

Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it



Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 5 del 11/10/16

Richiami sulle onde d'urto

Si rivedono ora brevemente le equazioni studiate nel caso delle onde d'urto normali.

La conservazione della massa fornisce:

$$G = \rho V = Cost$$

Che utilizzando l'operatore di salto $[V] = V_2 - V_1$ può essere messa nella forma:

$$(1) \quad [\rho V] = \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 = 0$$

Con la stessa simbologia si ha (bilanci della quantità di moto e dell'energia):

$$(2) \quad [\rho + \rho V^2] = [I] = 0$$

$$(3) \quad \left[h + \frac{V^2}{2} \right] = [H] = 0$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Richiami sulle onde d'urto

Per semplificare i passaggi si esprime il salto di un prodotto di grandezze generiche:

$$[ab] = a_2 b_2 - a_1 b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} (b_2 - b_1) + \frac{b_1 + b_2}{2} (a_2 - a_1) = a_m [b] + b_m [a]$$

Dove si sono definite le grandezze medie

$$a_m = \frac{a_1 + a_2}{2} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{2} = a_1 + \frac{[a]}{2}$$

La (1) e (2) danno:

$$[\rho + \rho V^2] = [\rho + v G^2] = [\rho] + G^2 [v] = 0 \quad (1) \quad [\rho V] = \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 = 0$$

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[\rho]}{[v]} \quad (2) \quad [\rho + \rho V^2] = [I] = 0$$

Dalla (3) si ha:

$$(3) \quad \left[h + \frac{V^2}{2} \right] = [H] = 0$$

$$\left[h + \frac{V^2}{2} \right] = [h] + \frac{G^2}{2} [v^2] = [h] + G^2 v_m [v] = 0$$



Richiami sulle onde d'urto

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[\rho]}{[v]}$$

Da questa ultima e dalla (4):

$$(5) \quad [h] = v_m [\rho]$$

$$\left[h + \frac{V^2}{2} \right] = [h] + \frac{G^2}{2} [v^2] = [h] + G^2 v_m [v] = 0$$

Che è chiamata relazione di Rankine-Hugoniot. Questa relazione è particolarmente interessante perché lega solo variabili termodinamiche (Si può facilmente ricordare perché è molto simile alla relazione di Gibbs $dh = Tds + vdp$ nell'ipotesi di $ds=0$). È possibile trovare una relazione analoga per l'energia $h = u + pv$:

$$[h] = [u + pv] = [u] + p_m [v] + v_m [\rho] = v_m [\rho]$$

Da cui l'altra forma della Rankine-Hugoniot (anche questa facilmente memorizzabile):

$$(6) \quad [u] = -p_m [v]$$

Evidentemente tutti i salti possono essere espressi in funzione di quello del volume specifico. Ad esempio dalla (4):

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[\rho]}{[v]} \rightarrow [\rho] = -G^2 [v]$$



Richiami sulle onde d'urto



William John Macquorn Rankine
Edinburgh - 1820 - 1872



Pierre-Henri Hugoniot
Allenjoie - 1851-1887



Richiami sulle onde d'urto

Si cercherà ora di valutare il salto entropico in funzione di quello del volume specifico. Per fare questo si sviluppa in serie il salto entropico rispetto al punto iniziale v_1 :

$$(7) \quad [s] = s - s_1 = s'(v_1)[v] + s''(v_1)\frac{[v]^2}{2} + s'''(v_1)\frac{[v]^3}{6}$$

Dove chiaramente gli apici denotano la derivazione rispetto a v e gli operatori di salto si riferiscono alla generica grandezza a valle:

$$[a] = a - a_1$$

La determinazione delle derivate di s può essere effettuata a partire dalla funzione:

$$I(s, v) = [u] + p_m[v] = u - u_1 + \frac{p + p_1}{2}(v - v_1) = 0$$

Che essendo una manipolazione della Rankine-Hugoniot è identicamente nulla. Le derivate si ottengono da:

$$s^n(v_1) = \left(\frac{\partial^n s}{\partial v^n} \right)_{I=\text{cost}, v=v_1}$$



Richiami sulle onde d'urto

$$\rho_m = \frac{\rho + \rho_1}{2}$$

Differenziando successivamente l si ha:

$$dl = Tds - pdv + \frac{dp}{2}[v] + \rho_m dv = Tds + \frac{dp}{2}[v] - \frac{[\rho]}{2}dv = 0$$

$$\begin{aligned} \rho_m - \rho &= \frac{\rho + \rho_1}{2} - \rho \\ &= \frac{-\rho + \rho_1}{2} = -\frac{[\rho]}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2l &= dTds + Td^2s + \frac{d^2p}{2}[v] + \frac{dpdv}{2} - \frac{dpdv}{2} - \frac{[\rho]}{2}d^2v = \\ &= dTds + Td^2s + \frac{d^2p}{2}[v] - \frac{[\rho]}{2}d^2v = 0 \end{aligned}$$

$$d^3l = d^2Tds + 2dTd^2s + Td^3s + \frac{d^3p}{2}[v] + \frac{d^2p}{2}dv - \frac{dp}{2}d^2v - \frac{[\rho]}{2}d^3v = 0$$

Per $v=v_1$ e di conseguenza per $p=p_1$ queste equazioni forniscono:

$$ds = 0 \quad d^2s = 0$$

$$Td^3s + \frac{d^2p}{2}dv - \frac{dp}{2}d^2v = 0 \quad (8) \quad d^3s = \frac{1}{2T}(-d^2pdv + dpd^2v)$$



Richiami sulle onde d'urto

Dalla relazione fondamentale energetica si ha:

$$dp = -u_{vs}ds - u_{vv}dv$$

$$d^2p = -u_{vs}d^2s - du_{vs}ds - u_{vv}d^2v - du_{vv}dv$$

Ma ricordando che i primi due differenziali dell'entropia sono nulli si ha:

$$dp = -u_{vv}dv$$

$$d^2p = -u_{vv}d^2v - u_{vvv}dv^2$$

Da cui la (8) diventa:

$$(8) \quad d^3s = \frac{1}{2T}(-d^2pdv + dpd^2v)$$

$$(9) \quad d^3s = \frac{1}{2T}((u_{vv}d^2v + u_{vvv}dv^2)dv - u_{vv}dvd^2v) = \frac{u_{vvv}dv^3}{2T}$$

Che sostituita nella (7) da:

$$(7) \quad [s] = s'(v_1)[v] + s''(v_1)\frac{[v]^2}{2} + s'''(v_1)\frac{[v]^3}{6}$$

$$(10) \quad [s] = s - s_1 = \frac{u_{vvv}}{2T_1}\frac{[v]^3}{6}$$



Richiami sulle onde d'urto

In modo analogo per la pressione si ha:

$$(11) \quad [s] = s - s_1 = s'(\rho_1)[\rho] + s''(\rho_1)\frac{[\rho]^2}{2} + s'''(\rho_1)\frac{[\rho]^3}{6}$$

La (8) è ancora valida e dalla relazione fondamentale entalpica si ha :

$$dv = h_{pp} dp$$

$$d^2v = h_{pp} d^2p + h_{ppp} dp^2$$

Da cui la (8) diventa

$$(8) \quad d^3s = \frac{1}{2T} (-d^2p dv + dp d^2v)$$

$$(12) \quad d^3s = \frac{1}{2T} (-d^2p h_{pp} dp + dp (h_{pp} d^2p + h_{ppp} dp^2)) = \frac{h_{ppp} dp^3}{2T}$$

$$(13) \quad [s] = s - s_1 = \frac{h_{ppp}}{2T_1} \frac{[\rho]^3}{6}$$



Richiami sulle onde d'urto

$$(10) \quad [s] = s - s_1 = \frac{u_{vvv}}{2T_1} \frac{[v]^3}{6}$$

$$(13) \quad [s] = s - s_1 = \frac{h_{ppp}}{2T_1} \frac{[\rho]^3}{6}$$

Queste due relazioni sono analoghe ed in particolare si ha:

$$(14) \quad [s] = s - s_1 = \frac{\left(-\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s}{2T_1} \frac{[v]^3}{6}$$

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s$$

$$(15) \quad [s] = s - s_1 = \frac{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)_s}{2T_1} \frac{[\rho]^3}{6}$$

Per la positività della produzione d'entropia, queste relazioni mostrano evidentemente che le discontinuità saranno di compressione o di espansione a seconda del segno della derivata seconda della pressione rispetto al volume specifico. In particolare se la derivata seconda è positiva, come succede per la maggiore parte dei fluidi conosciuti, le onde provocano un aumento della pressione ed una diminuzione del volume specifico.



Richiami sulle onde d'urto

$$\Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s$$

Le derivate seconde possono essere espresse in funzioni di derivate prime della velocità del suono Laplaciana:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{v^2}{a^2} \right) = \frac{v^2}{a^4} \left(2v + \frac{\partial a^2}{\partial p} \right) = \frac{2v^3}{a^4} \left(1 + \frac{1}{2v} \frac{\partial a^2}{\partial p} \right)$$

$$\left(-\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s = -\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial \frac{1}{\rho}} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} a^2 \right) = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial a^2}{\partial v} - \frac{2a^2}{v} \right)$$

Da cui:

$$[s] = s - s_1 = \frac{v^2}{a^4} \left(2v + \frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s \frac{[\rho]^3}{6} \qquad [s] = s - s_1 = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial a^2}{\partial v} - \frac{2a^2}{v} \right)_s \frac{[v]^3}{6}$$



Richiami sulle onde d'urto

Poiché:

$$\left(2v + \frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s > 0 \qquad \left(\frac{\partial a^2}{\partial v} - \frac{2a^2}{v} \right)_s < 0$$

Le relazioni precedenti mostrano che il passaggio di una singola onda infinitesima di compressione provoca un aumento della velocità di propagazione dei piccoli disturbi e, poiché, ogni successiva onda tenderà a raggiungere la precedente si potrà formare così un'onda d'urto.

Il passaggio di una singola onda infinitesima di espansione provoca, invece, una diminuzione della velocità di propagazione dei piccoli disturbi e, poiché, ogni successiva onda tenderà ad essere più lenta della precedente non sarà possibile la formazione di un'onda d'urto.



Richiami sulle onde d'urto

Sviluppando in serie l'energia interna rispetto all'entropia ed al volume specifico si ha, trascurando i termini superiori o uguali a $[v]^4$:

$$[u] = u - u_1 = T_1[s] - p_1[v] + (u_{vv})_1 \frac{[v]^2}{2} + (u_{vvv})_1 \frac{[v]^3}{6}$$

Ricordando la (10):

$$(10) \quad [s] = s - s_1 = \frac{u_{vvv}}{2T_1} \frac{[v]^3}{6}$$

Si ha:

$$[u] = u - u_1 = -p_1[v] + (u_{vv})_1 \frac{[v]^2}{2} + (u_{vvv})_1 \frac{[v]^3}{4}$$

Le equazioni:

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[p]}{[v]} \qquad (6) \quad [u] = -p_m[v]$$

Combinare danno: $[u] + p_m[v] = [u] + p_1[v] + \frac{[p]}{2}[v] = [u] + p_1[v] - \frac{G^2}{2}[v]^2 = 0$



Richiami sulle onde d'urto

$$[u] = -p_1[v] + (u_{vv})_1 \frac{[v]^2}{2} + (u_{vvv})_1 \frac{[v]^3}{4}$$

$$[u] + p_1[v] - \frac{G^2}{2}[v]^2 = 0$$

Riordinando si ha:

$$p_1[v] - \frac{G^2}{2}[v]^2 - p_1[v] + (u_{vv})_1 \frac{[v]^2}{2} + (u_{vvv})_1 \frac{[v]^3}{4} = \left(-G^2 + (u_{vv})_1 + (u_{vvv})_1 \frac{[v]}{2} \right) \frac{[v]^2}{2} = 0$$

$[v]$ sarà non nullo (soluzione non banale) solo se:

$$\begin{aligned} (u_{vvv})_1[v] &= 2G^2 - 2(u_{vv})_1 = \\ &= 2 \left(\frac{V_1^2}{v_1^2} - \frac{a_1^2}{v_1^2} \right) = 2 \frac{a_1^2}{v_1^2} (M_1^2 - 1) \end{aligned}$$

$$u_{vv} = \frac{\partial -p}{\partial v} = \frac{1}{\frac{1}{\rho^2}} \frac{\partial p}{\partial \rho} = \rho^2 a^2$$



Richiami sulle onde d'urto

$$(u_{vvv})_1[v] = 2 \frac{a_1^2}{v_1^2} (M_1^2 - 1) \quad (10) \quad [s] = s - s_1 = \frac{u_{vvv}}{2T_1} \frac{[v]^3}{6}$$

Dalla (10):

$$[s] = s - s_1 = \frac{a_1^2 (M_1^2 - 1) [v]^2}{6T_1 v_1^2}$$

Che, per la positività della produzione d'entropia, mostra che il numero di Mach a monte della discontinuità deve essere maggiore di uno.



