

Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it



Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 10 del 18/11/14

Moto Supersonico

L'equazione del potenziale è:

$$(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \qquad c_1 = 1 - M_\infty^2$$

Ricordando che:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_1} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - (1 - M_\infty^2) 1}}{1 - M_\infty^2} = \frac{\pm \sqrt{M_\infty^2 - 1}}{1 - M_\infty^2} = \mp \frac{1}{\sqrt{(M_\infty^2 - 1)}} = \mp \operatorname{tg}(\mu)$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{0 \mp \sqrt{0 - (1 - M_\infty^2) 1}}{1} = \mp \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

Con:

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1} \qquad \varphi = \varphi' + u_\infty x \qquad u' = \varphi'_x \quad v' = \varphi'_y$$

$$\text{Si ha: } \frac{dy}{dx} = \mp \frac{1}{\beta} \qquad \frac{dv}{du} = \mp \beta \qquad -\beta^2 \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = 0$$

Che è l'equazione delle onde a volte scritta anche come:

$$\varphi_{tt} = c^2 \varphi_{xx}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto Supersonico

Integrando l'equazione $\frac{dy}{dx} = \mp \frac{1}{\beta}$ si ha: $\beta y \pm x = \text{cost}$ $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$

Imponendo $\xi = x + \beta y$ e $\eta = x - \beta y$ la soluzione generale dell'equazione del potenziale è:

$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta) \quad \begin{array}{l} \xi_x = 1 \quad \xi_y = \beta \\ \eta_x = 1 \quad \eta_y = -\beta \end{array}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \varphi'_x &= f'(\xi)\xi_x + g'(\eta)\eta_x = f' + g' & \varphi'_{xx} &= f'' + g'' \\ \varphi'_y &= f'(\xi)\xi_y + g'(\eta)\eta_y = (f' - g')\beta & \varphi'_{yy} &= (f'' + g'')\beta^2 \end{aligned}$$

Da cui:

$$-\beta^2 \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = 0$$

Che è identicamente soddisfatta.

$$-\beta^2 (f'' + g'') + (f'' + g'')\beta^2 = 0$$



Moto Supersonico

$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

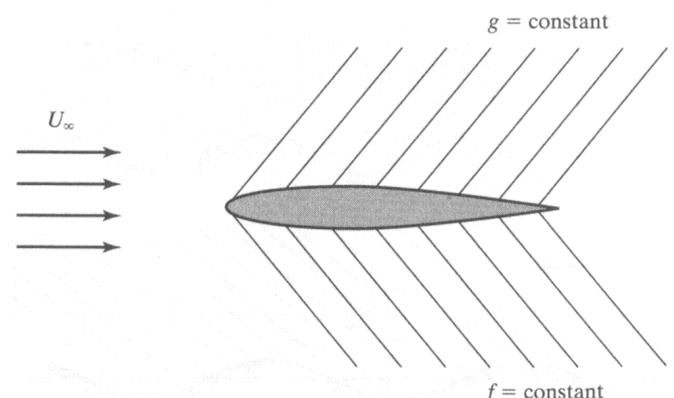
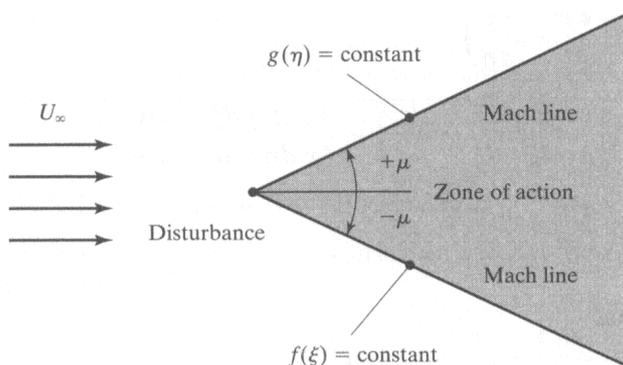
L'equazione delle curve caratteristiche

$$\xi = x + \beta y \quad \eta = x - \beta y$$

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{1}{\beta} = \mp \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \mp \tan(\mu) = \tan(\mp \mu)$$

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

Implica che lungo la prima caratteristica (quella identificata dal segno meno) ξ è costante viceversa lungo la seconda caratteristica η è costante.



Moto Supersonico su parete sinusoidale

Si supponga che la superficie del corpo sia data dall'equazione:

$$y|_{\text{Corpo}} = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad A \ll \lambda$$

L'ipotesi aggiuntiva serve per assicurare che l'ipotesi dei piccoli disturbi sia verificata. Le condizioni al contorno sono:

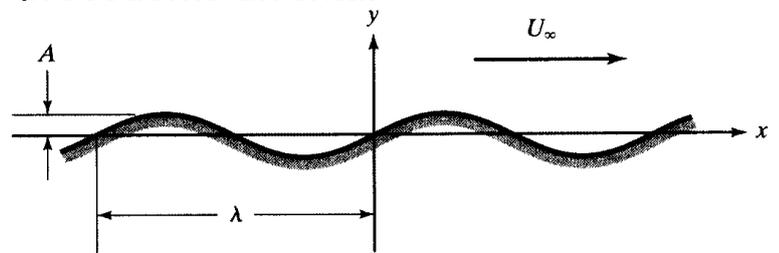
$$v'(x,0) = \varphi'_y(x,0) = u_\infty \frac{dy}{dx}\Big|_{\text{Corpo}} = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad y \rightarrow \infty \quad u', v' \text{ finiti}$$

Per $y > 0$ poiché il disturbo parte dal basso la funzione f è identicamente nulla. Quindi:

$$\varphi'_y(x,0) = g'(\eta|_{y=0}) \eta_y = -\beta g'(\eta|_{y=0}) = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \varphi' = f(\xi) + g(\eta) \\ \xi = x + \beta y \quad \eta = x - \beta y$$

