

Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it



Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 4 del 24/10/2008

Onde d'urto coniche

In **precedenza** sono state analizzate in dettaglio le onde d'urto oblique ed è stato supposto che la **fenomenologia** fisica fosse **bidimensionale piana**. Questa ipotesi spesso non è applicabile ed è necessario, o effettuare altre semplificazioni, o risolvere le equazioni di bilancio in forma locale.

In molte applicazioni pratiche, tuttavia, esiste **simmetria assiale**, si pensi ad esempio alla parte prodiera di un aereo, o di un missile, supersonici, o alle prese d'aria supersoniche con spina conica.



F-4 Phantom II Caught Breaking the Sound Barrier.

Using a 35mm camera, a telephoto lens and ASA 400 film, Pat Maloney, an engineering planner, photographed an F-4 Phantom II at the moment it broke the sound barrier at the Annual Point Magu Naval Air Station Air Show. "The photograph of the visible shock wave is rare," stated Maloney. "It required a humid day, split second timing and no small measure of luck." Maloney frequently practices photography at the many air shows he attends.



The Military Aircraft Archive.
<http://www.milair.simplenet.com>





Onde d'urto coniche

Si comprende, pertanto, l'importanza di studiare, sia pure dal solo punto di vista dei risultati, il moto stazionario di una corrente supersonica che investe un **cono ad angolo d'attacco nullo**.

Quest'ultima ipotesi, sebbene sia certamente molto restrittiva, è necessaria in quanto **la presenza di un angolo d'attacco** diverso da zero **provoca la perdita della simmetria**, e quindi della bidimensionalità assialsimmetrica, comportando una notevole complicazione della trattazione.



Onde d'urto coniche

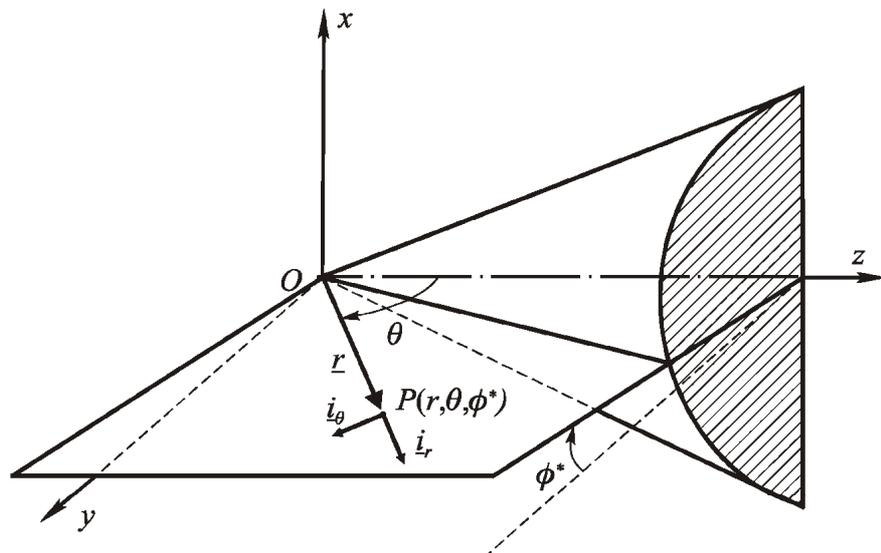
Le ipotesi che si formulano sono le seguenti:

- Il campo di moto è **simmetrico rispetto all'asse del cono**. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali: il primo è che la proiezione del campo di moto su un piano che comprende l'asse del cono **non è influenzata dalla scelta del piano stesso** e cioè, in un sistema di riferimento di tipo cilindrico, è indipendente dalla coordinata azimutale ; il secondo è che, se si applicasse il **bilancio del momento della quantità di moto** prima e dopo l'onda d'urto, la **componente normale** a questo piano del vettore velocità risulterebbe **identicamente nulla**.
- Oltre ad essere omoenergetico, il moto è **omoentropico** (ad entropia costante) sia **prima** che **dopo** l'onda d'urto pur essendo diversa l'entropia prima e dopo l'urto. Ovviamente, affinché sia verificata quest'ipotesi, è necessario che l'onda sia **attaccata al vertice del cono**.



Onde d'urto coniche

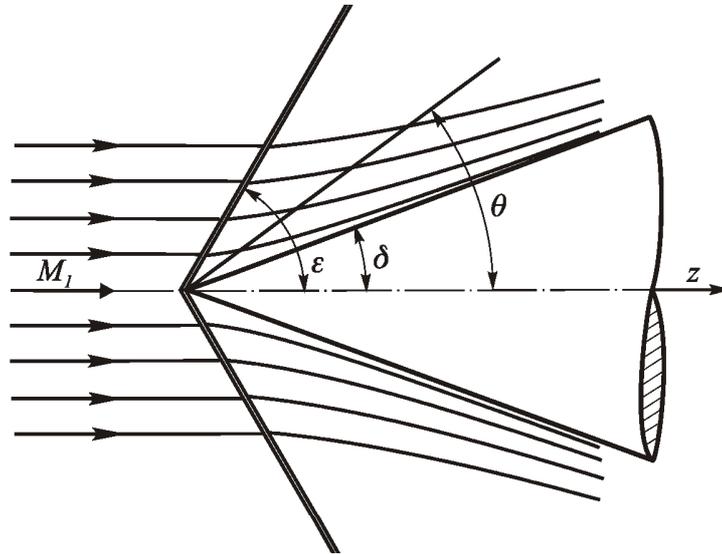
- Poiché **non esiste alcuna lunghezza caratteristica** rispetto alla quale adimensionalizzare, le restanti due variabili spaziali (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come **rapporto fra le stesse**. Quest'ipotesi è equivalente a dire che, se si considera un sistema di riferimento di tipo sferico, come quello mostrato in figura, tutte le grandezze termofluido-dinamiche devono essere **funzione della sola variabile θ** .



Onde d'urto coniche

In effetti, per le onde d'urto attaccate al vertice del cono ed elevati numeri di Reynolds locali, queste tre ipotesi sono **sperimentalmente verificate**.

