\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad (\text{A.2})$$

Un numero reale può esprimersi come prodotto del suo valore assoluto e del suo segno $x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$. Si noti che $\frac{d|x|}{dx} = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$, e $\frac{d\operatorname{sgn} x}{dx} = 2\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la funzione impulso di Dirac, definita nel § successivo.

La *funzione di Heaviside*, indicata alternativamente con i simboli H , Θ , 1 , u , è definita come

$$H(x) = \Theta(x) = 1(x) = u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Non è in genere rilevante definire il valore assunto dalla funzione di Heaviside in $x = 0$. Tuttavia talvolta ciò occorre, e si possono incontrare le definizioni $H(0) = 0$, o $H(0) = \frac{1}{2}$ oppure $H(0) = 1$. Per rimuovere l'ambiguità si può usare un pedice che specifichi il valore

$$H_a(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La scelta $a = \frac{1}{2}$ massimizza la simmetria della funzione, ed è completamente consistente con la funzione segno

$$H_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2} \quad (\text{A.5})$$

Risulta poi

$$H_0(x) = \operatorname{sgn} x \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2} \quad (\text{A.6})$$

$H(x)$ può essere approssimata mediante le funzioni

$$\sigma \ll |x| \quad \Rightarrow \quad H(x) \cong \frac{1 + \tanh\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{2} = \frac{1}{1 + e^{-2\frac{x}{\sigma}}} \quad \text{funzione logistica} \quad (\text{A.7})$$

$$\cong \frac{1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{2} \quad (\text{A.8})$$

$$\cong \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{2} \quad (\text{A.9})$$

dove erf è la *funzione degli errori*, e risulta

$$H_{\frac{1}{2}}(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{-2\frac{x}{\sigma}}} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{2} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma}\right)}{2} \quad (\text{A.10})$$

La funzione *finestra rettangolare*, o *impulso unitario*, e la funzione *finestra triangolare*, sono definite da

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases} & A(x) &= \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \\ &= H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right) & &= \Pi\left(\frac{x}{2}\right)(1 - |x|) \\ &= H\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot H\left(\frac{1}{2} - x\right) & &= \max(0, 1 - |x|) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La funzione integrale della funzione di Heaviside è la funzione *rampa unitaria*

$$H^{(-1)}(x) = u^{(-1)}(x) = \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

$$= \int_{-\infty}^x H(y) dy \quad (\text{A.13})$$

da cui $\frac{dH^{(-1)}}{dx} = H(x)$.

inserire figura $u^{(-1)}(x)$

A.2 Funzioni generalizzate

[Bobbio and Gatti 1991² 790+]
Carlson 53+

Inserire immagini

grafico funzione $p_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \Pi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$
grafico funzione $\ell_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} A\left(\frac{x}{\sigma}\right)$

Consideriamo le seguenti funzioni finestra dipendenti dal parametro σ

$$p_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \Pi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad \ell_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} A\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad (\text{A.14})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\sigma}(x)dx = \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{1}{\sigma} dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ell_{\sigma}(x)dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} (1 - |\sigma|)dx = 1 \quad \forall \sigma > 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} p_{\sigma}(x) = \delta(x) \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \ell_{\sigma}(x) = \delta(x) \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{cases} \delta(x - x_0) = 0 & x \neq x_0 \\ \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} \delta(x - x_0)dx = 1 & \forall \epsilon > 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

La funzione gradino unitario $1(t)$ in senso classico non è derivabile in $t = 0$. Nell'ambito della teoria delle *distribuzioni* (o *funzioni generalizzate*) risulta invece

$$\frac{d}{dt}1(t) = \delta(t) \quad \left(\text{e in generale } \frac{d}{dt}1(t - t_0) = \delta(t - t_0) \right) \quad (\text{A.18})$$

Infatti dalla definizione data di funzione impulsiva si ha

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0)d\tau = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$$= 1(t - t_0) \quad (\text{A.20})$$

differenziando la quale si ottiene la relazione precedente.

proprietà campionamento, carlson 55

$$v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0) \quad (\text{A.21})$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t) \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{A.22})$$

Appendice B

Cenni sui materiali superconduttori

[Mencuccini and Silvestrini 1988⁸ 176]

Appendice C

Minute delle lezioni a.a. 2007-2008

C.1 Lezione di giovedì 4 ottobre 2007

Argomenti svolti:

- Il passaggio dal dominio al tempo al dominio della frequenza
- Richiami sul metodo simbolico
- Serie di Fourier. Spettro di ampiezza e di fase. Esempi
- Componenti continua e alternata
- Reti elettriche in regime periodico. Tensioni e/o correnti non sinusoidali
- Analisi armonica
- Valore efficace. Valore efficace della componente alternata
- Frequenza fondamentale ed armoniche di tensione e di corrente
- Generatori di tensione equivalenti in serie e generatori di corrente equivalenti in parallelo (principio di sovrapposizione in reti lineari)
- Generalizzazione del metodo simbolico. Esempi
- Espressione armonica della potenza nelle reti elettriche in regime periodico
- Potenza reattiva. Potenza apparente. Potenza deformante

