

Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it

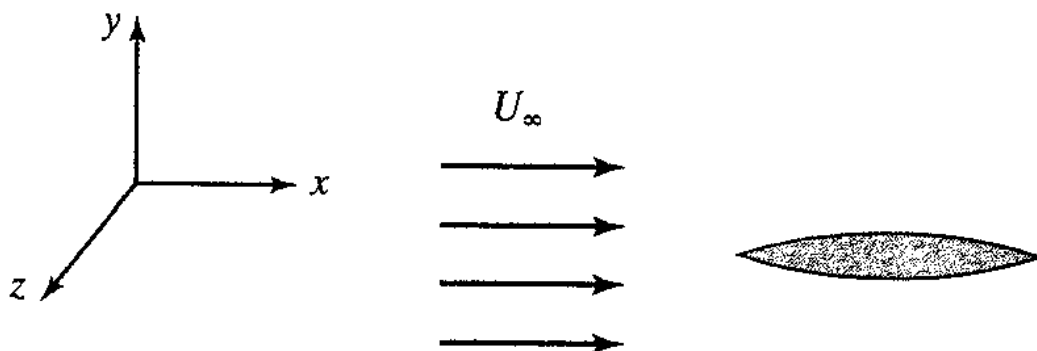


Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 9 del 20.11.14

Linearizzazione delle equazioni

L'equazione del potenziale ed, evidentemente anche le equazioni di Eulero sono non lineari e, quindi, di difficile soluzione analitica. Per semplificare il problema negli anni 40 e 50 è stata sviluppata estensivamente la tecnica di linearizzare le equazioni.

Nell'ipotesi che il moto sia stazionario bidimensionale e che il corpo immerso nel fluido sia sottile si può supporre che esso provochi solo piccoli disturbi rispetto ad una soluzione banale (moto uniforme).



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Linearizzazione delle equazioni

$$\varphi_x = u_\infty + u' \quad \varphi_y = v'$$

Dalla equazione:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \frac{1}{a^2} (\varphi_x^2 \varphi_{xx} + \varphi_y^2 \varphi_{yy}) - \frac{2}{a^2} (\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy}) = 0$$

Si ha:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \frac{1}{a^2} ((u_\infty + u')^2 \varphi_{xx} + v'^2 \varphi_{yy}) - \frac{2}{a^2} ((u_\infty + u')v' \varphi_{xy}) = 0$$

$$a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) - ((u_\infty + u')^2 \varphi_{xx} + v'^2 \varphi_{yy}) - 2(u_\infty + u')v' \varphi_{xy} = 0$$

Ricordando che:

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}((u_\infty + u')^2 + v'^2) = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(u_\infty^2 + 2u_\infty u' + u'^2 + v'^2)$$

$$a_0^2 = a_\infty^2 + \frac{\gamma-1}{2}u_\infty^2$$

Si ha: $a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(2u_\infty u' + u'^2 + v'^2)$

$$(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \left(a_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(2u_\infty u' + u'^2 + v'^2) \right) = (u_\infty + u')^2 \varphi_{xx} + v'^2 \varphi_{yy} + 2(u_\infty + u')v' \varphi_{xy}$$



Linearizzazione delle equazioni

$$(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \left(a_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(2u_\infty u' + u'^2 + v'^2) \right) = (u_\infty + u')^2 \varphi_{xx} + v'^2 \varphi_{yy} + 2(u_\infty + u')v' \varphi_{xy}$$

$$(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \left(a_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{2}(2u_\infty u' + u'^2 + v'^2) \right) = (u_\infty^2 + 2u_\infty u' + u'^2) \varphi_{xx} + v'^2 \varphi_{yy} + 2(u_\infty + u')v' \varphi_{xy}$$

Dividendo per a_∞^2 e raggruppando:

$$(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u'}{u_\infty} + \frac{u'^2}{u_\infty^2} + \frac{v'^2}{u_\infty^2} \right) \right) =$$

$$= M_\infty^2 \left(1 + 2 \frac{u'}{u_\infty} + \frac{u'^2}{u_\infty^2} \right) \varphi_{xx} + M_\infty^2 \frac{v'^2}{u_\infty^2} \varphi_{yy} + 2M_\infty^2 \left(\frac{v'}{u_\infty} + \frac{u'v'}{u_\infty^2} \right) \varphi_{xy}$$

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u'}{u_\infty} + \frac{u'^2}{u_\infty^2} + \frac{v'^2}{u_\infty^2} \right) (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) +$$

$$+ M_\infty^2 \left(2 \frac{u'}{u_\infty} + \frac{u'^2}{u_\infty^2} \right) \varphi_{xx} + M_\infty^2 \frac{v'^2}{u_\infty^2} \varphi_{yy} + 2M_\infty^2 \left(\frac{v'}{u_\infty} + \frac{u'v'}{u_\infty^2} \right) \varphi_{xy}$$

Che è un'equazione esatta.



Linearizzazione delle equazioni

Supponendo che $u'^2 \ll u_\infty^2$ $v'^2 \ll u_\infty^2$ ma conservando termini del tipo $M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty}$ si ha:

$$\begin{aligned} (1-M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(2 \frac{u'}{u_\infty} + \cancel{\frac{u'^2}{u_\infty^2}} + \cancel{\frac{v'^2}{u_\infty^2}} \right) (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \\ &+ M_\infty^2 \left(2 \frac{u'}{u_\infty} + \cancel{\frac{u'^2}{u_\infty^2}} \right) \varphi_{xx} + \cancel{M_\infty^2 \frac{v'^2}{u_\infty^2} \varphi_{yy}} + 2 M_\infty^2 \left(\frac{v'}{u_\infty} + \cancel{\frac{u'v'}{u_\infty^2}} \right) \varphi_{xy} \\ (1-M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \frac{2u'}{u_\infty} (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + M_\infty^2 \frac{2u'}{u_\infty} \varphi_{xx} + 2 M_\infty^2 \frac{v'}{u_\infty} \varphi_{xy} \\ (1-M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= (\gamma+1) M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \varphi_{xx} + (\gamma-1) M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \varphi_{yy} + 2 M_\infty^2 \frac{v'}{u_\infty} \varphi_{xy} \end{aligned}$$

Questa equazione è ancora non lineare.



Linearizzazione delle equazioni

$$(1-M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (\gamma+1) M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \varphi_{xx} + (\gamma-1) M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \varphi_{yy} + 2 M_\infty^2 \frac{v'}{u_\infty} \varphi_{xy}$$

Se ipotizziamo che il moto **non** sia **ipersonico**: $M_\infty^2 \cong 1$ ($M_\infty < 5$)

Termini del tipo $M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty}$ risultano trascurabili rispetto all'unità. Quindi se $(1-M_\infty^2)$ è di ordine unitario (moti **non transonici**) l'equazione del potenziale diventa:

$$(1-M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \begin{cases} \text{Moti subsonici} \\ \text{Moti supersonici} \end{cases}$$

Per moti **transonici** si può supporre che $(1-M_\infty^2)$ sia dello stesso ordine di grandezza di $M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty}$ quindi l'equazione del potenziale diventa:

$$(1-M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (\gamma+1) M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \varphi_{xx} \quad \{ M_\infty^2 \cong 1 \quad (M_\infty < 5) \}$$



Linearizzazione delle equazioni

In tre dimensioni si possono fare ragionamenti analoghi ottenendo per moto **non** transonico:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad \begin{cases} \text{Moti subsonici} \\ \text{Moti supersonici} \end{cases}$$

Mentre per moto anche **transonico** si ha:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = (\gamma + 1) M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \varphi_{xx} \quad \{ M_\infty^2 \cong 1 \quad (M_\infty < 5) \}$$



Linearizzazione delle equazioni

Definendo $\varphi = \varphi' + u_\infty x$ si ha $u' = \varphi'_x$ $v' = \varphi'_y$ come già visto per moti subsonici o supersonici l'equazione del potenziale è:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = 0$$

La condizione al contorno sul corpo è:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{Corpo}} = \frac{v'}{u_\infty + u'} \xrightarrow{\frac{u'}{u_\infty} \ll 1} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{Corpo}} = \frac{v'(x, y)_{\text{Corpo}}}{u_\infty}$$

Poiché il corpo è sottile si può sviluppare in serie la componente v' :

$$v'(x, y)_{\text{Corpo}} = v'(x, 0) + \frac{\partial v'(x, 0)}{\partial y} y_{\text{Corpo}}$$

Trascurando il secondo termine si ha:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{Corpo}} = \frac{v'(x, 0)}{u_\infty}$$



Linearizzazione delle equazioni

La condizione all'infinito è semplicemente che le perturbazioni della velocità siano nulle o al più finite.

$$r \rightarrow \infty \quad \begin{cases} u' = v' = 0 \\ u', v' \text{ finiti} \end{cases}$$



Coefficiente di pressione

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2} = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{1}{2} \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty} u_\infty^2} = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2}$$

Per moti omotermici ed isentropici si ha:

$$c_p T_\infty + \frac{u_\infty^2}{2} = c_p T + \frac{(u_\infty + u')^2 + v'^2}{2}$$

$$T_\infty - T = \frac{2u'u_\infty + u'^2 + v'^2}{2c_p}$$

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{u_\infty^2}{2c_p T_\infty} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right) = 1 - M_\infty^2 \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right)$$



Coefficiente di pressione

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - M_\infty^2 \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right)$$

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Utilizzando lo sviluppo in serie: $(1+x)^m \cong 1+mx$

$$\frac{p}{p_\infty} = \left[1 - M_\infty^2 \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cong 1 - M_\infty^2 \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right) \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

$$\frac{p}{p_\infty} \cong 1 - M_\infty^2 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right)$$

$$C_p = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2}$$

$$C_p = - \frac{M_\infty^2 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right)}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2} = - \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right)$$

Che nelle ipotesi fatte diventa: (1) $C_p = -\frac{2u'}{u_\infty}$

Come già visto per la condizione al contorno sul corpo si può supporre:



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

$$C_p = -\frac{2u'(x,0)}{u_\infty}$$

11

Moto subsonico su parete sinusoidale

Si supponga che la superficie del corpo sia data dall'equazione:

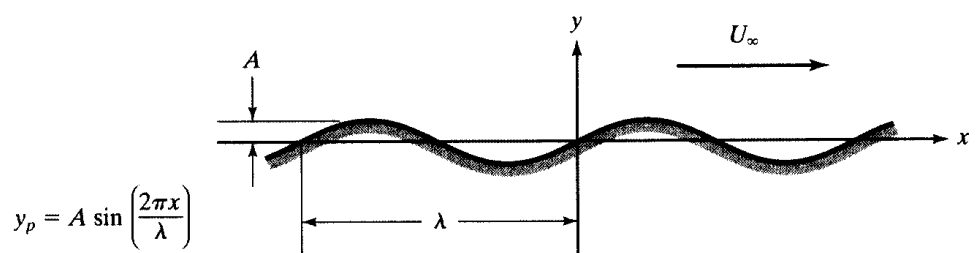
$$y|_{\text{Corpo}} = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad A \ll \lambda$$