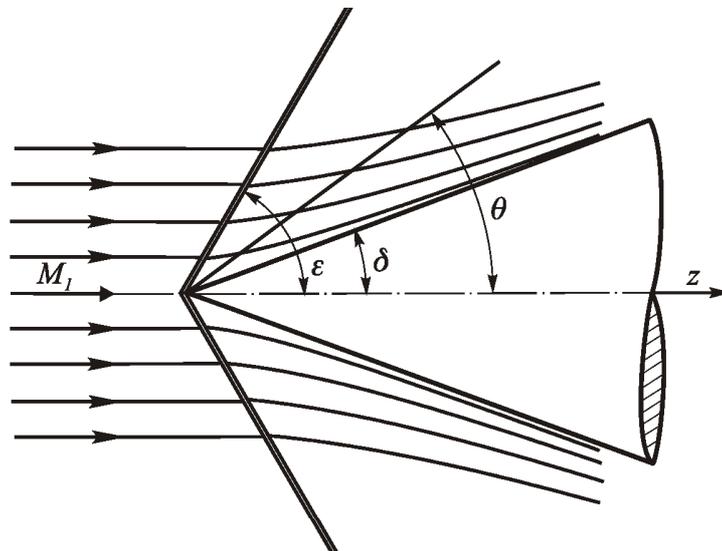
In definitiva, le tre ipotesi formulate consentono di studiare il fenomeno ritenendo che le variabili termofluidodinamiche siano **funzione solo della coordinata angolare θ** e, quindi, è possibile studiare il campo di moto su un qualunque piano che comprenda l'asse del cono.



Onde d'urto coniche

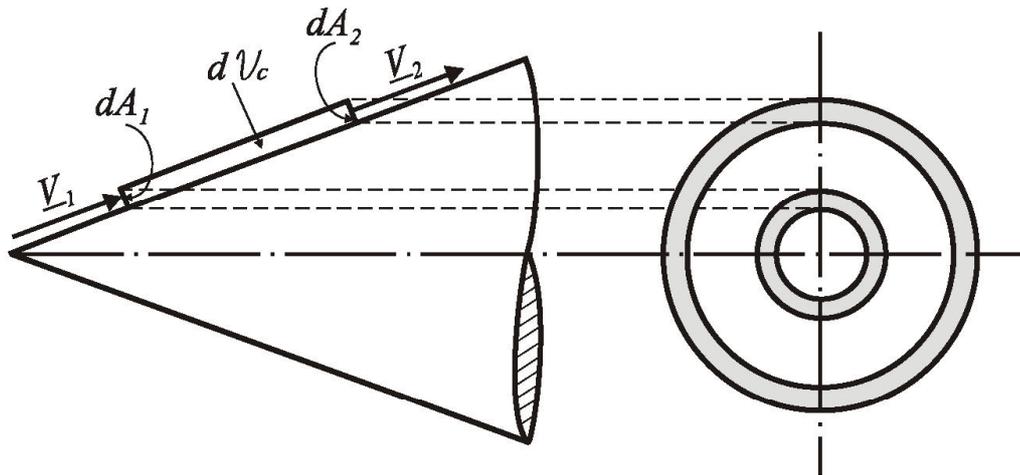
A differenza di quanto avviene per il **diedro** (per il quale le linee di corrente sono dritte e **parallele** alla superficie del diedro), nel caso del **cono** le linee di corrente, come mostrato dalla figura, sono **convergenti**.

Il fatto che le linee di corrente convergono, e che, di conseguenza, la deviazione a valle dell'onda d'urto deve essere minore di δ , può essere spiegato dimostrando che esse non possono né essere parallele tra loro, né divergere.



Onde d'urto coniche

Per dimostrare che le linee di corrente non possono essere parallele tra loro, si consideri il volume di controllo rappresentato a sinistra nella figura, nel quale il fluido entri dalla sezione di area dA_1 e ne esca da quella di area dA_2 (avente la stessa altezza) e si supponga, per assurdo, che il fluido stesso si muova parallelamente alla generatrice del cono. Come si deduce dalla vista laterale a destra, l'area dA_2 è maggiore di dA_1 .



Onde d'urto coniche

Poiché:
$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

ad un aumento dell'area della sezione retta è associato, in regime supersonico (ma analoghe considerazioni si applicano al caso di moto subsonico), un aumento del numero di Mach e di conseguenza una diminuzione della pressione. Se ora si fa riferimento a questo tubo di flusso elementare è facile convincersi che M **crescerebbe** all'aumentare dello spazio percorso a partire dall'onda il che risulterebbe in contrasto con la terza ipotesi, perché comporterebbe, un **continuo aumento del numero di Mach sulla superficie del cono**.

A maggior ragione le linee di corrente **non possono divergere** tra loro, altrimenti anche l'altezza del tubo di flusso aumenterebbe comportando un conseguente maggior aumento di area. Dunque le linee di corrente devono per forza essere **convergenti** per mantenere sulla superficie del cono le stesse condizioni di pressione e di numero di Mach.



Onde d'urto coniche

Il convergere delle linee di corrente a valle dell'onda d'urto provoca una variazione delle variabili termofluidodinamiche che, per le ipotesi fatte, devono seguire una **trasformazione isoentropica**.

In particolare, nell'evoluzione che porta il fluido dalle condizioni immediatamente dopo l'onda d'urto a quelle sul cono, la pendenza delle linee di corrente cresce (finché queste non diventano, relativamente molto a valle, parallele alla superficie del cono), il numero di Mach diminuisce e la pressione aumenta.