C.2 Lezione di venerdì 5 ottobre 2007

Argomenti svolti:

- Generalità sui convertitori statici
- Diodo ideale. Modello circuitale del diodo ideale
- Cenni sul drogaggio dei semiconduttori e giunzione pn
- Diodo reale. Caratteristica corrente-tensione
- Diodo a semiconduttore
- Corrente massima diretta I_{Fmax} e tensione massima inversa V_{Rmax}
- Caratteristica esponenziale corrente-tensione (equazione di Shockley)
- Modelli semplificati del diodo reale e circuiti equivalenti. Esempio
- Cenni sull'uso del diodo come generatore di tensione di riferimento
- Caduta di tensione diretta V_D . Reverse recovery time t_{rr}

- Analisi del circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda

Argomenti accennati:

- Corretta polarizzazione del diodo (circuito esterno tale da non far danneggiare il diodo, appunti miei 9)
- Panoramica sui vari tipi di diodi (PiN, Schottky, Schottky SiC) e parametri caratteristici tipici [Rashid 2007¹⁰ n]
- Uso del diodo in configurazione Zener

C.3 Lezione di giovedì 11 ottobre 2007

Argomenti svolti:

- Componenti continua e alternata di una funzione periodica
- Espansione in serie di Fourier di una funzione con carattere di simmetria: funzione alternata; funzione pari; funzione dispari; funzione con simmetria a semionda (esempio dente di sega alternato)
- Forma esponenziale della serie di Fourier
- Derivabilità e integrabilità termine a termine
- Integrale di Fourier
- Proprietà (linearità, derivazione)
- Esempi
- Proprietà di simmetria di spettro di ampiezza e di fase
- Cenni sulle applicazioni della trasformata (e della serie) di Fourier
- Funzioni impulsive
- Esempi di trasformate
- Trasformate di funzioni frequentemente utilizzate
- Trasformata di Fourier di una funzione periodica. Spettro continuo e spettro a righe

C.4 Lezione di giovedì 18 ottobre 2007

Argomenti svolti:

- Esempi di reti in regime periodico non sinusoidale
- Caso lineare: sovrapposizione degli effetti [Someda 1977¹² 408] [Guarnieri and Stella 2004⁵ 365]
- Caso non lineare: inquinamento armonico, anche se i forzamenti sono sinusoidi pure e isofrequenziali [Guarnieri and Stella 2004⁵ 360]
- Espressione della potenza deformante D [Someda 1977¹² 413]
- Condizione affinché su un biopolo sia $D = 0$ (\Rightarrow resistore) [Someda 1977¹² 413]
- Uguaglianza di potenza attiva e apparente per un resistore

- Fattore di potenza [Guarnieri and Stella 2004⁵ 363]
- Potenza non attiva [Guarnieri and Stella 2004⁵ 363]
- Esempio semplice RL, in cui si vede che la potenza non attiva e' maggiore della sola potenza reattiva [Somedra 1977¹² 413-4]
- Principali effetti dell'inquinamento armonico (sottoutilizzo della potenza erogabile dai generatori, perdite sulle linee, disturbi)
- Cenni su rifasamento e compensazione delle armoniche [Guarnieri and Stella 2004⁵ 363]
- Schema a blocchi di un circuito raddrizzatore (trasformatore, diodi, filtro, regolatore di tensione, carico) [Sedra and Smith 1991¹¹ 151]
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda:
 - corrente unidirezionale in linea [Rashid 2007¹⁰ 64]
 - analisi armonica [Rashid 2007¹⁰ p72 esempio 3.3]
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: parametri prestazionali [Rashid 2007¹⁰ 64]:
 - valor medio della tensione/corrente d'uscita (di carico) V_{dc} , I_{dc}
 - potenza d'uscita in continua $P_{dc} = V_{dc}I_{dc}$
 - valore efficace della tensione/corrente d'uscita V_{rms} , I_{rms}
 - potenza apparente d'uscita $P_{ac} = V_{rms}I_{rms}$
 - valore efficace della componente alternata della tensione d'uscita V_{ac}
 - fattore di ripple $RF = \frac{V_{ac}}{V_{dc}} = \sqrt{\frac{V_{rms}^2}{V_{dc}^2} - 1}$
(attenzione: la definizione di fattore di ondulazione data su [Guarnieri and Stella 2003⁶ 100] e' diversa, talvolta piu' facile da calcolare, ma meno corretta a mio parere)
 - efficienza (o rapporto di raddrizzamento) $\eta = \frac{P_{dc}}{P_{ac}}$
 - distorsione armonica totale (THD) o fattore armonico (HF)
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con filtro [Sedra and Smith 1991¹¹ 158-9]:
 - condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
 - picchi di corrente di breve durata
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda con induttore e diodo di ricircolo (cenni) [Rashid 2007¹⁰ 69-70]
- Circuito di raddrizzamento non controllato a semplice semionda: punti chiave [Rashid 2007¹⁰ 73]

