

Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it



Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 11 del 20/11/18

Moto non stazionario

Nell'ipotesi di moto in condotto a sezione costante e di trascurabilità degli effetti dissipativi le equazioni diventano:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$\rho u_t + \rho u u_x + p_x = 0$$

$$\rho h_t + \rho u h_x - p_t - u p_x = 0$$

Nell'ipotesi meno restrittiva di condotto a sezione variabile di superficie retta pari ad A la prima equazione diventa:

$$\rho_t + (\rho u)_x = -\frac{\rho u}{A} A_x$$

Evidentemente in regime stazionario questa equazione si riduce alla ben nota equazione:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

$$\rho_t + (\rho u)_x = -\frac{\rho u}{A} A_x$$

Questa equazione è valida anche nei problemi di propagazione di onde in particolare per onde piane $A=\text{Cost}$, per onde cilindriche $A \propto x$ mentre per onde a simmetria sferica $A \propto x^2$. Infatti:

$$\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0 \rightarrow \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_2 h_3 \rho u)}{\partial x_1} \right) = 0 \quad \begin{cases} 2D & h_1 = 1 & h_2 = r & h_3 = 1 \\ 3D & h_1 = 1 & h_2 = r & h_3 = r \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = \begin{cases} 2D & (\rho u)_r + \frac{(\rho u)}{r} \\ 3D & (\rho u)_r + \frac{2(\rho u)}{r} \end{cases}$$



Moto non stazionario

$$\rho_t + (\rho u)_x = -\frac{\rho u}{A} A_x$$

$$\rho u_t + \rho u u_x + p_x = 0$$

$$\rho h_t + \rho u h_x - p_t - u p_x = 0$$

Se si ammette anche la presenza di forze di volume G la seconda equazione diventa:

$$\rho u_t + \rho u u_x + p_x = \rho G$$

Mentre la terza ($h=e+p/\rho$ con e energia interna):

$$\rho e_t + \cancel{p_t} - \frac{\rho_t p}{\rho} + \rho u e_x + \cancel{u p_x} - \frac{\rho_x u p}{\rho} - \cancel{p_t} - \cancel{u p_x} = 0$$

$$\rho e_t + \rho u e_x - \frac{p}{\rho} (\rho_t + u \rho_x) = 0$$

Dalla prima equazione si ha:

$$(\rho_t + u \rho_x) = -(\rho u)_x - \frac{\rho u}{A} A_x + u \rho_x = -\rho u_x - \frac{\rho u}{A} A_x$$

$$\rho e_t + \rho u e_x + p u_x + p u \frac{A_x}{A} = 0$$



Moto non stazionario

$$\rho_t + (\rho u)_x = -\frac{\rho u}{A} A_x$$

$$\rho u_t + \rho u u_x + p_x = \rho G$$

$$\rho e_t + \rho u e_x + p u_x + p u \frac{A_x}{A} = 0$$

Per gas più che perfetto si hanno anche le due equazioni di stato:

$$p = \rho RT \quad e = C_v T = \frac{RT}{\gamma - 1}$$

L'equazione di conservazione dell'energia e quella di bilancio della quantità di moto possono anche essere messe nella forma:

$$\rho \frac{R}{\gamma - 1} T_t + \rho u \frac{R}{\gamma - 1} T_x + \rho R T u_x + \rho R T u \frac{A_x}{A} = 0$$

$$T_t + u T_x + (\gamma - 1) T u_x + (\gamma - 1) T u \frac{A_x}{A} = 0$$

$$u_t + u u_x + R T_x + \frac{\rho_x}{\rho} R T = G$$



Moto non stazionario

$$\rho_t + (\rho u)_x = -\frac{\rho u}{A} A_x$$

$$u_t + u u_x + R T_x + \frac{\rho_x}{\rho} R T = G$$

$$T_t + u T_x + (\gamma - 1) T u_x + (\gamma - 1) T u \frac{A_x}{A} = 0$$

In forma matriciale si ha:

$$\underline{A} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} + \underline{B} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial y} = \underline{d}$$

Con:

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ T \end{bmatrix} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{RT}{\rho} & u & R \\ 0 & (\gamma - 1)T & u \end{bmatrix} \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho u A_x}{A} \\ G \\ -(\gamma - 1) \frac{T u A_x}{A} \end{bmatrix}$$



Moto non stazionario

Utilizzando il codice (sviluppato in precedenza):

```
clear all
syms rho u R T W A U x r s d g t G
U=sym('U(s)');r=sym('r(s)');t=sym('t(s)');
d=[-rho*u*A;G ;-(g-1)*u*T*A]; W=[ r ; U ;t];
A=[1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
B=[u rho 0; R*T/rho u R; 0 (g-1)*T u];
C=simple(A^-1*B);
[D,E] = eig(C); lambda =simple(diag(E));
L=simple(D^-1); % auto vettori sinistri

Testo=['$' latex(lambda) latex(simple(2*L*A^-1*d)) '$'];
Testo1=['$' latex(simple((2)*L*diff(W,s))) '$'];
clf;text(.05,.2,Testo,'Interpreter','latex','FontSize',18);
text(.05,.7,Testo1,'Interpreter','latex','FontSize',18);
```



Moto non stazionario

Si ottiene:

$$\lambda = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} u \\ u + \sqrt{\gamma RT} \\ u - \sqrt{\gamma RT} \end{bmatrix} \quad \underline{L} \cdot d\underline{w} = \begin{bmatrix} \frac{2(1-\gamma)Td\rho}{\rho\gamma} + \frac{2dT}{\gamma} \\ \frac{d\rho}{\gamma} + \frac{\rho du}{\sqrt{\gamma RT}} + \frac{\rho dT}{\gamma T} \\ \frac{d\rho}{\gamma} - \frac{\rho du}{\sqrt{\gamma RT}} + \frac{\rho dT}{\gamma T} \end{bmatrix} \quad \underline{L}A^{-1} \cdot \underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho G}{\sqrt{\gamma RT}} - \rho u \frac{A_x}{A} \\ -\frac{\rho G}{\sqrt{\gamma RT}} - \rho u \frac{A_x}{A} \end{bmatrix}$$

Lungo la prima caratteristica $\lambda = u$ si ha $(\gamma - 1)Td\rho = \rho dT$ utilizzando

l'equazione di stato dei Gas $\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$ si ha:

$$(\gamma - 1)\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \frac{d\rho}{\rho}((\gamma - 1) + 1) = \frac{dp}{p} \rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = a^2$$

Che implica che lungo quella caratteristica il moto è isentropico.



Moto non stazionario

$$\lambda = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} u \\ u + \sqrt{\gamma RT} \\ u - \sqrt{\gamma RT} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{L}} \cdot d\underline{\underline{w}} = \begin{bmatrix} \frac{2(1-\gamma)Td\rho}{\rho\gamma} + \frac{2dT}{\gamma} \\ \frac{d\rho}{\gamma} + \frac{\rho du}{\sqrt{\gamma RT}} + \frac{\rho dT}{\gamma T} \\ \frac{d\rho}{\gamma} - \frac{\rho du}{\sqrt{\gamma RT}} + \frac{\rho dT}{\gamma T} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{LA}}^{-1} \cdot \underline{\underline{d}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\rho G}{\sqrt{\gamma RT}} - \rho u \frac{A_x}{A} \\ -\frac{\rho G}{\sqrt{\gamma RT}} - \rho u \frac{A_x}{A} \end{bmatrix}$$

Le altre due equazioni sono:

$$\lambda = u \pm \sqrt{\gamma RT} = u \pm a$$

$$\frac{d\rho}{\gamma} \pm \frac{\rho du}{\sqrt{\gamma RT}} + \frac{\rho dT}{\gamma T} = \left(\pm \frac{\rho G}{\sqrt{\gamma RT}} - \rho u \frac{A_x}{A} \right) dt \quad (\gamma - 1)Td\rho = \rho dT$$