L'ipotesi aggiuntiva serve per assicurare che l'ipotesi dei piccoli disturbi sia verificata. Le condizioni al contorno sono:

$$v'(x,0) = u_\infty \frac{dy}{dx} \Big|_{\text{Corpo}} = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad y \rightarrow \infty \quad u', v' \text{ finiti}$$

Si risolve l'equazione del potenziale per separazione di variabili:

$$(1 - M_\infty^2) \phi'_{xx} + \phi'_{yy} = 0$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

12

Moto subsonico su parete sinusoidale

Supponendo che $\varphi' = X(x)Y(y)$ e sostituendo nella $(1-M_\infty^2)\varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = 0$ si ha:
 $(1-M_\infty^2)X''Y + XY'' = 0$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{1}{1-M_\infty^2} \frac{Y''}{Y} = -k^2$$

Affinché si possano separare le variabili sia il primo membro che il secondo devono essere costanti. Si è scelto il valore della costante pari a k^2 .

$$X'' + k^2 X = 0$$

$$Y'' - (1-M_\infty^2)k^2 Y = 0$$

La soluzione generale di queste equazioni differenziali è nella forma di esponenziali (in generale complessi):

$$X = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$$

$$Y = c_3 e^{\sqrt{1-M_\infty^2}ky} + c_4 e^{-\sqrt{1-M_\infty^2}ky}$$

$$\varphi' = (c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)) \left(c_3 e^{\sqrt{1-M_\infty^2}ky} + c_4 e^{-\sqrt{1-M_\infty^2}ky} \right)$$



Moto subsonico su parete sinusoidale

$$\varphi' = (c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)) \left(c_3 e^{\sqrt{1-M_\infty^2}ky} + c_4 e^{-\sqrt{1-M_\infty^2}ky} \right)$$

Chiaramente le costanti si devono ricavare dalle condizioni al contorno. Per avere valori finiti dei disturbi all'infinito si vede subito che è necessario che c_3 sia nulla. Mentre sulla parete si ha:

$$v'(x,0) = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \varphi'_y(x,0) = (c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)) \left(-c_4 \sqrt{1-M_\infty^2} k \right)$$

Dal confronto si vede immediatamente che c_2 deve essere identicamente nulla. Inoltre:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$c_1 c_4 \sqrt{1-M_\infty^2} k = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow c_1 c_4 = -\frac{u_\infty A}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

Da cui:
$$\varphi' = -\frac{u_\infty A}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_\infty^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$



Moto subsonico su parete sinusoidale

$$\phi' = -\frac{u_{\infty} A}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_{\infty}^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$

Come ci si aspetta l'ampiezza delle perturbazioni diminuisce allontanandosi dal corpo. Il coefficiente di pressione può essere ricavato immediatamente dalla (1)

$$(1) \quad C_p = -\frac{2u'}{u_{\infty}}$$

$$C_p = -\frac{2\phi'_x|_{y=0}}{u_{\infty}} = -\frac{2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{u_{\infty} A}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_{\infty}^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}\right)\bigg|_{y=0}}{u_{\infty}} =$$

$$= -\frac{4\pi A}{\lambda \sqrt{1-M_{\infty}^2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$



Moto subsonico su parete sinusoidale

$$\phi' = -\frac{u_{\infty} A}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_{\infty}^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$

$$C_p = -\frac{4\pi A}{\lambda \sqrt{1-M_{\infty}^2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$u' = \frac{2\pi u_{\infty} A}{\lambda \sqrt{1-M_{\infty}^2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_{\infty}^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$

$$v' = \frac{2\pi u_{\infty} A}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_{\infty}^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$

- I disturbi si attenuano allontanandosi dalla parete ma l'attenuazione diminuisce al crescere del numero di Mach;
- Il coefficiente di pressione è in contro fase con la parete solida quindi la resistenza è nulla;
- Il coefficiente di pressione ed u' aumentano all'aumentare di M_{∞} .

$$y|_{\text{Corpo}} = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad A \ll \lambda$$

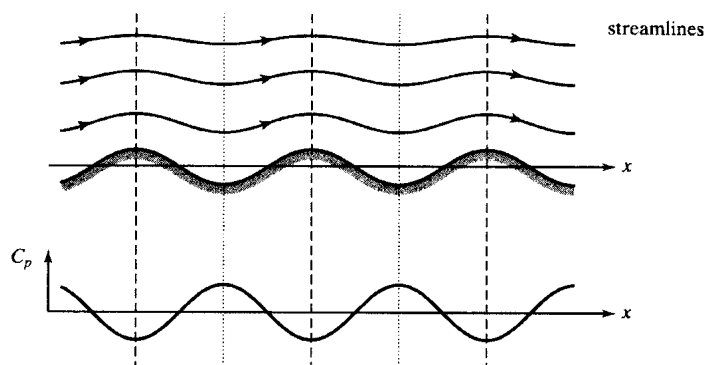


Figure 13.4 Subsonic Flow Streamlines and Pressure Variation along a Wavy Wall



Moto subsonico su parete sinusoidale

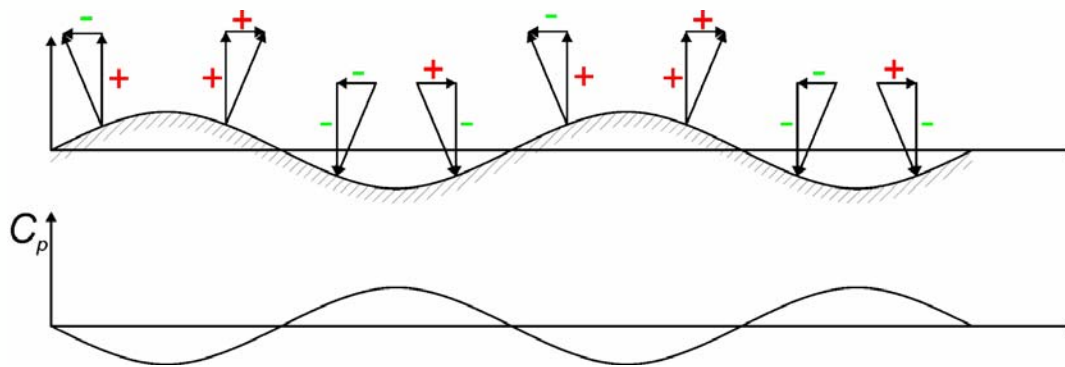
$$\varphi' = -\frac{u_\infty A}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_\infty^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$

$$C_p = -\frac{4\pi A}{\lambda \sqrt{1-M_\infty^2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$u' = \frac{2\pi u_\infty A}{\lambda \sqrt{1-M_\infty^2}} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_\infty^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$

$$v' = \frac{2\pi u_\infty A}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_\infty^2} \frac{2\pi y}{\lambda}}$$

$$y|_{\text{Corpo}} = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad A \ll \lambda$$



Moto subsonico su parete sinusoidale

Si vogliono determinare le linee di corrente. Introducendo la funzione di corrente in regime compressibile come:

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho} \psi_y \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \psi_x$$

Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a y si ha:

$$(\rho u)_x = \rho_\infty \psi_{xy} \quad (\rho v)_y = -\rho_\infty \psi_{xy}$$

Quindi con questa posizione l'equazione di continuità è identicamente soddisfatta. Introducendo i parametri β e k si ha:

$$\beta = \sqrt{1-M_\infty^2} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\varphi' = -\frac{u_\infty A}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-\sqrt{1-M_\infty^2} \frac{2\pi y}{\lambda}} = -\frac{u_\infty A}{\beta} \cos(kx) e^{-\beta ky}$$

$$u' = \frac{u_\infty A}{\beta} k \sin(kx) e^{-\beta ky}$$

$$v' = u_\infty A k \cos(kx) e^{-\beta ky}$$



Moto subsonico su parete sinusoidale

Si è già visto che:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - M_\infty^2 \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right)$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho} \psi_y \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \psi_x$$

$$u' = \frac{u_\infty A}{\beta} k \sin(kx) e^{-\beta ky}$$

Quindi sviluppando in serie si ha:

$$v' = u_\infty A k \cos(kx) e^{-\beta ky}$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(1 - M_\infty^2 \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cong 1 - M_\infty^2 \frac{1}{2} \left(\frac{2u'}{u_\infty} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_\infty^2} \right) \cong 1 - M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty}$$

Sostituendo questa relazione nella definizione della funzione di corrente si ha:

$$\psi_y = \left(1 - M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \right) (u_\infty + u') \cong u_\infty + u' - M_\infty^2 u' = u_\infty + u' (1 - M_\infty^2) =$$

$$= u_\infty + (1 - M_\infty^2) \frac{u_\infty A}{\beta} k \sin(kx) e^{-\beta ky} = u_\infty + \beta u_\infty A k \sin(kx) e^{-\beta ky}$$



Moto subsonico su parete sinusoidale

$$\psi_y = u_\infty + \beta u_\infty A k \sin(kx) e^{-\beta ky}$$

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho} \psi_y \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \psi_x$$

Integrando questa relazione e poi derivandola rispetto a x si ha:

$$\psi = u_\infty y - u_\infty A \sin(kx) e^{-\beta ky} + f(x)$$

$$v' = u_\infty A k \cos(kx) e^{-\beta ky}$$

$$\psi_x = -u_\infty A k \cos(kx) e^{-\beta ky} + f'(x) = -\frac{\rho}{\rho_\infty} v' = -\left(1 - M_\infty^2 \frac{u'}{u_\infty} \right) u_\infty A k \cos(kx) e^{-\beta ky}$$

Da cui si ricava: $f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = C$

Imponendo che la costante sia nulla si ha:

$$\psi = u_\infty y - u_\infty A \sin(kx) e^{-\beta ky}$$

Le linee di corrente possono essere determinate imponendo che ψ sia costante.



Leggi di similitudine subsonica

L'idea è di estendere i risultati (teorici e/o sperimentali) ricavati in regime incompressibile anche al regime compressibile. Per fare questo si confrontano le equazioni e le condizioni al contorno per due valori diversi del numero di Mach definiti dai pedici 1 e 2. Per il primo valore di M si deve risolvere l'equazione:

$$(1 - M_1^2) \phi'_{1xx} + \phi'_{1yy} = 0$$

Con la condizione al contorno (u_1 è la velocità asintotica):

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{Corpo}} = \frac{v'(x,0)}{u_\infty} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{Corpo}} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial \phi'_1(x,0)}{\partial y_1}$$

Si può supporre che la forma del profilo sia definita dall'equazione:

$$y = t_1 f\left(\frac{x}{c}\right) \rightarrow \frac{y}{c} = \tau_1 f\left(\frac{x}{c}\right)$$

Con t spessore assoluto, τ spessore relativo e f funzione generica:



Leggi di similitudine subsonica

La condizione al contorno diventa:

$$\frac{\partial \phi'_1(x,0)}{\partial y} = u_1 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{Corpo}} = u_1 c \tau_1 \frac{df\left(\frac{x}{c}\right)}{\partial x} = u_1 \tau_1 f'\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\text{Corpo}} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial \phi'_1(x,0)}{\partial y_1}$$

$$\frac{y}{c} = \tau_1 f\left(\frac{x}{c}\right)$$

Il coefficiente di pressione sul corpo diventa:

$$(1) \quad C_p = -\frac{2u'}{u_\infty} = -\frac{2}{u_1} \frac{\partial \phi'_1(x,0)}{\partial x}$$

A questo punto si consideri la trasformazione:

$$\xi = x \quad \eta = \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{1 - M_2^2}} y \quad \phi'_2 = \frac{1}{A} \frac{u_2}{u_1} \phi'_1$$

Con A costante arbitraria.



