

Corso di Complementi di Gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita – Modulo 13 del 17.12.2014

Shallow water analogy

L'analogia dell'acqua bassa viene spesso indicata anche come analogia idraulica.

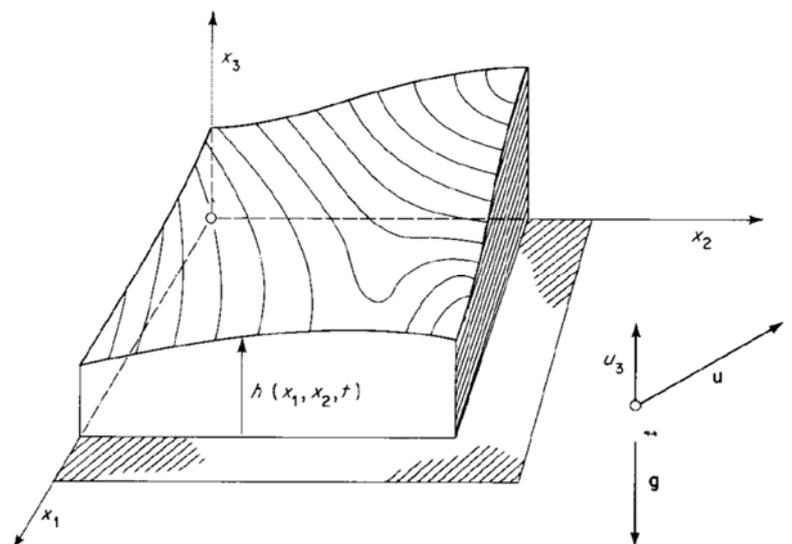
Si esaminano ora le equazioni che governano il problema. Facendo riferimento alla figura l'equazione della superficie libera è: $x_3 = h(x_1, x_2, t)$ mentre $x_3=0$ definisce la superficie fissa inferiore.

Si suppone che il flusso sia incompressibile e che siano trascurabili gli effetti viscosi e quelli legati alla tensione superficiale.

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$$

$$\rho \frac{Du_2}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\rho \frac{Du_3}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Shallow water analogy

Nell'ipotesi che u_3 e l'accelerazione verticale siano trascurabili la terza equazione diventa il bilancio idrostatico:

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Che integrata supponendo che per $x_3=h$ $p=p_a$ fornisce: $p = \rho g(h - x_3) + p_a$

Derivando questa equazione si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho g h_{x_1} \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho g h_{x_2}$$

Sostituendo nelle equazioni precedenti si ha:

$$\rho \frac{Du_1}{Dt} + \rho g h_{x_1} = 0$$

Cioè u_1 ed u_2 non dipendono da x_3

$$\rho \frac{Du_2}{Dt} + \rho g h_{x_2} = 0$$

Imponendo: $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2$ e utilizzando gli operatori bidimensionali equivalenti si può scrivere formalmente:



Shallow water analogy

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} + g \underline{\nabla} h = 0$$

Se ci si mette a cavallo di una particella fluida la superficie libera si muove con una velocità pari a u_3 . Quindi per $x_3=h$ si ha:

$$(1) \quad u_3(x_3 = h) = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{u}_h \cdot \underline{\nabla} h$$

Dove il pedice h implica che il vettore velocità è valutato sulla superficie libera. Con la simbologia adottata l'equazione di continuità è:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Integrando in x_3 si ha:

$$\int_0^h \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx_3 + [u_3]_{x_3=0}^{x_3=h} = 0$$

Chiaramente $u_3(0)$ è nullo mentre il valore sulla superficie libera si può ricavare dalla (1).

$$\int_0^h \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx_3 + \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{u}_h \cdot \underline{\nabla} h = 0$$



Shallow water analogy

$$\int_0^h \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx_3 + \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{u}_h \cdot \underline{\nabla} h = 0$$

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} + g\underline{\nabla} h = 0$$

Definendo: $\overline{\underline{\nabla} \cdot \underline{u}} = \frac{1}{h} \int_0^h \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx_3$ si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \underline{u}_h \cdot \underline{\nabla} h + h \overline{\underline{\nabla} \cdot \underline{u}} = 0$$

Che è ancora una equazione esatta.