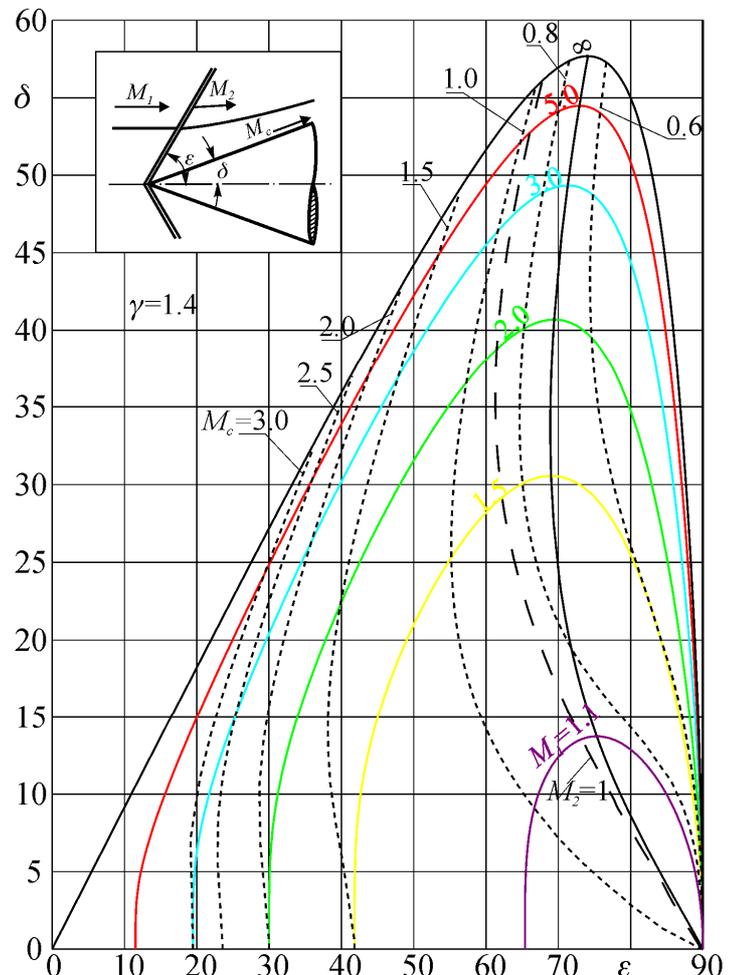
L'ulteriore deviazione della corrente e la compressione che avvengono nella regione a valle dell'onda fanno sì che, a parità di angolo di deviazione δ e di numero di Mach della corrente a monte, **l'onda d'urto sia meno intensa** e quindi meno inclinata rispetto al caso bidimensionale piano, ovvero, a parità di angolo d'urto ε e numero di Mach M_1 , l'angolo finale di deviazione δ della corrente in un'onda conica risulta **maggiore** di quello corrispondente alla deviazione dovuta all'onda d'urto piana.



Onde d'urto coniche

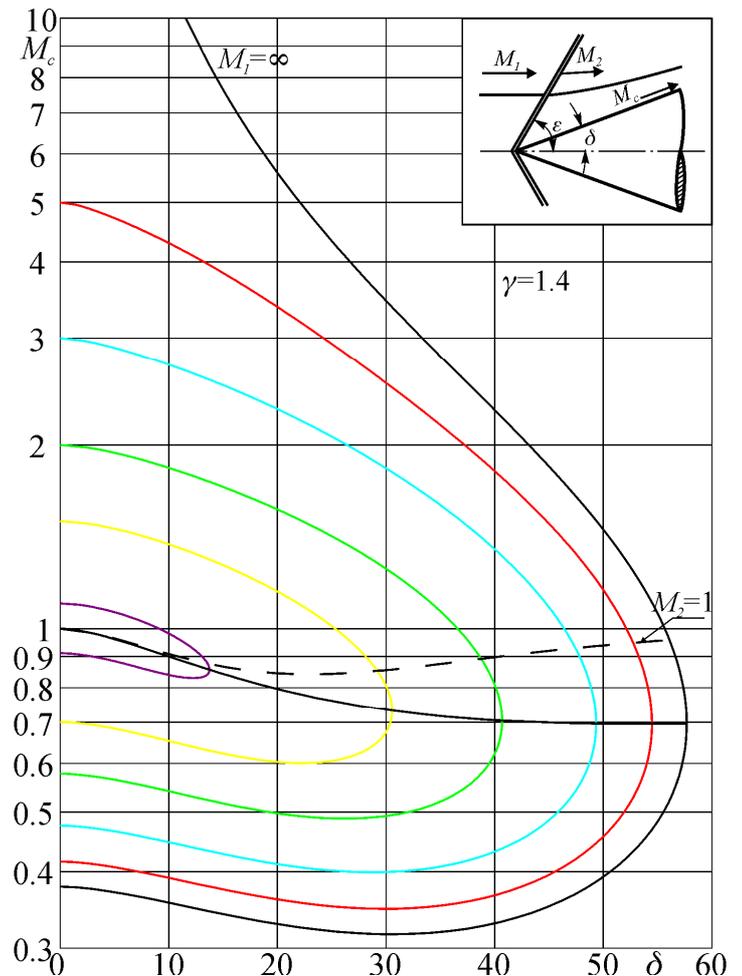
Si noti che, con eccezione di $M_2 = 1$ (curva a tratto lungo), nella figura non sono state diagrammate le curve a M_2 costante (cioè il numero di Mach subito a valle dell'onda d'urto), bensì quelle a M_c costante (cioè il numero di **Mach sulla superficie del cono**, curve a tratto breve).

Essendo il moto a valle dell'onda d'urto isoentropico, noto M_c e le condizioni a valle dell'onda d'urto, tramite le tabelle del flusso isoentropico, si possono determinare le grandezze termofluidodinamiche sulla superficie del cono.



Onde d'urto coniche

A questo scopo, nella figura a lato, è più dettagliatamente diagrammato M_c in funzione di δ per diversi valori di M_1 . Nel diagramma i **numeri di Mach a monte dell'onda d'urto** sono identificabili con le **intercette** delle relative curve per $\delta=0$ e $M_c \geq 1$.