Leggi di similitudine subsonica

$$\xi = x \quad \eta = \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}} y \quad \phi_2' = \frac{1}{A} \frac{u_2}{u_1} \phi_1' \quad (1-M_1^2) \phi_{1xx}' + \phi_{1yy}' = 0$$

$$\phi_{1xx}' = A \frac{u_1}{u_2} \phi_{2\xi\xi}' \left(\frac{\xi}{x} \right)^2 \quad \phi_{1yy}' = A \frac{u_1}{u_2} \phi_{2\eta\eta}' (\eta_y)^2 = A \frac{u_1}{u_2} \phi_{2\eta\eta}' \frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}$$

L'equazione del potenziale nelle nuove variabili diventa:

$$(1-M_1^2) A \frac{u_1}{u_2} \phi_{2\xi\xi}' + A \frac{u_1}{u_2} \phi_{2\eta\eta}' \frac{1-M_1^2}{1-M_2^2} = 0$$

$$\phi_{2\xi\xi}' + \phi_{2\eta\eta}' \frac{1}{1-M_2^2} = 0$$

$$(1-M_2^2) \phi_{2\xi\xi}' + \phi_{2\eta\eta}' = 0$$

Che è uguale a quella precedente.



Leggi di similitudine subsonica

$$\xi = x \quad \eta = \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}} y \quad \phi_2' = \frac{1}{A} \frac{u_2}{u_1} \phi_1' \quad \begin{aligned} (1-M_1^2) \phi_{1xx}' + \phi_{1yy}' &= 0 \\ (1-M_2^2) \phi_{2\xi\xi}' + \phi_{2\eta\eta}' &= 0 \\ \frac{\partial \phi_1'(x,0)}{\partial y} &= u_1 \tau_1 f' \left(\frac{x}{c} \right) \end{aligned}$$

La condizione al contorno diventa:

$$\frac{\partial \phi_1'(x,0)}{\partial y} = A \frac{u_1}{u_2} \frac{\partial \phi_2'(\xi,0)}{\partial \eta} \eta_y = A \frac{u_1}{u_2} \frac{\partial \phi_2'(\xi,0)}{\partial \eta} \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}} = u_1 \tau_1 f' \left(\frac{x}{c} \right)$$

Ma il secondo potenziale deve soddisfare anche la relazione che permette di avere corpi simili:

$$\frac{\partial \phi_2'(\xi,0)}{\partial \eta} = u_2 \tau_2 f' \left(\frac{\xi}{c} \right)$$

Quindi si trova una relazione fra i due spessori:

$$A \frac{u_1}{u_2} u_2 \tau_2 \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}} = u_1 \tau_1 \rightarrow \tau_1 = A \tau_2 \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}}$$



Leggi di similitudine subsonica

$$\xi = x \quad \eta = \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}} y \quad \phi_2' = \frac{1}{A} \frac{u_2}{u_1} \phi_1'$$

$$(1-M_1^2) \phi_{1xx}' + \phi_{1yy}' = 0$$

$$(1-M_2^2) \phi_{2\xi\xi}' + \phi_{2\eta\eta}' = 0$$

$$\tau_1 = A \tau_2 \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}}$$

Il coefficiente di pressione diventa:

$$C_{p1} = -\frac{2}{u_1} \frac{\partial \phi_1'(x,0)}{\partial x} = -\frac{2}{u_1} A \frac{u_1}{u_2} \frac{\partial \phi_2'(\xi,0)}{\partial \xi} \cancel{\xi_x}^{\nearrow} = -A \frac{2}{u_2} \frac{\partial \phi_2'(\xi,0)}{\partial \xi}$$

Ma per il secondo flusso si ha:

$$C_{p2} = -\frac{2}{u_2} \frac{\partial \phi_2'(\xi,0)}{\partial \xi}$$

Confrontando: $C_{p1} = A C_{p2}$



Leggi di similitudine subsonica

$$\xi = x \quad \eta = \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}} y \quad \phi_2' = \frac{1}{A} \frac{u_2}{u_1} \phi_1'$$

$$(1-M_1^2) \phi_{1xx}' + \phi_{1yy}' = 0$$

$$(1-M_2^2) \phi_{2\xi\xi}' + \phi_{2\eta\eta}' = 0$$

Riassumendo si ha che confrontando due flussi relativi a due numeri di Mach diversi (e di conseguenza due velocità asintotiche diverse) se si impone che:

$$\tau_1 = A \tau_2 \sqrt{\frac{1-M_1^2}{1-M_2^2}}$$

Si trova che la distribuzione di pressione sul corpo è data da:

$$C_{p1} = A C_{p2}$$

In particolare si può supporre che M_2 sia nullo e che invece M_1 sia uguale a M_∞ . In questo modo si possono estendere i risultati ottenuti per flussi incompressibili al caso in cui gli effetti della compressibilità non possono essere trascurati.

$$\tau_1 = A \tau_2 \sqrt{1-M_\infty^2} \rightarrow \tau_2 = \frac{\tau_1}{A \sqrt{1-M_\infty^2}}$$



Leggi di similitudine subsonica

$$\tau_1 = A \tau_2 \sqrt{1 - M_\infty^2} \rightarrow \tau_2 = \frac{\tau_1}{A \sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

Quanto detto può essere espresso con un'unica relazione:

$$\frac{C_{p1}}{A} = C_{p2} = g(\tau_2) = g\left(\frac{\tau_1}{A \sqrt{1 - M_\infty^2}}\right)$$

In particolare eliminando il pedice 1 si ha che il coefficiente di pressione in regime compressibile può essere valutato a partire da quello in regime incompressibile attraverso una legge di similitudine del tipo:

$$\frac{C_p}{A} = g\left(\frac{\tau}{A \sqrt{1 - M_\infty^2}}\right) = C_{pi}\left(\frac{\tau}{A \sqrt{1 - M_\infty^2}}\right)$$

Come si può vedere in questo caso (bidimensionale piano) è possibile scegliere il valore della costante in modo arbitrario ottenendo così diverse leggi di similitudine.



Leggi di similitudine subsonica

La similitudine di **Goethert** si ottiene imponendo:

$$A = \frac{1}{1 - M_\infty^2} \quad \beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

Con questa posizione si ha:

$$C_p = \frac{g(\tau \sqrt{1 - M_\infty^2})}{1 - M_\infty^2} = \frac{C_{pi}(\tau \beta)}{\beta^2}$$

Quindi se si vuole conoscere la distribuzione della pressione su un profilo di spessore relativo τ per $M = M_\infty$ si deve analizzare il comportamento di un profilo più sottile in regime incompressibile e poi aumentare il coefficiente di pressione di un fattore β^2 .

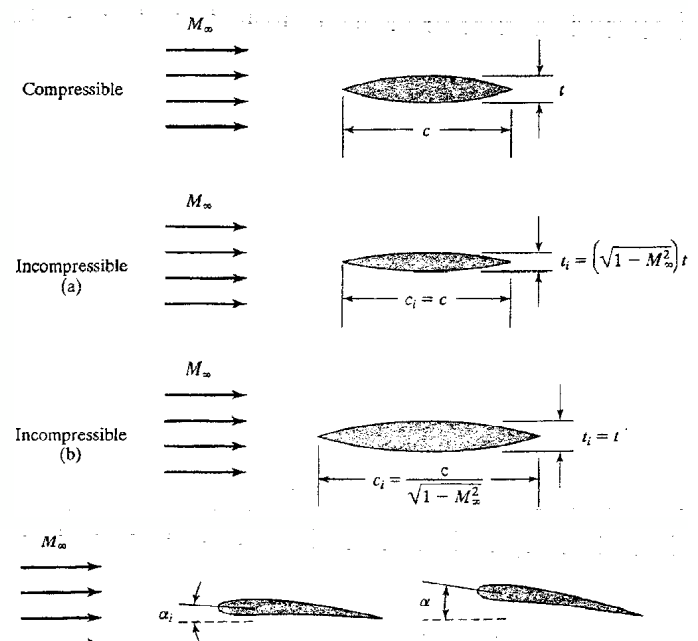
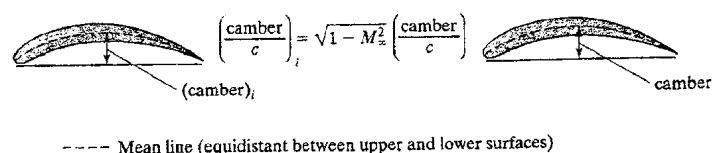


Figure 13.6 Incompressible and Compressible Angles of Attack of an Airfoil



Leggi di similitudine subsonica

Ad esempio supponendo che le corde siano uguali si ha (Fig. a):

$$c_i = c \quad t_i = t \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

Oppure supponendo che lo spessore assoluto sia uguale (Fig. b)

$$t_i = t \quad c_i = \frac{c}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

In entrambi i casi il coefficiente di pressione si ricava da:

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\beta^2} = \frac{C_{pi}}{1 - M_\infty^2}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

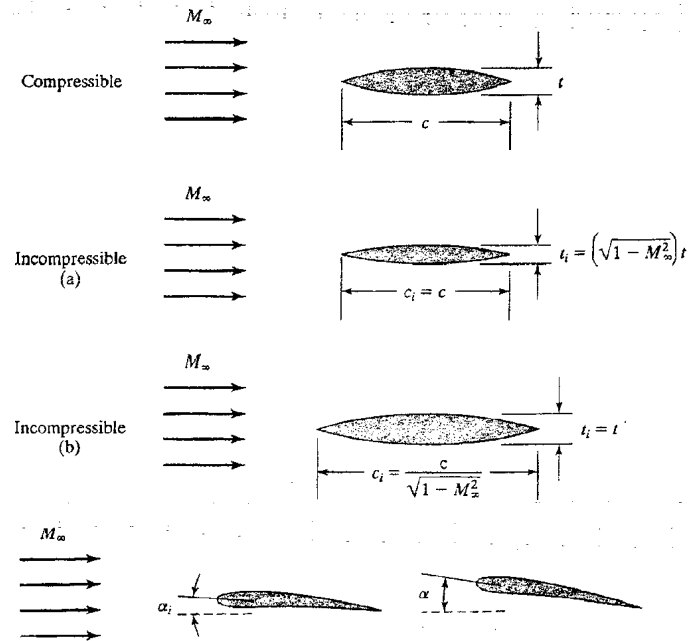
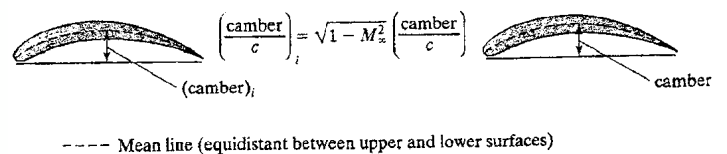