Nelle ipotesi di acqua poco profonda si possono trascurare le variazioni di \underline{u} rispetto alla coordinata x_3 e si ha:

$$\underline{u}_h = \underline{u} = \underline{u} \quad \overline{\underline{\nabla} \cdot \underline{u}} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}$$

Le equazioni che governano il fenomeno possono essere semplificate e confrontate con quelle della gasdinamica:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (h\underline{u}) = 0 \\ \frac{D\underline{u}}{Dt} + g\underline{\nabla} h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_t + \underline{\nabla} \cdot (\rho\underline{u}) = 0 \\ \frac{D\underline{u}}{Dt} + \frac{\underline{\nabla} p}{\rho} = 0 \end{cases}$$



Shallow water analogy

$$\begin{cases} \rho_t + \underline{\nabla} \cdot (\rho\underline{u}) = 0 \\ \rho \frac{D\underline{u}}{Dt} + \underline{\nabla} p = 0 \end{cases}$$

Nell'ipotesi di moto omoentropico si ha:

$$\underline{\nabla} p = \frac{dp}{d\rho} \underline{\nabla} \rho = a^2 \underline{\nabla} \rho = \frac{\gamma p}{\rho} \underline{\nabla} \rho = \frac{\gamma p_0}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \underline{\nabla} \rho = \frac{\gamma p_0}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \underline{\nabla} \rho = \frac{\gamma p_0 \rho^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} \underline{\nabla} \rho$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (h\underline{u}) = 0 \\ \frac{D\underline{u}}{Dt} + g\underline{\nabla} h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_t + \underline{\nabla} \cdot (\rho\underline{u}) = 0 \\ \frac{D\underline{u}}{Dt} + \frac{a^2 \underline{\nabla} \rho}{\rho} = \frac{D\underline{u}}{Dt} + \frac{\gamma p_0 \rho^{\gamma-2}}{\rho_0^\gamma} \underline{\nabla} \rho = 0 \end{cases}$$

Se $\gamma=2$ il coefficiente che moltiplica il gradiente della densità è costante ed è possibile trovare un'analogia supponendo che la densità sia l'analogo dell'altezza. I gas comuni non hanno $\gamma=2$ quindi l'analogia è approssimata.

$$h \leftrightarrow \rho$$

Nell'ipotesi che $\gamma=2$ e che $R=1$ (quest'ultima ipotesi non è fondamentale ma semplifica i passaggi) si ha anche:

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R = 2 \quad C_v = \frac{1}{\gamma-1} R = 1 \quad p = \rho T$$



Shallow water analogy

Dall'isentropica si ha anche:

$$\left(\frac{p}{p_o}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^2 = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{2}{2-1}} \quad C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R = 2 \quad C_v = \frac{1}{\gamma-1}R = 1 \quad p = \rho T$$

$$\begin{array}{l} h \leftrightarrow \rho \\ \text{Quindi: } h \leftrightarrow T \\ h^2 \leftrightarrow p \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (h\underline{u}) = 0 \\ \frac{D\underline{u}}{Dt} + gh \frac{\underline{\nabla} h}{h} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \underline{\nabla} \cdot (\rho\underline{u}) = 0 \\ \frac{D\underline{u}}{Dt} + a^2 \frac{\underline{\nabla} \rho}{\rho} = 0 \end{array} \right.$$

In un moto bidimensionale una compressione comporta l'aumento della densità e quindi un aumento della massa per unità di area che nel caso del liquido si trasforma in un aumento di h . Quindi la prima corrispondenza è abbastanza comprensibile.