Richiami sulle onde d'urto

Le relazioni di Rankine-Hugoniot, come già detto, sono relazioni che legano solo grandezze termodinamiche. Possono essere quindi diagrammate efficacemente su un piano pv .

Per un gas più che perfetto si ha:

$$(5) \quad [h] = v_m [p] \qquad (6) \quad [u] = -\rho_m [v]$$

$$u - u_1 = c_v (T - T_1) = \frac{R}{\gamma - 1} (T - T_1) = \frac{pv - p_1 v_1}{\gamma - 1} = -\frac{p + p_1}{2} (v - v_1)$$

$$p \left(v \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{v_1}{2} \right) = p_1 \left(v_1 \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{v}{2} \right)$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{v}{v_1} - 1}{\frac{v}{v_1} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - 1}$$

Che è una funzione omografica (Iperbole traslata).

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

Per onde d'urto normali si ha:

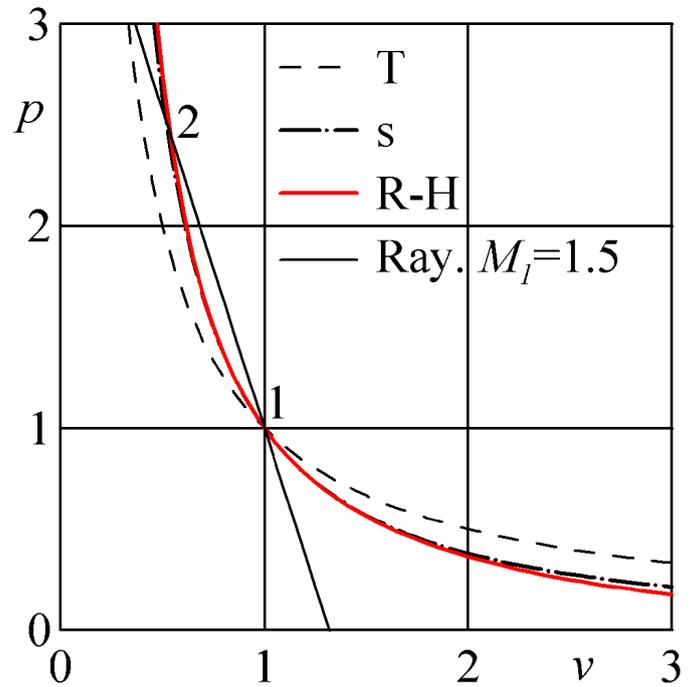
$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} = \infty$$



Richiami sulle onde d'urto

Nella figura sono diagrammate, oltre alla Rankine-Hugoniot una curva isoterma, una isentropica ed una curva di Rayleigh passante per il punto 1 è relativa a $M_1=1.5$

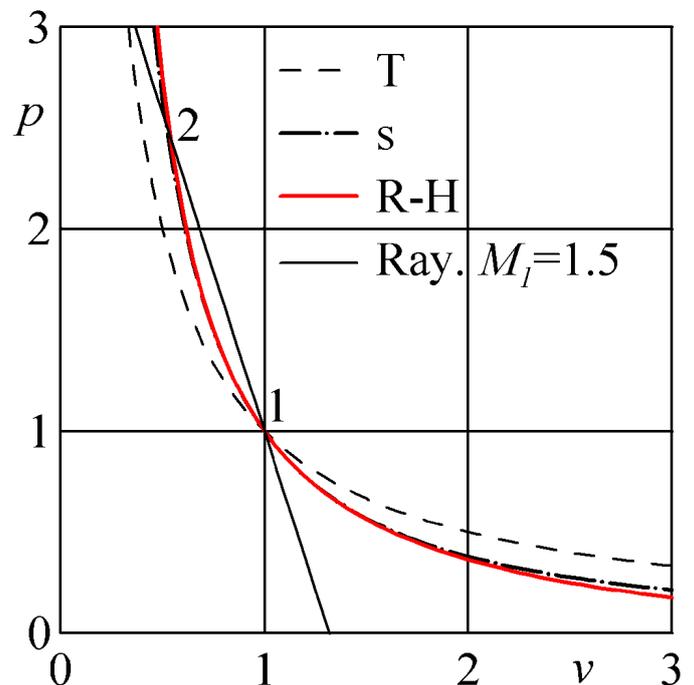
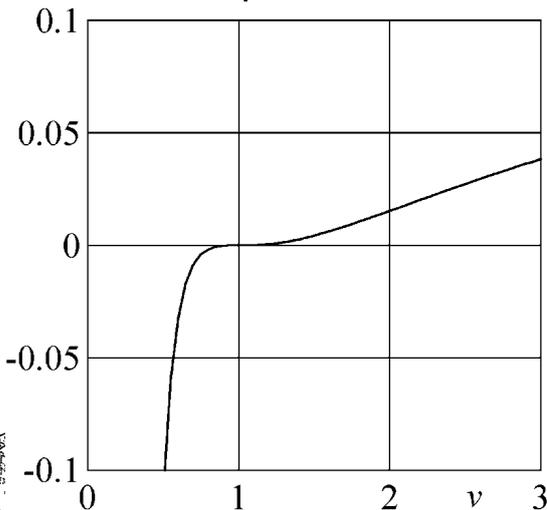
$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{v}{v_1} - 1}{\frac{v}{v_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 1}$$



Richiami sulle onde d'urto

La RH e l'isentropica sono praticamente coincidenti nel punto d'intersezione 1 avendo in comune anche la derivata prima e **seconda**. Per meglio percepire il livello di somiglianza delle due curve nel grafico sotto riportato è mostrata la differenza fra le curve isentropica e Rankine-Hugoniot.

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{v}{v_1} - 1}{\frac{v}{v_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 1}$$



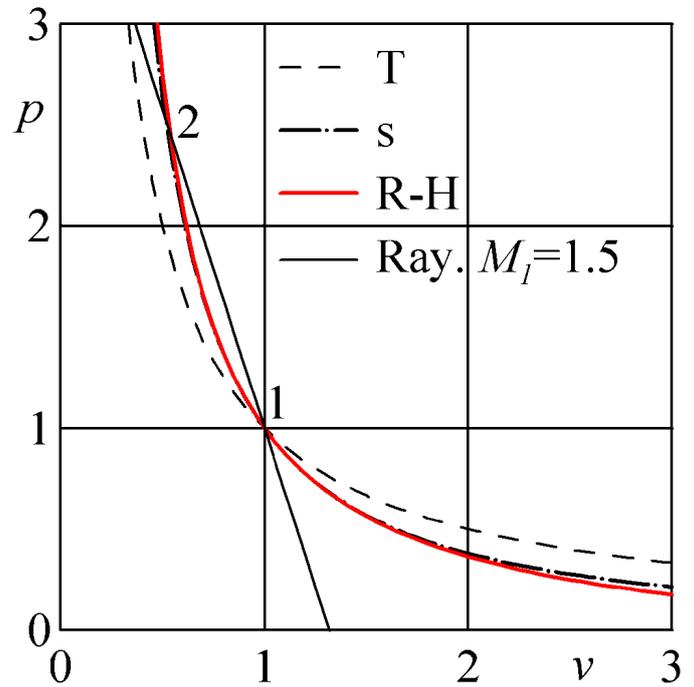
Richiami sulle onde d'urto

I punti possibili a valle di un'onda d'urto sono quelli che hanno un salto d'entropia positivo sono quindi quelli che si trovano al di sopra del punto 1.

La curva di Rayleigh individua proprio il punto 2 a valle di un'onda d'urto. Dalla (4) si vede che la pendenza della curva di Rayleigh è data dal rapporto fra i salti di pressione e del volume specifico.

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[p]}{[v]}$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{v}{v_1}}{\frac{v}{v_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 1}$$

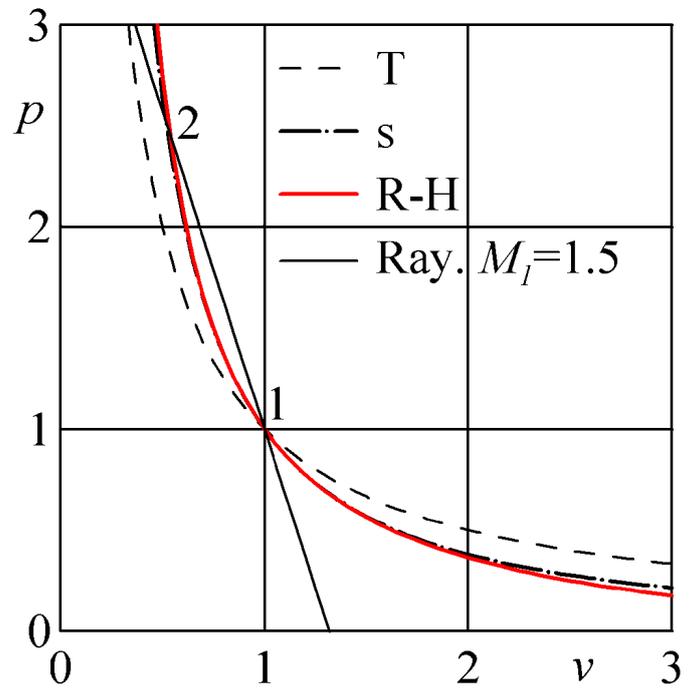
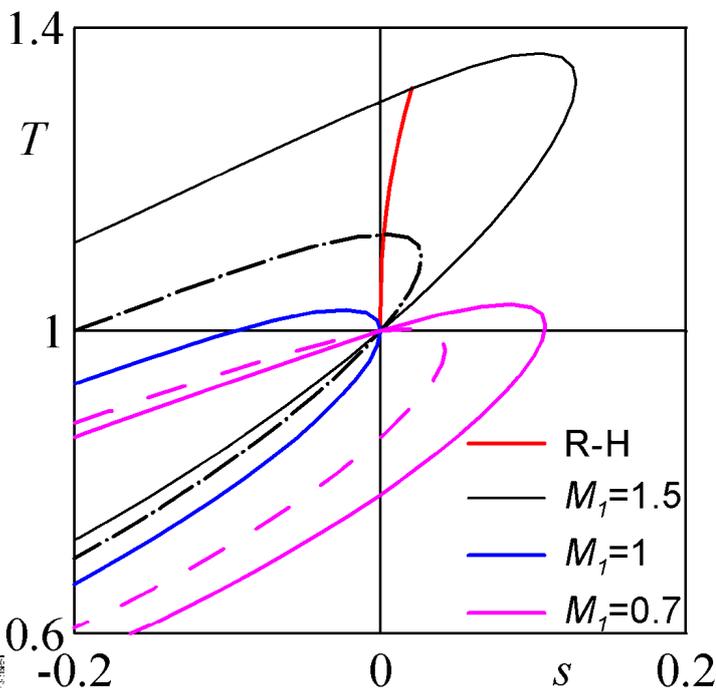


19



Richiami sulle onde d'urto

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{v}{v_1}}{\frac{v}{v_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 1}$$