Figure 13.6 Incompressible and Compressible Angles of Attack of an Airfoil



Leggi di similitudine subsonica

Evidentemente tutte le grandezze relative che possono essere espresse come rapporto tra una lunghezza lungo y e la corda del profilo si comportano come lo spessore. Ad esempio per:

$$c_i = c$$

Si ha:

$$\frac{t_i}{t} = \frac{f_i}{f} = \frac{\alpha_i}{\alpha} = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

Inoltre tutti i coefficienti delle forze si comportano come C_p .

$$C_l = \frac{C_{li}}{\beta^2} \quad C_d = \frac{C_{di}}{\beta^2}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

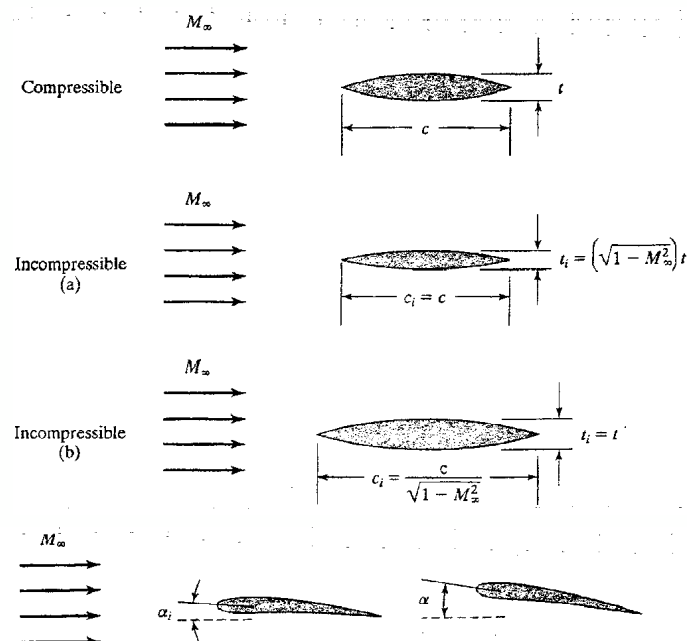
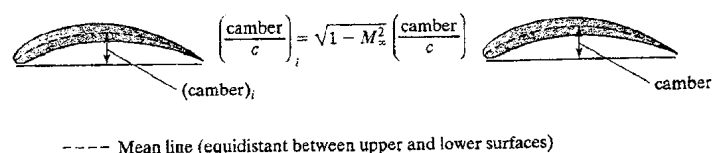


Figure 13.6 Incompressible and Compressible Angles of Attack of an Airfoil



Leggi di similitudine subsonica

La similitudine di **Goethert** e le relative regole sono utili e **valgono** anche nel caso di simmetria **assialsimmetrica**. Sarebbe più comodo, però, confrontare le caratteristiche aerodinamiche di un profilo con le stesse caratteristiche geometriche sia in regime incompressibile che compressibile. La similitudine di **Prandtl – Glauert**, **valida** solo in caso di **moto bidimensionale piano** permette proprio di ottenere questo tipo legge di similitudine. Imponendo che la costante A valga:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \quad \beta = \sqrt{1-M_\infty^2} \quad \frac{C_p}{A} = g\left(\frac{\tau}{A\sqrt{1-M_\infty^2}}\right) = C_{pi}\left(\frac{\tau}{A\sqrt{1-M_\infty^2}}\right)$$

Si ha:

$$C_p = \frac{g(\tau)}{\sqrt{1-M_\infty^2}} = \frac{C_{pi}}{\beta}$$

Quindi se si vuole conoscere la distribuzione della pressione su un profilo di spessore relativo τ per $M=M_\infty$ si deve analizzare il comportamento di un profilo di **uguale** forma in regime incompressibile e poi aumentare il coefficiente di pressione di un fattore β .



Leggi di similitudine subsonica



Ludwig Prandtl (1875 – 1953)

Hermann Glauert 1892 - 1934



Leggi di similitudine subsonica

Le ipotesi della similitudine di **Goethert** e **Prandtl - Glauert** sono:

- Geometria bidimensionale piana; (La similitudine di **Goethert** vale anche in presenza di simmetria **assialsimmetrica**);
- Piccoli disturbi;
- M_∞ lontano da 1;

Regole di Goethert

$$c_i = c \rightarrow \frac{t_i}{t} = \frac{f_i}{f} = \frac{\alpha_i}{\alpha} = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\beta^2} = \frac{C_{pi}}{1 - M_\infty^2}$$

Regole di Prandtl - Glauert

$$c_i = c \rightarrow \frac{t_i}{t} = \frac{f_i}{f} = \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$$

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\beta} = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$



Leggi di similitudine subsonica

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M^2}}$$

Esistono varie formule che hanno provato ad estendere l'intervallo di validità delle regole di similitudine. In particolare la regola di **Laitone** si ottiene supponendo che la variazione locale del numero di Mach possa essere significativa in questo caso la regola di Prandtl – Glauert può essere modificata come:

Dalla relazione $C_p = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{\gamma}{2} M_\infty^2}$ si ha: $\frac{p}{p_\infty} = 1 + C_p \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 = \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

$$\left(1 + C_p \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \rightarrow 2 + (\gamma - 1) M^2 = \left(2 + (\gamma - 1) M_\infty^2 \right) \left(1 + C_p \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{1 - \gamma}{\gamma}}$$

Risolvendo per il numero di Mach (sviluppando in serie il secondo termine):

$$M^2 = \frac{\left(2 + (\gamma - 1) M_\infty^2 \right) \left(1 + C_p \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{1 - \gamma}{\gamma}} - 2}{\gamma - 1} \cong \frac{\left(2 + (\gamma - 1) M_\infty^2 \right) \left(1 + C_p \frac{1 - \gamma}{2} M_\infty^2 \right) - 2}{\gamma - 1}$$



Leggi di similitudine subsonica

$$M^2 \cong \frac{(2 + (\gamma - 1)M_\infty^2) \left(1 + C_p \frac{1 - \gamma}{2} M_\infty^2 \right) - 2}{\gamma - 1} \cong M_\infty^2 - C_p M_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)$$

Approssimando C_p con C_{pi} e sostituendo nella $C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M^2}}$ si ha:

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2 + C_{pi} M_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)}} = \frac{C_{pi}}{\beta \sqrt{1 + \frac{C_{pi} M_\infty^2}{\beta^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)}}$$

Sviluppando in serie la radice si ottiene la formula di Laitone:

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\beta \left(1 + \frac{C_{pi} M_\infty^2}{2\beta^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right) \right)} = \frac{C_{pi}}{\beta + \frac{C_{pi} M_\infty^2}{2\beta} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)} =$$

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{C_{pi} M_\infty^2}{2\sqrt{1 - M_\infty^2}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)}$$



Trasformazione dell'odografo

Attraverso questa trasformazione si può passare da equazioni non lineari ad equazioni sempre alle derivate parziali ma lineari. L'equazione del potenziale può essere espressa in termini di variabili primitive:

$$(a^2 - \phi_x^2) \phi_{xx} - 2(\phi_x \phi_y \phi_{xy}) + (a^2 - \phi_y^2) \phi_{yy} = 0$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2} \right) u_x - \frac{uv}{a^2} (u_y + v_x) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right) v_y = 0$$

$$v_x - u_y = 0$$

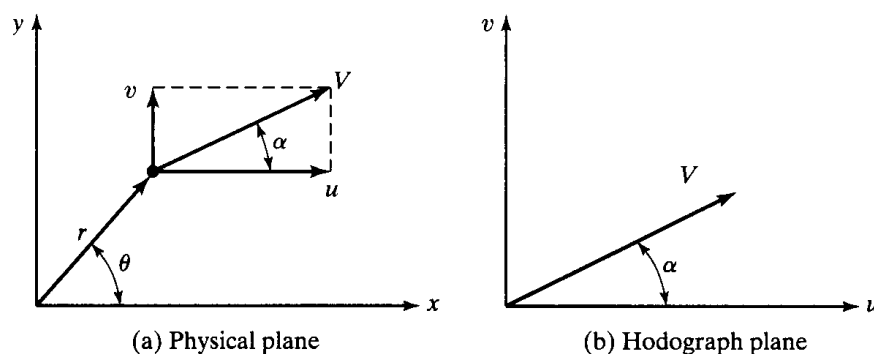


Figure 12.6 The Physical and Hodograph Planes



Trasformazione dell'odografo

La relazione funzionale che lega le variabili nel piano fisico a quelle nel piano dell'odografo è:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) & dx &= x_u du + x_v dv \\y &= y(u, v) & dy &= y_u du + y_v dv\end{aligned}$$

Che in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \quad \underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_v & -x_v \\ -y_u & x_u \end{bmatrix}$$

Dove J è lo Jacobiano della trasformazione e perché abbia senso deve essere non nullo:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - y_u x_v$$



Trasformazione dell'odografo

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)u_x - \frac{uv}{a^2}(u_y + v_x) + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)v_y = 0 \quad \underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_v & -x_v \\ -y_u & x_u \end{bmatrix}$$

$$v_x - u_y = 0$$

Utilizzando questa trasformazione le equazioni diventano:

$$\begin{aligned}(a^2 - u^2)y_v + uv(y_u + x_v) + (a^2 - v^2)x_u &= 0 \\ y_u - x_v &= 0\end{aligned}$$

$$\text{con } a^2 = a_o^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(u^2 + v^2)$$

Il sistema di equazioni diventa così lineare però al posto di imporre la geometria e determinare il campo di moto si può in questo caso imporre il campo di moto è ricavare la geometria.