Per $y=0$ si ha che $\eta=x$ e la relazione precedente diventa:

$$\beta g'(\eta) = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi \eta}{\lambda}\right)$$



Complementi di Gasdinamica – T. $y_p = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

Moto Supersonico su parete sinusoidale

$$\beta g'(\eta) = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi \eta}{\lambda}\right)$$

$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\xi = x + \beta y \quad \eta = x - \beta y$$

$$g = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda \beta} \int \cos\left(\frac{2\pi \eta}{\lambda}\right) d\eta = -u_\infty A \frac{1}{\beta} \sin\left(\frac{2\pi \eta}{\lambda}\right) + C$$

Senza perdere di generalità si può imporre $C=0$. Quindi il potenziale diventa:

$$\varphi' = -u_\infty A \frac{1}{\beta} \sin\left(\frac{2\pi \eta}{\lambda}\right) = -u_\infty A \frac{1}{\beta} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

Le componenti della velocità:

$$u' = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$v' = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$C_p = \frac{-2u'}{u_\infty} = A \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$



Complementi di Gasdinamica – T. Astarita

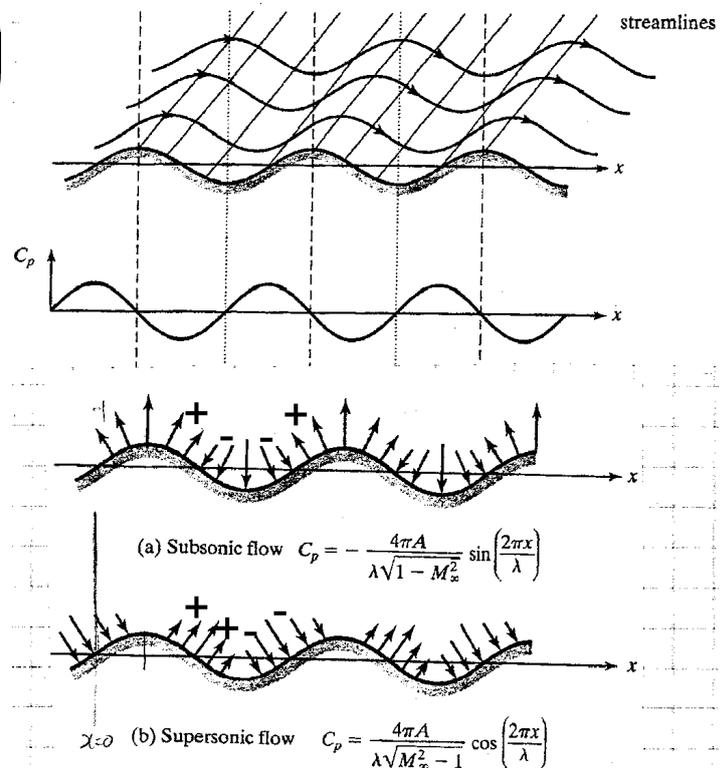
Moto Supersonico su parete sinusoidale

$$u' = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$v' = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$C_p = \frac{-2u'}{u_\infty} = A \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

- L'ampiezza delle oscillazioni, al contrario di quello che succede in regime subsonico, non si smorza al tendere di y verso l'infinito. La perturbazione viene trasmessa attraverso le linee di Mach;
- Il coefficiente di pressione è sfasato di 90° rispetto alla superficie producendo una resistenza;
- I disturbi aumentano al diminuire del numero di Mach (M che tende ad 1).



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto Supersonico su parete sinusoidale

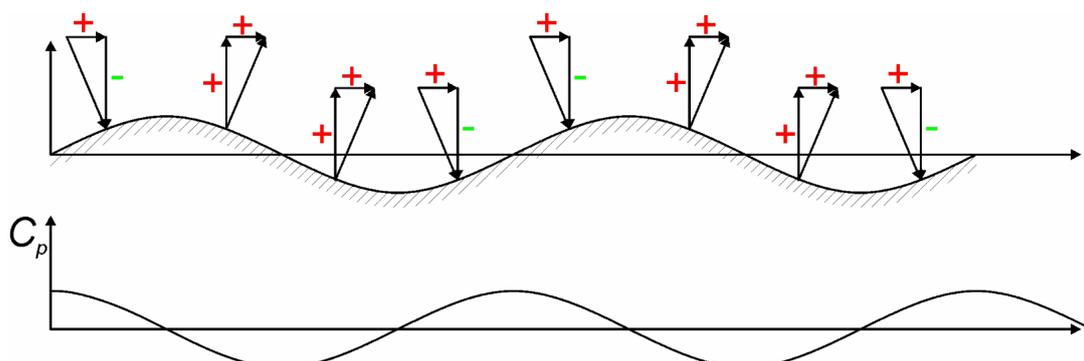
$$u' = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$v' = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$C_p = \frac{-2u'}{u_\infty} = A \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$\varphi' = -u_\infty A \frac{1}{\beta} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

$$y|_{\text{Corpo}} = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad A \ll \lambda$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Profili sottili

$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\xi = x + \beta y \quad \eta = x - \beta y$$

Sulla parte superiore del profilo (upper) si può supporre che f sia nulla quindi: $\varphi' = g(\eta)$

La condizione al contorno è:

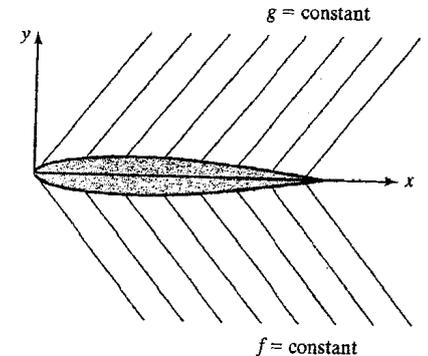
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_u = y'_u = \frac{v'(x,0)}{u_\infty} = \frac{\varphi'_y(x,0)}{u_\infty} = \frac{g' \eta_y}{u_\infty} = -\frac{g' \beta}{u_\infty}$$