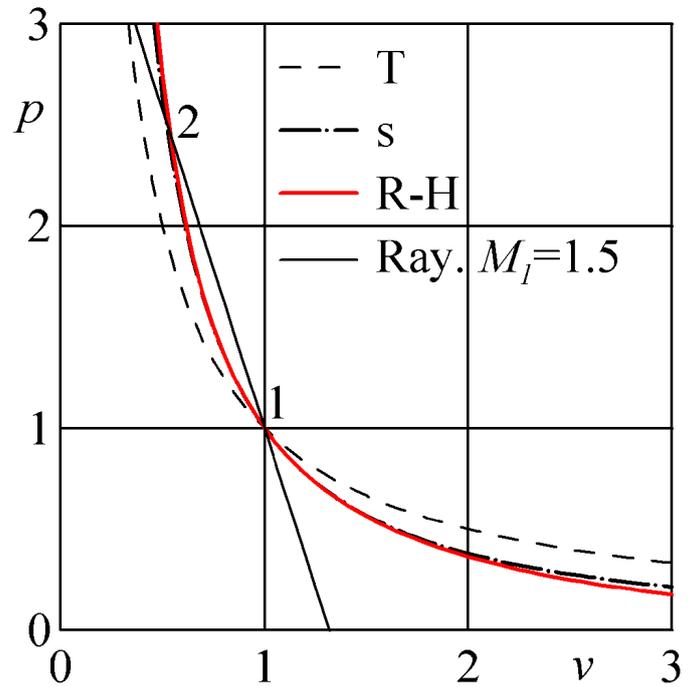
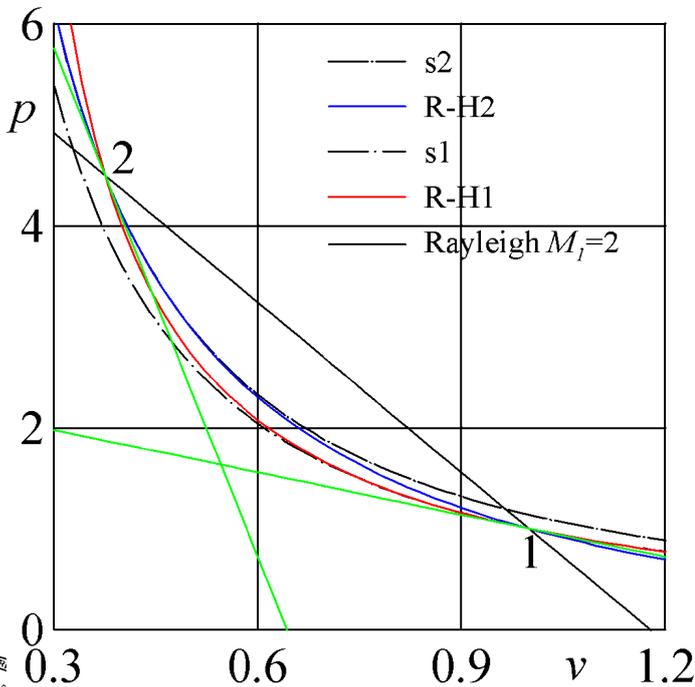


20



Richiami sulle onde d'urto

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{v}{v_1}}{\frac{v}{v_1} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 1}$$



Detonazioni

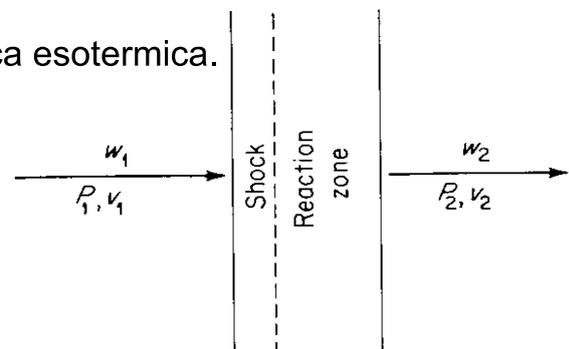
Si esaminerà ora il caso in cui un'onda d'urto, anche se **adiabatica**, possa essere sede di **reazioni chimiche**. Il fluido in ingresso, nell'ipotesi di un'onda stazionaria, in cui sono presenti i reagenti è quindi diverso dai prodotti della combustione in uscita.

Una possibile reazione chimica è quella esotermica che da ossigeno e idrogeno gassosi produce acqua.

Evidentemente i reagenti si trovano lontano dalle condizioni d'equilibrio e la reazione chimica potrebbe essere completa. Si può supporre che l'onda di detonazione sia formata da due parti:

- Un'onda d'urto classica in cui i reagenti aumentano la loro entalpia sensibile (aumento di temperatura e pressione);
- Una zona più spessa in cui avviene la reazione chimica esotermica.

Lo spessore complessivo dell'onda di detonazione è tipicamente di qualche *cm*.



Detonazioni

Le relazioni esaminate per il caso delle onde d'urto sono ancora valide. In particolare la relazione di Rankine-Hugoniot può essere utilizzata per comprendere nel piano p v il processo di detonazione.

$$(5) [h] = v_m [p]$$

In particolare poiché l'entalpia a valle dell'onda di detonazione è diversa da quella a monte la curva che descrive la detonazione adiabatica non passa per il punto iniziale 1. La variazione dell'entalpia è associata evidentemente alla reazione chimica che modifica la composizione del gas a valle dell'onda. Nell'ipotesi di gas più che perfetto il rapporto fra i calori specifici può variare così come la costante presente nella definizione di energia interna o entalpia:

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} pv + cost$$

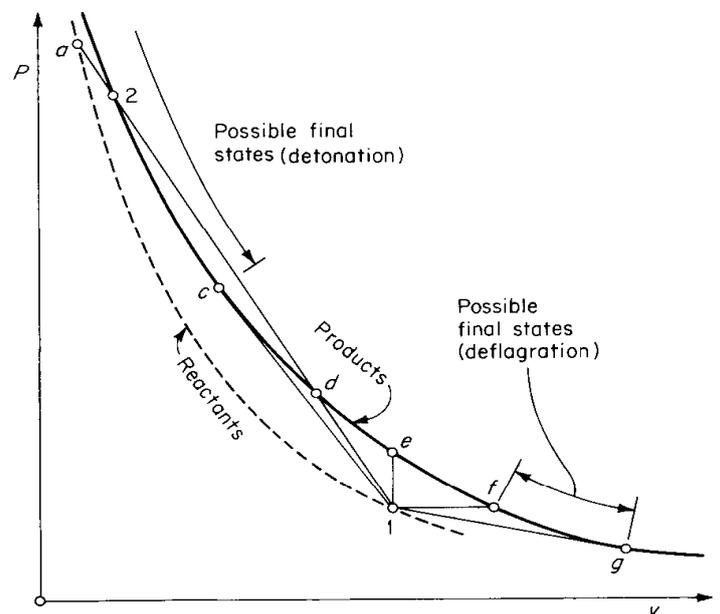


Detonazioni

Un tipico processo di detonazione è mostrato nella figura. Il punto di partenza è indicato dal numero 1. Il primo passo è quello che si avrebbe con una normale onda d'urto che con una trasformazione adiabatica porta il fluido nelle condizioni del punto a seguendo quindi la normale curva di Rankine-Hugoniot.

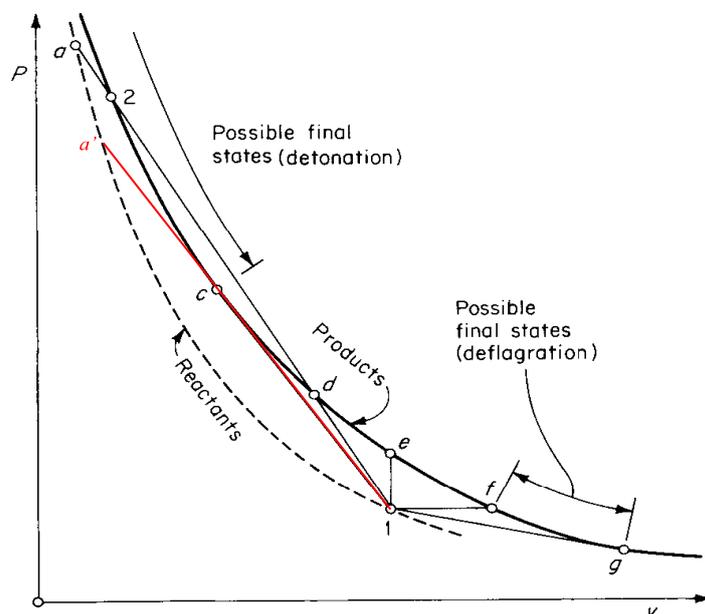
Questa trasformazione è anche individuata dalla linea di Rayleigh che passa per i punti 1 ed a . In pratica l'onda d'urto è come se fosse istantanea rispetto alla velocità di reazione della combustione. Inizialmente i reagenti si portano ad alta temperatura e pressione attraverso l'onda d'urto e successivamente

avviene la reazione chimica.



Detonazioni

Poiché il flusso di massa e l'impulso rimangono costanti durante la reazione chimica lo stadio finale si troverà sulla stessa curva di Rayleigh. In particolare, uno stato possibile è determinato dal punto 2 mentre il punto d non è raggiungibile perché sarebbe necessaria una onda d'espansione. Se inizialmente il flusso di massa fosse inferiore ci si potrebbe muovere su una curva di Rayleigh che passa per il punto c che è il punto di **Chapman-Jouguet**. Processi del tipo 1-c vengono chiamati detonazioni di Chapman-Jouguet.



Detonazioni



Jacques Charles Emile Jouguet
Bessèges - 1871-1943



D.L. Chapman
David Leonard Chapman
Wells - 1869-1958



Detonazioni

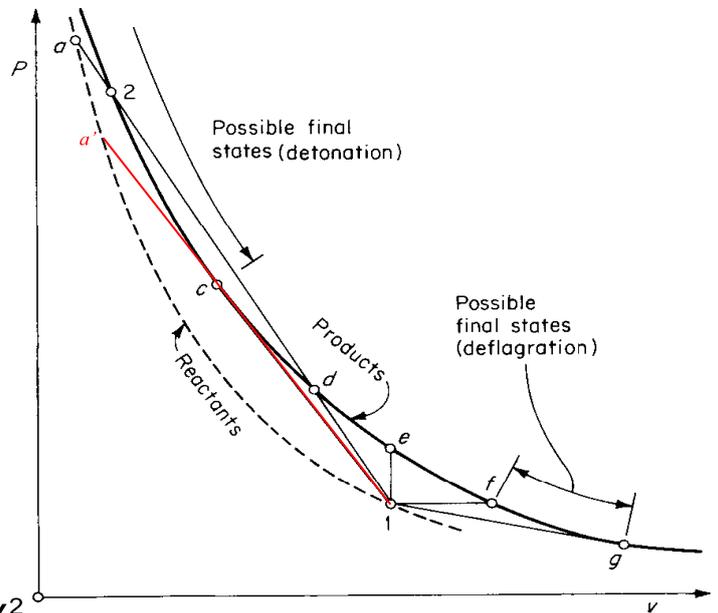
Supponendo che la curva di Rankine-Hugoniot dei reagenti sia ben rappresentata dalla curva tratteggiata si può vedere che la tangente nel punto c è più pendente (in valore assoluto) della tangente nel punto 1. Poiché la curva **isentropica** è localmente **coincidente** con la **RH** la pendenza della tangente nel punto 1 è data da:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\rho_1^2 a_1^2$$

Mentre la pendenza della secante nel punto 1 si ricava dalla:

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[p]}{[v]}$$

Dalla figura si ha quindi: $\rho_1^2 a_1^2 < G^2 = \rho_1^2 V_1^2$



Detonazioni

Che implica che il M_1 è maggiore di uno. Quindi una detonazione si propaga in regime supersonico.

