Corso di
Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it

Teoria delle caratteristiche

La equazione del potenziale in due dimensioni è:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \frac{1}{a^2}\left(\varphi_x^2\varphi_{xx} + \varphi_y^2\varphi_{yy}\right) - \frac{2}{a^2}\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}\right) = 0$$

$$(1) \quad \left(a^2 - \varphi_x^2\right)\varphi_{xx} - 2\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}\right) + \left(a^2 - \varphi_y^2\right)\varphi_{yy} = 0$$

E confrontata con la (2) fornisce:

$$(2) \quad c_1\varphi_{xx} + 2c_2\varphi_{xy} + c_3\varphi_{yy} = c_4$$

$$c_1 = a^2 - \varphi_x^2 \quad c_2 = -\varphi_x\varphi_y \quad c_3 = a^2 - \varphi_y^2 \quad c_4 = 0$$

$$c_1 = a^2 - u^2 \quad c_2 = -uv \quad c_3 = a^2 - v^2 \quad c_4 = 0$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}}{c_1}$$

Dalla (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}}{c_1} = \frac{-uv \pm \sqrt{(uv)^2 - \left(a^2 - u^2\right)\left(a^2 - v^2\right)}}{a^2 - u^2} =$$

$$= \frac{-uv \pm \sqrt{\cancel{u^2v^2} - a^4 + a^2u^2 + a^2v^2 - \cancel{u^2v^2}}}{a^2 - u^2} = \frac{-uv \pm \sqrt{a^2\left(u^2 + v^2\right) - a^4}}{a^2 - u^2}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-uv\pm\sqrt{a^2\left(u^2+v^2\right)-a^4}}{a^2-u^2}=\frac{-\frac{uv}{a^2}\pm\sqrt{\frac{\left(u^2+v^2\right)}{a^2}-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}}=\frac{-\frac{uv}{a^2}\pm\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}}$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{uv}{a^2}\pm\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}}$$

Il discriminante è funzione del numero di **Mach**:

$$c_2^2-c_1c_3=M^2-1\quad\begin{cases}>0 & \text{Equazione iperbolica}\\ =0 & \text{Equazione parabolica}\\ <0 & \text{Equazione ellittica}\end{cases}$$

Teoria delle caratteristiche

Si devono analizzare ora le condizioni di regolarità. Queste condizioni vengono trovate imponendo che il sistema sia indeterminato. Risolvendo con la regola di Cramer il sistema si ha ad esempio:

$$\begin{bmatrix} dx & dy & 0\\ 0 & dx & dy\\ c_1 & 2c_2 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_{xx}\\ \varphi_{xy}\\ \varphi_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d\left(\varphi_x\right)\\ d\left(\varphi_y\right)\\ c_4\end{bmatrix}\qquad \varphi_{xx}=\frac{\begin{vmatrix} d\left(\varphi_x\right) & dy & 0\\ d\left(\varphi_y\right) & dx & dy\\ c_4 & 2c_2 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & dy & 0\\ 0 & dx & dy\\ c_1 & 2c_2 & c_3\end{vmatrix}}$$

Lungo la caratteristica il denominatore si annulla. Per avere delle derivate seconde continue e limitate (in assenza di urti) è necessario che anche il numeratore si annulli Supponendo che c_4=0:

$$d\left(\varphi_x\right)=du\quad d\left(\varphi_y\right)=dv\qquad du\left(dxc_3-2dyc_2\right)-dy\left(dvc_3\right)=0$$

Teoria delle caratteristiche

$$du\left(dx c_3 - 2dy c_2\right) - dy\left(dv c_3\right) = 0$$

$$\frac{dv}{du}\frac{dy}{dx}c_3 = \left(c_3 - 2\frac{dy}{dx}c_2\right)$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{dx}{dy} - 2\frac{c_2}{c_3} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{c_1}{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}} = \frac{c_1\left(-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}\right)}{\left(\underset{+b}{c_2} \pm \underset{+a}{\sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}\right)\left(\underset{-b}{-c_2} \pm \underset{+a}{\sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}\right)} =$$

$$= \frac{c_1\left(-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}\right)}{-c_2^2 + c_2^2 - c_1 c_3} = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{-c_3} = \frac{c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_3}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_3} - 2\frac{c_2}{c_3} = \frac{-c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_3}$$

Teoria delle caratteristiche

$$(5) \quad \frac{dv}{du} = \frac{-c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_3}$$

Ricordando che nel caso dell’equazione del potenziale si ha:

$$c_1 = a^2 - u^2 \quad c_2 = -uv \quad c_3 = a^2 - v^2 \quad c_4 = 0$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{uv \mp \sqrt{(uv)^2 - \left(a^2 - u^2\right)\left(a^2 - v^2\right)}}{a^2 - v^2} = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{M^2 - 1}}{1 - \frac{v^2}{a^2}}$$

$$(6) \quad \frac{dv}{du} = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{M^2 - 1}}{1 - \frac{v^2}{a^2}}$$

Teoria delle caratteristiche

$$(3)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{c_2\pm\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_1} \qquad\qquad (5)\quad \frac{dv}{du}=\frac{-c_2\mp\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_3}$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{uv}{a^2}\pm\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}} \qquad\qquad (6)\quad \frac{dv}{du}=\frac{\frac{uv}{a^2}\mp\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{v^2}{a^2}}$$

Lungo la prima caratteristica si ha:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_I=\frac{-\frac{uv}{a^2}+\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}} \qquad\qquad \left.\frac{dv}{du}\right|_I=\frac{\frac{uv}{a^2}-\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{v^2}{a^2}}$$

mentre lungo la seconda:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{II}=\frac{-\frac{uv}{a^2}-\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}} \qquad\qquad \left.\frac{dv}{du}\right|_{II}=\frac{\frac{uv}{a^2}+\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{v^2}{a^2}}$$

Teoria delle caratteristiche

Metodo 2 – Metodo delle combinazioni lineari (Friedrichs)

K. O. Friedrichs

Kurt O. Friedrichs (1901–1982)

Teoria delle caratteristiche

Metodo 2 – Metodo delle combinazioni lineari (Friedrichs)

Si sfrutta la terza proprietà:

- Lungo una curva caratteristica l'equazione differenziale alle derivate parziali può essere trasformata in una equazione differenziale ordinaria.

Riscrivendo l'equazione del potenziale in termini delle variabili primitive:

$$(1)\quad \left(a^2-\varphi_x^2\right)\varphi_{xx}-2\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}\right)+\left(a^2-\varphi_y^2\right)\varphi_{yy}=0$$

$$\begin{cases} c_1u_x+c_2\left(u_y+v_x\right)+c_3v_y=0 \\ v_x-u_y=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\nabla}\wedge\underline{V}=0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per σ_1 e la seconda per σ_2 e sommando si ha (in effetti basterebbe definire una unica costante data dal rapporto fra le due σ):

$$\sigma_1\left(c_1u_x+c_2\left(u_y+v_x\right)+c_3v_y\right)+\sigma_2\left(v_x-u_y\right)=0$$

$$c_1\sigma_1u_x+\left(c_2\sigma_1-\sigma_2\right)u_y+\left(c_2\sigma_1+\sigma_2\right)v_x+\sigma_1c_3v_y=0$$

$$(6)\quad c_1\sigma_1\left(u_x+\frac{c_2\sigma_1-\sigma_2}{c_1\sigma_1}u_y\right)+\left(c_2\sigma_1+\sigma_2\right)\left(v_x+\frac{\sigma_1c_3}{c_2\sigma_1+\sigma_2}v_y\right)=0$$

Teoria delle caratteristiche

$$(6)\quad c_1\sigma_1\left(u_x+\frac{c_2\sigma_1-\sigma_2}{c_1\sigma_1}u_y\right)+\left(c_2\sigma_1+\sigma_2\right)\left(v_x+\frac{\sigma_1c_3}{c_2\sigma_1+\sigma_2}v_y\right)=0$$

Questa equazione è una combinazione lineare delle due equazioni differenziali. Se si suppone di muoversi lungo una curva caratteristica *c* la derivata di *u* e *v* lungo questa curva è una combinazione lineare delle due derivate lungo *x* e lungo *y*.