Da cui si può ricavare g' .

$$g' = -\frac{u_\infty y'_u}{\beta}$$

Il coefficiente di pressione è:

$$C_{p_u} = \frac{-2u'(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2\varphi'_x(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2g' \eta_x}{u_\infty} = \frac{2u_\infty y'_u}{\beta} \frac{1}{u_\infty} = \frac{2y'_u}{\beta}$$



Profili sottili

$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\xi = x + \beta y \quad \eta = x - \beta y$$

In modo analogo sulla parte inferiore del profilo (lower) si può supporre che g sia nulla quindi: $\varphi' = f(\xi)$

La condizione al contorno è:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_l = y'_l = \frac{v'(x,0)}{u_\infty} = \frac{\varphi'_y(x,0)}{u_\infty} = \frac{f' \xi_y}{u_\infty} = \frac{f' \beta}{u_\infty}$$

Da cui si può ricavare f' .

$$f' = \frac{u_\infty y'_l}{\beta}$$

Il coefficiente di pressione è:

$$C_{p_l} = \frac{-2u'(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2\varphi'_x(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2f' \xi_x}{u_\infty} = -\frac{2u_\infty y'_l}{\beta} \frac{1}{u_\infty} = -\frac{2y'_l}{\beta}$$

Al primo ordine si ha (il segno + vale per il dorso):

$$(1) \quad C_p = \pm \frac{2y'}{\beta}$$



Profili sottili

Allo stesso risultato si può arrivare anche a partire dalla relazione che lega δ , ε e M attraverso un'onda d'urto obliqua. Seguendo questa strada è possibile ricavare, abbastanza facilmente, anche una relazione che tiene in conto anche i termini del secondo ordine.

$$\tan(\delta) = \frac{M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1}{\tan(\varepsilon) \left(\frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 - M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) + 1 \right)}$$

$$\tan(\delta) \tan(\varepsilon) \left(\frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 - M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) + 1 \right) = (M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1)$$

$$(2) \tan(\delta) \tan(\varepsilon) \frac{\gamma+1}{2} M_\infty^2 = (M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1) (1 + \tan(\delta) \tan(\varepsilon))$$

Supponendo:

$$\delta \rightarrow 0 \quad e \quad \varepsilon \rightarrow \mu + a \quad con \quad a \rightarrow 0$$

Si ha sviluppando in serie fino al primo ordine in a :

$$\sin^2(\varepsilon) = \sin^2(\mu) + \left. \frac{d \sin^2(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_\mu a + o(a^2)$$



Profili sottili

$$\sin^2(\varepsilon) \cong \sin^2(\mu) + \left. \frac{d \sin^2(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_\mu a = \sin^2(\mu) + 2 \sin(\mu) \cos(\mu) a$$

$$\tan(\varepsilon) \cong \tan(\mu) + \left. \frac{d \tan(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_\mu a = \tan(\mu) + \frac{a}{\cos^2(\mu)}$$

Ma:

$$\sin^2(\mu) = \frac{1}{M_\infty^2} \quad \cos(\mu) = \sqrt{\frac{M_\infty^2 - 1}{M_\infty^2}} = \frac{1}{M_\infty} \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \frac{1}{M_\infty} \beta \quad \tan(\mu) = \frac{1}{\beta}$$

$$\sin^2(\varepsilon) \cong \frac{1}{M_\infty^2} + 2 \frac{\beta}{M_\infty^2} a \quad \tan(\varepsilon) \cong \frac{1}{\beta} + \frac{a M_\infty^2}{\beta^2}$$

Inoltre:

$$\tan(\delta) \cong \tan(0) + \left. \frac{d \tan(\delta)}{d\delta} \right|_0 \delta + \left. \frac{d^2 \tan(\delta)}{d\delta^2} \right|_0 \frac{\delta^2}{2} + o(\delta^3) =$$

$$= \tan(0) + \left. \frac{1}{\cos^2(\delta)} \right|_0 \delta - \left. \frac{2 \sin(\delta)}{\cos^3(\delta)} \right|_0 \frac{\delta^2}{2} + o(\delta^3) = \delta + o(\delta^3)$$



Profili sottili

$$\sin^2(\varepsilon) \cong \frac{1}{M_\infty^2} + 2 \frac{\beta}{M_\infty^2} a \quad \tan(\varepsilon) \cong \frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \quad \tan(\delta) \cong \delta$$

La (2) $\tan(\delta)\tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = (M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1)(1 + \tan(\delta)\tan(\varepsilon))$

$$\tan(\delta)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = \left(M_\infty^2\left(\frac{1}{M_\infty^2} + 2\frac{\beta}{M_\infty^2}a\right) - 1\right)\left(1 + \tan(\delta)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)\right)$$

Da cui trascurando termini di ordine a e δ rispetto a termini unitari:

$$\tan(\delta)\frac{1}{\beta}\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = 2\beta a$$

$$a = \frac{1}{\beta^2}\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2 \tan(\delta)$$

Che è un legame tra a e δ .



Profili sottili

Poiché: $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{\gamma+1}(2\gamma M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - (\gamma-1))$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{1}{\gamma+1}(2\gamma M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - (\gamma-1)) - 1 = \frac{1}{\gamma+1}(2\gamma M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - \gamma + 1 - \gamma + 1)$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1)$$

Dalla (2) si ha: (2) $\tan(\delta)\tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = (M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1)(1 + \tan(\delta)\tan(\varepsilon))$

$$M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1 = \frac{\tan(\delta)\tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2}{1 + \tan(\delta)\tan(\varepsilon)} \quad \tan(\varepsilon) = \frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}$$

Quindi:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{\tan(\delta)\tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2}{1 + \tan(\delta)\tan(\varepsilon)} \right) \cong \frac{\gamma \tan(\delta) \left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \right) M_\infty^2}{1 + \tan(\delta) \left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \right)}$$