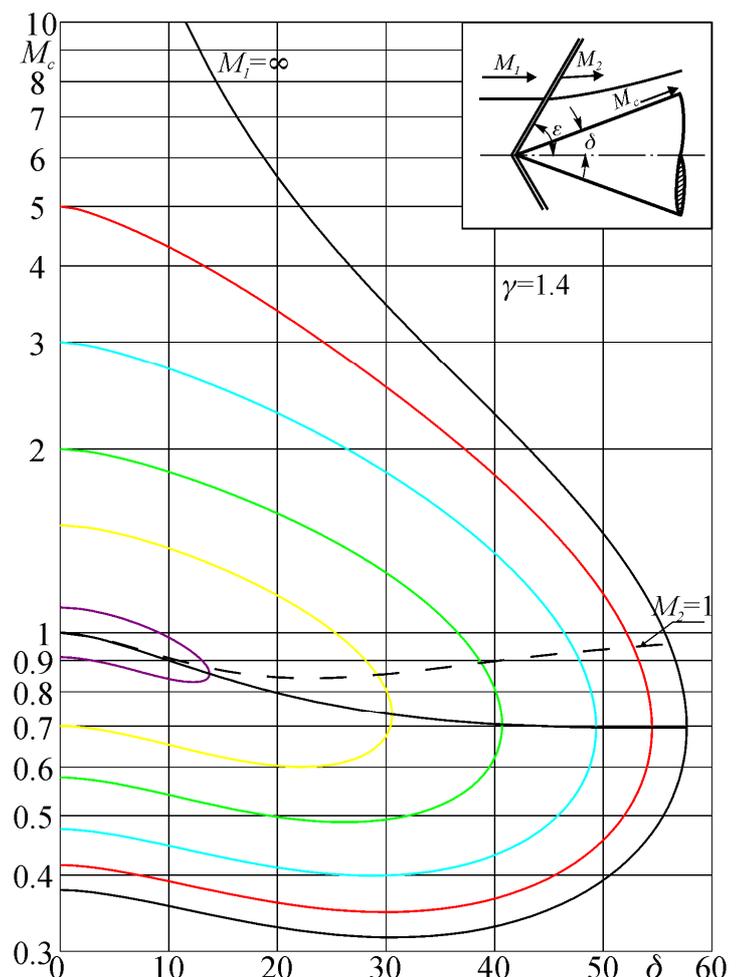


Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Onde d'urto coniche

È interessante notare che, qualunque sia il numero di Mach M_1 , esistono sempre coppie di valori δ, ϵ tali che il moto a valle dell'onda possa passare da un regime supersonico ad uno subsonico senza ulteriori onde d'urto.

Questo fenomeno accade per tutti i punti appartenenti alla regione delimitata superiormente dalla retta orizzontale di equazione $M_c = 1$ e inferiormente dalla curva a $M_2 = 1$.



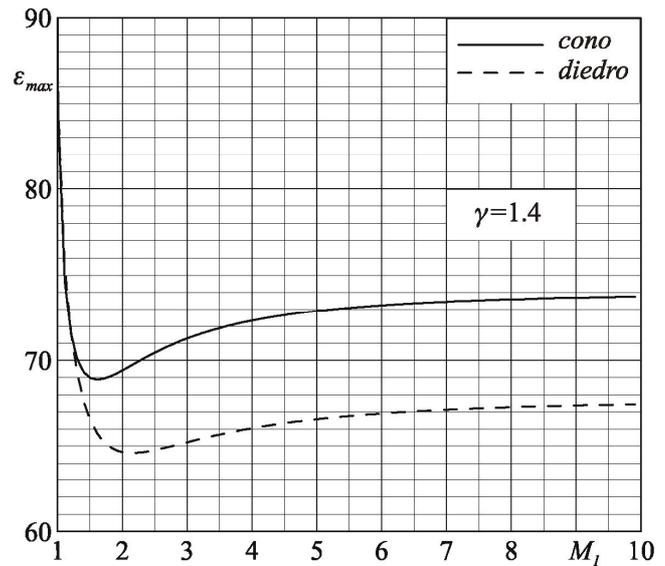
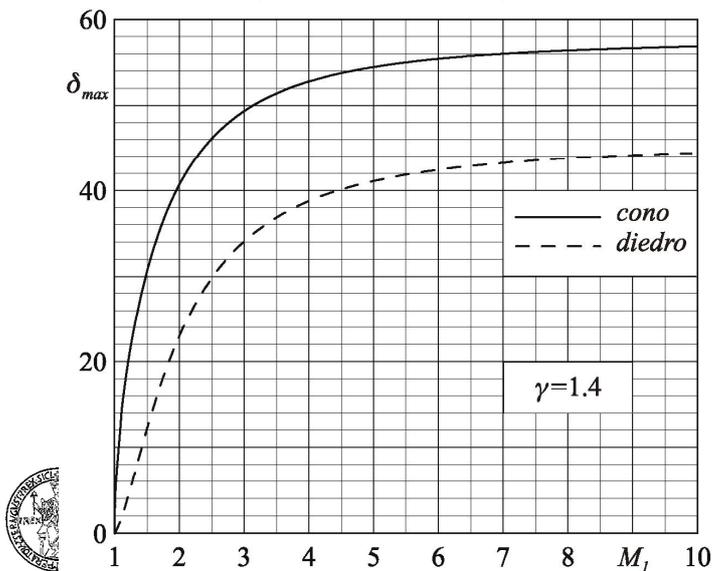
Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Onde d'urto coniche

Nella figure sono diagrammati rispettivamente δ_{max} ed ε_{max} in funzione di M_1 per i due casi d'onda conica e bidimensionale piana.