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{\text{lungo c}}=u_x+u_y\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{lungo c}}=u_x+u_y\lambda=u_x+\frac{\left(c_2\sigma_1-\sigma_2\right)}{c_1\sigma_1}u_y$$

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{\text{lungo c}}=v_x+v_y\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{lungo c}}=v_x+v_y\lambda=v_x+\frac{\sigma_1c_3}{c_2\sigma_1+\sigma_2}v_y$$

Con:

$$\lambda=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{lungo c}}$$

Teoria delle caratteristiche

$$(6)\quad c_1\sigma_1\left(u_x+\frac{c_2\sigma_1-\sigma_2}{c_1\sigma_1}u_y\right)+\left(c_2\sigma_1+\sigma_2\right)\left(v_x+\frac{\sigma_1 c_3}{c_2\sigma_1+\sigma_2}v_y\right)=0$$

Affinché il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali si trasformi in un sistema di equazioni ordinarie si deve avere che la (6) sia data da una combinazione lineare dei due differenziali di *u* e *v* valutati lungo la caratteristica.

$$du\big|_{\text{lungo c}}=\left(u_x+\lambda u_y\right)dx \qquad dv\big|_{\text{lungo c}}=\left(v_x+\lambda v_y\right)dx$$

Confrontando la (6) con queste equazioni si ha lungo *c*:

$$(7)\quad c_1\sigma_1 du+\left(c_2\sigma_1+\sigma_2\right)dv=0$$

Che fornirà le condizioni di compatibilità.

Teoria delle caratteristiche

$$(6)\quad c_1\sigma_1\left(u_x+\frac{\left(c_2\sigma_1-\sigma_2\right)}{c_1\sigma_1}u_y\right)+\left(c_2\sigma_1+\sigma_2\right)\left(v_x+\frac{\sigma_1 c_3}{c_2\sigma_1+\sigma_2}v_y\right)=0$$

Come già visto per determinare le curve caratteristiche si ha:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{\text{lungo c}}=u_x+u_y\lambda=u_x+\frac{\left(c_2\sigma_1-\sigma_2\right)}{c_1\sigma_1}u_y \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\left(c_2\sigma_1-\sigma_2\right)}{c_1\sigma_1}$$

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{\text{lungo c}}=v_x+v_y\lambda=v_x+\frac{\sigma_1 c_3}{c_2\sigma_1+\sigma_2}v_y \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{\sigma_1 c_3}{c_2\sigma_1+\sigma_2}$$

Che è un sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite σ_1 e σ_2. Riscrivendo il sistema si ha:

$$\sigma_1\left(c_1\lambda-c_2\right)+\sigma_2=0$$

$$\sigma_1\left(c_2\lambda-c_3\right)+\sigma_2\lambda=0$$

Teoria delle caratteristiche

$$\sigma_1(c_1\lambda - c_2) + \sigma_2 = 0$$
$$\sigma_1(c_2\lambda - c_3) + \sigma_2\lambda = 0$$

Che ammette una soluzione solo se il determinante è nullo:

$$\begin{vmatrix} c_1\lambda - c_2 & 1 \\ c_2\lambda - c_3 & \lambda \end{vmatrix} = 0 = (c_1\lambda - c_2)\lambda - (c_2\lambda - c_3) = c_1\lambda^2 - 2c_2\lambda + c_3 = 0$$

Che risolta da:

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}}{c_1}$$

Sostituendo nella prima equazione si ha:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = c_2 - c_1\lambda = c_2 - c_1\frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}}{c_1} = \mp\sqrt{c_2^2 - c_1c_3}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \mp\sqrt{c_2^2 - c_1c_3} \qquad (7) \quad c_1\sigma_1 du + (c_2\sigma_1 + \sigma_2)dv = 0$$

Dalla (7):

$$\left.\frac{dv}{du}\right|_{\text{lungo c}} = \frac{-c_1}{c_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = \frac{-c_1}{c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}} = \frac{-c_1\left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}\right)}{\underbrace{\left(c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}\right)}_{(a \quad -b)}\underbrace{\left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}\right)}_{(a \quad +b)}} =$$

$$= \frac{-c_1\left(c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}\right)}{\underbrace{c_2^2 - c_2^2 + c_1c_3}_{a^2 - b^2}} = \frac{-c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}}{c_3}$$

Che coincide con la $\quad (5) \quad \dfrac{dv}{du} = \dfrac{-c_2 \mp \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}}{c_3}$

Teoria delle caratteristiche

Metodo 3 – Analisi degli autovalori

$$\begin{cases} c_1 u_x + c_2\left(u_y + v_x\right) + c_3 v_y = 0 \\ v_x - u_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\nabla} \wedge \underline{V} = 0 \end{cases} \qquad (1) \quad \left(a^2 - \varphi_x^2\right)\varphi_{xx} - 2\left(\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy}\right) + \left(a^2 - \varphi_y^2\right)\varphi_{yy} = 0$$

Il sistema di equazioni può essere messo nella forma:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{d} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} c_2 & c_3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

dove si è supposto che il termine noto possa anche essere non nullo. Moltiplicando tutto per A^{-1} si ha (il determinante deve essere diverso da zero):

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{d}$$

$$(8) \quad \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{d}$$

Nel caso specifico A^{-1} è facilmente determinabile e di conseguenza C:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\left|\underline{\underline{A}}\right|} \underline{\underline{A}}_G = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} 1 & -c_2 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} 1 & -c_2 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} = \frac{1}{c_1} \begin{bmatrix} 1 & -c_2 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2 & c_3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{c_2}{c_1} & \dfrac{c_3}{c_1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalizzando il sistema si ottengono due equazioni differenziali ordinarie. Infatti supponendo che la relazione seguente:

$$\underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{\Lambda}}$$

sia valida premoltiplicando la (8) per la matrice Inversa di X si ha:

$$\underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{d} \qquad (8) \quad \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{d}$$

$$\underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}}^{-1}\right) \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{d}$$

Supponendo che $\begin{cases} d\underline{\Gamma} = \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot d\underline{w} \\ \underline{\Delta} = \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{d} \end{cases}$ si ha: $\quad \dfrac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial x} + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \dfrac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial y} = \underline{\Delta}$

Teoria delle caratteristiche

$$\frac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial x} + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \frac{\partial \underline{\Gamma}}{\partial y} = \underline{\Delta} \qquad (8) \quad \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{d}$$

Che è la (8) nella sua forma caratteristica. In forma scalare si ha:

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial y} = \Delta_i$$

Quando il vettore Δ è nullo (come nel caso in esame) la generica componente del vettore Γ è costante lungo la curva caratteristica associata.

La determinazione delle curve caratteristiche parte dalla determinazione degli autovalori della matrice C:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{c_2}{c_1} & \dfrac{c_3}{c_1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right| = \begin{vmatrix} 2\dfrac{c_2}{c_1} - \lambda & \dfrac{c_3}{c_1} \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\left(2\frac{c_2}{c_1} - \lambda\right)\lambda + \frac{c_3}{c_1} = 0 \rightarrow c_1\lambda^2 - 2c_2\lambda + c_3 = 0$$

Che è uguale a quella trovata in precedenza.