Profili sottili

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \cong \gamma \frac{\tan(\delta) \left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \right) M_\infty^2}{1 + \tan(\delta) \left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \right)} \cong \gamma \frac{\delta M_\infty^2 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \right)}{1 + \delta \left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \right)} \quad \tan(\delta) = \delta + o(\delta^3)$$

Da cui sostituendo $a = \frac{1}{\beta^2} \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^2 \tan(\delta)$ si ha:

$$\begin{aligned} \frac{p_2 - p_1}{p_1} &\cong \gamma \delta M_\infty^2 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\frac{1}{\beta^2} \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^2 \delta M_\infty^2}{\beta^2} \right) \left(1 + \frac{\delta}{\beta} + \frac{\delta \frac{1}{\beta^2} \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^2 \delta M_\infty^2}{\beta^2} \right)^{-1} = \\ &= \gamma \delta M_\infty^2 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma+1}{4} \frac{\delta}{\beta^4} M_\infty^4 \right) \left(1 + \frac{\delta}{\beta} \right)^{-1} \cong \gamma \delta M_\infty^2 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\gamma+1}{4} \frac{\delta}{\beta^4} M_\infty^4 \right) \left(1 - \frac{\delta}{\beta} \right) = \\ \frac{p_2 - p_1}{p_1} &\cong \gamma M_\infty^2 \frac{\delta}{\beta} \left(1 + \frac{\delta}{\beta} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) + \frac{\delta^2}{\beta^4} \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^4 \right) \end{aligned}$$



Profili sottili

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \cong \gamma M_\infty^2 \frac{\delta}{\beta} \left(1 + \frac{\delta}{\beta} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \right)$$

Imponendo $p_1 = p_\infty$ $p_2 = p$:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \frac{p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \frac{2}{\gamma M_\infty^2}$$

Si ha:

$$C_p = 2 \frac{\delta}{\beta} \left[1 + \frac{\delta}{\beta} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \right]$$

L'angolo di deviazione δ può essere ricavato dalla seguente relazione (il segno + vale per il dorso):

$$\delta \cong \tan(\delta) = \begin{cases} +y'_u & \text{Sul dorso} \\ -y'_i & \text{Sul ventre} \end{cases} \quad \delta \cong \tan(\delta) = \pm y'$$



Profili sottili

$$C_p = 2 \frac{\delta}{\beta} \left[1 + \frac{\delta}{\beta} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \right]$$

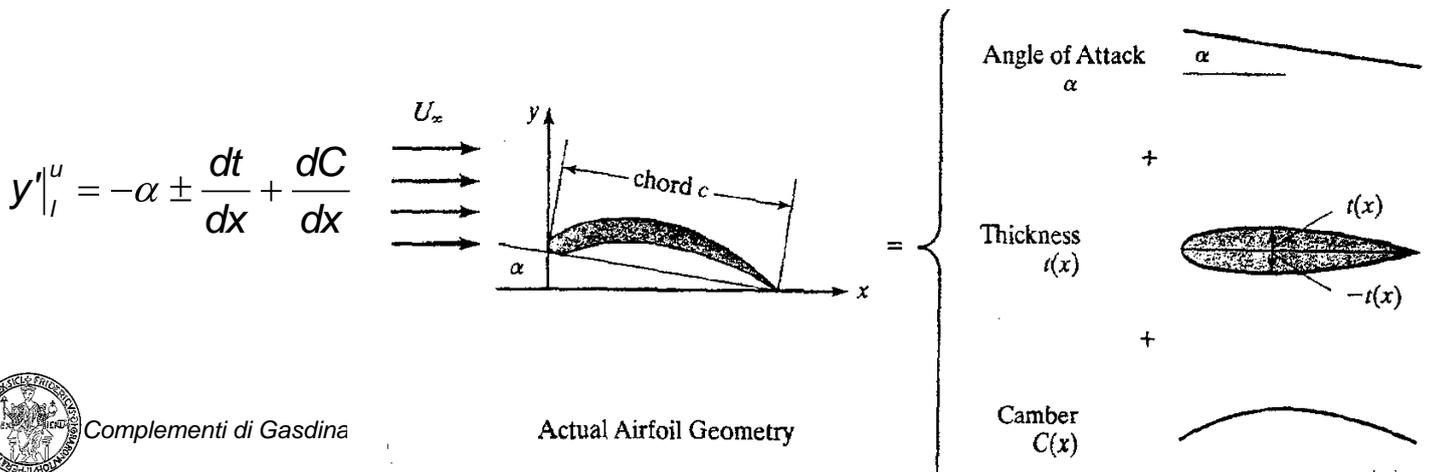
$$\delta \cong \tan(\delta) = \pm y'$$

Quindi:

$$C_p = \pm \frac{2y'}{\beta} \left[1 + \frac{\pm y'}{\beta} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \right]$$

Evidentemente al primo ordine si ritrova la: (1) $C_p = \pm \frac{2y'}{\beta}$

Come mostrato in figura y' può essere ricavato a partire dalla conoscenza delle caratteristiche geometriche del profilo.



Profili sottili

La forza elementare agente sulla superficie superiore può essere ricavata con la relazione:

$$dF_u = p ds = C_{pu} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} ds + p_\infty ds$$

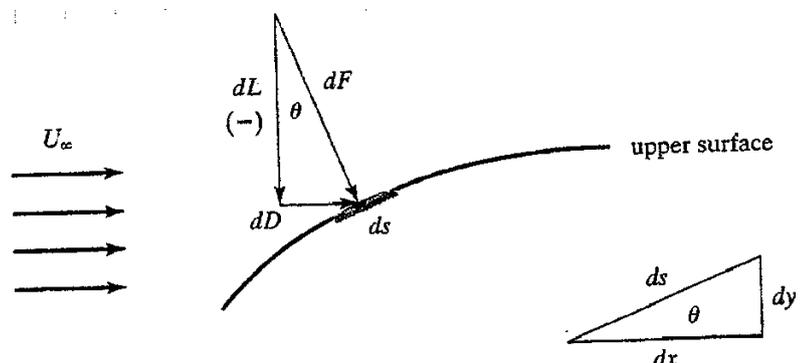
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \frac{2}{\gamma M_\infty^2}$$