Dal bilancio della quantità di moto si vede che:

$$hg \leftrightarrow a^2$$



Shallow water analogy

Per l'analogia la velocità dei piccoli disturbi di pressione per il liquido è quindi:

$$a_l = \sqrt{hg}$$

Tipicamente si ha che h è dell'ordine del cm quindi:

$$a_l \approx \sqrt{0.1} \approx 0.3 \frac{m}{s}$$

Questa velocità è sufficientemente bassa per poter osservare direttamente il problema. Una formula più precisa che tiene in conto anche degli effetti di tensione superficiale è:

$$a_l^2 = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \right) \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda} \right)$$

In questa formulazione esiste anche una dipendenza dalla lunghezza d'onda del disturbo.

Ricordando che: $\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^5)$ si può facilmente verificare che per λ grande questa formula tende a quella trovata.



Shallow water analogy

$$hg \leftrightarrow a^2$$

L'analogo del numero di Mach è evidentemente:

$$F = \frac{u}{\sqrt{hg}}$$

Che è la radice quadrata del numero di Froude.

Le equazioni utilizzate per il flusso compressibile possono essere estese anche a questo caso e.g.:

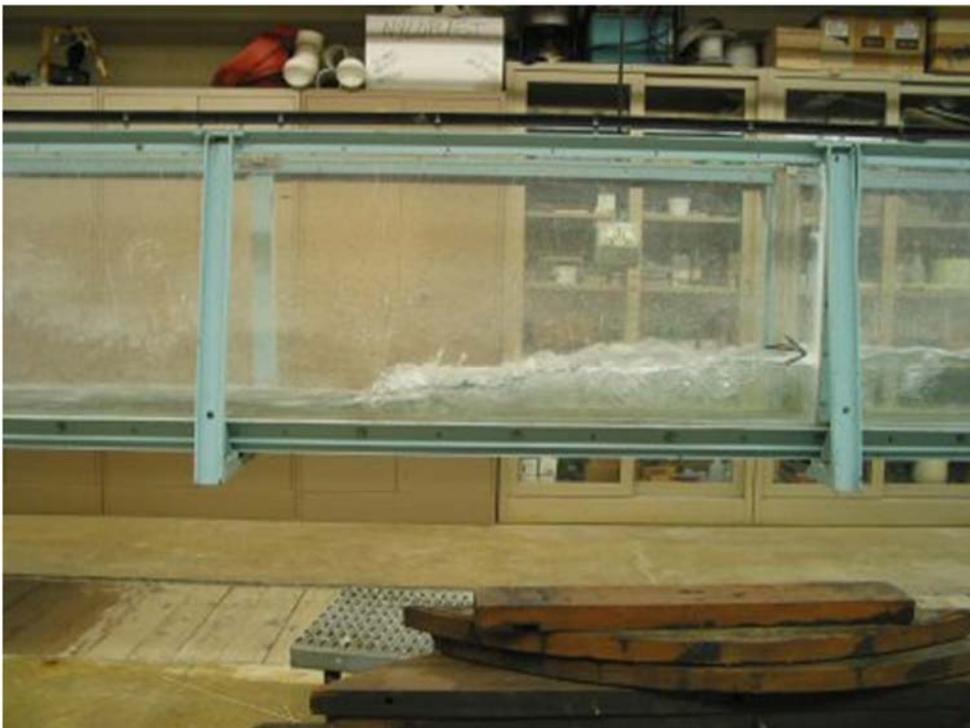
$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \rightarrow \frac{h_o}{h} = 1 + \frac{F^2}{2}$$

Dove con h_o si è indicata l'altezza di ristagno.

Evidentemente le condizioni critiche si raggiungono quando $F=1$. In idraulica se $F > 1$ si parla di condizioni supercritiche. Queste condizioni si possono raggiungere con un ugello convergente divergente.