Teoria delle caratteristiche

Per diagonalizzare la matrice *C* si deve premoltiplicare per la matrice che ha per righe gli autovettori sinistri l_j e post moltiplicare per la matrice che ha per colonne gli autovettori destri r_j.

$$\underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{\Lambda}}$$

$$\underline{\underline{X}}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{l}_I^T \\ \underline{l}_{II}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{I1} & l_{I2} \\ l_{II1} & l_{II2} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \underline{r}_I & \underline{r}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{I1} & r_{II1} \\ r_{I2} & r_{II2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{l}_j^T \cdot \underline{\underline{C}} = \lambda \underline{l}_j^T \qquad \underline{\underline{C}} \cdot \underline{r}_j = \lambda \underline{r}_j$$

$$\underline{l}_j^T \cdot \left(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = 0 \qquad \left(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) \cdot \underline{r}_j = 0 \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{c_2}{c_1} & \dfrac{c_3}{c_1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{i1} & l_{i2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\dfrac{c_2}{c_1} - \lambda & \dfrac{c_3}{c_1} \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Teoria delle caratteristiche

$$[l_{i1} \quad l_{i2}]\cdot\begin{bmatrix} 2\dfrac{c_2}{c_1}-\lambda & \dfrac{c_3}{c_1} \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}=0 \qquad (3)\quad \frac{dy}{dx}=\lambda=\frac{c_2\pm\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_1}$$

$$\begin{cases} \left(2\dfrac{c_2}{c_1}-\lambda_1\right)l_{l1}-l_{l2}=0\rightarrow l_{l2}=l_{l1}\left(2\dfrac{c_2}{c_1}-\lambda_1\right)=l_{l1}\left(2\dfrac{c_2}{c_1}-\dfrac{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_1}\right) \\ \dfrac{c_3}{c_1}l_{l1}-\lambda_1 l_{l2}=0\rightarrow l_{l2}=l_{l1}\dfrac{c_3}{\lambda_1 c_1}=l_{l1}\dfrac{c_3}{\dfrac{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_1}c_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{l2}=l_{l1}\dfrac{c_2-\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_1}=l_{l1}\dfrac{\overbrace{\left(c_2-\sqrt{c_2^2-c_1c_3}\right)}^{(a\;-b)}\overbrace{\left(c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}\right)}^{(a\;+b)}}{c_1\underbrace{\left(c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}\right)}_{(a\;+b)}}=l_{l1}\dfrac{\overset{a^2-b^2}{c_3}}{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}} \\ l_{l2}=l_{l1}\dfrac{c_3}{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}} \end{cases}$$

Teoria delle caratteristiche

$$d\underline{\Gamma}=\underline{\underline{X}}^{-1}d\underline{w}\rightarrow d\Gamma_l=\underline{l}_l^T\cdot d\underline{w} \qquad l_{l2}=l_{l1}\frac{c_3}{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}$$

Imponendo che l_{l1}=1 si ha:

$$d\underline{\Gamma}=\underline{\underline{X}}^{-1}d\underline{w}$$

$$[l_{i1} \quad l_{i2}]\cdot\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{c_3}{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=du+\frac{c_3}{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}dv$$

Si procede in modo analogo per il secondo autovalore ottenendo così le due equazioni. Come già detto lungo la caratteristica sia ha:

$$d\Gamma_l=0 \qquad du+\frac{c_3}{c_2+\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}dv=0$$

Che è la relazione di compatibilità trovata in precedenza.

$$(5)\quad \frac{dv}{du}=\frac{-c_2\mp\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_3}$$

Teoria delle caratteristiche

I tre metodi portano allo stesso risultato:

$$(3)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{c_2\pm\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_1} \qquad\qquad (5)\quad \frac{dv}{du}=\frac{-c_2\mp\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_3}$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{uv}{a^2}\pm\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}} \qquad\qquad (6)\quad \frac{dv}{du}=\frac{\frac{uv}{a^2}\mp\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{v^2}{a^2}}$$

È interessante scrivere queste equazioni anche in coordinate polari:

$$u=V\cos\alpha \qquad v=V\sin\alpha \qquad \frac{v}{u}=\tan\alpha$$

$$\sin\mu=\frac{1}{M} \qquad \cos\mu=\frac{\sqrt{M^2-1}}{M}$$

$$\tan\mu=\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$$

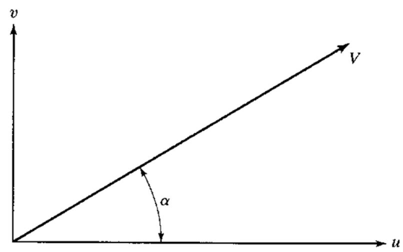

Figure 14.3 Polar Coordinates V and α in the Hodograph Plane

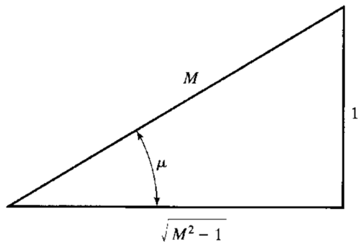

Figure 14.4 Mach Triangle

Teoria delle caratteristiche

$$u=V\cos\alpha \qquad v=V\sin\alpha \qquad \frac{v}{u}=\tan\alpha$$

$$\sin\mu=\frac{1}{M} \qquad \cos\mu=\frac{\sqrt{M^2-1}}{M} \qquad \tan\mu=\frac{1}{\sqrt{M^2-1}}$$

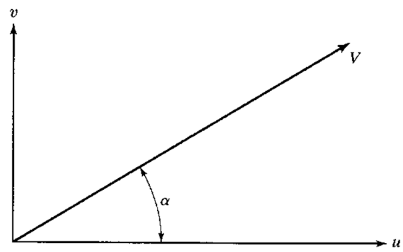

Figure 14.3 Polar Coordinates V and α in the Hodograph Plane

$$\frac{a^2}{u^2}=\frac{V^2}{u^2M^2}=\frac{V^2}{V^2\cos^2\alpha\,\frac{1}{\sin^2\mu}}=\frac{\sin^2\mu}{\cos^2\alpha}=\sin^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

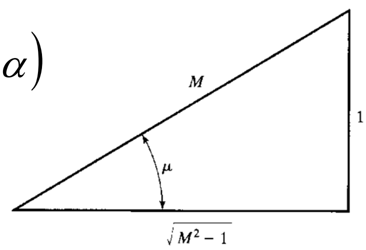

Figure 14.4 Mach Triangle

Dalla (4)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{uv}{a^2}\pm\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{u^2}{a^2}}\;\frac{-\frac{a^2}{u^2}}{-\frac{a^2}{u^2}}=\frac{\frac{v}{u}\mp\frac{a^2}{u^2}\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{a^2}{u^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{v}{u}\mp\frac{a^2}{u^2}\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{a^2}{u^2}}=\frac{\frac{V\sin\alpha}{V\cos\alpha}\mp\sin^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)\frac{1}{\tan\mu}}{1-\sin^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\cancel{V}\sin\alpha}{\cancel{V}\cos\alpha}\mp\sin^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)\dfrac{1}{\tan\mu}}{1-\sin^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)}=\frac{\left(\tan\alpha\mp\sin^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)\dfrac{1}{\tan\mu}\right)}{\left(1-\sin^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)\right)}\frac{\dfrac{1}{\cos^2\mu}}{\dfrac{1}{\cos^2\mu}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha}{\cos^2\mu}\mp\tan^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)\dfrac{1}{\tan\mu}}{\dfrac{1}{\cos^2\mu}-\tan^2\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)}=\frac{\tan\alpha\left(1+\tan^2\mu\right)\mp\tan\mu\left(1+\tan^2\alpha\right)}{1+\cancel{\tan^2\mu}-\cancel{\tan^2\mu}-\tan^2\mu\tan^2\alpha}=$$

$$=\frac{\tan\alpha\tan\mu\left(\tan\mu\mp\tan\alpha\right)+\tan\alpha\mp\tan\mu}{\underbrace{1-\tan^2\mu\tan^2\alpha}_{a^2-b^2}}=\frac{\left(\tan\alpha\mp\tan\mu\right)\cancel{\left(1\mp\tan\alpha\tan\mu\right)}}{\underbrace{\left(1\pm\tan\mu\tan\alpha\right)}_{(a\ \pm b)}\underbrace{\cancel{\left(1\mp\tan\mu\tan\alpha\right)}}_{(a\ \mp b)}}=$$

$$=\frac{\tan\alpha\mp\tan\mu}{1\pm\tan\mu\tan\alpha}=\tan\left(\alpha\mp\mu\right)$$