Proiettando questa forza sugli assi di riferimento (l'asse x è allineato con la velocità asintotica) si ottengono la portanza e la resistenza elementari:

$$dL_u = -dF_u \cos \theta = -C_{pu} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dx - p_\infty dx$$

$$dD_u = dF_u \sin \theta = C_{pu} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dy + p_\infty dy$$

Si considera sempre $y' > 0$
in modo che $ds \sin(\theta) = dy$



Profili sottili

Procedendo in modo analogo sulla superficie inferiore si ha:

$$dF_l = p ds = C_{pl} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} ds + p_\infty ds$$

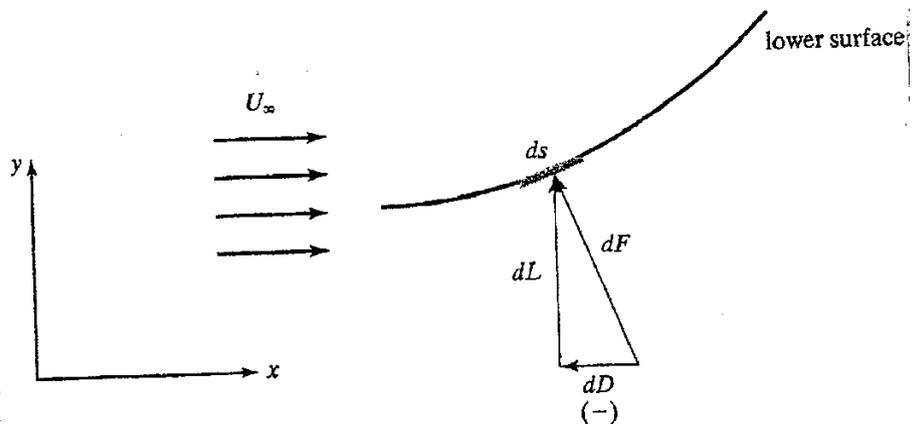
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \frac{2}{\gamma M_\infty^2}$$

Proiettando questa forza sugli assi di riferimento (l'asse x è allineato con la velocità asintotica) si ottengono la portanza e la resistenza elementari:

$$dL_l = dF_l \cos \theta = C_{pl} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dx + p_\infty dx$$

$$dD_l = -dF_l \sin \theta = -C_{pl} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dy - p_\infty dy$$

Si considera sempre $y' > 0$
in modo che $ds \sin(\theta) = dy$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Profili sottili

$$dL_u = -C_{pu} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dx - p_\infty dx$$

$$dL_l = C_{pl} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dx + p_\infty dx$$

$$dD_u = C_{pu} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dy + p_\infty dy$$

$$dD_l = -C_{pl} \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} dy - p_\infty dy$$

Le forze aerodinamiche sul profilo si ricavano integrando le forze elementari:

$$L = \int_0^c (dL_u + dL_l) = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \int_0^c (C_{pl} - C_{pu}) dx + \int_0^c (p_\infty - p_\infty) dx$$

$$D = \int_0^c (dD_u + dD_l) = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \int_0^c \left(C_{pu} \frac{dy}{dx} \Big|_u - C_{pl} \frac{dy}{dx} \Big|_l \right) dx + \int_0^c \left(p_\infty \frac{dy}{dx} \Big|_u - p_\infty \frac{dy}{dx} \Big|_l \right) dx =$$

$$= \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \int_0^c \left(C_{pu} y'_u - C_{pl} y'_l \right) dx + p_\infty \int_0^c (y'_u - y'_l) dx$$

L'ultimo integrale è nullo perché è esteso ad una superficie chiusa.



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Profili sottili

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \int_0^c (C_{pl} - C_{pu}) dx \quad C_p = \pm \frac{2y'}{\beta} \left[1 + \frac{\pm y'}{\beta} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \right]$$

Sostituendo si ha:

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \left[\frac{2}{\beta} \int_0^c (-y'_l - y'_u) dx + \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \int_0^c (y'^2_l - y'^2_u) dx \right]$$

Ricordando che:

$$y'^u_l = -\alpha \pm \frac{dt}{dx} + \frac{dC}{dx}$$

Il primo integrale diventa:

$$\int_0^c \left(+2\alpha - \left(-\frac{dt}{dx} + \frac{dC}{dx} \right)_l - \left(+\frac{dt}{dx} + \frac{dC}{dx} \right)_u \right) dx = 2\alpha c$$

Il secondo e terzo integrando si annullano perché sia lo spessore che la curvatura sono nulli sia sul bordo d'attacco che su quello d'uscita.



Profili sottili

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \left[\frac{2}{\beta} \int_0^c (-y'_l - y'_u) dx + \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \int_0^c (y'^2_l - y'^2_u) dx \right] \quad y'^u_l = -\alpha \pm t' + C'$$

Il secondo integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int_0^c (y'^2_l - y'^2_u) dx &= \int_0^c \left((-\alpha - t' + C')^2 - (-\alpha + t' + C')^2 \right) dx = \\ &= \int_0^c \left(\alpha^2 + t'^2 + C'^2 + 2\alpha t' - 2\alpha C' - 2t' C' \right) - \left(\alpha^2 + t'^2 + C'^2 - 2\alpha t' - 2\alpha C' + 2t' C' \right) dx = \\ &= \int_0^c (4\alpha t' - 4t' C') dx = -4c \overline{t' C'} \end{aligned}$$

La portanza diventa quindi:

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty c}{2} \left[\frac{4\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) 4 \overline{t' C'} \right]$$



Profili sottili

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty c}{2} \left[\frac{4\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) 4\overline{t'C'} \right]$$

Il coefficiente di portanza diventa:

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{L}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2 p_\infty c} = \left[\frac{4\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) 4\overline{t'C'} \right]$$

Al primo ordine si ha:

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Mentre al secondo ordine si aggiunge un termine:

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\overline{t'C'}}{M_\infty^2 - 1} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1} - 1 \right)$$

Che per freccia positiva è negativo. Quindi un profilo supersonico si comporta in modo opposto ad uno subsonico anche se questo effetto è del secondo ordine.