Salto idraulico



Salto idraulico



Salto idraulico



Salto idraulico



Shallow water analogy

Salto idraulico

A Cavallo del salto si ha: $w_1 h_1 = w_2 h_2$ quindi:

$$\frac{w_1^2}{w_2^2} = \frac{h_2^2}{h_1^2} \rightarrow \frac{w_1^2}{gh_1} \frac{gh_2}{w_2^2} = \frac{h_2^3}{h_1^3} \rightarrow (1) \quad \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{\frac{3}{2}}$$

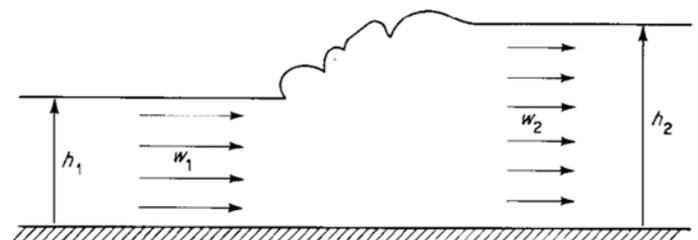
Dal bilancio della quantità di moto si ha:

$$\rho w_1^2 h_1 + \int_0^{h_1} \rho_1 dx_3 = \rho w_2^2 h_2 + \int_0^{h_2} \rho_2 dx_3$$

Ricordando che: $\rho = \rho g(h - x_3) + \rho_a$ e considerando la forza netta:

$$\rho w_1^2 h_1 + \left[\rho g \left(h_1 x_3 - \frac{x_3^2}{2} \right) \right]_0^{x_3=h_1} = \rho w_2^2 h_2 + \left[\rho g \left(h_2 x_3 - \frac{x_3^2}{2} \right) \right]_0^{x_3=h_2}$$

$$\rho w_1^2 h_1 + \rho g \frac{h_1^2}{2} = \rho w_2^2 h_2 + \rho g \frac{h_2^2}{2}$$



Shallow water analogy

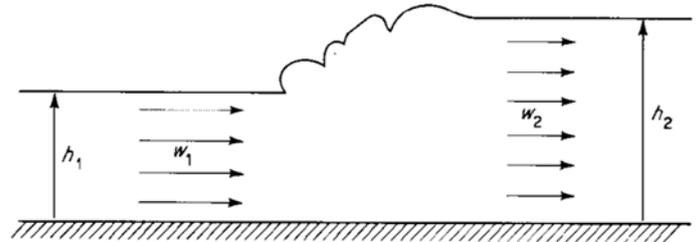
$$w_1^2 h_1 + g \frac{h_1^2}{2} = w_2^2 h_2 + g \frac{h_2^2}{2} \rightarrow gh_1^2 \left(\frac{w_1^2 h_1}{gh_1^2} + \frac{1}{2} \right) = gh_2^2 \left(\frac{w_2^2 h_2}{gh_2^2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$(2) \quad h_1^2 \left(F_1^2 + \frac{1}{2} \right) = h_2^2 \left(F_2^2 + \frac{1}{2} \right)$$

Dalla (1) $\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{F_1^2 + \frac{1}{2}}{F_1^{\frac{4}{3}}} = \frac{F_2^2 + \frac{1}{2}}{F_2^{\frac{4}{3}}}$$

Nota il numero di Froude a monte è possibile determinare quello a valle e dalla (1) si può risalire ad h .



Shallow water analogy

È più semplice però utilizzare direttamente le:

$$(1) \quad \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2) \quad h_1^2 \left(F_1^2 + \frac{1}{2} \right) = h_2^2 \left(F_2^2 + \frac{1}{2} \right)$$