Dalla (4) si ha:

$$p_2 - p_1 = (v_1 - v_2)G^2$$

supponendo che la differenziazione corrisponda a variazioni infinitesime lungo la curva di Rayleigh e che lo stato 1 sia costante si ha:

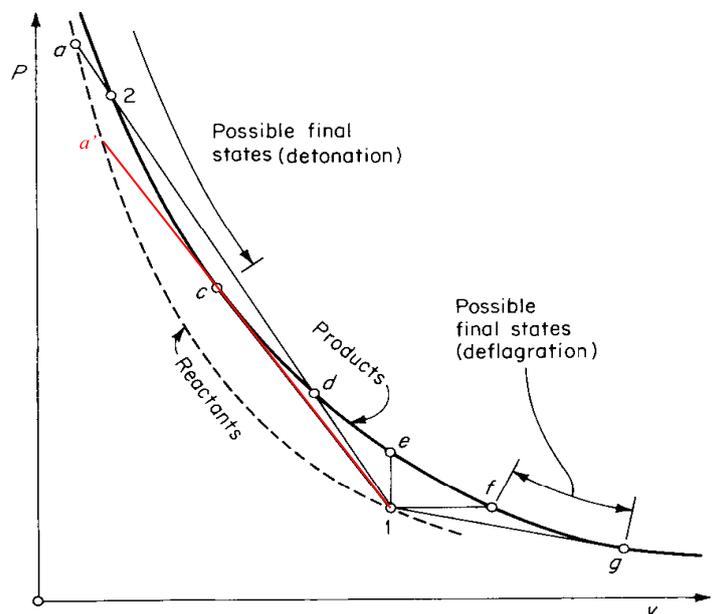
$$dp_2 = (v_1 - v_2)dG^2 - G^2 dv_2$$

Dall'equazione di conservazione dell'energia si ha:

$$h_1 + \frac{v_1^2 G^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2 G^2}{2}$$

$$dh_2 = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)dG^2 - G^2 v_2 dv_2$$

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[p]}{[v]}$$



Detonazioni

Dalla relazione di Gibbs:

$$dh_2 = T_2 ds_2 + v_2 dp_2$$

Combinando queste tre relazioni si ha:

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)dG^2 - G^2 v_2 dv_2 = T_2 ds_2 + v_2((v_1 - v_2)dG^2 - G^2 dv_2)$$

$$T_2 ds_2 = \left(\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_1 - v_2 \right)(v_1 - v_2)dG^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} dG^2$$

Da cui:

$$\frac{ds_2}{dG^2} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2T_2} > 0$$

Poiché G aumenta spostandosi a partire dal punto c anche l'entropia deve aumentare.

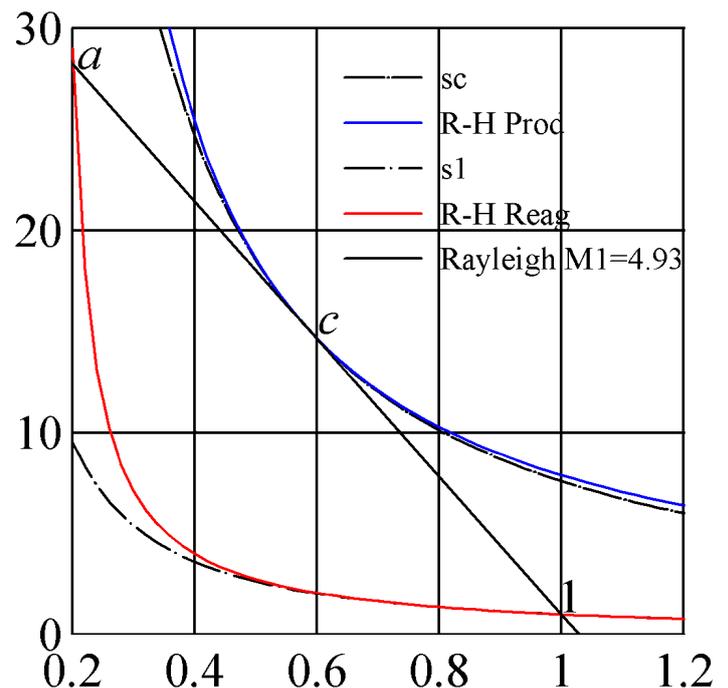
$$dp_2 = (v_1 - v_2)dG^2 - G^2 dv_2$$

$$dh_2 = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)dG^2 - G^2 v_2 dv_2$$



Detonazioni

Quindi il punto di Chapman-Jouguet è un punto di minimo per l'entropia. Che poi significa che l'isentropica, nel punto c , è tangente alla Rankine–Hugoniot.



Detonazioni

Nel punto c si ha:

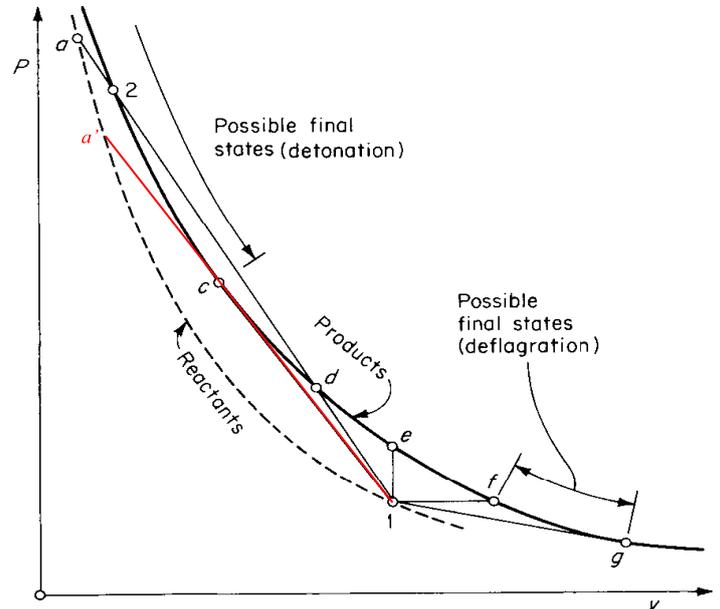
$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial v_2} \right)_s = -\rho_2^2 a_2^2$$

Ma il flusso di massa può essere anche espresso come:

$$G^2 = \rho_2^2 V_2^2 = \rho_2^2 a_2^2$$

Quindi in una detonazione di Chapman-Jouguet il Mach dei prodotti della detonazione è esattamente uguale ad 1.

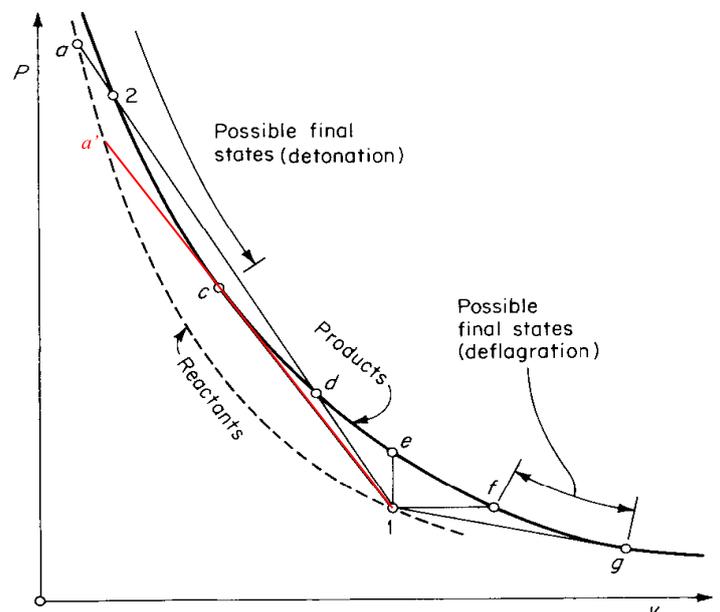
Con ragionamenti analoghi si può verificare che i punti che si trovano al di sotto di c sono punti supersonici mentre quelli che si trovano al di sopra sono subsonici.



Detonazioni

Ogni punto sulla curva di Rankine-Hugoniot dei prodotti è un possibile stato finale per un processo di combustione adiabatico in assenza d'attrito. Per convenzione si parla di detonazione quando lo stato finale si trova al di sopra del punto e. In particolare i punti che si trovano al di sopra di c sono detti **detonazioni forti** mentre quelli compresi fra c ed e sono detti **detonazioni deboli**. In effetti questo secondo processo non è mai stato osservato nella pratica. In tutti i processi di detonazione il numero di Mach a monte è supersonico.

I punti compresi fra il punto e ed il punto f non possono essere raggiunti.

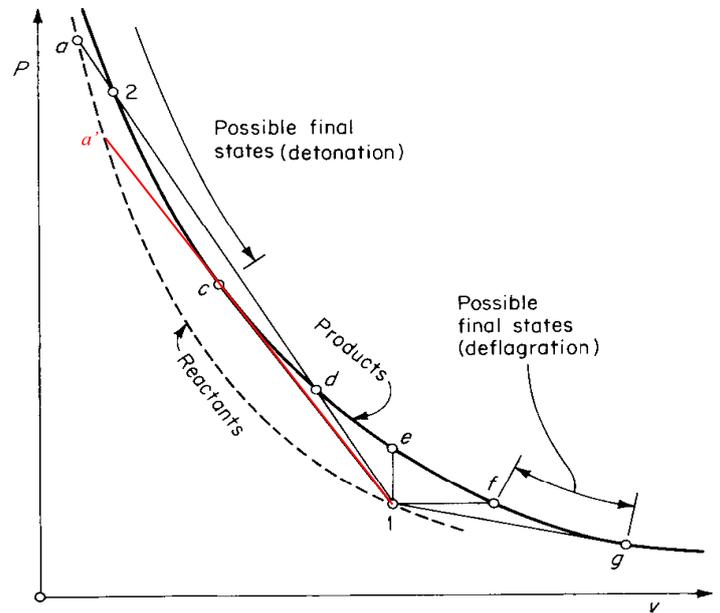


Detonazioni

Infatti dalla (4) si vede che il flusso di massa sarebbe immaginario.

I punti compresi fra f e g sono detti deflagrazioni deboli ed in questo caso sia le condizioni a monte che quelle a valle sono subsoniche. Il punto g è un altro punto di Chapman-Jouguet e, quindi, a valle il numero di Mach è sonico. I punti che si trovano al di sotto del punto g sono detti deflagrazioni forti ma non sono realizzabili nella pratica a causa di instabilità.

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[p]}{[v]}$$



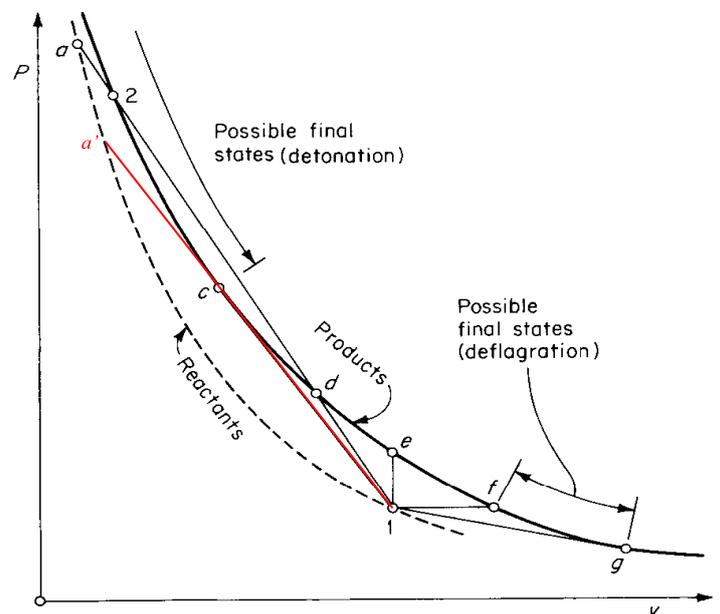
Detonazioni

I processi di detonazione o deflagrazione di interesse pratico sono quindi:

- Detonazione forte (punti al di sopra di c) $M_1 > 1$ e $M_2 < 1$;
- Detonazione di Chapman-Jouguet (punto c) $M_1 > 1$ e $M_2 = 1$;
- Deflagrazioni deboli (punti compresi fra f e g) $M_1 < 1$ e $M_2 < 1$;

Evidentemente molti processi di combustione non possono essere schematizzati come discontinuità.