$\mp\left(\tan\mu\mp\tan\alpha\right)=\tan\alpha\mp\tan\mu$

Teoria delle caratteristiche

$$\frac{dy}{dx}=\tan\left(\alpha\mp\mu\right)$$

Le curva caratteristiche della prima famiglia formano un angolo negativo ed acuto pari a μ con la velocità. Le caratteristiche della seconda famiglia formano, invece, un angolo positivo.

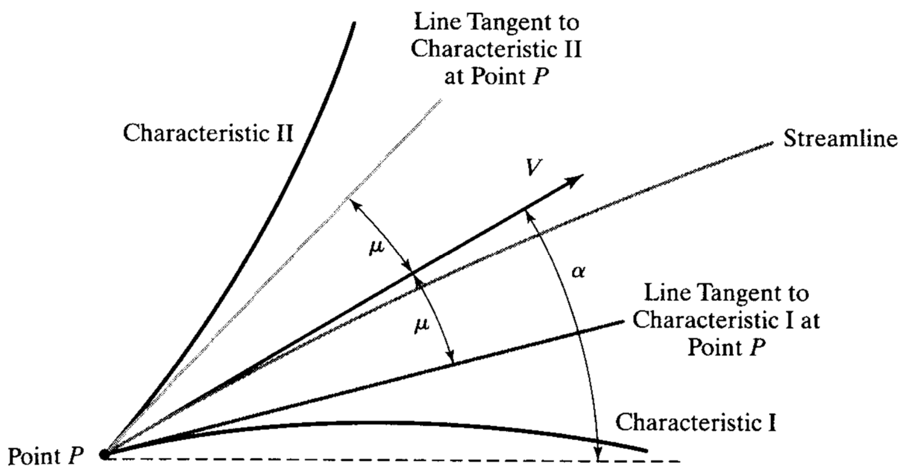

Figure 14.5 Geometry of Characteristics at a Point

Teoria delle caratteristiche

Nel piano dell'odografo invece si ha:

$$(6)\quad \frac{dv}{du}=\frac{\dfrac{uv}{a^2}\mp\sqrt{M^2-1}}{1-\dfrac{v^2}{a^2}}$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{\dfrac{uv}{a^2}\mp\sqrt{M^2-1}}{1-\dfrac{v^2}{a^2}}=\frac{uv\mp a^2\sqrt{M^2-1}}{a^2-v^2}=\frac{\overset{(a\;\mp b)}{\left(uv\mp a^2\sqrt{M^2-1}\right)}\overset{(a\;\pm b)}{\left(uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}\right)}}{\left(a^2-v^2\right)\underset{(a\;\pm b)}{\left(uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}\right)}}=$$

$$=\frac{\overset{a^2-b^2}{u^2v^2-a^4\left(M^2-1\right)}}{\left(a^2-v^2\right)\left(uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}\right)}=\frac{u^2v^2-a^2\left(u^2+v^2\right)+a^4}{\left(a^2-v^2\right)\left(uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}\right)}$$

$$=\frac{u^2\left(v^2-a^2\right)-a^2\left(v^2-a^2\right)}{\left(a^2-v^2\right)\left(uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}\right)}=\frac{a^2-u^2}{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{a^2-u^2}{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\frac{dv}{du}=\frac{a^2-u^2}{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}=-\frac{1-\dfrac{u^2}{a^2}}{-\dfrac{uv}{a^2}\mp\sqrt{M^2-1}}$$

Che confrontata con la $(4)\quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\dfrac{uv}{a^2}\pm\sqrt{M^2-1}}{1-\dfrac{u^2}{a^2}}$ da:

$$\left.\frac{dv}{du}\right|_I=\frac{-1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{II}}\qquad\qquad \left.\frac{dv}{du}\right|_{II}=\frac{-1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I}}$$

La prima curva caratteristica nel piano dell'odografo è ortogonale alla seconda nel piano fisico e viceversa.

Poiché:

$$\frac{dy}{dx}=\tan\left(\alpha\mp\mu\right)\qquad\qquad \frac{dv}{du}=-\cot\left(\alpha\pm\mu\right)$$

Teoria delle caratteristiche

Ora si vuole trovare una relazione che lega direttamente il modulo della velocità agli angoli caratteristici (μ e α):

$$dv = d(V\sin\alpha) = dV\sin\alpha + V\cos\alpha\, d\alpha$$

$$du = d(V\cos\alpha) = dV\cos\alpha - V\sin\alpha\, d\alpha$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{dV\sin\alpha + V\cos\alpha\, d\alpha}{dV\cos\alpha - V\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha}\tan\alpha + 1}{\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha} - \tan\alpha}$$

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha}\tan\alpha + 1 = \frac{dv}{du}\left(\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha} - \tan\alpha\right) \rightarrow \frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha}\left(\frac{dv}{du} - \tan\alpha\right) = 1 + \frac{dv}{du}\tan\alpha$$

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha} = \frac{1 + \frac{dv}{du}\tan\alpha}{\frac{dv}{du} - \tan\alpha}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha} = \frac{1 + \frac{dv}{du}tan\,\alpha}{\frac{dv}{du} - tan\,\alpha}$$

Ma: $\frac{dv}{du} = -\cot(\alpha \pm \mu) = \frac{-1}{\tan(\alpha \pm \mu)}$

$$tan(\alpha \pm \mu) = \frac{tan\,\alpha \pm tan\,\mu}{1 \mp tan\,\alpha\, tan\,\mu}$$

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha} = \frac{1 + \frac{dv}{du}tan\,\alpha}{\frac{dv}{du} - tan\,\alpha} = \frac{1 + \frac{-1}{tan(\alpha \pm \mu)}tan\,\alpha}{\frac{-1}{tan(\alpha \pm \mu)} - tan\,\alpha} = \frac{tan(\alpha \pm \mu) - tan\,\alpha}{-1 - tan(\alpha \pm \mu)tan\,\alpha} =$$

$$= \frac{tan\,\alpha - tan(\alpha \pm \mu)}{1 + tan(\alpha \pm \mu)tan\,\alpha} = tan[\alpha - (\alpha \pm \mu)] = tan(\mp\mu) = \mp tan\,\mu$$

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{d\alpha} = \mp tan\,\mu = \mp\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \qquad d\alpha = \mp\frac{1}{tan\,\mu}\frac{dV}{V} = \mp\sqrt{M^2 - 1}\frac{dV}{V}$$

Questa equazione vale **lungo** una curva caratteristica ed è simile a quella di Prandtl e Meyer che invece vale **attraverso** le curve caratteristiche:

$$-d\delta = d\nu = \sqrt{M^2 - 1}\frac{dV}{V}$$

Teoria delle caratteristiche

Si ha:

$$d\alpha = \mp\sqrt{M^2 - 1}\frac{dV}{V}$$

$$\int_a^b d\alpha = (\alpha_b - \alpha_a) = \mp\int_a^b \sqrt{M^2 - 1}\frac{dV}{V} = \mp(\nu_b - \nu_a) \qquad -d\delta = d\nu = \sqrt{M^2 - 1}\frac{dV}{V}$$

Dove il segno meno vale per la prima famiglia di curve caratteristiche mentre il segno più sulla seconda famiglia. Supponendo che il punto *a* sia noto si ha sulla prima caratteristica:

$$\alpha_b + \nu_b = \alpha_a + \nu_a = C_I \qquad \frac{dy}{dx} = tan(\alpha - \mu)$$

Dove C_I è una costante. Sulla seconda si ha:

$$\alpha_b - \nu_b = \alpha_a - \nu_a = -C_{II} \qquad \frac{dy}{dx} = tan(\alpha + \mu)$$

Le quantità $\alpha \pm \nu$ sono dette invarianti di Riemann.