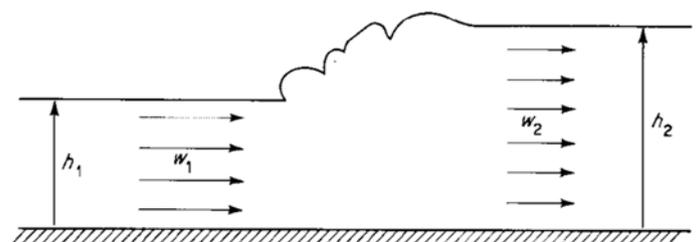
Imponendo: $\xi = \frac{h_2}{h_1}$ La (1) e la (2) diventano:

$$F_2^2 = F_1^2 \frac{1}{\xi^3} \quad (2F_1^2 + 1) = \xi^2 (2F_2^2 + 1)$$

$$(2F_1^2 + 1) = \xi^2 \left(2F_1^2 \frac{1}{\xi^3} + 1 \right) = \frac{2F_1^2}{\xi} + \xi^2$$

$$\xi^3 - \xi(2F_1^2 + 1) + 2F_1^2 = 0$$

Che chiaramente ammette la soluzione banale $\xi=1$. Dividendo per $\xi-1$ si ha:



Shallow water analogy

$$\begin{array}{r}
 \xi^3 \quad 0 \quad -(2F_1^2 + 1)\xi \quad 2F_1^2 \quad \div \quad \frac{|\xi - 1|}{\xi^2 + \xi - 2F_1^2} \\
 -\xi^3 \quad \xi^2 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 0 \quad \xi^2 \quad -(2F_1^2 + 1)\xi \quad 2F_1^2 \\
 -\xi^2 \quad +\xi \quad 0 \\
 \hline
 0 \quad -2F_1^2\xi \quad 2F_1^2 \\
 2F_1^2\xi \quad -2F_1^2 \\
 \hline
 0 \quad 0
 \end{array}$$

Da cui, scartando la soluzione negativa si ha:

$$\xi = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2F_1^2}$$

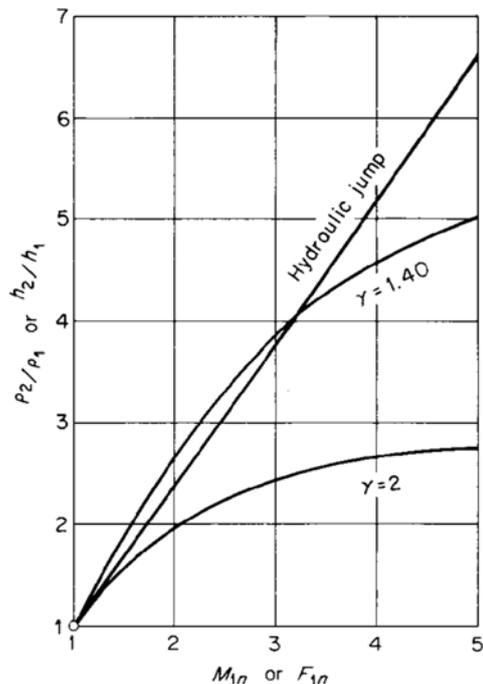
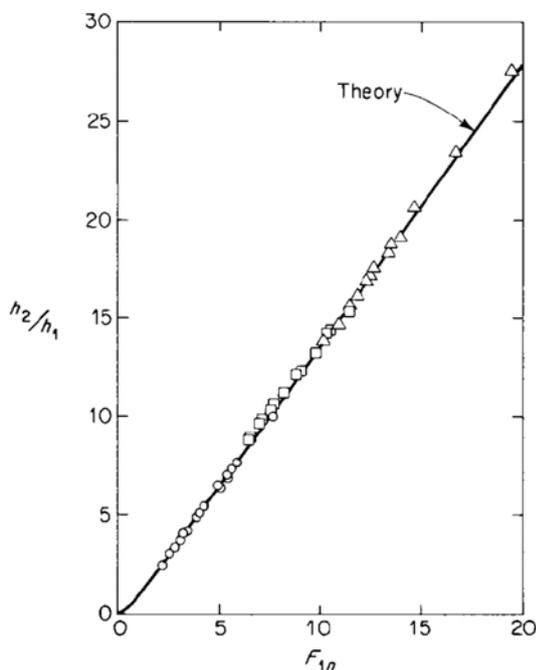
In particolare si ha: $F_1 \begin{cases} < 1 & \rightarrow \xi < 1 \\ > 1 & \rightarrow \xi > 1 \end{cases}$

Tipicamente, come nel caso dei gas, si scarta la soluzione subcritica.