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[p]}{[v]}$$



Detonazioni

Nel caso di detonazione che si muove in un fluido in quiete il principio di funzionamento è analogo a quello di un'onda d'urto non stazionaria. Il fluido a valle dell'onda tende a seguire l'onda stessa.

Per la detonazione di Chapman-Jouguet e se l'ipotesi di gas pcp è valida sia a monte che a valle della discontinuità si ha:

$$(16) \quad h_1 = h^{01} + c_{p1}T$$

$$(17) \quad h_2 = h^{02} + c_{p2}T$$

Dove il calore di reazione è dato da:

$$\Delta h^0 = h^{01} - h^{02}$$

Ed è una quantità positiva per reazioni esotermiche. Il flusso di massa può essere espresso come:

$$G^2 = \rho^2 V^2 = \rho^2 \gamma R T \frac{V^2}{a^2} = \gamma \frac{\rho}{v} M^2$$

Quindi la (1) può essere messa nella forma:

$$(1) \quad [\rho V] = \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 = 0$$

$$(18) \quad \gamma_1 \frac{\rho_1}{v_1} M_1^2 = \gamma_2 \frac{\rho_2}{v_2} M_2^2$$



Detonazioni

Analogamente per la (2) e (3) tenendo in conto le (16) e (17):

$$(2) \quad [\rho + \rho V^2] = [I] = 0$$

$$\rho + \rho V^2 = \rho(1 + \gamma M^2)$$

$$(19) \quad \rho_1(1 + \gamma_1 M_1^2) = \rho_2(1 + \gamma_2 M_2^2)$$

$$(3) \quad \left[h + \frac{V^2}{2} \right] = [H] = 0 \quad h + \frac{V^2}{2} = h^0 + c_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) = h^0 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p v \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

$$(20) \quad \Delta h^0 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \rho_1 v_1 \left(1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} M_1^2 \right) = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \rho_2 v_2 \left(1 + \frac{\gamma_2 - 1}{2} M_2^2 \right)$$

Nell'ipotesi di detonazione di Chapman-Jouguet si ha $M_2=1$:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(1 + \gamma_1 M_1^2)}{1 + \gamma_2}$$

$$(18) \quad \gamma_1 \frac{\rho_1}{v_1} M_1^2 = \gamma_2 \frac{\rho_2}{v_2} M_2^2$$

$$v_2 = \frac{\gamma_2 \rho_2 v_1}{\gamma_1 \rho_1 M_1^2} = \frac{\gamma_2 v_1}{\gamma_1 M_1^2} \frac{(1 + \gamma_1 M_1^2)}{1 + \gamma_2}$$

$$\rho_2 v_2 = \frac{\gamma_2 \rho_1 v_1}{\gamma_1 M_1^2} \left(\frac{(1 + \gamma_1 M_1^2)}{1 + \gamma_2} \right)^2$$



Detonazioni

$$\Delta h^{01} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \rho_1 v_1 \left(1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} M_1^2 \right) = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{\gamma_2 \rho_1 v_1}{\gamma_1 M_1^2} \left(\frac{1 + \gamma_1 M_1^2}{1 + \gamma_2} \right)^2 \frac{\gamma_2 + 1}{2}$$

$$\Delta h^{01} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \rho_1 v_1 \left(1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} M_1^2 \right) = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \frac{\gamma_2^2 \rho_1 v_1}{2 \gamma_1 M_1^2} \frac{1 + 2 \gamma_1 M_1^2 + \gamma_1^2 M_1^4}{1 + \gamma_2}$$

$$\Delta h^{01} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \rho_1 v_1 \left(1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} M_1^2 \right) = \frac{\gamma_2^2 \rho_1 v_1}{2 \gamma_1 M_1^2} \frac{1 + 2 \gamma_1 M_1^2 + \gamma_1^2 M_1^4}{\gamma_2^2 - 1}$$

$$\frac{(\gamma_2^2 - 1) \Delta h^{01} M_1^2}{\rho_1 v_1} + \frac{\gamma_1 (\gamma_2^2 - 1) M_1^2}{\gamma_1 - 1} \left(1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2} M_1^2 \right) = \frac{\gamma_2^2}{2 \gamma_1} (1 + 2 \gamma_1 M_1^2 + \gamma_1^2 M_1^4)$$

$$-\frac{\gamma_2^2}{2 \gamma_1} + M_1^2 \left(\frac{(\gamma_2^2 - 1) \Delta h^{01}}{\rho_1 v_1} + \frac{\gamma_1 (\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1 - 1} - \gamma_2^2 \right) + M_1^4 \left(\frac{\gamma_1 (\gamma_2^2 - 1)}{2} - \frac{\gamma_1 \gamma_2^2}{2} \right) = 0$$



Detonazioni

$$-\frac{\gamma_2^2}{2 \gamma_1} + M_1^2 \left(\frac{(\gamma_2^2 - 1) \Delta h^{01}}{\rho_1 v_1} + \frac{\gamma_1 \gamma_2^2 - \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2^2 + \gamma_2^2}{\gamma_1 - 1} \right) - M_1^4 \left(\frac{\gamma_1}{2} \right) = 0$$

$$-\frac{\gamma_2^2}{2 \gamma_1} + M_1^2 \left(\frac{(\gamma_2^2 - 1) \Delta h^{01}}{\rho_1 v_1} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1 - 1} \right) - M_1^4 \left(\frac{\gamma_1}{2} \right) = 0$$

$$M_1^4 + 2 M_1^2 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - \frac{(\gamma_2^2 - 1) \Delta h^{01}}{\gamma_1 \rho_1 v_1} \right) + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} = 0$$

$$b = \frac{(\gamma_2^2 - 1) \Delta h^{01}}{2 \gamma_1 \rho_1 v_1}$$

$$M_1^4 + 2 M_1^2 \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b \right) + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} = 0$$

$$M_1^2 = - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b \right)^2 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}}$$



Detonazioni

$$M_1^2 = -\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b\right)^2 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}}$$

$$M_1^2 = -\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b\right) \pm \sqrt{\frac{\gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2^4}{\gamma_1^2(\gamma_1 - 1)^2} - 4b\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} + 4b^2 - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}}$$

$$M_1^2 = -\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b\right) \pm \sqrt{\frac{\gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2^4 - \gamma_1^2\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2(\gamma_1 - 1)^2} - 4b\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} + 4b^2}$$

$$M_1^2 = -\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b\right) \pm \sqrt{\frac{\gamma_1^2(1 - \gamma_2^2) - \gamma_2^2(1 - \gamma_2^2)}{\gamma_1^2(\gamma_1 - 1)^2} - 4b\frac{\gamma_1 + \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} + 4b^2}$$

$$M_1^2 = -\left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b\right) \pm \sqrt{\frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(1 - \gamma_2^2)}{\gamma_1^2(\gamma_1 - 1)^2} - 4b\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} + 4b^2}$$



Detonazioni

Ma supponendo che:

$$(21) \quad M_1 = \sqrt{b + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}} \pm \sqrt{b + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}}$$

$$M_1^2 = b + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)} \pm 2\sqrt{\left(b + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right)\left(b + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right)} + b + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}$$

$$M_1^2 = 2b + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1) + (\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)} \pm$$

$$2\sqrt{b^2 + b\left(\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1) + (\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right) + \left(\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right)\left(\frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}\right)}$$



Detonazioni

$$M_1^2 = 2b + \left(\frac{\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 + \gamma_2^2 - \gamma_2 + \gamma_2^2 + \gamma_2 - \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)} \right) \pm$$

$$2\sqrt{b^2 + b \left(\frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1) + (\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)} \right) + \left(\frac{(1 - \gamma_2^2)(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{(2\gamma_1(\gamma_1 - 1))^2} \right)}$$

$$M_1^2 = 2b + \left(\frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)} \right) \pm 2\sqrt{b^2 + b \left(\frac{\gamma_2^2 - \gamma_1}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)} \right) + \frac{(1 - \gamma_2^2)(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{(2\gamma_1(\gamma_1 - 1))^2}}$$

Che è coincidente con quella trovata in precedenza:

$$M_1^2 = - \left(\frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} - 2b \right) \pm \sqrt{\frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(1 - \gamma_2^2)}{\gamma_1^2(\gamma_1 - 1)^2} - 4b \frac{\gamma_1 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \gamma_1} + 4b^2}$$



Detonazioni

$$M_1 = \sqrt{b + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 - 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}} \pm \sqrt{b + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1(\gamma_1 - 1)}} \quad b = \frac{(\gamma_2^2 - 1)\Delta h^{01}}{2\gamma_1\rho_1v_1}$$

Il segno più provoca un Mach supersonico relativo al punto di Chapman-Jouguet per le detonazioni mentre il segno meno un Mach subsonico relativo ad una deflagrazione.

Il calore di reazione adimensionale b ha un valore tipico di 10.

Nell'ipotesi molto restrittiva che i due gas abbiano lo stesso rapporto fra i calori specifici si ha:

$$M_1 = \sqrt{b+1} \pm \sqrt{b}$$

Che avendo imposto $M_2=1$ restituisce nel caso $b=0$ la soluzione banale che il Mach a monte è anch'esso sonico.

Il salto di pressione si ricava immediatamente dalla:

$$(2) \quad [p + \rho V^2] = [I] = 0$$

$$(22) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma_1 M_1^2}{1 + \gamma_2}$$



Detonazioni

Dalla condizione $M_2=1$ e dalla (1) e dalla (4) si ha:

$$M_2 = \frac{V_2}{a_2} = 1$$

$$(1) \quad [\rho V] = \rho_2 V_2 - \rho_1 V_1 = 0$$

$$V_2 = a_2 = \sqrt{\gamma_2 \frac{p_2}{\rho_2}}$$

$$(4) \quad G^2 = -\frac{[\rho]}{[v]}$$

$$v_1 v_2 G^2 = V_1 V_2 = -\frac{v_1 v_2 [\rho]}{[v]} = -\frac{v_1 v_2 [\rho]}{v_2 - v_1} = -\frac{v_1 v_2 [\rho]}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}} = -\frac{v_1 v_2 [\rho]}{\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2}} = \frac{[\rho]}{[\rho]}$$

$$V_1 V_2 = \frac{G}{\rho_1} V_2 = V_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} V_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \gamma_2 \frac{p_2}{\rho_2} = \gamma_2 \frac{p_2}{\rho_1} = \frac{[\rho]}{[\rho]}$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \gamma_2 p_2 = p_2 - p_1$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma_2 p_2 + p_2 - p_1}{\gamma_2 p_2} = \frac{(\gamma_2 + 1) \frac{p_2}{\rho_1} - 1}{\gamma_2 \frac{p_2}{\rho_1}}$$



Detonazioni

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma_2 p_2 + p_2 - p_1}{\gamma_2 p_2} = \frac{(\gamma_2 + 1) \frac{p_2}{\rho_1} - 1}{\gamma_2 \frac{p_2}{\rho_1}}$$

$$(22) \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma_1 M_1^2}{1 + \gamma_2}$$

Che unita alla (22) da:

$$(23) \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma_2 + 1) \frac{1 + \gamma_1 M_1^2}{1 + \gamma_2} - 1}{\gamma_2 \frac{1 + \gamma_1 M_1^2}{1 + \gamma_2}} = \frac{\gamma_1 M_1^2 (1 + \gamma_2)}{\gamma_2 (1 + \gamma_1 M_1^2)}$$

$$(24) \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{R_2 \rho_2} \frac{R_1 \rho_1}{p_1} = \frac{R_0 P M_2}{R_0 P M_1} \frac{1 + \gamma_1 M_1^2}{1 + \gamma_2} \frac{\gamma_2 (1 + \gamma_1 M_1^2)}{\gamma_1 M_1^2 (1 + \gamma_2)} = \frac{P M_2}{P M_1} \frac{(1 + \gamma_1 M_1^2)^2}{(1 + \gamma_2)^2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 M_1^2} = \frac{P M_2}{P M_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1 M_1^2}$$

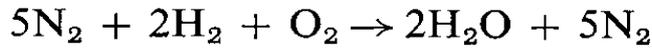
Con PM_1 si è indicato il peso molecolare



Detonazioni

Estimate the speed with which a detonation wave travels into a stationary $5\text{N}_2 + 2\text{H}_2 + \text{O}_2$ mixture at $P_1 = 1 \text{ atm}$ and $T_1 = 291 \text{ K}$. Find also the temperature and pressure behind the wave.