Teoria delle caratteristiche

Georg Friedrich Bernhard Riemann (September 17, 1826 - July 20, 1866)

Teoria delle caratteristiche

Applicazione del metodo delle caratteristiche al sistema di equazioni:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\underline{\nabla}\cdot\underline{V} = 0 \qquad \rho\frac{D\underline{V}}{Dt} + \underline{\nabla}p = \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}_d \qquad \rho\frac{DE_t}{Dt} = \underline{\nabla}\cdot\left(\lambda\underline{\nabla}T + \underline{V}\cdot\underline{\underline{\tau}}_d - p\underline{V}\right)$$

Nelle ipotesi di moto stazionario e trascurabilità degli effetti dissipativi diventano:

$$\underline{\nabla}\cdot\left(\rho\underline{V}\right) = 0 \qquad \rho\frac{D\underline{V}}{Dt} + \underline{\nabla}p = 0 \qquad \rho\frac{D\left(e + \frac{V^2}{2}\right)}{Dt} = \underline{\nabla}\cdot\left(-p\underline{V}\right)$$

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto si può ricavare quella dell'energia cinetica che sottratta all'equazione di conservazione dell'energia totale da:

$$\rho\frac{D\underline{\underline{V}}^2}{Dt} + \underline{V}\cdot\underline{\nabla}p = 0 \qquad \rho\frac{De}{Dt} = \underline{\nabla}\cdot\left(-p\underline{V}\right) + \underline{V}\cdot\underline{\nabla}p = -p\underline{\nabla}\cdot\underline{V}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p\underline{\nabla}\cdot\underline{V} \qquad \underline{\nabla}\cdot\left(\rho\underline{V}\right) = 0 \qquad \rho\frac{D\underline{V}}{Dt} + \underline{\nabla}p = 0$$

L'energia interna può essere espressa in termini della pressione e della densità; dalla continuità si ha:

$$e = c_v T = \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} \qquad \frac{D\rho}{Dt} = -\rho\underline{\nabla}\cdot\underline{V} \rightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\rho\frac{De}{Dt} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\gamma-1}\frac{\gamma p}{\gamma\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{Dp}{Dt} - \frac{a^2}{(\gamma-1)\gamma}\frac{D\rho}{Dt} = -p\underline{\nabla}\cdot\underline{V}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{Dp}{Dt} - \frac{a^2}{(\gamma-1)\gamma}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\gamma p}{\gamma\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \frac{a^2}{\gamma}\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\frac{Dp}{Dt} = \frac{a^2}{\gamma}\left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right)\frac{D\rho}{Dt} = \frac{a^2}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = a^2\frac{D\rho}{Dt}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{V}\right) = 0 \qquad \rho \frac{D\underline{V}}{Dt} + \underline{\nabla} p = 0 \qquad \frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt}$$

In coordinate cartesiane ed in due dimensioni si ha:

$$u\rho_x + v\rho_y + \rho u_x + \rho v_y = 0$$
$$\rho u u_x + \rho v u_y + p_x = 0$$
$$\rho u v_x + \rho v v_y + p_y = 0$$
$$u p_x + v p_y - a^2 u \rho_x - a^2 v \rho_y = 0$$

Il metodo delle derivate indeterminate sarebbe di difficile applicazione perché dovremmo aggiungere altre 4 equazioni arrivando ad un sistema di otto equazioni quindi applicheremo il metodo delle combinazioni lineari (Metodo 2) e successivamente il terzo metodo.

Si procede quindi a moltiplicare la prima equazione per σ_1 la seconda per σ_2 e così via.

Teoria delle caratteristiche

$$u\rho_x + v\rho_y + \rho u_x + \rho v_y = 0$$
$$\rho u u_x + \rho v u_y + p_x = 0$$
$$\rho u v_x + \rho v v_y + p_y = 0$$
$$u p_x + v p_y - a^2 u \rho_x - a^2 v \rho_y = 0$$

Sommando si ottiene:

$$\sigma_1\left(u\rho_x + v\rho_y + \rho u_x + \rho v_y\right) + \sigma_2\left(\rho u u_x + \rho v u_y + p_x\right) +$$
$$\sigma_3\left(\rho u v_x + \rho v v_y + p_y\right) + \sigma_4\left(u p_x + v p_y - a^2 u \rho_x - a^2 v \rho_y\right) = 0$$

Raggruppando:

$$\left[\left(\rho\sigma_1 + \rho u \sigma_2\right)u_x + \rho v \sigma_2 u_y\right] + \left[\rho u \sigma_3 v_x + \left(\rho\sigma_1 + \rho v \sigma_3\right)v_y\right] +$$
$$\left[\left(u\sigma_1 - a^2 u \sigma_4\right)\rho_x + \left(v\sigma_1 - a^2 v \sigma_4\right)\rho_y\right] + \left[\left(\sigma_2 + u\sigma_4\right)p_x + \left(\sigma_3 + v\sigma_4\right)p_y\right] = 0$$

Teoria delle caratteristiche

$$\left[\left(\rho\sigma_1+\rho u\sigma_2\right)u_x+\rho v\sigma_2 u_y\right]+\left[\rho u\sigma_3 v_x+\left(\rho\sigma_1+\rho v\sigma_3\right)v_y\right]+$$

$$\left[\left(u\sigma_1-a^2u\sigma_4\right)\rho_x+\left(v\sigma_1-a^2v\sigma_4\right)\rho_y\right]+\left[\left(\sigma_2+u\sigma_4\right)p_x+\left(\sigma_3+v\sigma_4\right)p_y\right]=0$$

Da cui:

$$\left(\rho\sigma_1+\rho u\sigma_2\right)\left[u_x+\frac{\rho v\sigma_2}{\rho\sigma_1+\rho u\sigma_2}u_y\right]+\rho u\sigma_3\left[v_x+\frac{\rho\sigma_1+\rho v\sigma_3}{\rho u\sigma_3}v_y\right]+$$

$$\left(u\sigma_1-a^2u\sigma_4\right)\left[\rho_x+\frac{v\sigma_1-a^2v\sigma_4}{u\sigma_1-a^2u\sigma_4}\rho_y\right]+\left(\sigma_2+u\sigma_4\right)\left[p_x+\frac{\sigma_3+v\sigma_4}{\sigma_2+u\sigma_4}p_y\right]=0$$