Trasformazione dell'odografo

Si vogliono ricavare delle equazioni per il potenziale e la funzione di corrente.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = \frac{\rho_0}{\rho} \begin{bmatrix} \psi_y \\ -\psi_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d\varphi \\ d\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \psi_y & -\varphi_y \\ -\psi_x & \varphi_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \psi_y & -\varphi_y \\ -\psi_x & \varphi_x \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x$$

In coordinate polari si può supporre che:

$$\varphi = \varphi(V, \alpha) \quad \text{e} \quad \psi = \psi(V, \alpha)$$

$$\begin{bmatrix} d\varphi \\ d\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_V & \varphi_\alpha \\ \psi_V & \psi_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV \\ d\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\alpha \\ y_V & y_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV \\ d\alpha \end{bmatrix}$$

Sostituendo questa relazione in quella precedente:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \psi_y & -\varphi_y \\ -\psi_x & \varphi_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_V & \varphi_\alpha \\ \psi_V & \psi_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV \\ d\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\alpha \\ y_V & y_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV \\ d\alpha \end{bmatrix}$$



Trasformazione dell'odografo

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \psi_y & -\varphi_y \\ -\psi_x & \varphi_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_V & \varphi_\alpha \\ \psi_V & \psi_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV \\ d\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\alpha \\ y_V & y_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV \\ d\alpha \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \psi_y & -\varphi_y \\ -\psi_x & \varphi_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_V & \varphi_\alpha \\ \psi_V & \psi_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\alpha \\ y_V & y_\alpha \end{bmatrix}$$

Lo Jacobiano diventa:

$$J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = u \left(u \frac{\rho}{\rho_0} \right) - v \left(-v \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \frac{\rho}{\rho_0} V^2$$

Si possono ricavare delle relazioni esplicite per le derivate della trasformazione da coordinate cartesiane a polare:

$$\begin{aligned} x_V &= \frac{\rho_0}{\rho V^2} (\psi_y \varphi_V - \varphi_y \psi_V) = \frac{\rho_0}{\rho V^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} u \varphi_V - v \psi_V \right) = \frac{u}{V^2} \varphi_V - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{v}{V^2} \psi_V = \\ &= \frac{V \cos \alpha}{V^2} \varphi_V - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{V \sin \alpha}{V^2} \psi_V = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_V \end{aligned}$$



Trasformazione dell'odografo

$$\frac{1}{J} \begin{bmatrix} \psi_y & -\varphi_y \\ -\psi_x & \varphi_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_V & \varphi_\alpha \\ \psi_V & \psi_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_V & x_\alpha \\ y_V & y_\alpha \end{bmatrix}$$

$$J = \frac{\rho}{\rho_0} V^2$$

Per le altre derivate si ha:

$$x_\alpha = \frac{\rho_0}{\rho V^2} (\psi_y \varphi_\alpha - \varphi_y \psi_\alpha) = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_\alpha - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_\alpha$$

$$y_V = \frac{\rho_0}{\rho V^2} (-\psi_x \varphi_V + \varphi_x \psi_V) = \frac{\rho_0}{\rho V^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} v \varphi_V + u \psi_V \right) = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_V$$

$$y_\alpha = \frac{\rho_0}{\rho V^2} (-\psi_x \varphi_\alpha + \varphi_x \psi_\alpha) = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_\alpha + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_\alpha$$



Trasformazione dell'odografo

Riassumendo si sono trovate le seguenti equazioni:

$$(1) \quad x_V = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_V$$

$$(2) \quad x_\alpha = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_\alpha - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_\alpha$$

$$(3) \quad y_V = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_V$$

$$(4) \quad y_\alpha = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_\alpha + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_\alpha$$

Per il teorema di Schwartz le derivate incrociate sono uguali quindi derivando la (1) e la (3) rispetto ad α e la (2) e la (4) rispetto a V ed uguagliando si ottengono due equazioni nelle variabili φ e ψ .

Prima esaminiamo il termine in cui compare la densità:



Trasformazione dell'odografo

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{a_o^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Ma:

$$a_o^2 = a^2 + \frac{\gamma-1}{2} V^2 \rightarrow \frac{a^2}{a_o^2} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a_o^2}$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a_o^2} \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

Quindi la densità non dipende da α ma solo da V .

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)}{dV} &= \frac{-1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a_o^2} \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}-1} \left(-\frac{\gamma-1}{2} \frac{2V}{a_o^2} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a_o^2} \right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a_o^2} \right)^{-1} \left(\frac{V}{a_o^2} \right) = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{a_o^2}{a^2} \frac{V}{a_o^2} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2} \end{aligned}$$



Trasformazione dell'odografo

$$(1) \quad x_V = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_V$$

$$(2) \quad x_\alpha = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_\alpha$$

$$(3) \quad y_V = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_V$$

$$(4) \quad y_\alpha = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_\alpha$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)}{dV} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2}$$

$$x_{V\alpha} = -\frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_{V\alpha} - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_{V\alpha} =$$

$$x_{\alpha V} = -\frac{\cos \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_{\alpha V} - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V^2} \psi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_{\alpha V}$$

$$(5) \quad -\frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_V = -\frac{\cos \alpha}{V^2} \varphi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{a^2} \sin \alpha \psi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V^2} \psi_\alpha$$



Trasformazione dell'odografo

$$(1) \quad x_V = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_V$$

$$(2) \quad x_\alpha = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_\alpha$$

$$(3) \quad y_V = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_V$$

$$(4) \quad y_\alpha = \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_\alpha$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)}{dV} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2}$$

$$y_{V\alpha} = \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_{V\alpha} - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_V + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_{V\alpha} =$$

$$y_{\alpha V} = -\frac{\sin \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \frac{\sin \alpha}{V} \varphi_{\alpha V} + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V^2} \psi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_{\alpha V}$$

$$(6) \quad \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_V = -\frac{\sin \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{a^2} \cos \alpha \psi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V^2} \psi_\alpha$$



Trasformazione dell'odografo

$$(5) \quad -\frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V} \psi_V = -\frac{\cos \alpha}{V^2} \varphi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{a^2} \sin \alpha \psi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V^2} \psi_\alpha$$

$$(6) \quad \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha}{V} \psi_V = -\frac{\sin \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{a^2} \cos \alpha \psi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha}{V^2} \psi_\alpha$$

Moltiplicando la (5) per $\cos \alpha$ e la (6) per $\sin \alpha$ e sommando si ha:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos^2 \alpha}{V} \psi_V + \frac{\cos^2 \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{a^2} \sin \alpha \cos \alpha \psi_\alpha + \\ & -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{V^2} \psi_\alpha + \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin^2 \alpha}{V} \psi_V + \frac{\sin^2 \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \\ & -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{a^2} \cos \alpha \sin \alpha \psi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{V^2} \psi_\alpha = 0 \\ & -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{V} \psi_V + \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{V^2} \varphi_\alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi_\alpha = V \frac{\rho_o}{\rho} \psi_V$$



Trasformazione dell'odografo

$$(5) \quad -\frac{\sin \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o \cos \alpha}{\rho V} \psi_V = -\frac{\cos \alpha}{V^2} \varphi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho a^2} \frac{1}{V} \sin \alpha \psi_\alpha + \frac{\rho_o \sin \alpha}{\rho V^2} \psi_\alpha$$

$$(6) \quad \frac{\cos \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o \sin \alpha}{\rho V} \psi_V = -\frac{\sin \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho a^2} \frac{1}{V} \cos \alpha \psi_\alpha - \frac{\rho_o \cos \alpha}{\rho V^2} \psi_\alpha$$

Moltiplicando la (5) per $\sin \alpha$ e la (6) per $\cos \alpha$ e sottraendo si ha:

$$\begin{aligned} & -\frac{\sin^2 \alpha}{V} \varphi_V - \frac{\rho_o \cos \alpha \sin \alpha}{\rho V} \psi_V + \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \frac{\rho_o}{\rho a^2} \frac{1}{V} \sin^2 \alpha \psi_\alpha + \\ & -\frac{\rho_o \sin^2 \alpha}{\rho V^2} \psi_\alpha - \frac{\cos^2 \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\rho_o \sin \alpha \cos \alpha}{\rho V} \psi_V - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{V^2} \varphi_\alpha + \\ & + \frac{\rho_o}{\rho a^2} \frac{1}{V} \cos^2 \alpha \psi_\alpha - \frac{\rho_o \cos^2 \alpha}{\rho V^2} \psi_\alpha = 0 \\ & -\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{V} \varphi_V + \frac{\rho_o}{\rho a^2} \frac{1}{V} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \psi_\alpha - \frac{\rho_o \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\rho V^2} \psi_\alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi_V = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2} \psi_\alpha - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \psi_\alpha = -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_\alpha$$



Trasformazione dell'odografo

$$(7) \quad \varphi_\alpha = V \frac{\rho_o}{\rho} \psi_V$$

$$(8) \quad \varphi_V = -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_\alpha$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)}{dV} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2}$$

Che sono le equazioni di **Chaplygin – Molenbroek**. Si può eliminare il potenziale derivando la prima equazione rispetto a V e la seconda rispetto ad α ed uguagliando:

$$\varphi_{\alpha V} = \frac{\rho_o}{\rho} \left(\frac{V^2}{a^2} + 1 \right) \psi_V + \frac{\rho_o}{\rho} V \psi_{VV} = -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_{\alpha\alpha} = \varphi_{V\alpha}$$

$$V^2 \psi_{VV} + V \left(1 + \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_V + \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_{\alpha\alpha} = 0$$



Leggi di similitudine subsonica



Sergey A. Chaplygin 1869 - 1942



Trasformazione dell'odografo

$$(7) \quad \varphi_\alpha = V \frac{\rho_o}{\rho} \psi_V$$

$$(8) \quad \varphi_V = -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_\alpha$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)}{dV} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2}$$

In modo analogo si può eliminare la funzione di corrente risolvendo in ψ e successivamente derivando la prima equazione rispetto a V e la seconda rispetto ad α ed uguagliando:

$$\psi_{V\alpha} = \frac{1}{V} \frac{\rho}{\rho_o} \varphi_{\alpha\alpha} = \psi_{\alpha V} = \frac{\varphi_{VV}}{-\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right)} + \varphi_V \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{-\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right)} \right)$$



Trasformazione dell'odografo

$$\frac{d\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)}{dV} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2}$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial V} = \frac{\partial\left(a_o^2 - \frac{\gamma-1}{2}V^2\right)}{\partial V} = -(\gamma-1)V$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{-1}{\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)} \right) &= \frac{\frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) - \frac{\rho_o}{\rho} \frac{2}{a^2} - \frac{\rho_o}{\rho} (\gamma-1) \frac{V^2}{a^4}}{\left(\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)\right)^2} = \\ &= \frac{\frac{\rho_o}{\rho} \left(\cancel{\frac{1}{a^2}} - \cancel{\frac{V^2}{a^4}} - \frac{1}{V^2} + \cancel{\frac{1}{a^2}} - \cancel{\frac{2}{a^2}} - \gamma \frac{V^2}{a^4} + \cancel{\frac{V^2}{a^4}} \right)}{\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^2 \frac{1}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)^2} = \frac{\left(-\frac{1}{V^2} - \gamma \frac{V^2}{a^4}\right)}{\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)^2} = \frac{-\left(1 + \gamma \frac{V^4}{a^4}\right)}{\frac{\rho_o}{\rho} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)^2} \end{aligned}$$



Trasformazione dell'odografo

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{-1}{\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)} \right) = \frac{-\left(1 + \gamma \frac{V^4}{a^4}\right)}{\frac{\rho_o}{\rho} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{V} \frac{\rho}{\rho_o} \varphi_{\alpha\alpha} = \frac{\varphi_{VV}}{-\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)} + \varphi_V \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{-\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)} \right) =$$

$$= \frac{\varphi_{VV}}{-\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)} + \varphi_V \frac{-\left(1 + \gamma \frac{V^4}{a^4}\right)}{\frac{\rho_o}{\rho} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)^2}$$

$$\left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)^2 \varphi_{\alpha\alpha} + V^2 \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \varphi_{VV} + V \left(1 + \gamma \frac{V^4}{a^4}\right) \varphi_V = 0$$