Shallow water analogy

Nel caso di salto idraulico l'ipotesi di moto isentropico cade e l'analogia con la gasdinamica è valida solo nel limite di $F_1 \rightarrow 1$



Shallow water analogy

Discussione delle ipotesi.

- Accelerazione verticale trascurabile;
- Effetti viscosi trascurabili;
- $\overline{\nabla \cdot \underline{u}} = \nabla \cdot \overline{\underline{u}}$

Per la prima ipotesi si esamini l'equazione di continuità:

$$\overline{\nabla \cdot \underline{u}} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Supponendo che le variazioni della velocità in direzione tangenziali siano proporzionali al rapporto fra il modulo della velocità e la lunghezza d'onda λ dei disturbi:

$$\frac{u_3}{h} \approx \frac{u}{\lambda} \rightarrow u_3 \approx \frac{uh}{\lambda}$$

Poiché per un moto ondoso il periodo può essere valutato come: $\frac{\lambda}{a}$

Con questa ipotesi l'accelerazione verticale diventa: $\frac{Du_3}{Dt} \approx \frac{uh}{\lambda} / \frac{\lambda}{a} = \frac{uah}{\lambda^2}$



Shallow water analogy

Per onde forti u è dello stesso ordine di grandezza della velocità del suono:

$$\frac{Du_3}{Dt} \approx \frac{uah}{\lambda^2} \approx \frac{a^2 h}{\lambda^2} = g \frac{h^2}{\lambda^2} \quad a_l = \sqrt{hg}$$

La prima ipotesi è verificata se: $\frac{h^2}{\lambda^2} \ll 1$

È interessante notare che i maremoti avendo delle lunghezze d'onda molto elevate soddisfano queste relazioni anche se $h=5000m$.

Per la seconda ipotesi (Effetti viscosi trascurabili) l'equazione di bilancio della quantità di moto, nelle ipotesi di strato limite è:

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} + g\underline{\nabla}h = \nu \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x_3^2}$$

Confrontando gli ordini di grandezza del secondo e terzo termine si possono trascurare gli effetti viscosi se:

$$g\underline{\nabla}h \gg \nu \frac{u}{h^2} \rightarrow \underline{\nabla}h \gg \frac{uu}{gh} \frac{\nu}{hu} = \frac{F^2}{Re_h}$$



Shallow water analogy

Per acqua con valori tipici e $F=1$ si ha:

$$\underline{\nabla} h \gg \frac{F^2}{Re_h} = F^2 \frac{v}{hu} = F^2 \frac{v}{hF\sqrt{gh}} \approx \frac{v}{h\sqrt{gh}} \approx \frac{10^{-6}}{0.01\sqrt{0.1}} \approx \frac{1}{3000}$$

Per controbilanciare gli attriti si deve inclinare leggermente il piano.

Per la terza ipotesi ($\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{u}}$) si ha:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{u}} &= \frac{1}{h} \int_0^h \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx_3 \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{u}} &= \underline{\nabla} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h \underline{u} dx_3 = \frac{1}{h} \int_0^h \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx_3 + \frac{\underline{\nabla} h \cdot (\underline{u}(h) - \underline{u}(0))}{h} - \frac{\underline{\nabla} h}{h^2} \cdot \int_0^h \underline{u} dx_3 = \\ &= \underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{u}} + \frac{\underline{\nabla} h \cdot \underline{u}(h)}{h} - \frac{\underline{\nabla} h \cdot \underline{\bar{u}}}{h} \end{aligned}$$

Quindi, dovrebbe essere soddisfatta la relazione: $\underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{u}} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$

$$\underline{\nabla} h [\underline{\bar{u}} - (\underline{u}(h) - \underline{u}(0))] \ll h \underline{\nabla} \cdot \underline{\bar{u}} = u_3$$

dove l'uguaglianza deriva dall'equazione di continuità integrata lungo x_3 .