Le equazioni delle curve caratteristiche si ricavano a partire dal sistema:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda=\frac{\rho v\sigma_2}{\rho\sigma_1+\rho u\sigma_2}=\frac{\rho\sigma_1+\rho v\sigma_3}{\rho u\sigma_3}=\frac{v\sigma_1-a^2v\sigma_4}{u\sigma_1-a^2u\sigma_4}=\frac{\sigma_3+v\sigma_4}{\sigma_2+u\sigma_4}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1\lambda+\left(u\lambda-v\right)\sigma_2=0\\
&\sigma_1+\left(v-u\lambda\right)\sigma_3=0\\
&\left(u\lambda-v\right)\sigma_1+\left(v-\lambda u\right)a^2\sigma_4=0\\
&\lambda\sigma_2-\sigma_3+\left(u\lambda-v\right)\sigma_4=0
\end{aligned}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\begin{aligned}
&\sigma_1\lambda+\left(u\lambda-v\right)\sigma_2=0\\
&\sigma_1+\left(v-u\lambda\right)\sigma_3=0\\
&\left(u\lambda-v\right)\sigma_1+\left(v-\lambda u\right)a^2\sigma_4=0\\
&\lambda\sigma_2-\sigma_3+\left(u\lambda-v\right)\sigma_4=0
\end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix}\lambda & \left(u\lambda-v\right) & 0 & 0\\ 1 & 0 & \left(v-u\lambda\right) & 0\\ \left(u\lambda-v\right) & 0 & 0 & \left(v-\lambda u\right)a^2\\ 0 & \lambda & -1 & \left(u\lambda-v\right)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{bmatrix}$$

Con $b=\left(u\lambda-v\right)$

$$\begin{bmatrix}\lambda & b & 0 & 0\\ 1 & 0 & -b & 0\\ b & 0 & 0 & -ba^2\\ 0 & \lambda & -1 & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{bmatrix}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\begin{bmatrix} \lambda & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 & -ba^2 \\ 0 & \lambda & -1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix}$$

$$b = (u\lambda - v)$$

Imponendo che il determinate sia nullo:

$$\lambda(b)(\lambda b a^2) - b[1(-ba^2) + b(b^2)] = \lambda^2 b^2 a^2 + b^2 a^2 - b^4 = 0$$

$$b^2(\lambda^2 a^2 + a^2 - b^2) = (u\lambda - v)^2(\lambda^2 a^2 + a^2 - (u\lambda - v)^2) = \qquad (9) \quad (\lambda^2 + 1)a^2 = b^2$$

$$= (u\lambda - v)^2(\lambda^2 a^2 + a^2 - (u^2\lambda^2 - 2uv\lambda + v^2)) =$$

$$= (u\lambda - v)^2((a^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (a^2 - v^2))$$

$$\lambda_{12} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{12} = \frac{v}{u} \qquad (u^2 - a^2)\lambda^2 - 2uv\lambda + (v^2 - a^2) = 0$$

$$\lambda_{34} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{34} = \frac{uv \pm \sqrt{u^2 v^2 - (u^2 - a^2)(v^2 - a^2)}}{u^2 - a^2}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\lambda_{12} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{12} = \frac{v}{u}$$

$$\lambda_{34} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{34} = \frac{uv \pm \sqrt{u^2 v^2 - (u^2 - a^2)(v^2 - a^2)}}{u^2 - a^2}$$

La prima soluzione è doppia e dice che le prime due caratteristiche sono coincidenti con le linee di corrente. Mentre le altre due soluzioni sono uguali a quelle già trovate. Dal sistema di equazioni per la prima soluzione si ha:

$$\sigma_1 \lambda + (u\lambda - v)\sigma_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 \frac{v}{u} + \underbrace{\left(u\frac{v}{u} - v\right)}_{=0}\sigma_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = 0$$

$$\sigma_1 + (v - u\lambda)\sigma_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 + \underbrace{\left(v - u\frac{v}{u}\right)}_{=0}\sigma_3 = 0$$

$$(u\lambda - v)\sigma_1 + (v - \lambda u)a^2\sigma_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\left(u\frac{v}{u} - v\right)}_{=0}\sigma_1 + \underbrace{\left(v - \frac{v}{u}u\right)}_{=0}a^2\sigma_4 = 0$$

$$\lambda\sigma_2 - \sigma_3 + (u\lambda - v)\sigma_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{v}{u}\sigma_2 - \sigma_3 + \underbrace{\left(u\frac{v}{u} - v\right)}_{=0}\sigma_4 = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_3 = \frac{v}{u}\sigma_2$$

Teoria delle caratteristiche

Quindi si ha che σ_2 e σ_4 possono essere scelte arbitrariamente mentre:

$$\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{v}{u}\sigma_2$$

La seguente relazione sulla curva caratteristica diventa:

$$(\rho\sigma_1 + \rho u\sigma_2)\left[u_x + \frac{\rho v\sigma_2}{\rho\sigma_1 + \rho u\sigma_2}u_y\right] + \rho u\sigma_3\left[v_x + \frac{\rho\sigma_1 + \rho v\sigma_3}{\rho u\sigma_3}v_y\right] +$$

$$+\left(u\sigma_1 - a^2u\sigma_4\right)\left[\rho_x + \frac{v\sigma_1 - a^2v\sigma_4}{u\sigma_1 - a^2u\sigma_4}\rho_y\right] + (\sigma_2 + u\sigma_4)\left[p_x + \frac{\sigma_3 + v\sigma_4}{\sigma_2 + u\sigma_4}p_y\right] = 0$$

$$(\cancel{\rho\sigma_1} + \rho u\sigma_2)du + \rho u\sigma_3 dv + (\cancel{u\sigma_1} - a^2u\sigma_4)d\rho + (\sigma_2 + u\sigma_4)dp = 0$$

Con le posizioni precedenti si ha:

$$\rho u\sigma_2 du + \rho u\frac{v}{u}\sigma_2 dv - a^2u\sigma_4 d\rho + (\sigma_2 + u\sigma_4)dp = 0$$

Raggruppando:

$$\sigma_2(\rho udu + \rho vdv + dp) + \left(-a^2ud\rho + udp\right)\sigma_4 = 0$$

Teoria delle caratteristiche

$$\sigma_2(\rho udu + \rho vdv + dp) + \left(-a^2ud\rho + udp\right)\sigma_4 = 0$$

Imponendo σ_2=0 si ha lungo una linea di corrente:

$$\left(-a^2ud\rho + udp\right)\sigma_4 = 0 \rightarrow -a^2d\rho + dp = 0 \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = a^2 \rightarrow s = cost$$

Imponendo σ_4=0 si ha lungo una linea di corrente:

$$\sigma_2(\rho udu + \rho vdv + dp) = 0 \rightarrow \rho udu + \rho vdv + dp = \rho\frac{du^2}{2} + \rho\frac{dv^2}{2} + dp = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho\frac{dV^2}{2} + dp = \rho VdV + dp = 0$$

Teoria delle caratteristiche

Per le altre due curve caratteristiche si ha:

$$b=(u\lambda - v)$$

$$\lambda_{34}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{34}=\frac{uv\pm\sqrt{u^2v^2-(u^2-a^2)(v^2-a^2)}}{u^2-a^2} \qquad (9)\quad (\lambda^2+1)a^2=b^2$$

$$\sigma_1\lambda+(u\lambda-v)\sigma_2=0 \quad\rightarrow\quad \sigma_1\lambda+b\sigma_2=0 \quad\rightarrow\quad \sigma_2=-\lambda\sigma_3$$

$$\sigma_1+(v-u\lambda)\sigma_3=0 \quad\rightarrow\quad \sigma_1-b\sigma_3=0 \quad\rightarrow\quad \sigma_1=b\sigma_3$$

$$(u\lambda-v)\sigma_1+(v-\lambda u)a^2\sigma_4=0 \quad\rightarrow\quad b\sigma_1-ba^2\sigma_4=0 \quad\rightarrow\quad \sigma_4=\frac{b}{a^2}\sigma_3$$

$$\lambda\sigma_2-\sigma_3+(u\lambda-v)\sigma_4=0 \quad\rightarrow\quad \lambda\sigma_2-\sigma_3+b\sigma_4=0 \quad\rightarrow\quad \lambda(-\lambda)-1+b\frac{b}{a^2}=0$$