This is a diluted stoichiometric mixture of hydrogen and oxygen



$$m = 140 + 4 + 32 = 176 \text{ g mixture}$$

$$\mathcal{N}_1 = 8 \text{ mol reactants} \quad \mathcal{N}_2 = 7 \text{ mol products}$$

$$\tilde{M}_1 = \frac{176}{8} = 22 \quad \tilde{M}_2 = \frac{176}{7} = 25.1$$

The standard heat of reaction at 300 K is

$$\Delta H^{300} = 57.1 \text{ kcal/g mol H}_2\text{O}$$

and this is to be converted to Δh^0 , which is on a mass (rather than mole) basis.

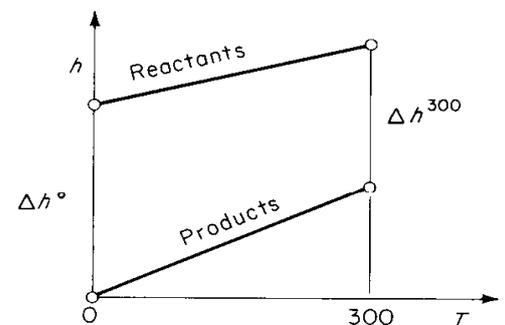


Detonazioni

We assume

$$\gamma_1 = \frac{7}{5} = 1.400$$

$$\gamma_2 = \frac{9}{7} = 1.286$$



i.e., as an approximation the classical equipartition values for *diatomic* gases at low and high temperatures, respectively, have been taken. Then (see Fig. 7.38)

$$\Delta h^0 + c_{p1}T_{300} = c_{p2}T_{300} + \Delta h^{300}$$

$$\Delta h^0 = \Delta h^{300} + (c_{p2} - c_{p1})T_{300}$$

$$= \frac{2\Delta H^{300}}{m} + \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \frac{\tilde{R}}{\tilde{M}_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \frac{\tilde{R}}{\tilde{M}_1} \right) T_{300}$$

$$= \frac{2\Delta H^{300}}{m} + \frac{\tilde{R}T_{300}}{m} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \mathcal{N}_2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \mathcal{N}_1 \right)$$



Detonazioni

and with $\tilde{R} = 1.987 \times 10^{-3} \text{ kcal}/(\text{g mol})(\text{K})$, this gives

$$\Delta h^0 = \frac{114.2 + 2.1}{m} = \frac{116.3}{m} \quad \text{kcal/g}$$

so that the dimensionless heat of reaction is

$$\mathcal{H} = \frac{(\gamma_2 - 1)(\gamma_2 + 1)}{2\gamma_1 R_1 T_1} \Delta h^0 = \frac{\frac{32}{49} \frac{116.3}{m}}{\frac{14}{5} \frac{\tilde{R} \mathcal{N}_1}{m} 291} = 5.86$$

The initial sound speed is

$$c_1 = \sqrt{\frac{1.4(8,317)(291)}{22}} = 392 \text{ m/s}$$



Detonazioni

Substituting the value of \mathcal{H} into (7.74), we find for the *detonation Mach number*

$$M_{1n} = \sqrt{5.86 + 0.69} + \sqrt{5.86 - 0.23} = 4.93$$

so that the detonation speed is

$$w_1 = 4.93(392) = 1,930 \text{ m/s}$$

The pressure is obtained from (7.77)

$$P_2 = 15.3 \text{ atm}$$

and the temperature from (7.79) and (7.80)

$$T_2 = 2920 \text{ K}$$

These results can be compared with experimental results and an “exact” calculation which accounts for variations in specific heat with temperature *and* the dissociation of H_2O into H^+ and OH^- (thus effectively lowering the heat of reaction).



Detonazioni

	$u_1, \text{ m/s}$	$P_2, \text{ atm}$	$T_2, \text{ K}$
This calculation	1,930	15.3	2,920
“Exact” theory	1,850	14.4	2,685
Experiment	1,822		

Details of the numerical “exact” calculation may be found in *Taylor and Tankin* [1958].

The *deflagration* velocity at the other Jouguet point (maximum velocity for slow combustion) is approximately

$$M_{1n} = 0.19 \rightarrow u_1 = 74 \text{ m/s}$$

from (7.74).



Struttura delle onde d'urto

La variazione delle grandezze termofluidodinamiche all'interno di un onda d'urto e la determinazione del suo spessore è interessante sia dal punto di vista pratico che teorico.

Fino ad ora è stato supposto che le onde d'urto fossero discontinuità e, pertanto avessero spessore nullo. Evidentemente se fosse vero i gradienti delle variabili termodinamiche dovrebbero tendere ad infinito all'interno dell'onda. Gradienti infiniti comportano anche flussi diffusivi infiniti. In analogia con la teoria dello strato limite si può supporre che, anche se all'esterno dell'onda gli effetti diffusivi possano essere trascurati, all'interno, a causa del minuscolo spessore dell'onda, questi effetti devono essere tenuti in conto.

Per urti moderatamente forti lo spessore di un'onda d'urto è di qualche libero cammino medio molecolare. Il che farebbe cadere l'ipotesi del continuo. Stranamente però l'utilizzo delle Navier-Stokes non provoca grossi errori. Evidentemente per urti deboli lo spessore può diventare significativamente maggiore e questo giustifica l'utilizzo dell'ipotesi del continuo.



Struttura delle onde d'urto

Supponendo di poter considerare lo spessore dell'onda piccolo rispetto al suo raggio di curvatura il moto risulta unidimensionale. Scegliendo un sistema di riferimento in cui l'onda è stazionaria le equazioni diventano:

$$\begin{aligned}(\rho u)_x &= 0 \\ \rho u u_x + p_x - (4/3 \mu' u_x)_x &= 0 \\ \rho u \left(h + \frac{u^2}{2} \right)_x - \left(\frac{4}{3} \mu' u u_x \right)_x - (k T_x)_x &= 0\end{aligned}$$

Dove:

$$\frac{4}{3} \mu' = \frac{4}{3} \mu + \mu_v$$

Queste equazioni possono essere integrate immediatamente dando:



Lezioni di Aerodinamica – Prof R. Tognaccini

Modello di fluido newtoniano:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{U}} + \mu_2 (\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{V}}) \underline{\underline{U}} + 2\mu (\underline{\nabla} \underline{\underline{V}})_0^{(s)} \quad (134)$$

μ_2 : secondo coefficiente di viscosità del fluido.

Per i fluidi di nostro interesse $\mu_2/\mu \ll 1$, per cui lo trascureremo:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{U}} + 2\mu (\underline{\nabla} \underline{\underline{V}})_0^{(s)} \quad (135)$$

- Nel modello newtoniano, così come nella maggior parte dei problemi di nostro interesse, il tensore degli sforzi è simmetrico.



Corso di Termofluidodinamica - Prof. L. de Luca

Esistono delle relazioni che esprimono un legame tra deformazioni (causa) e tensioni (effetto), e nel caso di piccole deformazioni tali relazioni sono lineari; un fluido che ha un comportamento elastico di questo tipo viene detto **newtoniano**. Seguendo questo modello, avremo le relazioni fenomenologiche sforzo-deformazione

$$\begin{cases} \underline{\underline{\tau}}_0 = 2\mu(\underline{\underline{\nabla V}})_0^s \\ \pi + p = \lambda \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} \end{cases}$$

secondo le quali $\underline{\underline{\tau}}_0$ è proporzionale alla deformazione di sola forma per il tramite del coefficiente 2μ , e la somma dello sforzo normale medio e della pressione termodinamica è proporzionale alla deformazione di volume per il tramite del coefficiente λ . μ e λ sono detti rispettivamente **primo** e **secondo coefficiente di viscosità dinamica**.

In definitiva

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{U}} + 2\mu(\underline{\underline{\nabla V}})_0^s + \lambda(\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}})\underline{\underline{U}}$$



Corso di Termofluidodinamica - Prof. L. de Luca

L'espressione del singolo **sforzo normale**, per esempio quello lungo l'asse x è

$$\sigma_x = -p + \lambda \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} \right)$$

cioè

$$\sigma_x = -p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = -p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = -p + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{V}} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$



Struttura delle onde d'urto

$$\rho u = G$$

$$p + \rho u^2 - \frac{4}{3} \mu' u_x = I$$

$$h + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - \frac{k T_x}{\rho u} = H$$

Dove G , I , H sono il flusso di massa, l'impulso specifico e l'entalpia totale a monte dell'urto e non è stata fatta ancora l'ipotesi di costanza dei coefficienti di diffusione. Le condizioni al contorno sono quelle che si hanno anche in una normale onda d'urto.



Struttura delle onde d'urto

Per un gas pcp (più che perfetto):

$$h = c_p T$$

$$p = \rho R T$$

$$\frac{4}{3} \mu' u_x = p + \rho u^2 - I$$

$$(1) \quad \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{G} = \frac{RT}{u} + u - \frac{I}{G}$$

$$(2) \quad \frac{k T_x}{G} = c_p T + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - H = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - H$$

Dalla (1):

$$(3) \quad RT = \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G} - u^2 + \frac{I}{G} u$$

$$\rho u = G$$

$$p + \rho u^2 - \frac{4}{3} \mu' u_x = I$$

$$h + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - \frac{k T_x}{\rho u} = H$$

$$\frac{4}{3} \mu' = \frac{4}{3} \mu + \mu_v$$



Struttura delle onde d'urto

$$(1) \quad \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{G} = \frac{RT}{u} + u - \frac{l}{G} \quad (2) \quad \frac{kT_x}{G} = \frac{\gamma RT}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - H$$

Sostituendo la (3) nella (2) (3) $RT = \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G} - u^2 + \frac{l}{G} u$

$$\begin{aligned} \frac{kT_x}{G} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G} - u^2 + \frac{l}{G} u \right) + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - H = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} - 1 \right) - u^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{l}{G} u - H = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G} \frac{1}{\gamma - 1} - u^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{l}{G} u - H \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{kT_x}{G} = \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G} \frac{1}{\gamma - 1} - u^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{l}{G} u - H$$



Struttura delle onde d'urto

Derivando la (3) e moltiplicando per $\frac{k}{GR}$ (3) $RT = \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G} - u^2 + \frac{l}{G} u$

$$\frac{kT_x}{G} = \frac{4}{3} \frac{k(\mu' u u_x)_x}{G^2 R} - \frac{2k}{GR} u u_x + \frac{kl}{G^2 R} u_x$$

Dalla (4) $\frac{kT_x}{G} = \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G(\gamma - 1)} - u^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} + \frac{l}{G} u \frac{\gamma}{\gamma - 1} - H$

$$\frac{4}{3} \frac{k(\mu' u u_x)_x}{G^2 R} - \frac{2k}{GR} u u_x + \frac{kl}{G^2 R} u_x = \frac{4}{3} \frac{\mu' u u_x}{G(\gamma - 1)} - u^2 \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} + \frac{l}{G} u \frac{\gamma}{\gamma - 1} - H$$

$$-\frac{4}{3} \frac{k(\mu' u u_x)_x}{G^2 R} + \left(\frac{4}{3} \frac{\mu' u}{G(\gamma - 1)} + \frac{k}{GR} \left(2u - \frac{l}{G} \right) \right) u_x = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} u^2 - \frac{l}{G} \frac{\gamma}{\gamma - 1} u + H$$



Struttura delle onde d'urto

$$-\frac{4}{3} \frac{k(\mu'uu_x)_x}{G^2R} + \left(\frac{4}{3} \frac{\mu'u}{G(\gamma-1)} + \frac{k}{GR} \left(2u - \frac{l}{G} \right) \right) u_x = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} u^2 - \frac{l}{G} \frac{\gamma}{\gamma-1} u + H$$