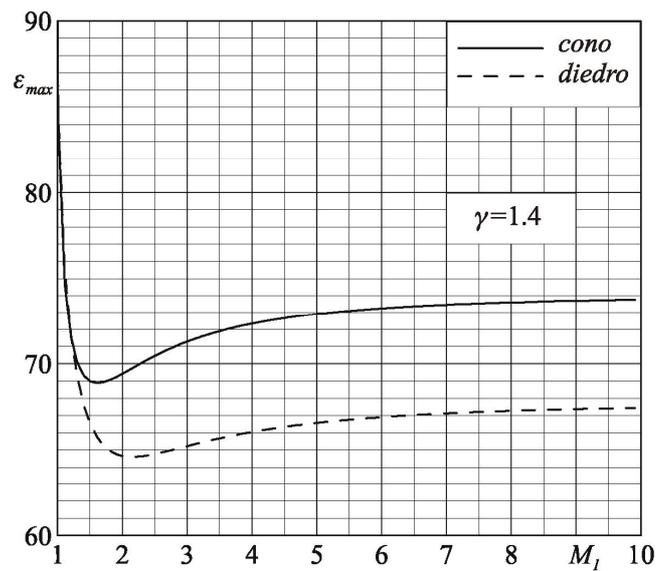
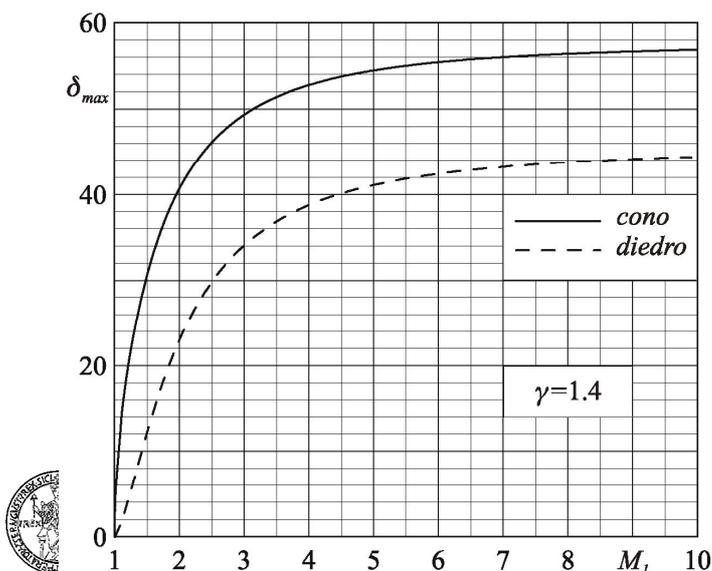
A causa del convergere delle linee di corrente, la **deviazione imposta dall'onda conica è minore** o, in altri termini, essendo l'onda meno intensa, il disturbo prodotto dal corpo sulla corrente a monte è più piccolo.

Ne consegue che l'**angolo di deviazione massimo è maggiore** nel caso del cono rispetto al caso piano.



Onde d'urto coniche

Infine occorre qui esplicitamente osservare che, in modo del tutto analogo a quanto accade nel caso di una corrente supersonica che investe un diedro piano, **se l'angolo di semiapertura del cono è maggiore di δ_{max} l'onda d'urto si stacca dal vertice.**



Onde d'urto coniche

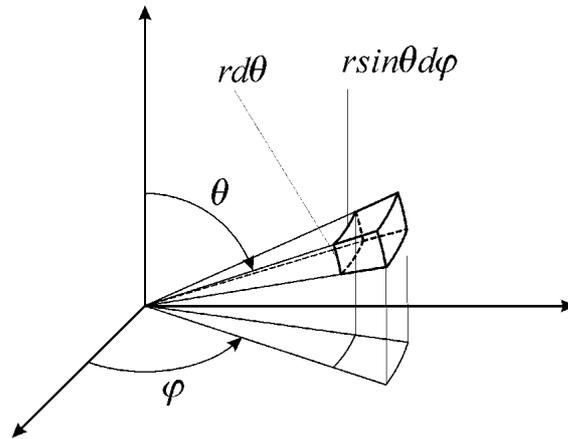
Per il teorema di Crocco l'ipotesi di omoentropicità implica l'irrotazionalità del campo di moto a valle dell'onda.

Esplicitando questa condizione ed il bilancio di massa locale in coordinate sferiche si giunge ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che prende il nome di **Taylor-Maccoll**.

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{V} = 0 \quad \underline{\nabla} \cdot \rho \underline{V} = 0$$

A cui vanno aggiunte le condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad V_\varphi = 0$$



Onde d'urto coniche



Geoffrey Ingram Taylor
London - 1886 - 1975



Onde d'urto coniche

L'espressione della prima equazione in coordinate sferiche può essere ricavata a partire dal teorema di Stokes.

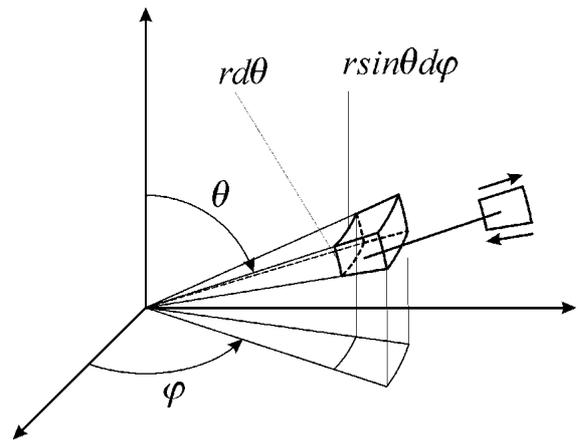
$$\int_S \underline{n} \cdot \underline{\nabla} \wedge \underline{V} dS = \oint_C \underline{V} \cdot d\underline{c}$$

Che applicata alla faccia ortogonale al vettore \underline{i}_φ del volume elementare fornisce:

$$\begin{aligned} \underline{i}_\varphi \cdot \underline{\nabla} \wedge \underline{V} &= \frac{-V_\theta r d\theta + \left(V_\theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta + V_r dr - \left(V_r + \frac{\partial V_r}{\partial \theta} d\theta \right) dr}{rd\theta dr} = \\ &= \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Mentre dal classico libro Bird et al "Transport phenomena" si trova (Tab A.7-3)

$$[\underline{\nabla} \times \underline{v}]_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$