Sostituendo nella:

$$(\rho\sigma_1+\rho u\sigma_2)du+\rho u\sigma_3 dv+(u\sigma_1-a^2u\sigma_4)d\rho+(\sigma_2+u\sigma_4)dp=0$$

Si ha:

$$(\rho b-\rho u\lambda)du+\rho u dv+\left(ub-a^2u\frac{b}{a^2}\right)d\rho+\left(-\lambda+u\frac{b}{a^2}\right)dp=0$$

$$(\rho(u\lambda-v)-\rho u\lambda)du+\rho u dv+(ub-ub)d\rho+\left(-\lambda+u\frac{b}{a^2}\right)dp=0$$

Teoria delle caratteristiche

$$(\rho(\cancel{u\lambda}-v)-\cancel{\rho u\lambda})du+\rho u dv+\underbrace{(ub-ub)}_{=0}d\rho+\left(-\lambda+u\frac{b}{a^2}\right)dp=0$$

$$-\rho v du+\rho u dv+\left(-\lambda+u\frac{b}{a^2}\right)dp=0 \qquad \rho u du+\rho v dv+dp=0$$

$$(9)\quad (\lambda^2+1)a^2=b^2$$

$$-\rho v du+\rho u dv-\left(-\lambda+u\frac{b}{a^2}\right)(\rho u du+\rho v dv)=0$$

$$\frac{b}{a^2}=\frac{(\lambda^2+1)}{b}$$

$$du\left(-v+\left(\lambda-u\frac{b}{a^2}\right)u\right)+dv\left(u+\left(\lambda-u\frac{b}{a^2}\right)v\right)=0 \qquad b=(u\lambda-v)$$

$$b+v=u\lambda$$

$$du\left(-v+u\lambda-u^2\frac{(\lambda^2+1)}{b}\right)+dv\left(u+\lambda v-\frac{b+v}{\lambda}v\frac{(\lambda^2+1)}{b}\right)=0$$

$$\frac{b+v}{\lambda}=u$$

$$du\left(\frac{b^2-u^2(\lambda^2+1)}{b}\right)+dv\left(\frac{u\lambda b+\cancel{\lambda^2 bv}-\cancel{bv\lambda^2}-bv-v^2\lambda^2-v^2}{\lambda b}\right)=0$$

$$du\left(\frac{(a^2-u^2)(\lambda^2+1)}{b}\right)+dv\left(\frac{(u\lambda-v)b-v^2(\lambda^2+1)}{\lambda b}\right)=0$$

Teoria delle caratteristiche

$$du\left(\frac{\left(a^2-u^2\right)\left(\lambda^2+1\right)}{b}\right)+dv\left(\frac{(u\lambda-v)b-v^2\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda b}\right)=0$$

$$du\left(\frac{\left(a^2-u^2\right)\left(\lambda^2+1\right)}{b}\right)+dv\left(\frac{b^2-v^2\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda b}\right)=0$$

$$du\left(\frac{\left(a^2-u^2\right)\left(\lambda^2+1\right)}{b}\right)+dv\left(\frac{\left(a^2-v^2\right)\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda b}\right)=0$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{\lambda\left(a^2-u^2\right)}{v^2-a^2}=\frac{-uv\mp\sqrt{u^2v^2-\left(u^2-a^2\right)\left(v^2-a^2\right)}}{v^2-a^2}$$

$$b=(u\lambda-v)$$

$$b+v=u\lambda$$

Avendo utilizzato la relazione:

$$(9)\quad \left(\lambda^2+1\right)a^2=b^2$$

$$\lambda_{34}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{34}=\frac{uv\pm\sqrt{u^2v^2-\left(u^2-a^2\right)\left(v^2-a^2\right)}}{u^2-a^2}$$

Teoria delle caratteristiche

Metodo 3 - Analisi degli autovalori

Analizziamo il problema con il modulo di calcolo simbolico di matlab. Le equazioni sono:

$$\underline{\underline{A}}\frac{\partial \underline{w}}{\partial x}+\underline{\underline{B}}\frac{\partial \underline{w}}{\partial y}=0 \qquad \underline{w}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\0 & 1\end{bmatrix}\quad \underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}c_2 & c_3\\-1 & 0\end{bmatrix}\quad \underline{\underline{A}}^{-1}=\frac{1}{c_1}\begin{bmatrix}1 & -c_2\\0 & c_1\end{bmatrix}$$

Con

$$c_1=a^2-u^2\quad c_2=-uv\quad c_3=a^2-v^2\quad c_4=0$$

Si ha:

$$\underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix}a^2-u^2 & -uv\\0 & 1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}-uv & a^2-v^2\\-1 & 0\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{A}}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{a^2-u^2} & \dfrac{uv}{a^2-u^2}\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{\underline{B}}=\begin{bmatrix}2\dfrac{-uv}{a^2-u^2} & \dfrac{a^2-v^2}{a^2-u^2}\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

Teoria delle caratteristiche

```
clear all
syms rho u v p U V P R W a A B x y  s
U=sym ('U(s)');V=sym ('V(s)');P=sym ('P(s)');R=sym ('R(s)');
W=[  U   ; V];
A=[a*a-u*u -u*v
   0 1];

B=[-u*v a*a-v*v
   -1 0];
Testo=['$' latex(simple(A^-1) )  '$' ];
clf;text(.05,.5,Testo,'Interpreter','latex','FontSize',35);
```

$$\left[\begin{array}{cc} \left(a^2-u^2\right)^{-1} & \frac{uv}{a^2-u^2} \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a^2-u^2} & \dfrac{uv}{a^2-u^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teoria delle caratteristiche

```
clear all
syms rho u v p U V P R W a A B x y  s
U=sym ('U(s)');V=sym ('V(s)');P=sym ('P(s)');R=sym ('R(s)');
W=[  U   ; V];
A=[a*a-u*u -u*v
   0 1];

B=[-u*v a*a-v*v
   -1 0];
C=simple(A^-1*B);

Testo=['$' latex(simple(C) ) '$' ];
clf;text(.05,.5,Testo,'Interpreter','latex','FontSize',35);
```

$$\left[\begin{array}{cc} 2\,\frac{uv}{-a^2+u^2} & \frac{-a^2+v^2}{-a^2+u^2} \\ -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 2\dfrac{-uv}{a^2-u^2} & \dfrac{a^2-v^2}{a^2-u^2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teoria delle caratteristiche

```
clear all
syms rho u v p U V P R W a A B x y  s
U=sym ('U(s)');V=sym ('V(s)');P=sym ('P(s)');R=sym ('R(s)');
W=[  U   ; V];
A=[a*a-u*u -u*v
   0 1];

B=[-u*v a*a-v*v
   -1 0];
C=simple(A^-1*B);
[R,E] = eig(C);
lambda =simple(diag(E ));
L=simple(R^-1); % auto vettori sinistri
Testo=[ '$' latex(simple(lambda))  '$' ];
Testo=[ '$' latex(simple(L)) '$' ];
Testo=[ '$' latex(simple(L(1,2)/L(1,1)))  '$' ];
clf;text(.05,.5,Testo,'Interpreter','latex','FontSize',30);
```