Trasformazione dell'odografo

$$(7) \quad \varphi_\alpha = V \frac{\rho_o}{\rho} \psi_V$$

$$(8) \quad \varphi_V = -\frac{\rho_o}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_\alpha$$

$$\frac{d\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)}{dV} = \frac{\rho_o}{\rho} \frac{V}{a^2}$$

Le equazioni di Chaplygin – Molenbroek quindi diventano:

$$(9) \quad V^2 \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \varphi_{VV} + V \left(1 + \gamma \frac{V^4}{a^4} \right) \varphi_V + \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right)^2 \varphi_{\alpha\alpha} = 0$$

$$(10) \quad V^2 \psi_{VV} + V \left(1 + \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_V + \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \psi_{\alpha\alpha} = 0$$



Tangent - Gas

L'approssimazione “tangent – gas” permette di semplificare le relazioni isentropiche. Come mostrato in figura per un piano p - v si considera una approssimazione lineare a partire dalle condizioni statiche:

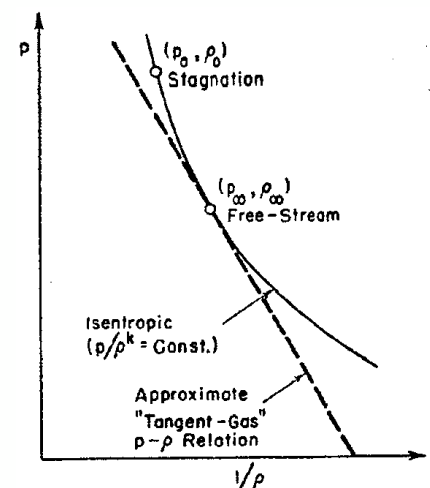
$$-\frac{dp}{dv} = -\frac{dp}{d\frac{1}{\rho}} = \rho^2 \frac{dp}{d\rho} = \rho^2 a^2 = \text{cost}$$

$$(11) \quad \rho^2 a^2 = \rho_\infty^2 a_\infty^2 = \rho_o^2 a_o^2 = \rho^2 \frac{dp}{d\rho} = \text{cost}$$

Questa equazione può essere integrata:

$$dp = \rho_\infty^2 a_\infty^2 \frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$(12) \quad p - p_\infty = \rho_\infty^2 a_\infty^2 \left(\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) = \rho_\infty a_\infty^2 \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)$$



Tangent - Gas

Dall'equazione di Eulero $dp + \rho V dv = 0$ si ha:

$$dp = \rho_\infty^2 a_\infty^2 \frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$\int_{V_\infty}^V V dV = \frac{1}{2}(V^2 - V_\infty^2) = - \int_{\rho_\infty}^{\rho} \frac{dp}{\rho} = - \int_{\rho_\infty}^{\rho} \rho_\infty^2 a_\infty^2 \frac{d\rho}{\rho^3} = \frac{\rho_\infty^2 a_\infty^2}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_\infty^2} \right)$$

$$V^2 - V_\infty^2 = \rho_\infty^2 a_\infty^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho_\infty^2} \right) = \frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} a_\infty^2 - a_\infty^2$$

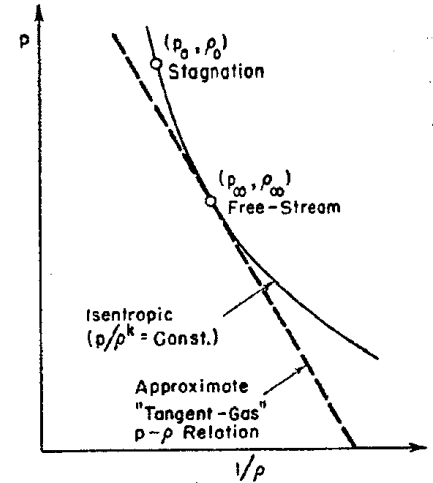
Dalla (11) $\rho^2 a^2 = \rho_\infty^2 a_\infty^2 = \rho_0^2 a_0^2 = \rho^2 \frac{dp}{d\rho} = \text{cost}$

$$V^2 - a^2 = V_\infty^2 - a_\infty^2 = \cancel{V_0^2} - a_0^2 = \text{cost}$$

Nel punto di ristagno si ha:

$$V^2 = a^2 - a_0^2 \quad \frac{V^2}{a^2} = 1 - \frac{a_0^2}{a^2} = 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}$$

$$(13) \quad \frac{\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{a_0^2}{a^2} = 1 - M^2$$



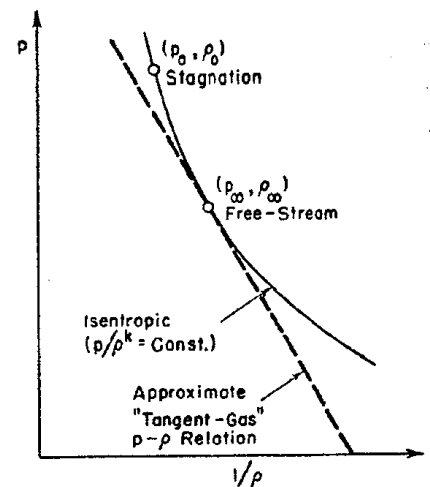
Tangent - Gas

$$V^2 = a^2 - a_0^2 \quad \frac{V^2}{a_0^2} = \frac{a^2}{a_0^2} - 1 = \frac{\rho_0^2}{\rho^2} - 1$$

$$(14) \quad \frac{\rho_0^2}{\rho^2} = 1 + \frac{V^2}{a_0^2}$$

$$(15) \quad \frac{V^2}{a_\infty^2} = \frac{a^2}{a_\infty^2} - \frac{a_0^2}{a_\infty^2} = \frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} - \frac{\rho_\infty^2}{\rho_0^2}$$

$$(11) \quad \rho^2 a^2 = \rho_\infty^2 a_\infty^2 = \rho_0^2 a_0^2$$



Tangent - Gas

$$(11) \quad \rho^2 a^2 = \rho_\infty^2 a_\infty^2 = \rho_0^2 a_0^2 = \rho^2 \frac{dp}{d\rho} = \text{cost}$$

$$(13) \quad \frac{\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{a_0^2}{a^2} = 1 - M^2$$

$$(12) \quad p - p_\infty = \rho_\infty^2 a_\infty^2 \left(\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) = \rho_\infty a_\infty^2 \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)$$

$$(14) \quad \frac{\rho_0^2}{\rho^2} = 1 + \frac{V^2}{a_0^2}$$

$$(15) \quad \frac{V^2}{a_\infty^2} = \frac{a^2}{a_\infty^2} - \frac{a_0^2}{a_\infty^2} = \frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} - \frac{\rho_\infty^2}{\rho_0^2}$$

Nell'approssimazione del "tangent – gas" queste equazioni possono essere utilizzate al posto delle isentropiche. Però questa approssimazione presenta alcune incongruenze. Ad esempio dalla (15) se V aumenta ρ diminuisce ma a aumenta. Dalla (13) anche il numero di Mach aumenta però non può diventare supersonico altrimenti ρ diventa negativo. Lo stesso può succedere per la pressione dalla (12):

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty a_\infty^2} = \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)$$



Tangent - Gas

$$\frac{p - p_\infty}{\rho_\infty a_\infty^2} = \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)$$

$$a_\infty^2 = \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$$

Nella condizione limite $p=0$:

$$\frac{p_\infty}{\rho_\infty a_\infty^2} = \frac{1}{\gamma} = \frac{\rho_\infty}{\rho} - 1 \rightarrow \frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{1}{\gamma} + 1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma}$$

Dalla (15) $\frac{V^2}{a_\infty^2} = \frac{a^2}{a_\infty^2} - \frac{a_0^2}{a_\infty^2} = \frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} - \frac{\rho_\infty^2}{\rho_0^2}$ e dalla (13) $\frac{\rho^2}{\rho_0^2} = 1 - M^2$

$$\frac{V^2}{a_\infty^2} = \frac{V_{\max}^2}{a_\infty^2} = \frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} - \frac{\rho_\infty^2}{\rho_0^2} = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^2 - (1 - M_\infty^2)$$

$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = \frac{V_{\max}}{a_\infty} \frac{a_\infty}{V_\infty} = \frac{1}{M_\infty} \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^2 - (1 - M_\infty^2)}$$



Tangent - Gas

$$\frac{V_{max}}{V_{\infty}} = \frac{1}{M_{\infty}} \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^2 - (1-M_{\infty}^2)}$$

Questa equazione fornisce per ogni coppia di valori V_{∞} e M_{∞} la massima velocità compatibile con $p \geq 0$. Ad esempio per $M_{\infty}=1$ si ha:

$$\frac{V_{max}}{V_{\infty}} = \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^2} = \frac{\gamma+1}{\gamma} = 1.71$$

Che per profili sottili non è una limitazione significativa.



Linearizzazione delle equazioni

Si vuole ora ricavare la formula di **kàrmàn-Tsien**. Per prima cosa, partendo dalle equazioni di Chaplygin – Molenbroek, si può trovare una semplice equazione per la ψ in cui compare ancora la densità:

$$(7) \quad \varphi_{\alpha} = \frac{V \rho_0}{\rho} \psi_v$$

$$(8) \quad \varphi_v = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \psi_{\alpha}$$

$$\varphi_{v\alpha} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{V} \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right) \psi_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V \rho_0}{\rho} \psi_v \right) = \varphi_{\alpha v}$$

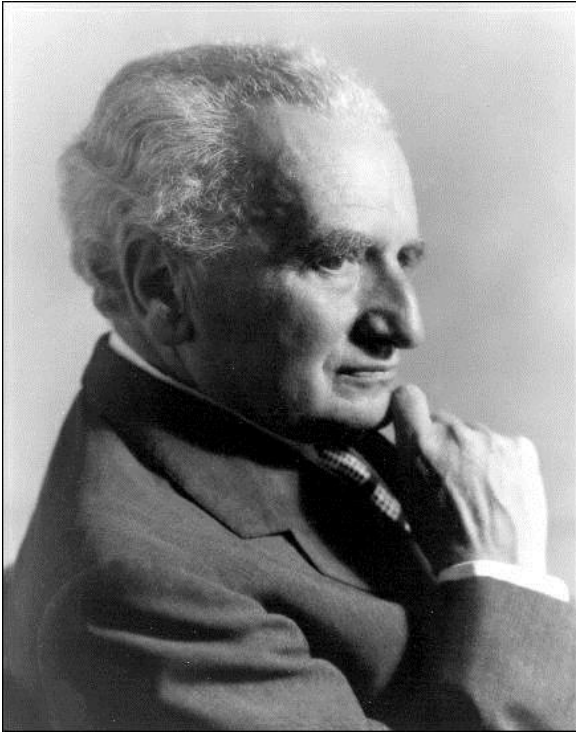
$$\psi_{\alpha\alpha} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{1-M^2} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V \rho_0}{\rho} \psi_v \right) = 0$$

Utilizzando l'approssimazione del tangent-gas (13) $\frac{\rho^2}{\rho_0^2} = 1 - M^2$