Profili sottili

$$D = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \int_0^c (C_{pu} y'_u - C_{pl} y'_l) dx \qquad C_p = \pm \frac{2y'}{\beta} \left[1 + \frac{\pm y'}{\beta} \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1 \right) \right]$$

Per valutare la resistenza si procede in modo simile. Per ottenere un risultato accurato al secondo ordine è inutile considerare i due termini presenti nell'espressione del coefficiente di pressione. Infatti nella formula per la resistenza C_p è moltiplicato per un termine del primo ordine. Quindi:

$$D = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \frac{2}{\beta} \int_0^c (y_u'^2 + y_l'^2) dx \qquad y'|_l = -\alpha \pm t' + C'$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \frac{2}{\beta} \int_0^c \left((-\alpha + t' + C')^2 + (-\alpha - t' + C')^2 \right) dx = \\ &= \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \frac{2}{\beta} \int_0^c \left((\alpha^2 + t'^2 + C'^2 - 2\cancel{\alpha t'} - 2\alpha C' + 2\cancel{t' C'}) + (\alpha^2 + t'^2 + C'^2 + 2\cancel{\alpha t'} - 2\alpha C' - 2\cancel{t' C'}) \right) dx = \\ &= \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \frac{2}{\beta} \int_0^c (2\alpha^2 + 2t'^2 + 2C'^2 - 4\cancel{\alpha C'}) dx = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2} \frac{4c}{\beta} (\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2}) \end{aligned}$$



Profili sottili

$$D = \frac{\gamma M_\infty^2 \rho_\infty}{2} \frac{4c}{\beta} (\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2})$$

Il coefficiente di resistenza diventa:

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \gamma M_\infty^2 \rho_\infty c} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2}) \quad C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\overline{t' C'}}{M_\infty^2 - 1} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1} - 1 \right)$$

Che è una formula accurata al secondo ordine. Si vede che il coefficiente di resistenza è legato al quadrato dell'angolo d'attacco, della freccia e dello spessore percentuale. Il coefficiente di portanza invece ha una proporzionalità diretta con l'angolo d'attacco mentre al secondo ordine dipende anche dallo spessore e dalla freccia.



Profili sottili

Esaminiamo ora il caso di un semplice profilo a diamante:



$$\tan(\alpha_c) = \frac{f}{c/2} \quad \tan(\alpha_t) = \frac{s}{c} \quad t(x) = \begin{cases} x \tan(\alpha_t) & x < \frac{c}{2} \\ (1-x) \tan(\alpha_t) & x > \frac{c}{2} \end{cases} \quad C(x) = \begin{cases} x \tan(\alpha_c) & x < \frac{c}{2} \\ (1-x) \tan(\alpha_c) & x > \frac{c}{2} \end{cases}$$

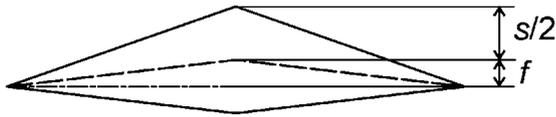
$$\overline{t'^2} = \frac{1}{c} \int_0^c t'^2 dx = \frac{1}{c} \int_0^c \tan^2(\alpha_t) dx = \tan^2(\alpha_t)$$

$$\overline{C'^2} = \frac{1}{c} \int_0^c C'^2 dx = \frac{1}{c} \int_0^c \tan^2(\alpha_c) dx = \tan^2(\alpha_c)$$

$$\overline{t' C'} = \frac{1}{c} \int_0^c t' C' dx = \frac{1}{c} \int_0^c \tan(\alpha_t) \tan(\alpha_c) dx = \tan(\alpha_t) \tan(\alpha_c)$$



Profili sottili



$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\overline{t'C'}}{M_\infty^2 - 1} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1} - 1 \right)$$

$$C_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2} \right)$$

$$\overline{t'^2} = \tan^2(\alpha_t) \quad \overline{C'^2} = \tan^2(\alpha_c) \quad \overline{t'C'} = \tan(\alpha_t)\tan(\alpha_c)$$

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8 \tan(\alpha_t)\tan(\alpha_c)}{M_\infty^2 - 1} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1} - 1 \right)$$

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2 \rho_\infty c} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \tan^2(\alpha_t) + \tan^2(\alpha_c) \right)$$



Linearizzazione delle equazioni



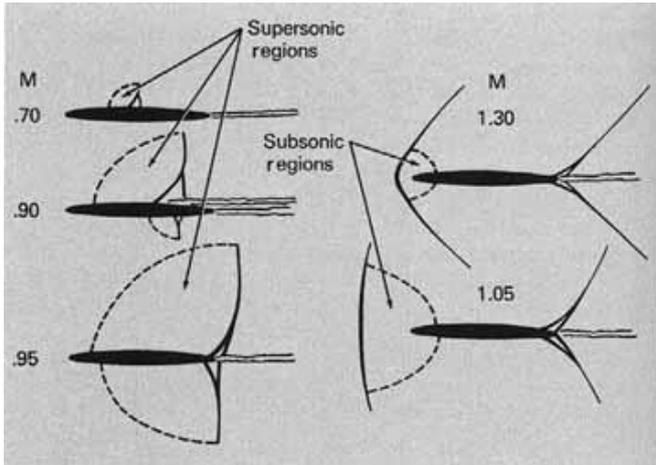
$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8 \tan(\alpha_t)\tan(\alpha_c)}{M_\infty^2 - 1} \left(\frac{\gamma + 1}{4} \frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1} - 1 \right)$$