Teoria delle caratteristiche

```
Testo=[ '$' latex(simple(lambda))  '$' ];
```

$$\left[\begin{array}{c} \frac{uv+a\sqrt{-a^2+v^2+u^2}}{-a^2+u^2} \\ \frac{uv-a\sqrt{-a^2+v^2+u^2}}{-a^2+u^2} \end{array}\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-uv\pm\sqrt{a^2\left(u^2+v^2\right)-a^4}}{a^2-u^2}$$

```
Testo=[ '$' latex(simple(L)) '$' ];
```

$$d\underline{\Gamma}=\underline{\underline{X}}^{-1}d\underline{w}$$

$$\left[\begin{array}{cc} -1/2\,\frac{-a^2+u^2}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}} & -1/2\,\frac{uv}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}}+1/2 \\ 1/2\,\frac{-a^2+u^2}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}} & 1/2\,\frac{uv}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}}+1/2 \end{array}\right]$$

```
Testo=[ '$' latex(simple(L(1,2)/L(1,1)))  '$' ];
```

$$d\Gamma_i=\left[l_{i1}\quad l_{i2}\right]\cdot\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}=0$$

$$\frac{a^2-u^2}{uv+a\sqrt{-a^2+v^2+u^2}}$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{uv}{a^2}\mp\sqrt{M^2-1}}{1-\frac{v^2}{a^2}}=\frac{a^2-u^2}{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}$$

Teoria delle caratteristiche

Metodo 3 - Analisi degli autovalori

$$\rho u u_x + \rho v u_y + p_x = 0$$

$$\rho u v_x + \rho v v_y + p_y = 0$$

$$u p_x + v p_y - a^2 u \rho_x - a^2 v \rho_y = 0$$

$$u \rho_x + v \rho_y + \rho u_x + \rho v_y = 0$$

$$\underline{\underline{A}} \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{\underline{B}} \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = 0$$

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} u\rho & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & -ua^2 \\ \rho & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \rho v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v & -va^2 \\ 0 & \rho & 0 & v \end{bmatrix}$$

Teoria delle caratteristiche

```
clear all
syms rho u v p U V P R W a A B x y  s
U=sym ('U(s)');V=sym ('V(s)');P=sym ('P(s)');R=sym ('R(s)');
W=[ U   ; V;   P  ; R];
A=[   rho*u 0 1 0; 0 rho*u 0 0; 0 0 u -u*a*a; rho 0 0 u ];
B=[ rho*v 0 0 0;  0 rho*v 1 0; 0 0  v -v*a*a; 0 rho 0 v];
C=simple(A^-1*B);
[R,E] = eig(C);
lambda =simple(diag(E ));
L=simple(R^-1); % auto vettori sinistri
```

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} u\rho & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & -ua^2 \\ \rho & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \rho v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v & -va^2 \\ 0 & \rho & 0 & v \end{bmatrix}$$

Teoria delle caratteristiche

```
Testo=['$' latex(simple(lambda)) '$' ];
```

$$\left[\begin{array}{c} \frac{v}{u} \\ \frac{v}{u} \\ \frac{uv+a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{u^2-a^2} \\ \frac{uv-a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{u^2-a^2} \end{array}\right]$$

$$\lambda_{12} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{12} = \frac{v}{u}$$

$$\lambda_{34} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{34} = \frac{uv \pm \sqrt{u^2v^2 - (u^2-a^2)(v^2-a^2)}}{u^2-a^2}$$

```
Testo=['$' latex(simple(L)) '$' ];
```

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{uv}{u^2+v^2} & \frac{v^2}{u^2+v^2} & \frac{v}{\rho\,(u^2+v^2)} & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-2} & 1 \\ -1/2\,\frac{\rho\,v}{a\sqrt{u^2+v^2-a^2}} & 1/2\,\frac{u\rho}{a\sqrt{u^2+v^2-a^2}} & 1/2\,a^{-2} & 0 \\ 1/2\,\frac{\rho\,v}{a\sqrt{u^2+v^2-a^2}} & -1/2\,\frac{u\rho}{a\sqrt{u^2+v^2-a^2}} & 1/2\,a^{-2} & 0 \end{array}\right]$$

Teoria delle caratteristiche

```
Testo=['$' latex(lambda) latex(simple(L*diff(W,s))) '$' ];
clf;text(.05,.5,Testo,'Interpreter','latex','FontSize',15);
```

$$\left[\begin{array}{c} \frac{v\left(u\left(\frac{d}{ds}U(s)\right)\rho+v\left(\frac{d}{ds}V(s)\right)\rho+\frac{d}{ds}P(s)\right)}{\rho\,(u^2+v^2)} \\ \frac{-\frac{d}{ds}P(s)+\left(\frac{d}{ds}R(s)\right)a^2}{a^2} \\ 1/2\,\frac{-\rho\,v\left(\frac{d}{ds}U(s)\right)a+u\rho\,\left(\frac{d}{ds}V(s)\right)a+\left(\frac{d}{ds}P(s)\right)\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{a^2\sqrt{u^2+v^2-a^2}} \\ -1/2\,\frac{-\rho\,v\left(\frac{d}{ds}U(s)\right)a+u\rho\,\left(\frac{d}{ds}V(s)\right)a-\left(\frac{d}{ds}P(s)\right)\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{a^2\sqrt{u^2+v^2-a^2}} \end{array}\right]$$

Teoria delle caratteristiche

$$
\begin{array}{l}
(1) \\[2em]
(2) \\[2em]
(3) \\[2em]
(4)
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix}
\dfrac{v\left(u\left(\frac{d}{ds}U(s)\right)\rho+v\left(\frac{d}{ds}V(s)\right)\rho+\frac{d}{ds}P(s)\right)}{\rho\,(u^2+v^2)} \\
\dfrac{-\frac{d}{ds}P(s)+\left(\frac{d}{ds}R(s)\right)a^2}{a^2} \\
1/2\,\dfrac{-\rho\,v\left(\frac{d}{ds}U(s)\right)a+u\rho\left(\frac{d}{ds}V(s)\right)a+\left(\frac{d}{ds}P(s)\right)\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{a^2\sqrt{u^2+v^2-a^2}} \\
-1/2\,\dfrac{-\rho\,v\left(\frac{d}{ds}U(s)\right)a+u\rho\left(\frac{d}{ds}V(s)\right)a-\left(\frac{d}{ds}P(s)\right)\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{a^2\sqrt{u^2+v^2-a^2}}
\end{bmatrix}
$$

$$(1)\quad \rho udu+\rho vdv+dp=0\rightarrow dp=-\rho VdV$$

$$(2)\quad dp=a^2d\rho$$

$$(3)\quad -\rho vdu+\rho udv+\sqrt{\frac{u^2+v^2-a^2}{a^2}}dp=-\rho vdu+\rho udv+\sqrt{M^2-1}dp=0$$

$$(4)\quad +\rho vdu-\rho udv+\sqrt{M^2-1}dp=0$$

Teoria delle caratteristiche

$$b=(u\lambda-v)$$

Con il secondo metodo si era trovato:

$$\lambda_{34}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{34}=\frac{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}{u^2-a^2}$$

$$-\rho vdu+\rho udv+\left(-\lambda+u\frac{b}{a^2}\right)dp=0$$

$$\left(-\lambda+u\frac{b}{a^2}\right)=\frac{-\lambda a^2+\lambda u^2-vu}{a^2}=\lambda\frac{u^2-a^2}{a^2}-\frac{vu}{a^2}=\frac{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}{(u^2-a^2)}\frac{u^2-a^2}{a^2}-\frac{vu}{a^2}=$$

$$=\frac{uv\pm a^2\sqrt{M^2-1}}{a^2}-\frac{vu}{a^2}=\pm\sqrt{M^2-1}$$

Che è equivalente alle (3) e (4).

$$(3)\quad -\rho vdu+\rho udv+\sqrt{\frac{u^2+v^2-a^2}{a^2}}dp=-\rho vdu+\rho udv+\sqrt{M^2-1}dp=0$$

$$(4)\quad +\rho vdu-\rho udv+\sqrt{M^2-1}dp=0$$