C.5 Lezione di venerdì 19 ottobre 2007

Argomenti svolti:

- Potenza nominale di un diodo reale ($V_{Rmax}I_{Fmax}$)
- Diodo ideale (caduta di tensione diretta $V_D = 0$ e reverse recovery time $t_{rr} = 0$) [Rashid 2007¹⁰ 42]
- Filtraggio in uscita dei circuiti di raddrizzamento [Guarnieri and Stella 2003⁶ 106-7]

- Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda (con trasformatore a presa centrale e a ponte di Graetz) [Rashid 2007¹⁰ p73-77 fino a prima di Esempio 3.6]:
 - $V_{dc}, I_{dc}, P_{dc}, V_{rms}, I_{rms}, P_{ac}, \eta, RF$
 - analisi armonica, manca la fondamentale e le armoniche dispari (il ripple ha frequenza doppia)
- Raddrizzatore ideale ($\eta = 100\%$, $V_{ac} = 0$, $RF = 0$, $THD = 0$) [Rashid 2007¹⁰ 67]
- Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda con filtro [Sedra and Smith 1991¹¹ 162]:
 - condensatore in uscita, $\tau = RC \gg T$
 - picchi di corrente di breve durata
 - ripple a frequenza doppia
 - a parità di $V_m, f, R, \Delta V_{rippleMax}$, occorre una C di valore metà rispetto al caso a semplice semionda, e anche la corrente nei diodi è dimezzata
- Circuito di raddrizzamento non controllato a doppia semionda: punti chiave [Rashid 2007¹⁰ 79, tranne limite d'impiego in potenza]
- Dimensionamento del convertitore ac/dc. Diodi in serie e diodi in parallelo
- Tiristore (o SCR) ideale. Modello del tiristore ideale [Guarnieri and Stella 2003⁶ 94-6]
- Generalità sui raddrizzatori controllati [Rashid 2007¹⁰ 293]
- Analisi del circuito di raddrizzamento controllato a semplice semionda [Rashid 2007¹⁰ 293-297 fino a prima del par. 9.3]
 - angolo di innesco (o di ritardo o di accensione, delay angle) α [Rashid 2007¹⁰ 294]
 - espressione della tensione V_{dc} in funzione dell'angolo di innesco [Rashid 2007¹⁰ 295]
- Convertitori monofase a ponte intero (cenni, fatto vedere il circuito [Rashid 2007¹⁰ p298 fig 9.2a solamente, senza induttanza e generatore]) e analizzato rapidamente
- Raddrizzamento da rete trifase e polifase [Guarnieri and Stella 2003⁶ 100]
- Analisi del circuito di raddrizzamento trifase con 3 diodi ed estensione al caso di alimentazione con m fasi. V_{dc} nel caso generale di m fasi, e caso limite di m “molto grande” [Guarnieri and Stella 2003⁶ 101]
- Analisi (non approfondita) del circuito di raddrizzamento trifase a ponte di Graetz (raddrizzatore a 6 impulsi) ed estensione al caso di m fasi in ingresso. V_{dc} nel caso generale di m fasi, e caso limite di m “molto grande” [Guarnieri and Stella 2003⁶ 102]
- Raddrizzatori controllati polifase (cenni)

Bibliografia

- [1] A Balestrino and G Celentano. *Teoria dei Sistemi*, volume III. Liguori, 1982.
- [2] Scipione Bobbio and Emilio Gatti. *Elettromagnetismo Ottica*. Boringhieri, 1991.
- [3] Aldo Ghizzetti and Alessandro Ossicini. *Trasformate di Laplace e Calcolo Simbolico*. UTET, 1971.
- [4] Andrew S Grove. *Fisica e Tecnologia dei Dispositivi a Semiconduttore*. Franco Angeli, 5^a edition, 1993.
- [5] Massimo Guarnieri and Andrea Stella. *Principi ed Applicazioni di Elettrotecnica*, volume I. Edizioni Progetto Padova, terza edition, 2004.
- [6] Massimo Guarnieri and Andrea Stella. *Principi ed Applicazioni di Elettrotecnica*, volume II. Edizioni Progetto Padova, terza edition, 2003.
- [7] Paul Horowitz and Winfield Hill. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, 2^a edition, 1989.
- [8] Corrado Mencuccini and Vittorio Silvestrini. *Fisica II*. Liguore, 1988.
- [9] Muhammad H Rashid. *Power Electronics Handbook*. Academic Press, 2001.
- [10] Muhammad H Rashid. *Elettronica di Potenza*, volume 1. Pearson Education, 3^a edition, 2007.
- [11] Adel S Sedra and Kenneth C Smith. *Microelectronic Circuits*. Oxford University Press, Third edition, 1991.
- [12] Giovanni Someda. *Elementi di Elettrotecnica Generale*. Patron, Nona edition, 1977.
- [13] Giovanni Soncini. *Tecnologie Microelettroniche*. Boringhieri, 1986.
- [14] Simon M Sze. *Dispositivi a semiconduttore*. Hoepli, 1991.