Che è un'equazione quadratica in u . Quindi:

$$(5) \quad -\frac{4}{3} \frac{k(\mu'uu_x)_x}{G^2R} + \left(\frac{4}{3} \frac{\mu'u}{G(\gamma-1)} + \frac{k}{GR} \left(2u - \frac{l}{G} \right) \right) u_x = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} (u-u_1)(u-u_2)$$

Per trovare una soluzione approssimata (Taylor) si fa un'analisi degli ordini di grandezza, per onde deboli. Confrontando il primo termine a sinistra con il secondo termine in parentesi si ha:

$$\frac{(\mu'uu_x)_x}{Guu_x} = \frac{\mu'u[u]/\Delta^2}{\rho u^2[u]/\Delta} = \frac{\mu'}{\rho u \Delta}$$

Dove Δ è lo spessore dell'onda. Supponendo che: $\mu' \approx \rho a \lambda \quad a \approx u$

$$\frac{(\mu'uu_x)_x}{Guu_x} = \frac{\lambda}{\Delta} \ll 1$$



Struttura delle onde d'urto

$$(5) \quad -\frac{4}{3} \frac{k(\mu'uu_x)_x}{G^2R} + \left(\frac{4}{3} \frac{\mu'u}{G(\gamma-1)} + \frac{k}{GR} \left(2u - \frac{l}{G} \right) \right) u_x = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} (u-u_1)(u-u_2)$$

Il secondo termine della (5) per $a \approx u$ diventa:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \frac{\mu'u}{G(\gamma-1)} + \frac{k}{GR} \left(2u - \frac{l}{G} \right) &= \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho(\gamma-1)} + \frac{k}{\rho R} \left(2 - \frac{\rho}{\rho u^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho(\gamma-1)} + \frac{k}{\rho R} \left(1 - \frac{a^2}{\gamma u^2} \right) = \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho(\gamma-1)} + \frac{k}{\rho R} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho(\gamma-1)} + \frac{k}{\rho R} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) = \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho(\gamma-1)} + \frac{k}{\rho c_p} \end{aligned}$$

Supponendo che:

$$\delta = \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho} + \frac{k}{\rho c_p} (\gamma-1)$$



Struttura delle onde d'urto

$$(5) \quad -\frac{4}{3} \frac{k(\mu' u u_x)_x}{G^2 R} + \left(\frac{4}{3} \frac{\mu' u}{G(\gamma-1)} + \frac{k}{GR} \left(2u - \frac{l}{G} \right) \right) u_x = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} (u-u_1)(u-u_2)$$

Trascurando il primo termine della (5) e per $a \approx u$ si ha:

$$\frac{\delta}{\gamma-1} u_x = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} (u-u_1)(u-u_2)$$

$$(6) \quad u_x = \frac{\gamma+1}{2\delta} (u-u_1)(u-u_2)$$

$$\text{Ma:} \quad \frac{1}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{A}{u-u_1} + \frac{B}{u-u_2} = \frac{A(u-u_2) + B(u-u_1)}{(u-u_1)(u-u_2)}$$

$$A = -B \quad ; \quad 1 = -A(u_2 - u_1)$$

$$A = -B = -\frac{1}{(u_2 - u_1)}$$

$$\frac{1}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{1}{(u-u_1)(u_1-u_2)} + \frac{1}{(u-u_2)(u_2-u_1)}$$



Struttura delle onde d'urto

$$(6) \quad u_x = \frac{\gamma+1}{2\delta} (u-u_1)(u-u_2)$$

Separando le variabili si ha trascurando il primo termine della (5) e per $a \approx u$ si ha:

$$\int \frac{du}{(u-u_1)(u-u_2)} = \int \frac{-du}{(u_1-u)(u_1-u_2)} + \int \frac{du}{(u-u_2)(u_2-u_1)} = \int \frac{\gamma+1}{2\delta} dx$$

$$\frac{\ln(u_1-u)}{(u_1-u_2)} + \frac{\ln(u-u_2)}{(u_2-u_1)} = \frac{1}{(u_1-u_2)} \ln \frac{(u_1-u)}{(u-u_2)} = \frac{\gamma+1}{2\delta} x + C$$

$$\ln \frac{(u_1-u)}{(u-u_2)} = \frac{\gamma+1}{2\delta} (u_1-u_2)x + C(u_1-u_2)$$

Il valore della costante è inessenziale perché provoca solo una traslazione sull'asse delle x quindi può essere posta uguale a 0:

$$(7) \quad \ln \frac{(u_1-u)}{(u-u_2)} = \frac{\gamma+1}{2\delta} (u_1-u_2)x$$



Struttura delle onde d'urto

$$(7) \ln \frac{(u_1 - u)}{(u - u_2)} = \frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x$$

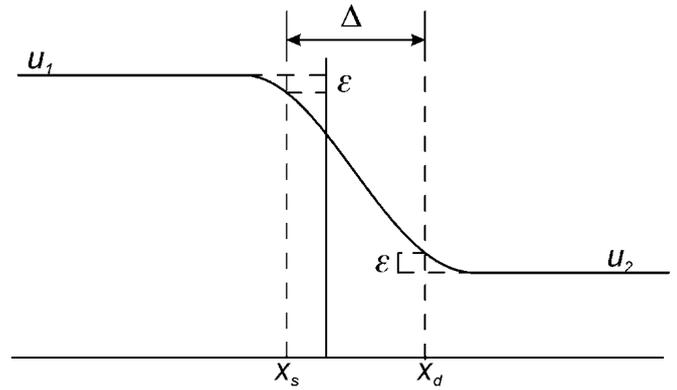
O in modo analogo:

$$\frac{(u_1 - u)}{(u - u_2)} = e^{\frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x}$$

$$(u_1 - u) = (u - u_2) e^{\frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x}$$

$$u \left(e^{\frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x} + 1 \right) = \left(u_1 + u_2 e^{\frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x} \right)$$

$$u = \frac{\left(u_1 + u_2 e^{\frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x} \right)}{\left(e^{\frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x} + 1 \right)}$$



Struttura delle onde d'urto

$$(7) \ln \frac{(u_1 - u)}{(u - u_2)} = \frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2)x$$

La definizione dello spessore dell'onda d'urto non è univoca. Una possibilità è quella di fissare un numero piccolo ε tale che:

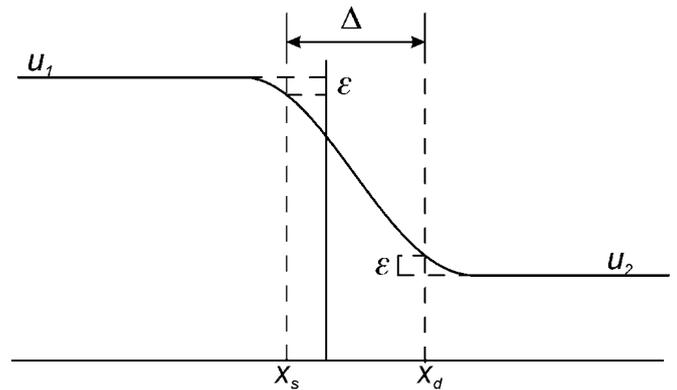
$$x = x_s \quad \frac{(u_1 - u_s)}{(u_1 - u_2)} = \varepsilon$$

$$x = x_d \quad \frac{(u_d - u_2)}{(u_1 - u_2)} = \varepsilon$$

Ovvero:

$$x = x_s \quad (u_1 - u_s) = \varepsilon(u_1 - u_2) \quad (u_s - u_2) = (u_1 - u_2)(1 - \varepsilon) \quad \frac{(u_1 - u_s)}{(u_s - u_2)} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

$$x = x_d \quad (u_d - u_2) = \varepsilon(u_1 - u_2) \quad (u_1 - u_d) = (u_1 - u_2)(1 - \varepsilon) \quad \frac{(u_1 - u_d)}{(u_d - u_2)} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$



Struttura delle onde d'urto

$$(7) \quad \ln \frac{(u_1 - u)}{(u - u_2)} = \frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2) x$$

$$\frac{(u_1 - u_s)}{(u_s - u_2)} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

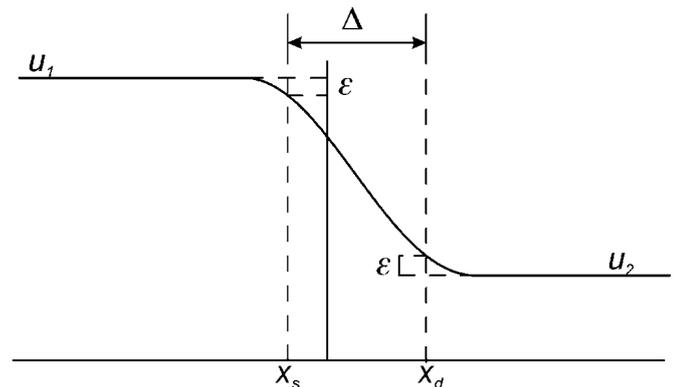
$$\ln \frac{(u_1 - u_d)}{(u_d - u_2)} - \ln \frac{(u_1 - u_s)}{(u_s - u_2)} = \frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2) (x_d - x_s)$$

$$\frac{(u_1 - u_d)}{(u_d - u_2)} = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\ln \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} - \ln \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2) (x_d - x_s)$$

$$2 \ln \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\gamma + 1}{2\delta} (u_1 - u_2) \Delta$$

$$\Delta = \frac{4\delta \ln \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}}{(\gamma + 1)(u_1 - u_2)}$$



Struttura delle onde d'urto

$$\delta = \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho} + \frac{k}{\rho c_p} (\gamma - 1) = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} + \frac{(\gamma - 1)}{Pr} \right)$$

Per molecole modellate come sfere rigide:

$$\mu = 0.7833 \frac{\rho a \lambda}{\sqrt{\gamma}} \quad Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5} \quad \frac{\mu_v}{\mu} \begin{cases} \text{Gas Monoatomico} & 0 \\ N_2 & 0.8 \end{cases}$$

Per \$N_2\$

$$\gamma = 1.4 \quad \mu = 0.6620 \rho a \lambda \quad Pr = 0.7368 \quad \delta = 1.77 a \lambda$$

Per Gas Monoatomico

$$\gamma = 1.66 \quad \mu = 0.6080 \rho a \lambda \quad Pr = 0.6680 \quad \delta = 1.41 a \lambda$$



Struttura delle onde d'urto

Le equazioni esatte possono essere messe nella forma:

$$(1) \quad \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{G} = \frac{RT}{u} + u - \frac{l}{G} \quad u_x = \frac{(\rho RT + \rho u^2 - l)}{\frac{4}{3} \mu'} \quad \frac{4}{3} \mu' = \frac{4}{3} \mu + \mu_v$$

$$u_x = \frac{(\rho + \rho u^2 - l)}{\mu \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right)} \quad \mu = 0.7833 \frac{\rho a \lambda}{\sqrt{\gamma}}$$

$$(2) \quad \frac{k T_x}{G} = C_p T + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - H \quad Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$$

$$T_x = \left(\frac{\gamma RT}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - H \right) \frac{G}{k} \quad k = \frac{C_p \mu}{Pr} = \frac{\gamma R \mu}{(\gamma - 1)} \frac{9\gamma - 5}{4\gamma}$$



Struttura delle onde d'urto

gamma=1.4; R=287; lambda=0.65e-7; rapvis=0.8;
M1=1.25; T1=500; p1=1e5; **%condizioni iniziali**

rho1=p1/(R*T1); V1=M1*sqrt(gamma*R*T1);
[M2 T2 p2]=Urto(M1, T1, p1, gamma); **%NSW**
V2=M2*sqrt(gamma*R*T2);

G=rho1*V1; l=p1+G*V1; H=T1*gamma*R/(gamma-1)+V1*V1*0.5;
options = odeset('RelTol',1e-8, 'AbsTol',[1e-8]);

L=[0 -100]*lambda; **% Intervallo d'integrazione**
y0=[V2+.001 T2]; **% Condizione iniziale**
[x, y]=ode45(@eqOU,L,y0,options,G,l,H,R,gamma,lambda,rapvis);