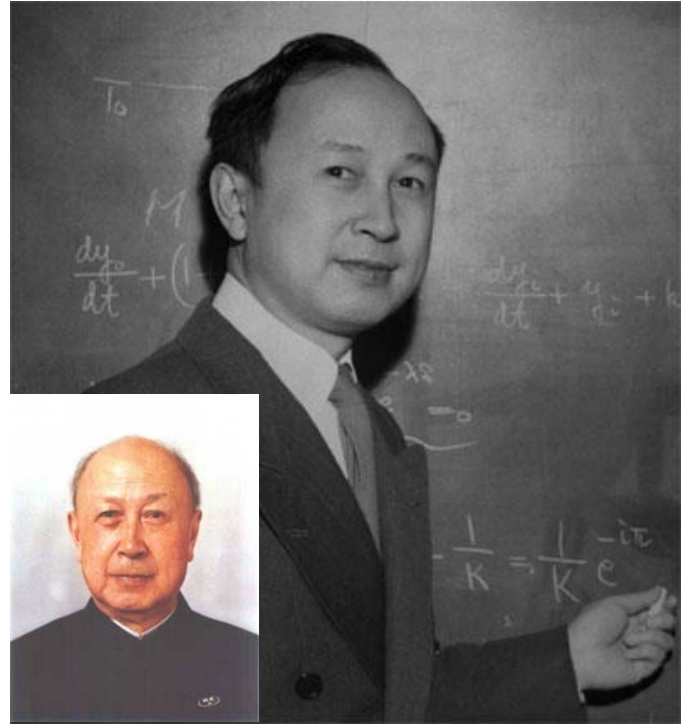
$$\psi_{\alpha\alpha} + \frac{V}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{\sqrt{1-M^2}} \psi_v \right) = 0$$



Leggi di similitudine subsonica



Theodore von Kármán (1881 – 1963)



Hsue-shen Tsien (1911-2009)



Linearizzazione delle equazioni

$$\psi_{\alpha\alpha} + \frac{V}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{\sqrt{1-M^2}} \psi_V \right) = 0$$

Introducendo la trasformazione:

$$\frac{dV_i}{V_i} = \sqrt{1-M^2} \frac{dV}{V} \rightarrow \frac{\partial}{\partial V} = \frac{dV_i}{dV} \frac{\partial}{\partial V_i} = \frac{V_i}{V} \sqrt{1-M^2} \frac{\partial}{\partial V_i}$$

L'equazione del potenziale diventa:

$$\psi_{\alpha\alpha} + \frac{\cancel{V}}{\sqrt{1-\cancel{M^2}}} \frac{\cancel{V_i}}{\sqrt{1-\cancel{M^2}}} \frac{\partial}{\partial \cancel{V_i}} \left(\frac{\cancel{V}}{\sqrt{1-\cancel{M^2}}} \frac{\cancel{V_i}}{\sqrt{1-\cancel{M^2}}} \frac{\partial \psi}{\partial \cancel{V_i}} \right) = 0$$

$$\psi_{\alpha\alpha} + V_i \frac{\partial}{\partial V_i} \left(V_i \frac{\partial \psi}{\partial V_i} \right) = 0$$

Che è uguale a quella che si avrebbe per $M \rightarrow 0$



Linearizzazione delle equazioni

Se fosse nota una soluzione $\psi_i(x_i, y_i)$ in regime incompressibile è possibile anche trovare la sua controparte nel piano dell'odografo $\psi_i(V_i, \alpha_i)$.

Poiché le equazioni sono uguali si ha:

$$\psi(V, \alpha) = \psi_i(V_i, \alpha_i)$$

A questo punto dalla $\psi(V, \alpha)$ si può cercare la forma del profilo nel piano fisico utilizzando le equazioni (1-4). Il profilo per il regime compressibile sarà, in generale, diverso da quello del regime incompressibile ma le differenze sono normalmente molto piccole. Ha senso quindi cercare una relazione che lega C_p a C_{pi} . Per fare questo si parte dalla trasformazione:

$$\frac{dV_i}{V_i} = \sqrt{1-M^2} \frac{dV}{V} \quad (13) \quad \frac{\rho^2}{\rho_0^2} = 1-M^2 \quad (14) \quad \frac{\rho_0^2}{\rho^2} = 1 + \frac{V^2}{a_0^2}$$

Utilizzando le (13) e (14) si ha:

$$1-M^2 = \frac{\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{1}{1 + \frac{V^2}{a_0^2}} \quad \frac{dV_i}{V_i} = \sqrt{1-M^2} \frac{dV}{V} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{a_0^2}}} \frac{dV}{V} = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + V^2}} \frac{dV}{V}$$



Linearizzazione delle equazioni

$$\frac{dV_i}{V_i} = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + V^2}} \frac{dV}{V}$$

Ricordando che: $\frac{d \operatorname{asinh}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$\operatorname{asinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\frac{d \operatorname{asinh}\left(\frac{a}{x}\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1}} \left(-\frac{a}{x^2}\right) = \frac{-a}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Si può integrare la relazione precedente (con k costante d'integrazione) e si ottiene:

$$\ln(V_i) = -\operatorname{asinh}\left(\frac{a_0}{V}\right) + \ln(k) = -\ln\left(\frac{a_0}{V} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{V}\right)^2 + 1}\right) + \ln(k)$$

$$V_i = \frac{k}{\frac{a_0}{V} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{V}\right)^2 + 1}} = \frac{kV}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + V^2}} = \frac{kV}{a_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{a_0^2}}\right)}$$



Linearizzazione delle equazioni

$$V_i = \frac{kV}{a_o \left(1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{a_o^2}} \right)}$$

Per continuità si suppone che $V=V_i$ per $\frac{V}{a_o} \rightarrow 0$ cioè quando $M \rightarrow 0$

$$\frac{V_i}{V} = 1 = \frac{k}{a_o \left(1 + \sqrt{1+0} \right)} = \frac{k}{2a_o} \rightarrow k = 2a_o$$

$$(16) \quad V_i = \frac{2V}{1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{a_o^2}}}$$

Risolvendo per V:

$$V_i + V_i \sqrt{1 + \frac{V^2}{a_o^2}} = 2V \rightarrow 2V - V_i = V_i \sqrt{1 + \frac{V^2}{a_o^2}} \rightarrow 4V^2 - 4VV_i + \cancel{V_i^2} = \cancel{V_i^2} + \frac{V_i^2 V^2}{a_o^2}$$



Linearizzazione delle equazioni

$$4V^2 - 4VV_i - \frac{V_i^2 V^2}{a_o^2} = 0 \rightarrow V \left(4V - 4V_i - \frac{V_i^2 V}{a_o^2} \right) = 0$$

$$V = \frac{4V_i a_o^2}{4a_o^2 - V_i^2}$$

Dalle condizioni asintotiche si ha:

$$V_\infty = \frac{4V_{i\infty} a_o^2}{4a_o^2 - V_{i\infty}^2} \rightarrow \frac{V}{V_\infty} = \frac{V_i}{V_{i\infty}} \frac{4a_o^2 - V_{i\infty}^2}{4a_o^2 - V_i^2}$$

$$\text{Ponendo: } \lambda = \left(\frac{V_{i\infty}}{2a_o} \right)^2 \quad V_{i\infty} = 2a_o \sqrt{\lambda}$$

$$(17) \quad \frac{V}{V_\infty} = \frac{V_i}{V_{i\infty}} \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda \frac{V_i^2}{V_{i\infty}^2}}$$



Linearizzazione delle equazioni

Dalla (16) $V_i = \frac{2V}{1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{a_o^2}}}$ valutata nelle condizioni asintotiche:

$$2a_o \sqrt{\lambda} = \frac{2V_\infty}{1 + \sqrt{1 + \frac{V_\infty^2}{a_o^2}}} \quad V_{i\infty} = 2a_o \sqrt{\lambda}$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\frac{V_\infty}{a_o}}{1 + \sqrt{1 + \frac{V_\infty^2}{a_o^2}}} = \frac{\frac{V_\infty}{a_\infty} \frac{a_\infty}{a_o}}{1 + \sqrt{1 + \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} \frac{a_\infty^2}{a_o^2}}}$$

Utilizzando la (13) $\frac{\rho^2}{\rho_o^2} = \frac{a_o^2}{a^2} = 1 - M^2$ si ha: $\frac{V_\infty}{a_\infty} \frac{a_\infty}{a_o} = \frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2}}} = \frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \sqrt{1 - M_\infty^2} \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2 + M_\infty^2}{1 - M_\infty^2}}} = \frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + 1}$$



Linearizzazione delle equazioni

$$(18) \quad \sqrt{\lambda} = \frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + 1}$$

$$(17) \quad \frac{V}{V_\infty} = \frac{V_i}{V_{i\infty}} \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda \frac{V_i^2}{V_{i\infty}^2}} \quad V_{i\infty} = 2a_o \sqrt{\lambda}$$

Queste due relazioni permettono di legare le due velocità in regime incompressibile e compressibile. Dall'approssimazione del tangent – gas si ha:

$$(12) \quad p - p_\infty = \rho_\infty^2 a_\infty^2 \left(\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) = \rho_\infty a_\infty^2 \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)$$

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\rho_\infty a_\infty^2 \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{M_\infty^2} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)$$



Linearizzazione delle equazioni

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{M_\infty^2} \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)$$

$$(13) \quad \frac{\rho^2}{\rho_0^2} = \frac{a_0^2}{a^2} = 1 - M^2$$

Dalla (13) e (15) si ha:

$$(15) \quad \frac{V^2}{a_\infty^2} = \frac{a^2}{a_\infty^2} - \frac{a_0^2}{a_\infty^2} = \frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} - \frac{\rho_\infty^2}{\rho_0^2}$$

$$\frac{\rho_\infty^2}{\rho^2} = \frac{V^2}{a_\infty^2} + \frac{\rho_\infty^2}{\rho_0^2} = \frac{V^2}{V_\infty^2} \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} + 1 - M_\infty^2 = M_\infty^2 \frac{V^2}{V_\infty^2} + 1 - M_\infty^2$$

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \sqrt{M_\infty^2 \frac{V^2}{V_\infty^2} + 1 - M_\infty^2} \quad (19) \quad C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{M_\infty^2} \left(1 - \sqrt{M_\infty^2 \frac{V^2}{V_\infty^2} + 1 - M_\infty^2} \right)$$

In regime incompressibile si ha:

$$C_{pi} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_{i\infty}^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho_\infty (V_{i\infty}^2 - V_i^2)}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_{i\infty}^2} = 1 - \frac{V_i^2}{V_{i\infty}^2}$$

$$\frac{V_i}{V_{i\infty}} = \sqrt{1 - C_{pi}}$$



Linearizzazione delle equazioni

La relazione (17) $\frac{V}{V_\infty} = \frac{V_i}{V_{i\infty}} \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda \frac{V_i^2}{V_{i\infty}^2}}$ diventa:

$$\frac{V_i}{V_{i\infty}} = \sqrt{1 - C_{pi}}$$

$$(20) \quad \frac{V}{V_\infty} = \frac{\sqrt{1 - C_{pi}} (1 - \lambda)}{1 - \lambda (1 - C_{pi})}$$

$$(18) \quad \sqrt{\lambda} = \frac{M_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + 1}$$