Ricordando la prima equazione di compatibilità e semplificando:

$$\frac{d\rho}{\gamma} \pm \frac{\rho du}{a} + \frac{(\gamma - 1)d\rho}{\gamma} = \left(\pm \frac{\rho G}{a} - \rho u \frac{A_x}{A} \right) dt$$



Moto non stazionario

$$\frac{d\rho}{\gamma} \pm \frac{\rho du}{a} + \frac{(\gamma - 1)d\rho}{\gamma} = \left(\pm \frac{\rho G}{a} - \rho u \frac{A_x}{A} \right) dt \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \pm \frac{du}{a} = \left(\pm \frac{G}{a} - u \frac{A_x}{A} \right) dt$$

$$a \frac{d\rho}{\rho} \pm du = \left(\pm G - ua \frac{A_x}{A} \right) dt$$

Queste equazioni valgono lungo le curve caratteristiche: $\lambda = u \pm \sqrt{\gamma RT}$

Nell'ipotesi di moto isentropico il primo termine può essere integrato esplicitamente:

$$\int a \frac{d\rho}{\rho} \pm \int du = \int \sqrt{\gamma RT_o} \frac{T}{T_o} \frac{d\rho}{\rho} \pm u = \int a_o \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}-1} d \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right) \pm u = \frac{2a_o}{\gamma-1} \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \pm u = \frac{2a}{\gamma-1} \pm u$$

Cambiando segno le due equazioni possono essere scritte lungo la caratteristica come:

$$\frac{d}{dt} \left(u \pm \frac{2a}{\gamma-1} \right)_{\text{Su } \lambda} = \left(G \mp ua \frac{A_x}{A} \right) \quad \lambda = u \pm a$$



Moto non stazionario

Nelle ipotesi di moto isentropico è facile ricavare queste equazioni direttamente. Dal sistema di due equazioni:

$$\rho_t + (\rho u)_x = -\frac{\rho u}{A} A_x \quad \rho_t = \frac{d\rho}{dp} \rho_t = \frac{\rho_t}{a^2}$$

$$\rho u_t + \rho u u_x + p_x = \rho G$$

Riordinando:

$$\frac{\rho_t}{a^2} + \frac{u p_x}{a^2} + \rho u_x = -\frac{\rho u}{A} A_x \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_t}{\rho a} + \frac{u p_x}{\rho a} + a u_x = -\frac{a u}{A} A_x$$

$$u_t + u u_x + \frac{p_x}{\rho} = G$$

Sommando e sottraendo la prima equazione dalla seconda si ha:

$$u_t \pm \frac{\rho_t}{\rho a} + u u_x \pm a u_x \pm \frac{u p_x}{\rho a} + \frac{p_x}{\rho} = G \mp \frac{a u}{A} A_x$$

$$\left(u_t \pm \frac{\rho_t}{\rho a} \right) + (u \pm a) u_x + \frac{p_x}{\rho a} (a \pm u) = G \mp \frac{a u}{A} A_x$$



Moto non stazionario

$$\left(u_t \pm \frac{\rho_t}{\rho a} \right) + (u \pm a) u_x + \frac{p_x}{\rho a} (a \pm u) = G \mp \frac{a u}{A} A_x$$

$$\left(u_t \pm \frac{\rho_t}{\rho a} \right) + (u \pm a) u_x \pm \frac{p_x}{\rho a} (u \pm a) = G \mp \frac{a u}{A} A_x$$

$$\left(u_t \pm \frac{\rho_t}{\rho a} \right) + (u \pm a) \left(u_x \pm \frac{p_x}{\rho a} \right) = G \mp \frac{a u}{A} A_x$$

Se si definisce: $F = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho a}$ si ha:
$$\begin{cases} F_t = F_p \rho_t = \frac{1}{\rho a} \rho_t \\ F_x = F_p \rho_x = \frac{1}{\rho a} \rho_x \end{cases}$$

quindi le equazioni

$$(u_t \pm F_t) + (u \pm a)(u_x \pm F_x) = G \mp \frac{a u}{A} A_x$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right) (u \pm F) = G \mp \frac{a u}{A} A_x$$