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2 \rho_\infty c} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \tan^2(\alpha_t) + \tan^2(\alpha_c) \right)$$

alpha	s/2	f	Cl	Cl 1°	Cl 2°	Err% 1°	Err% 2°	Cd	Cd	Err %
0	0.01	0.01	-0.00235	0	-0.00235	-100	-0.32249	0.00185	0.001847	-0.1796
5	0.01	0.01	0.199958	0.201533	0.199187	0.787982	-0.38544	0.018972	0.019434	2.434225
0	0.02	0.01	-0.00472	0	-0.00469	-100	-0.6195	0.004632	0.004615	-0.36568
5	0.02	0.01	0.19803	0.201533	0.196842	1.769196	-0.59956	0.021232	0.022202	4.566143
0	0.02	0.02	-0.00946	0	-0.00938	-100	-0.81197	0.007435	0.007382	-0.70905
5	0.02	0.02	0.19363	0.201533	0.192152	4.081543	-0.76361	0.022883	0.024969	9.117418
0	0.05	0.05	-0.06037	0	-0.05847	-100	-3.14665	0.047983	0.045884	-4.37507
5	0.05	0.05	0.148915	0.201533	0.143059	35.33445	-3.9324	0.051467	0.063471	23.32312



Moto Transonico

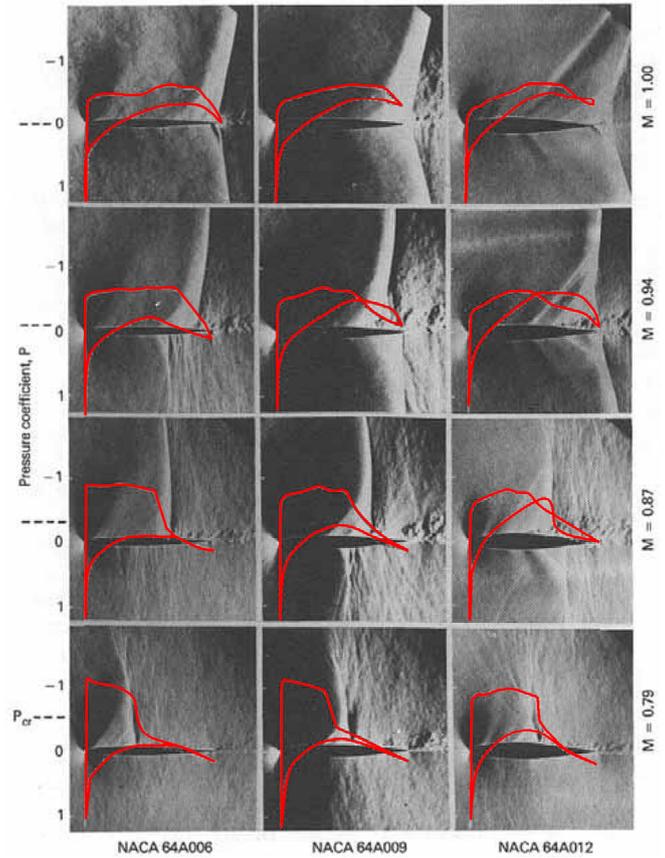


Transonic flows and pressure distributions, Mach. 0.79 to 1.00. Angle of attack, 3.2 deg. From the 4 x 19-Inch Semi-Open High-Speed Tunnel, 1949. Becker, The high speed frontier, sp445, 1980.

<http://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/SP-445/cover.htm>

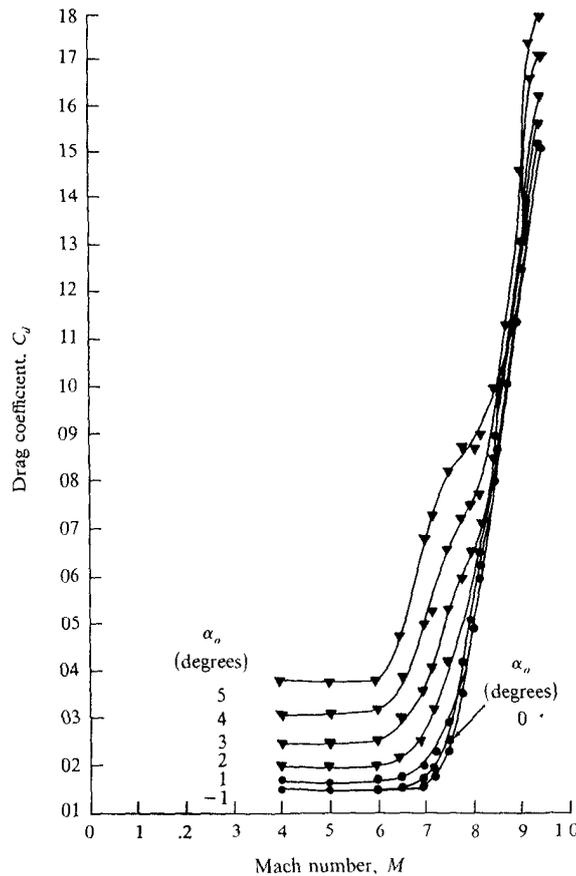


Complementi di Gasdinamica – T Astarita



29

Moto Transonico



Complementi di Gasdinamica

30

Moto Transonico

Si supponga che: $\tau = \frac{S}{c} \ll 1$

Come si è visto nell'analisi qualitativa del campo di moto i disturbi, in regime transonico, tendono ad essere più estesi in direzione normale alla direzione del flusso principale. Per questo motivo si impone:

$$\xi = \frac{x}{c} \quad \eta = \frac{y\tau^{\frac{1}{3}}}{c} \quad \varphi' = \frac{\varphi}{cu_{\infty}\tau^{\frac{2}{3}}} \quad \xi_x = \frac{1}{c} \quad \eta_y = \frac{1}{c\tau^{\frac{1}{3}}}$$