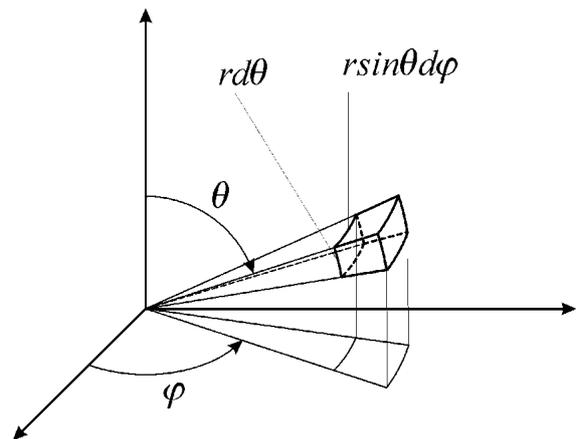
Onde d'urto coniche

La seconda equazione in coordinate sferiche può essere ricavata a partire dal teorema di Gauss.

$$\int_{Vol} \underline{\nabla} \cdot \underline{V} dVol = \int_S \underline{n} \cdot \underline{V} dS$$

Che applicata al volume elementare, trascurando i termini in cui compare V_φ , fornisce:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{V} &= \frac{-V_r r d\theta r \sin\theta d\phi + \left(V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta (r + dr) \sin\theta d\phi}{rd\theta r \sin\theta d\phi} + \\ &+ \frac{-V_\theta r \sin\theta d\phi dr + \left(V_\theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \left(r \sin\theta + \frac{\partial r \sin\theta}{\partial \theta} d\theta \right) d\phi dr}{rd\theta r \sin\theta d\phi dr} \end{aligned}$$



Onde d'urto coniche

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \frac{\frac{\partial V_r}{\partial r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr + 2V_r r \sin\theta d\theta d\phi dr}{r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr} + \frac{V_\theta r \cos\theta d\phi dr + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} r \sin\theta d\theta d\phi dr}{r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2V_r}{r} + \frac{\cot(\theta)V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

Mentre dal classico libro Bird, Stewart and Lightfoot, "Transport phenomena", Wiley, 2002, si trova (Tab A.7-3)

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$



Onde d'urto coniche

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2V_r}{r} + \frac{\cot(\theta)V_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

Da cui (ricordando che le derivate rispetto a r sono nulle):

$$\underline{\nabla} \cdot \rho \underline{V} = \frac{2\rho V_r}{r} + \frac{\cot(\theta)\rho V_\theta}{r} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

Indicando con un apice le derivate rispetto a θ le equazioni diventano:

$$V_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = V_r'$$

$$2\rho V_r + \cot(\theta)\rho V_\theta + \rho V_\theta' + V_\theta \rho' = 0$$

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$$

A cui va aggiunta l'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$dp + \rho V dV = 0$$



Onde d'urto coniche

$$V_\theta = V_r'$$

$$2\rho V_r + \cot(\theta)\rho V_\theta + \rho V_\theta' + V_\theta \rho' = 0$$

$$dp + \rho V dV = 0$$

ma:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{d\theta} = \frac{1}{a^2} \frac{-\rho V dV}{d\theta} = -\frac{\rho V}{a^2 2\sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}} (2V_r V_r' + 2V_\theta V_\theta')$$

$$\rho' = -\frac{\rho}{a^2} (V_r V_r' + V_\theta V_\theta')$$

Sostituendo nella seconda:

$$2\rho V_r + \cot(\theta)\rho V_r' + \rho V_r'' = +V_r' \frac{\rho}{a^2} (V_r V_r' + V_r' V_r'')$$

$$2V_r + \cot(\theta)V_r' + V_r'' = V_r' \frac{1}{a^2} (V_r V_r' + V_r' V_r'')$$



Onde d'urto coniche

$$2V_r + \cot(\theta)V_r' + V_r'' = V_r' \frac{1}{a^2} (V_r V_r' + V_r' V_r'')$$

La velocità del suono può essere espressa come:

$$a^2 = \gamma RT = (\gamma - 1)c_p T = (\gamma - 1) \left(\frac{V_l^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{(\gamma - 1)}{2} (V_l^2 - V_r^2 - V_\theta^2)$$

$$a^2 = \frac{(\gamma - 1)}{2} (V_l^2 - V_r^2 - V_r'^2)$$

Indicando con y il rapporto fra la velocità radiale e la velocità limite si ha:

$$2y + \cot(\theta)y' + y'' = y'^2 \frac{1}{\frac{(\gamma - 1)}{2} (1 - y^2 - y'^2)} (y + y'')$$



Onde d'urto coniche

Che è l'equazione di Taylor-Maccoll:

$$(2y + \cot(\theta)y' + y'') \frac{(\gamma - 1)}{2} (1 - y^2 - y'^2) = y'^2 (y + y'')$$

La velocità normalizzata rispetto a quella limite è, nelle ipotesi fatte, funzione del solo numero di Mach:

$$H = \frac{V_l^2}{2} = \frac{V^2}{2} + c_p T \rightarrow \frac{V^2}{V_l^2} = \left(1 - \frac{T}{T_o}\right) = \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}\right)$$

$$\frac{V^2}{V_l^2} = \left(\frac{\frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right)$$



Onde d'urto coniche

Si supponga di conoscere l'angolo di inclinazione dell'onda d'urto e le condizioni a monte dell'onda. In questo caso con la stessa procedura utilizzate per le onde d'urto piane è possibile ricavare le grandezze a valle. In particolare i valori di y e y' . Il problema è quindi un problema di valori iniziali però non è noto l'angolo di deviazione finale e quindi la fine del intervallo d'integrazione. Evidentemente sul cono la componente normale deve annullarsi e, proprio questa condizione, permette di risolvere il problema.