Questa approssimazione non appare del tutto giustificata.



Analogia con il traffico

Si supponga che ρ sia la densità di automobili (Veicoli/km) e q sia la portata (Numero di Veicoli/hr):

L'equazione di continuità dice che l'accumulo è uguale ai flussi:

$$(1) \quad \rho_t + q_x = 0$$

La portata può essere espressa come:

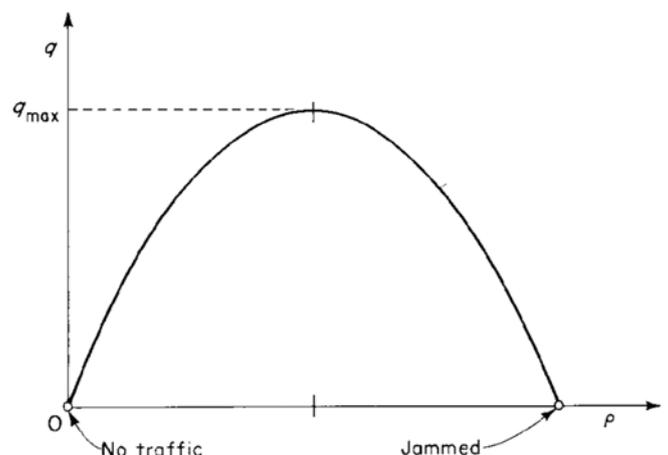
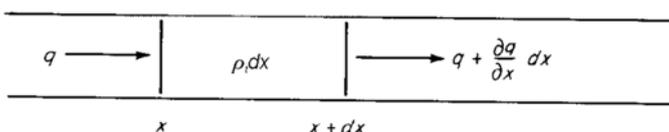
$$q = \rho u$$

Che è l'equivalente del flusso di massa. Nella forma più semplice si può supporre che esista un legame diretto fra q e ρ così come mostrato in figura.

Tipicamente si ha:

$$q_{max} = 2000 \frac{\text{Veicoli}}{\text{hr}}$$

$$u_{q_{max}} = 55 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$



Analogia con il traffico

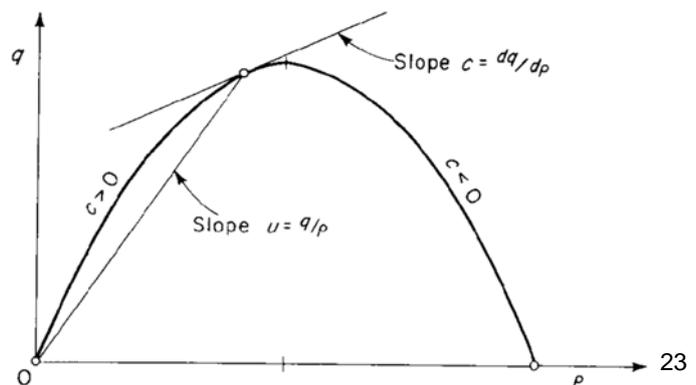
Indicando con $a = \frac{dq}{d\rho}$ la (1) diventa:
 $\rho_t + a\rho_x = 0$