Struttura delle onde d'urto

```
fprintf( 'residuo %g %g \n',V1-y(end,1),T1-y(end,2))
u=y(:,1); T=y(:,2);
ii=find(u>V1*.999);u(ii)=V1*.999;
ii=find(u<V2*1.001);u(ii)=V2*1.001;
ii=find(u>((V2+V1)*0.5));
xm=x(ii(1));
rho=G./u; %Soluzione esatta
mu=0.7833*sqrt(R*T).*lambda.*rho;
mup=mu*(4/3+rapvis);
k=mu*R*(9*gamma-5)/(4*(gamma-1));
delta=(mup+k*(gamma-1)^2/(gamma*R))./rho;
Pr=4*gamma/(9*gamma-5); delta1=(mup+mu*(gamma-1)/Pr)./rho;
xTaylor=2*delta.*log((V1-u)./(u-V2))./((gamma+1)*(V1-V2))+xm;
plot(x,y(:,1),'r',xTaylor,u)
```



Struttura delle onde d'urto

```
function [M2 T2 p2]=Urto(M1, T1, p1, gamma)
QM=M1.*M1;
M2=sqrt(((gamma-1)*QM+2)./(2*gamma*QM-gamma+1));
rT=((gamma-1)*QM+2).*(2*gamma*QM-gamma+1)./(QM*(gamma+1)
^2);
T2=T1*rT;
dum=2*gamma* QM;
p2=p1.*(dum - (gamma - 1)) / (gamma + 1);
return;
```



Struttura delle onde d'urto

```

function dy = eqOU(x,y,G,l,H,R,gamma,lambda,rapvis)
u=y(1);
T=y(2);
rho=G/u;
p=rho*R*T;
mu=0.7833*sqrt(R*T)*lambda*rho;
mup=mu*(4/3+rapvis);
k=mu*R*(9*gamma-5)/(4*(gamma-1));
ux=(p+G*u-l)/mup;
Tx=(R*T*gamma/(gamma-1)+u*u*0.5-H-mup*ux/rho)*G/k;
dy =[ ux
      Tx] ;
return
    
```

$$\mu = 0.7833 \frac{\rho a \lambda}{\sqrt{\gamma}}$$

$$k = \frac{C_p \mu}{Pr} = \frac{\gamma R \mu}{(\gamma - 1)} \frac{9\gamma - 5}{4\gamma}$$

$$\mu' \frac{4}{3} = \mu \left(\frac{4}{3} + \frac{\mu_v}{\mu} \right)$$

$$u_x = \frac{(p + \rho u^2 - l)}{\frac{4}{3} \mu'}$$

$$T_x = \left(\frac{\gamma R T}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - H \right) \frac{G}{k}$$



Struttura delle onde d'urto

$$\rho u = G$$

$$p + \rho u^2 - \frac{4}{3} \mu' u_x = l$$

$$h + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - \frac{k T_x}{\rho u} = H$$

Nell'ipotesi di costanza dei coefficienti di conducibilità termica e di viscosità dinamica e per il caso particolare di $Pr=0.75$ (definito come di seguito) si può trovare una soluzione esatta. Con le posizioni:

$$\zeta = h + \frac{u^2}{2} \quad Pr = \frac{c_p \mu'}{k} = \frac{3}{4}$$

$$\zeta - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - \frac{k T_x}{\rho u} - H = \zeta - \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho u} \left(u u_x + \frac{3}{4} \frac{k}{c_p \mu'} c_p T_x \right) - H = \zeta - \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho u} \zeta_x - H = 0$$

$$\zeta - \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho u} \zeta_x = H$$



Struttura delle onde d'urto

$$\zeta - \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho u} \zeta_x = H$$

$$\zeta = h + \frac{u^2}{2}$$

Questa equazione può essere facilmente integrata. Una soluzione particolare è:

$$\zeta = H$$

Mentre la soluzione dell'equazione omogenea associata è:

$$\zeta - a\zeta_x = 0 \rightarrow \frac{\zeta}{\zeta_x} = a \rightarrow \ln \zeta = ax + c \rightarrow \zeta = c_1 e^{ax}$$

$$a = \frac{4}{3} \frac{\mu'}{\rho u}$$

Quindi:

$$\zeta = c_1 e^{ax} + H$$

Imponendo che ζ sia limitata si trova subito $c_1=0$

$$\zeta = h + \frac{u^2}{2} = H = \text{costante}$$



Struttura delle onde d'urto

$$\rho u = G$$

$$p + \rho u^2 - 4/3 \mu' u_x = I$$

$$h + \frac{u^2}{2} = H$$

$$h + \frac{u^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} - \frac{kT_x}{\rho u} = H$$

Nelle stesse ipotesi l'equazione di bilancio della quantità di moto diventa:

$$\begin{aligned} p + \rho u^2 - 4/3 \mu' u_x - I &= \\ &= \rho \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(H - \frac{u^2}{2} \right) + \rho u^2 - \frac{4}{3} \mu' u_x - I = \end{aligned} \quad p = \rho R T = \rho c_p \frac{\gamma-1}{\gamma} T = \rho \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(H - \frac{u^2}{2} \right)$$

$$= \rho u^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) - \frac{4}{3} \mu' u_x - I + \rho \frac{\gamma-1}{\gamma} H = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \rho u^2 - \frac{4}{3} \mu' u_x - I + \rho \frac{\gamma-1}{\gamma} H$$

Dividendo per ρ e raggruppando si ha:

$$\frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} u^2 - \frac{I}{\rho} + \frac{\gamma-1}{\gamma} H$$



Struttura delle onde d'urto

$$\frac{4}{3} \frac{\mu' u_x}{\rho} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} u^2 - \frac{I}{\rho} + \frac{\gamma-1}{\gamma} H \quad \rho = \frac{G}{u}$$

$$\frac{4}{3} \frac{\mu'}{G} u u_x = \frac{\gamma+1}{2\gamma} u^2 - \frac{Iu}{G} + \frac{\gamma-1}{\gamma} H$$

Che è un'equazione quadratica in u . Quindi:

$$\frac{4}{3} \frac{\mu'}{G} u u_x = \frac{\gamma+1}{2\gamma} (u-u_1)(u-u_2)$$

$$u u_x = \frac{3}{4} \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{G}{\mu'} (u-u_1)(u-u_2)$$

$$\frac{u}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{A}{u-u_1} + \frac{B}{u-u_2} = \frac{A(u-u_2) + B(u-u_1)}{(u-u_1)(u-u_2)}$$

$$A+B=1 \quad ; \quad Au_2 + Bu_1 = 0 \rightarrow A = \frac{u_1}{u_1-u_2} \quad B = \frac{u_2}{u_2-u_1}$$

$$\frac{u}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{u_1}{u_1-u_2} \frac{1}{u-u_1} + \frac{u_2}{u_2-u_1} \frac{1}{u-u_2}$$



Struttura delle onde d'urto

$$u u_x = \frac{3}{4} \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{G}{\mu'} (u-u_1)(u-u_2) \quad \frac{u}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{u_1}{u_1-u_2} \frac{1}{u-u_1} + \frac{u_2}{u_2-u_1} \frac{1}{u-u_2}$$

Imponendo $a = \frac{3}{4} \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{G}{\mu'}$, $\alpha = \frac{u_2}{u_1-u_2}$ e $\xi = \frac{u-u_2}{u_1-u_2}$ si ha:

$$\int \frac{u du}{(u-u_1)(u-u_2)} = \frac{u_1}{u_1-u_2} \int \frac{du}{u-u_1} + \frac{u_2}{u_2-u_1} \int \frac{du}{u-u_2} = \int a dx$$

$$\frac{u_1}{u_1-u_2} \int \frac{d \frac{u-u_2}{u_1-u_2}}{\frac{u-u_2}{u_1-u_2} + \frac{u_2-u_1}{u_1-u_2}} + \frac{u_2}{u_2-u_1} \int \frac{d \frac{u-u_2}{u_1-u_2}}{\frac{u-u_2}{u_1-u_2}} = \int a dx$$

$$\frac{u_1}{u_1-u_2} \int \frac{d\xi}{\xi-1} - \frac{u_2}{u_1-u_2} \int \frac{d\xi}{\xi} = \int a dx$$

$$\frac{u_1}{u_1-u_2} \int \frac{d-\xi}{1-\xi} - \frac{u_2}{u_1-u_2} \int \frac{d\xi}{\xi} = \int a dx \rightarrow \frac{u_1}{u_1-u_2} \left(\ln(1-\xi) - \frac{u_2}{u_1} \ln(\xi) \right) = ax + c$$



Struttura delle onde d'urto

$$\frac{u_1}{u_1 - u_2} \left(\ln(1 - \xi) - \frac{u_2}{u_1} \ln(\xi) \right) = ax + c$$

$$a = \frac{3}{4} \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{G}{\mu'}$$

$$\frac{1}{1 - \alpha} (\ln(1 - \xi) - \alpha \ln(\xi)) = ax + c$$

$$\xi = \frac{u - u_2}{u_1 - u_2}$$

Ed infine:

$$\alpha = \frac{u_2}{u_1}$$

$$\ln \frac{1 - \xi}{\xi^\alpha} = (1 - \alpha) \frac{3}{4} \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{G}{\mu'} x + c_1$$

Le condizioni al contorno sono automaticamente soddisfatte e la costante può essere utilizzata per centrare l'onda rispetto al sistema di riferimento.



Struttura delle onde d'urto

```
function dy = eqOU(x,y,G,l,H,R,gamma,lambda,rapvis,mu,Pr)
u=y(1);
T=y(2);
rho=G/u;
p=rho*R*T;
%mu=0.7833*sqrt(R*T)*lambda*rho;
mup=4/3*mu*(1+rapvis*3/4);
cp=R*gamma/(gamma-1);
%k=mu*R*(9*gamma-5)/(4*(gamma-1));
k=3/4*cp*mup/Pr;
ux=(p+G*u-l)/mup;
Tx=(R*T*gamma/(gamma-1)+u*u*0.5-H-mup*ux/rho)*G/k;
dy =[ ux
     Tx] ;
return
```



Struttura delle onde d'urto

```
gamma= 1.4; R=287; lambda=0.65e-7; rapvis=0; Pr=0.75;  
M1=4.25; T1=500; p1=1e5; %condizioni iniziali
```

```
rho1=p1/(R*T1); V1=M1*sqrt(gamma*R*T1);  
[M2 T2 p2]=Urto(M1, T1, p1, gamma); %NSW  
V2=M2*sqrt(gamma*R*T2);
```

```
G=rho1*V1; I=p1+G*V1; H=T1*gamma*R/(gamma-1)+V1*V1*0.5;  
mu=0.7833*sqrt(R*T1).*lambda.*rho1;  
options = odeset('RelTol',1e-8,'AbsTol',[1e-8]);
```

```
L=[0 -4]*lambda; % Intervallo d'integrazione  
y0=[V2+.001 T2]; % Condizione iniziale  
[x, y]=ode45(@eqOU,L,y0,options,G,I,H,R,gamma,lambda,rapvis,mu,Pr);
```



Struttura delle onde d'urto

```
fprintf( 'residuo %g %g \n',V1-y(end,1),T1-y(end,2))  
u=y(:,1); T=y(:,2);  
ii=find(u>V1*.999);u(ii)=V1*.999;  
ii=find(u<V2*1.001);u(ii)=V2*1.001;  
ii=find(u>((V2+V1)*0.5));  
xm=x(ii(1));
```

```
mup=3/4*mu*(4/3+rapvis);%%%%%%%%%%%%%%  
a=3*G*(gamma+1)/(2*gamma*4*mup);  
alfa=V2/V1;  
csi=(u-V2)/(V1-V2);  
dum=log((1-csi)/csi.^alfa)/(a*(1-alfa));  
cost=-dum(ii(1))+xm;  
xesa=cost+dum;  
plot(x,y(:,1),'r',xesa,u,'g')  
%plot(x,y(:,1),'r',xTaylor,u,xesa,u)
```