L'equazione di Taylor-Maccoll può essere messa nella forma:

$$y'' = \frac{C(2y + \cot(\theta)y') - yy'^2}{y'^2 - C}$$

Con:

$$C = \frac{(\gamma - 1)}{2} (1 - y^2 - y'^2)$$



Onde d'urto coniche

Che può essere codificata come:

```
function dy = Taylor(x,y)
```

```
global gamma;
```

```
%y(1)=Vr y(2)=Vteta=Vr'
```

```
appo=y(2)*y(2);
```

```
C=(gamma-1)/2.*(1-y(1)*y(1)-appo);
```

```
dy =[y(2)
```

```
((2*y(1)+cot(x)*y(2))*C-y(1)*appo)/(appo-C)    ];
```

```
return
```

$$y'' = \frac{C(2y + \cot(\theta)y') - yy'^2}{y'^2 - C}$$

$$C = \frac{(\gamma - 1)}{2} (1 - y^2 - y'^2)$$



Onde d'urto coniche

La funzione che restituisce δ in funzione di ε è:

```
function Delta=DeltaDiEpsMRk4(Eps,M)
```

```
global gamma;
```

```
[M2 delta Vn Vt]=UrtoPiano(M,Eps);
```

```
L=[pi*Eps/180 0]; % Intervallo d'integrazione massimo
```

```
y0=[Vt Vn]; %Condizioni iniziali
```

```
h=-.005; %si fissa il passo (Negativo)
```

```
N=floor((L(2)-L(1))/h)+100; %numero di punti
```

```
x=zeros(N,1); %Allocazione memoria
```

```
y=zeros(N,length(y0)); %Allocazione memoria
```

```
x(1)=L(1); y(1,:)=y0; %Condizioni iniziali
```

```
ha =abs(h); h1=h;
```

```
i=1;
```



Onde d'urto coniche

La funzione che restituisce δ in funzione di ε è:

```
[x(i+1), y(i+1,:)] = rk4(x(i), h, y(i,:), @Taylor);  
while abs(y(i+1,2)) > 1e-6 %ciclo iterativo  
    i=i+1;  
    [x(i+1), y(i+1,:)] = rk4(x(i), h, y(i,:), @Taylor);  
    xnew = (y(i+1,2)*x(i) - y(i,2)*x(i+1)) / (y(i+1,2) - y(i,2));  
    h = xnew - x(i+1); % puo' essere negativo o positivo  
    if abs(h) > ha h = h1; end  
end  
Delta = x(i+1) * 180 / pi;  
return
```



Onde d'urto coniche

Sfruttando la possibilità di ode45 di gestire eventi si ottiene un codice più compatto:

```
function Delta = DeltaDiEpsM(Eps, M)  
global gamma;  
[M2 delta Vn Vt] = UrtoPiano(M, Eps);  
options = odeset('RelTol', 1e-8, 'AbsTol', [1e-8], 'Events', @Evento);  
L = [pi * Eps / 180 0]; % Intervallo d'integrazione massimo  
y0 = [Vt Vn]; % Condizioni iniziali  
[teta, y] = ode45(@Taylor, L, y0, options);  
Delta = teta(end) * 180 / pi; % rad -> Gradi  
return
```

```
function [value, isterminal, direction] = Evento(t, y)  
value = y(2);  
isterminal = 1; %% tutti gli zero  
direction = 0; %% qualunque direzione  
return
```

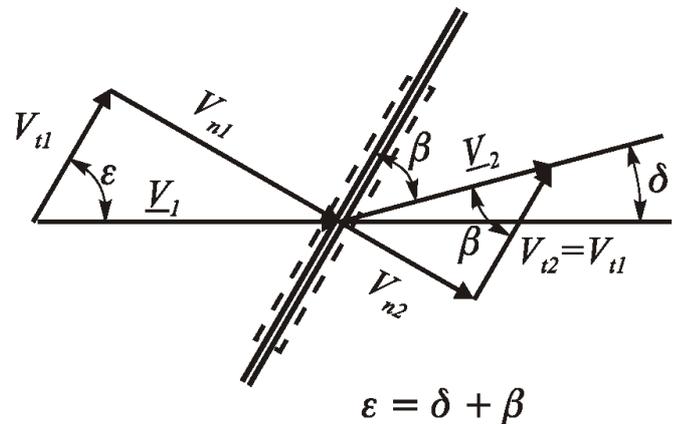


Onde d'urto coniche

Ricordando le relazioni:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)((\gamma - 1)M_1^2 + 2)}{M_1^2(\gamma + 1)^2}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Onde d'urto coniche

La funzione UrtoPiano è:

```
function [M2 delta Vn Vt]=UrtoPiano(M,Eps)
```

```
global gamma;
```

```
E=Eps*pi/180;           % Gradi -> Rad
```

```
Mn1=M.*sin(E);
```

```
Mt1=M.*cos(E);
```

```
QM=Mn1.*Mn1;
```

```
Mn2=sqrt(((gamma-1)*QM+2)./(2*gamma*QM-gamma+1));
```

```
rT=(((gamma-1)*QM+2).*(2*gamma*QM-gamma+1)./(QM*(gamma+1)^2));
```

```
Mt2=Mt1./sqrt(rT);
```

```
M2=sqrt(Mt2.*Mt2+Mn2.*Mn2);
```

```
delta=(E-atan2(Mn2,Mt2))*180/pi;
```

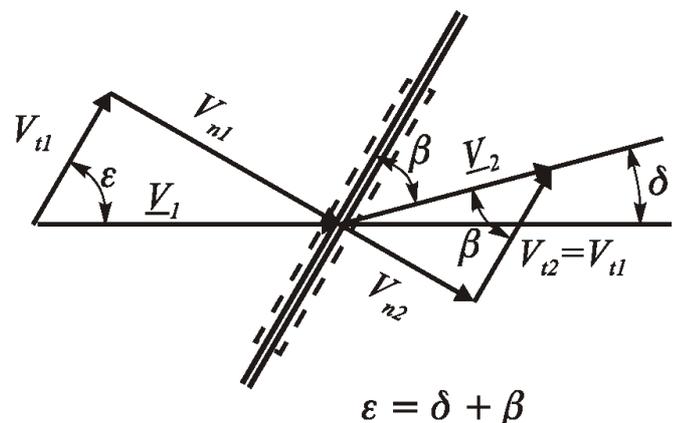
```
appo=(gamma-1)*0.5*M2.*M2;
```

```
Vad=sqrt(appo./(appo+1));
```

```
Vt=Vad.*Mt2./M2;
```

```
Vn=-Vad.*Mn2./M2;
```

```
return;
```



Onde d'urto coniche

Un possibile chiamante e:

global gamma;

gamma=1.4;