$$(1) \quad \rho_t + q_x = 0$$

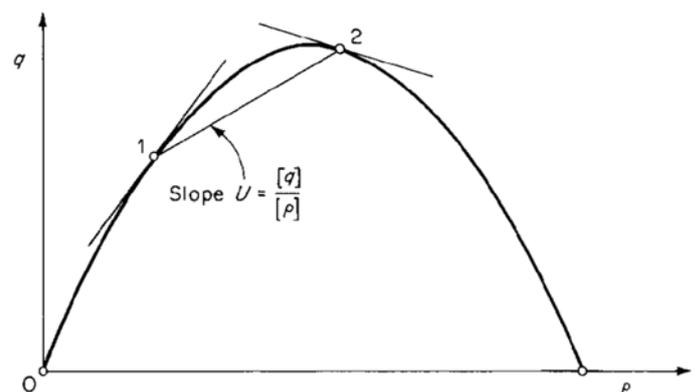
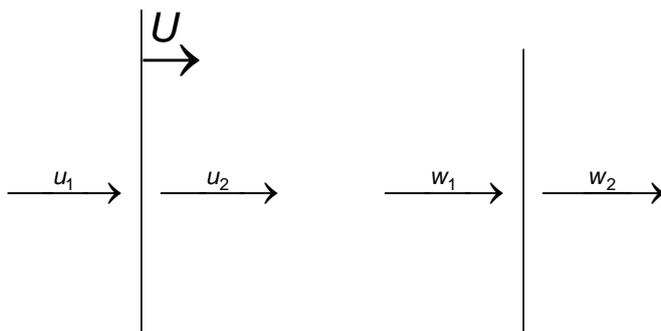
$$q = \rho u$$

Che ammette la curva caratteristica: $\frac{dx}{dt} = a(\rho)$

Le curve caratteristiche sono delle linee rette perche la densità rimane costante lungo di esse. La a può essere anche negativa perché relativa ad un osservatore fisso. Inoltre, come mostrato in figura, $a < u$ quindi i disturbi si propagano verso dietro.



Analogia con il traffico



La condizione che un urto deve soddisfare è: $\rho_1 w_1 = \rho_2 w_2$

Indicando con U la velocità dell'urto si ha:

$$w_1 = u_1 - U$$

$$w_2 = u_2 - U$$

$$\rho_1(u_1 - U) = \rho_2(u_2 - U) \rightarrow U(\rho_2 - \rho_1) = \rho_2 u_2 - \rho_1 u_1$$

$$U = \frac{[\rho u]}{[\rho]}$$

Dalla figura si vede che quando $U=a$ l'urto è infinitesimale.



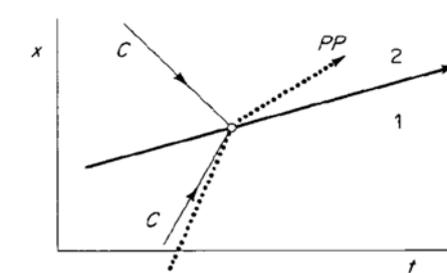
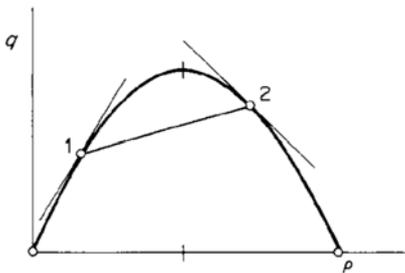
Analogia con il traffico

In un piano (x, t) si può capire abbastanza facilmente che l'urto è possibile solo se di compressione (da 1 a 2). Dalla figura si ha:

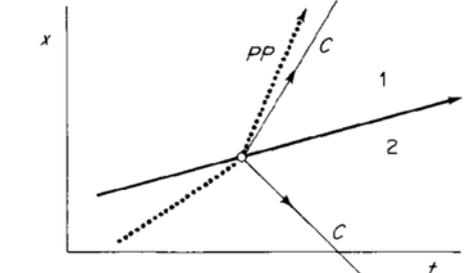
$$a_2 < U < a_1 < u_1 \quad \text{e} \quad U < u_2$$

I diagrammi sono capovolti, rispetto all'orientamento classico, perche così l'inclinazione delle curve caratteristiche nei due piani è la stessa.

Nel primo caso le curve caratteristiche convergono mentre, nel secondo divergono. Quindi l'urto può esistere solo nel primo caso.



(a)



(b)



Analogie