Sostituendo nella $(1 - M_{\infty}^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = (\gamma + 1)M_{\infty}^2 \frac{u'}{u_{\infty}} \varphi_{xx}$

$$(1 - M_{\infty}^2)cu_{\infty}\tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + cu_{\infty}\tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_{\eta\eta}(\eta_y)^2 = (\gamma + 1)\frac{M_{\infty}^2}{u_{\infty}}\left(cu_{\infty}\tau^{\frac{2}{3}}\right)^2\varphi'_{\xi}\xi_x\varphi'_{\xi\xi}(\xi_x)^2$$

$$(1 - M_{\infty}^2)\frac{cu_{\infty}\tau^{\frac{2}{3}}}{c^2}\varphi'_{\xi\xi} + \frac{cu_{\infty}\tau^{\frac{4}{3}}}{c^2}\varphi'_{\eta\eta} = (\gamma + 1)M_{\infty}^2\left(\frac{c^2u_{\infty}\tau^{\frac{4}{3}}}{c^3}\right)\varphi'_{\xi}\varphi'_{\xi\xi}$$



Moto Transonico

$$(1 - M_{\infty}^2)\frac{cu_{\infty}\tau^{\frac{2}{3}}}{c^2}\varphi'_{\xi\xi} + \frac{cu_{\infty}\tau^{\frac{4}{3}}}{c^2}\varphi'_{\eta\eta} = (\gamma + 1)M_{\infty}^2\left(\frac{c^2u_{\infty}\tau^{\frac{4}{3}}}{c^3}\right)\varphi'_{\xi}\varphi'_{\xi\xi}$$

$$(1 - M_{\infty}^2)\varphi'_{\xi\xi} + \tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_{\eta\eta} = (\gamma + 1)M_{\infty}^2\tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_{\xi}\varphi'_{\xi\xi}$$

$$\left[\frac{(1 - M_{\infty}^2)}{\tau^{\frac{2}{3}}} - (\gamma + 1)M_{\infty}^2\varphi'_{\xi}\right]\varphi'_{\xi\xi} + \varphi'_{\eta\eta} = 0$$

Introducendo il parametro di similitudine: $k = \frac{1 - M_{\infty}^2}{\tau^{\frac{2}{3}}}$

$$\left[k - (\gamma + 1)M_{\infty}^2\varphi'_{\xi}\right]\varphi'_{\xi\xi} + \varphi'_{\eta\eta} = 0$$

Supponendo inoltre che il numero di Mach sia prossimo all'unità:

$$\left[k - (\gamma + 1)\varphi'_{\xi}\right]\varphi'_{\xi\xi} + \varphi'_{\eta\eta} = 0$$



Moto Transonico

Se si hanno due flussi in cui il parametro k rimane costante allora l'equazione rimane invariata e si avrà la stessa soluzione. In particolare:

$$C_p = -\frac{2u'}{u_\infty} = -\frac{2cu_\infty\tau^{\frac{2}{3}}\phi'_\xi}{cu_\infty} = -2\tau^{\frac{2}{3}}\phi'_\xi$$

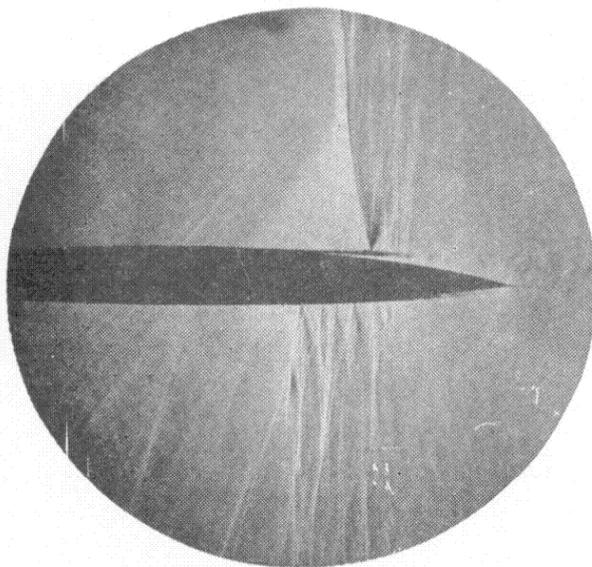
Quindi formalmente si ha:

$$\xi = \frac{x}{c} \quad \eta = \frac{y\tau^{\frac{1}{3}}}{c} \quad \phi' = \frac{\phi}{cu_\infty\tau^{\frac{2}{3}}}$$

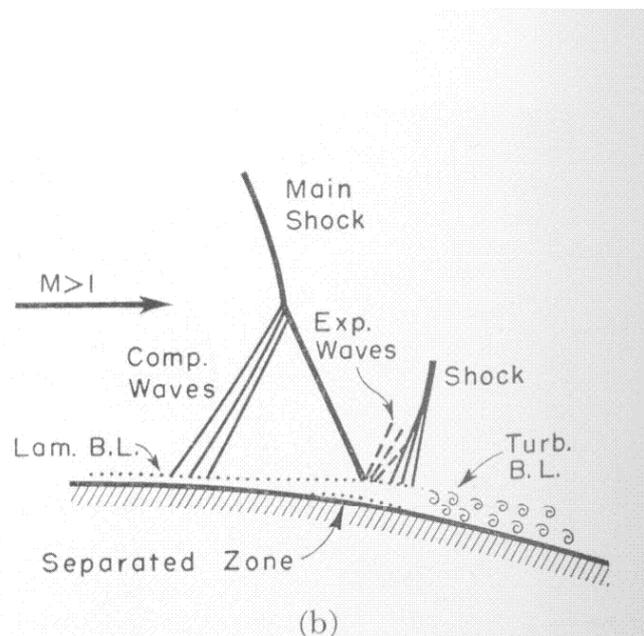
$$\frac{C_p}{\tau^{\frac{2}{3}}} = -2\phi'_\xi = f(k, \xi, \eta)$$



Linearizzazione delle equazioni



(a)



(b)