Eps=30;

M=3;

Delta=DeltaDiEpsM(Eps,M)

Delta=DeltaDiEpsMRk4(Eps,M)

Il risultato è:

Delta =

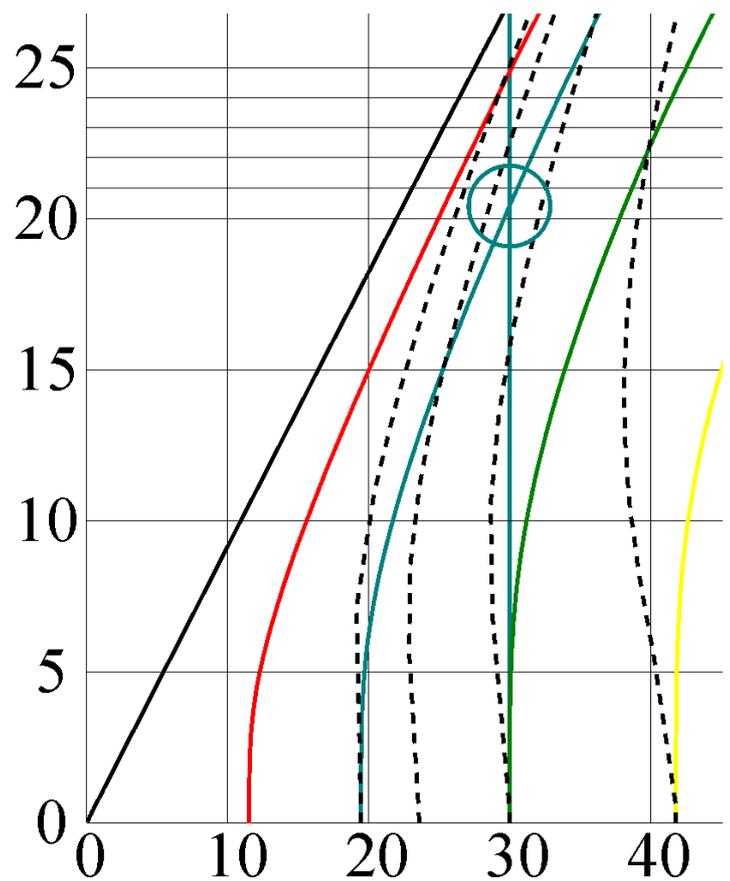
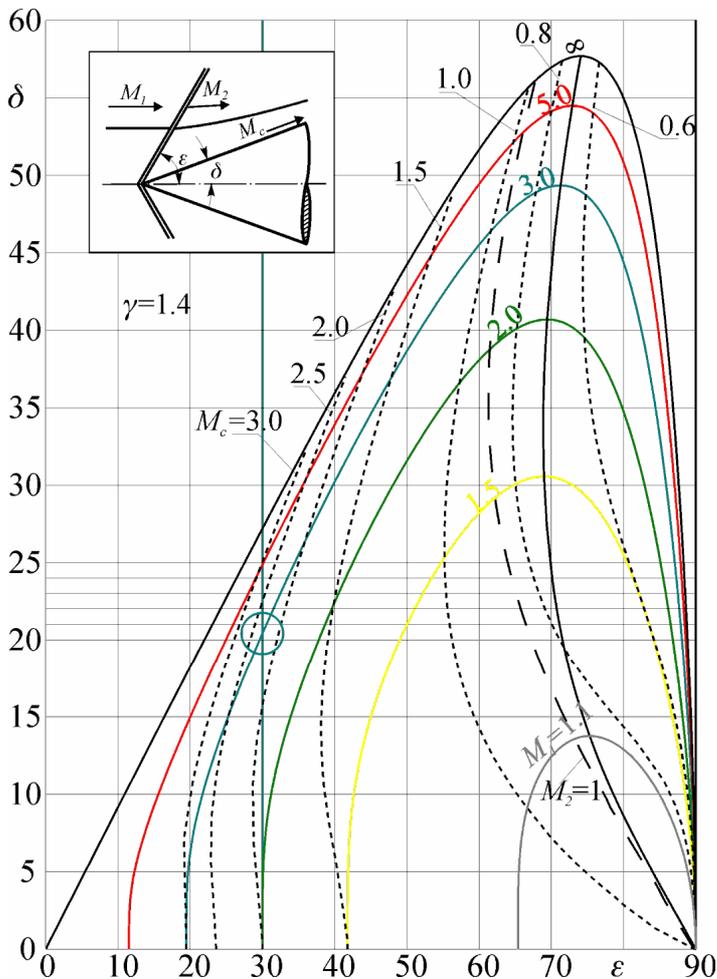
20.4131

Delta =

20.4131



Onde d'urto coniche



Onde d'urto coniche

Il secondo problema è quello in cui è noto δ ed incognito ε :

```
function Eps=EpsDiDeltaM(Delta,M,Eps)
global gamma;
```

```
options = optimset('TolFun',1e-8);
Eps=fzero(@Err,Eps,options,Delta,M);
return
```

```
function E = Err(Eps,Delta,M)
D=DeltaDiEpsM(Eps,M);
E=D-Delta;
pause(0);
return
```



Onde d'urto coniche

Il chiamante è:

```
%return
Delta=20.4131;
Eps=45; % Soluzione debole
Eps=EpsDiDeltaM(Delta,M,Eps)
Eps=85; % Soluzione forte
Eps=EpsDiDeltaM(Delta,M,Eps)
%return;
```

Il risultato è:

```
Eps =
    30.0000
```

```
Eps =
    88.0104
```



Onde d'urto coniche

Se volessimo diagrammare δ in funzione di ε il chiamante potrebbe essere

```
clf
hold on;
for M=1.1:0.2:3
    Eps=[asin(1/M)*180/pi floor(asin(1/M)*180/pi)+1:1:89 90];
    Delta=zeros(1,length(Eps));
    for i=2:length(Eps)-1
        Delta(i)=DeltaDiEpsM(Eps(i),M);
    end
    plot(Eps,Delta);
end
hold off
```