Con la posizione: $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$

$$\lambda = \frac{M_\infty^2}{(\beta + 1)^2} \quad (\beta + 1)^2 = \beta^2 + 2\beta + 1 = 1 - M_\infty^2 + 2\beta + 1 = 2 + 2\beta - M_\infty^2$$

$$(\beta + 1)^2 = 2 + 2\beta - M_\infty^2$$

$$1 - \lambda = 1 - \frac{M_\infty^2}{(\beta + 1)^2} = \frac{(\beta + 1)^2 - M_\infty^2}{(\beta + 1)^2} = \frac{2 + 2\beta - 2M_\infty^2}{(\beta + 1)^2} = \frac{2\beta + 2(1 - M_\infty^2)}{(\beta + 1)^2} = \frac{2\beta + 2\beta^2}{(\beta + 1)^2}$$

$$1 - \lambda = \frac{2\beta + 2\beta^2}{(\beta + 1)^2}$$

$$2\beta + 2\beta^2 = (\beta + 1)^2 - M_\infty^2$$



Linearizzazione delle equazioni

$$(18) \quad \sqrt{\lambda} = \frac{M_{\infty}}{\sqrt{1-M_{\infty}^2} + 1}$$

$$(20) \quad \frac{V}{V_{\infty}} = \frac{\sqrt{1-C_{pi}}(1-\lambda)}{1-\lambda(1-C_{pi})}$$

$$(\beta+1)^2 = 2 + 2\beta - M_{\infty}^2$$

$$1-\lambda = \frac{2\beta+2\beta^2}{(\beta+1)^2} \quad 2\beta+2\beta^2 = (\beta+1)^2 - M_{\infty}^2$$

Sostituendo nella (20) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{V}{V_{\infty}} &= \frac{\sqrt{1-C_{pi}}(1-\lambda)}{1-\lambda(1-C_{pi})} = \frac{\sqrt{1-C_{pi}}(1-\lambda)}{(1-\lambda)+\lambda C_{pi}} = \frac{\sqrt{1-C_{pi}} \frac{2\beta+2\beta^2}{(\beta+1)^2}}{\frac{2\beta+2\beta^2}{(\beta+1)^2} + \frac{M_{\infty}^2}{(\beta+1)^2} C_{pi}} = \\ &= \frac{2\beta(\beta+1)\sqrt{1-C_{pi}}}{2\beta(\beta+1)+M_{\infty}^2 C_{pi}} = \frac{\beta\sqrt{1-C_{pi}}}{\beta + \frac{M_{\infty}^2 C_{pi}}{2(\beta+1)}} = \frac{\beta\sqrt{1-C_{pi}}}{A} \end{aligned} \quad A = \beta + \frac{M_{\infty}^2 C_{pi}}{2(\beta+1)}$$



Linearizzazione delle equazioni

$$\frac{V}{V_{\infty}} = \frac{\beta\sqrt{1-C_{pi}}}{A}$$

$$A = \beta + \frac{M_{\infty}^2 C_{pi}}{2(\beta+1)}$$

$$2\beta+2\beta^2 = (\beta+1)^2 - M_{\infty}^2$$

Da cui: $C_{pi} M_{\infty}^2 = (A-\beta)2(\beta+1)$

$$(19) \quad C_p = \frac{2}{M_{\infty}^2} \left(1 - \sqrt{M_{\infty}^2 \frac{V^2}{V_{\infty}^2} + 1 - M_{\infty}^2} \right)$$

La radice può essere messa nella forma:

$$\begin{aligned} \sqrt{M_{\infty}^2 \frac{V^2}{V_{\infty}^2} + 1 - M_{\infty}^2} &= \sqrt{M_{\infty}^2 \frac{\beta^2(1-C_{pi})}{A^2} + \beta^2} = \frac{\beta}{A} \sqrt{M_{\infty}^2(1-C_{pi}) + A^2} = \\ &= \frac{\beta}{A} \sqrt{M_{\infty}^2 - (A-\beta)2(\beta+1) + A^2} = \frac{\beta}{A} \sqrt{M_{\infty}^2 - 2A(\beta+1) + 2(\beta^2 + \beta) + A^2} = \\ &= \frac{\beta}{A} \sqrt{-2A(\beta+1) + (\beta+1)^2 + A^2} = \frac{\beta}{A} \sqrt{(A-(\beta+1))^2} = \pm \frac{\beta}{A} (A-(\beta+1)) \end{aligned}$$

Scegliendo il segno meno e sostituendo nella (19):

$$C_p = \frac{2}{M_{\infty}^2} \left(1 + \frac{\beta}{A} (A-(\beta+1)) \right) = \frac{2}{M_{\infty}^2} \left(\frac{A+A\beta-\beta(\beta+1)}{A} \right) = \frac{2}{M_{\infty}^2} \left(\frac{A(\beta+1)-\beta(\beta+1)}{A} \right)$$



Linearizzazione delle equazioni

$$C_p = \frac{2}{M_\infty^2} \left(\frac{A(\beta+1) - \beta(\beta+1)}{A} \right) = \frac{2}{M_\infty^2} \left(\frac{(A-\beta)(\beta+1)}{A} \right) =$$

$$= \frac{C_{pi}}{A} = \frac{C_{pi}}{\beta + \frac{M_\infty^2 C_{pi}}{2(\beta+1)}}$$

$$A = \beta + \frac{M_\infty^2 C_{pi}}{2(\beta+1)}$$

Da cui

$$C_{pi} M_\infty^2 = (A - \beta) 2(\beta + 1)$$

Infine si trova la formula di kàrmàn-Tsien:

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2}{(\sqrt{1-M_\infty^2} + 1)} \frac{C_{pi}}{2}}$$



Linearizzazione delle equazioni

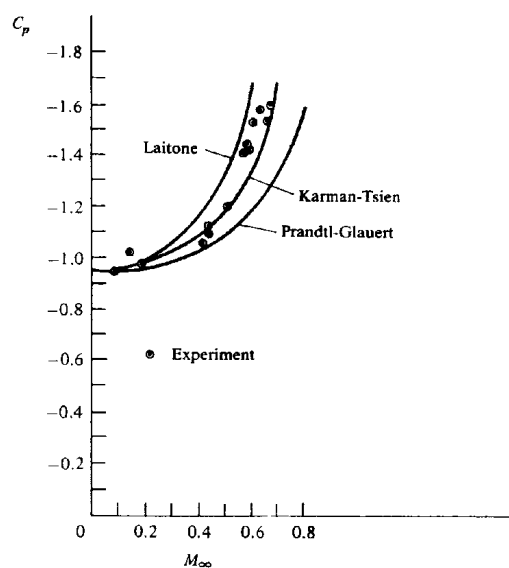
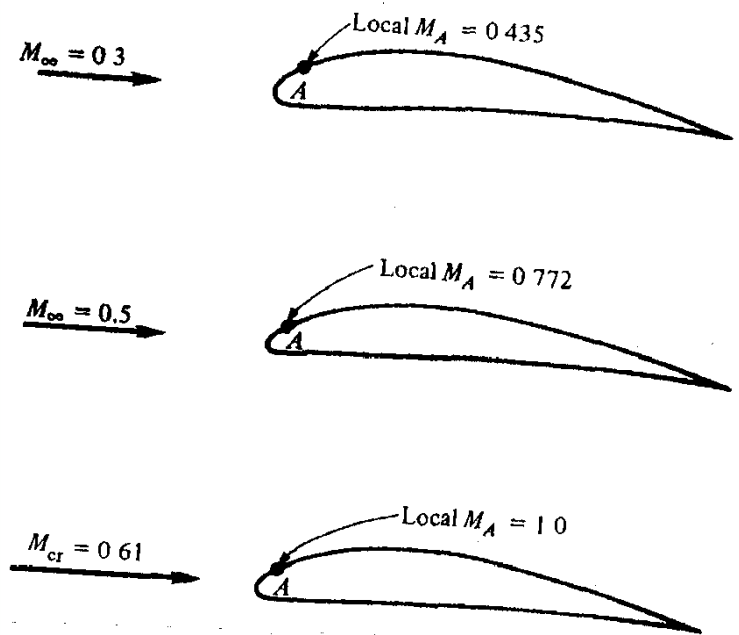


Figure 3: Compressibility corrections for C_p compared with experimental results for a NACA 4412 airfoil at an angle of attack of $\alpha = 1^\circ 53'$. C_p is measured at 0.30-chord location.



Linearizzazione delle equazioni

Il limite delle leggi di similitudine subsoniche è quando si raggiunge $M=1$ in qualche punto del campo di moto. In queste condizioni il valore del numero di Mach all'infinito viene chiamato **Mach critico inferiore**.

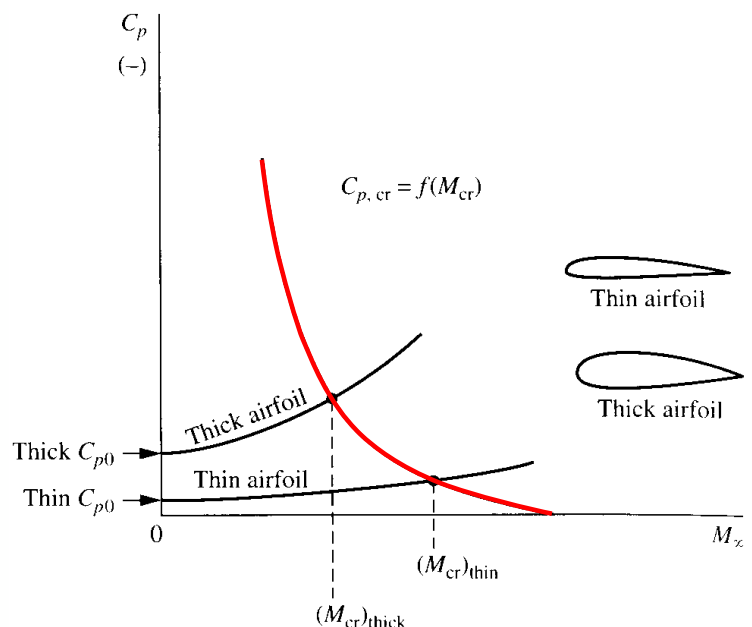


Linearizzazione delle equazioni

Dalla trasformazione isentropica si ha:

$$\frac{p^*}{p_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad C_{pCr} = \frac{2}{\gamma M_{Cr}^2} \left(\frac{p^*}{p_\infty} - 1 \right) = \frac{2}{\gamma M_{Cr}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{Cr}^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

Per determinare il M_{cr} si deve trovare l'intersezione fra la curva del C_{pCr} (rossa) e la curva che si ottiene, supponendo di conoscere il C_{pi} , da una delle correzioni di compressibilità.



Linearizzazione delle equazioni

Le linee iso Mach sono ricavate con:

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