Come già visto per **gas più che perfetti** a meno di una costante $F = \frac{2}{\gamma - 1} a$



Moto non stazionario

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} \right) (u \pm F) = G \mp \frac{au}{A} A_x$$

È interessante il confronto fra questa relazione e quella trovata in precedenza:

$$\frac{d}{dt} \left(u \pm \frac{2a}{\gamma-1} \right)_{\text{Su } \lambda} = \left(G \mp ua \frac{A_x}{A} \right) \quad \lambda = u \pm a$$

Supponendo nulle le variazioni di area e le forze di volume si possono trovare gli invarianti di Riemann: $J^\pm = u \pm F$ In particolare per **gas più che perfetto** si ha:

$$\begin{cases} \text{lungo } C^+ & \frac{dx}{dt} = \lambda^+ = u + a \quad e \quad J^+ = u + \frac{2a}{\gamma-1} \\ \text{lungo } C^- & \frac{dx}{dt} = \lambda^- = u - a \quad e \quad J^- = u - \frac{2a}{\gamma-1} \end{cases}$$

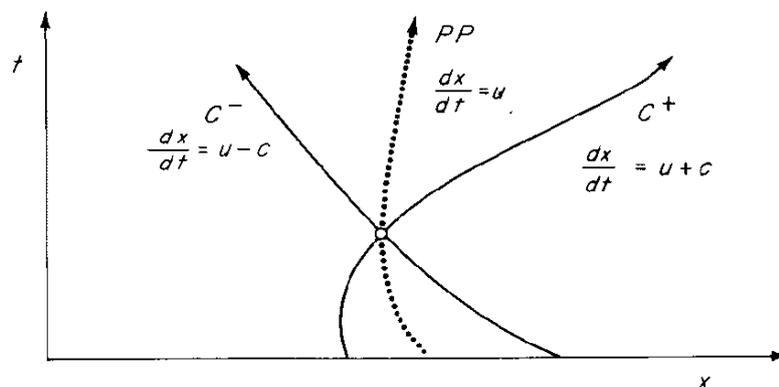
È interessante notare che imponendo: $n = \frac{2}{\gamma-1}$

Si ottiene una semplificazione formale delle equazioni ed n rappresenta il numero di gradi di libertà del gas (per $\gamma=1.4$ si hanno 5 gradi di libertà).



Moto non stazionario

$$\begin{cases} \text{lungo } C^+ & \frac{dx}{dt} = \lambda^+ = u + a \quad e \quad J^+ = u + F \\ \text{lungo } C^- & \frac{dx}{dt} = \lambda^- = u - a \quad e \quad J^- = u - F \end{cases}$$



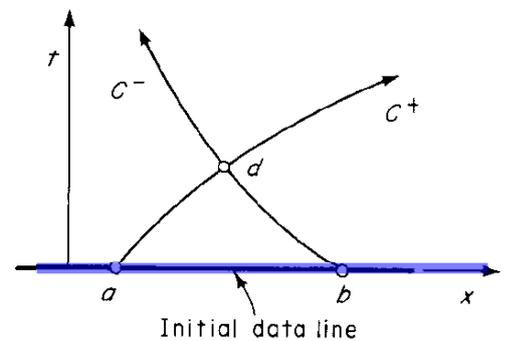
Moto non stazionario

$$\begin{cases} \text{lungo } C^+ & \frac{dx}{dt} = \lambda^+ = u + a \quad e \quad J^+ = u + F \\ \text{lungo } C^- & \frac{dx}{dt} = \lambda^- = u - a \quad e \quad J^- = u - F \end{cases}$$

Un tipico problema può essere quello in cui si conoscono le condizioni al **tempo zero** su un segmento e si vuole ricavare l'evoluzione nel tempo. Ma si possono assegnare anche altri tipi di condizioni al contorno.

Il metodo di soluzione è analogo a quello già visto per il moto stazionario supersonico bidimensionale. La determinazione del punto d avviene trovando l'intersezione delle curve caratteristiche C^+ proveniente dal punto a e C^- proveniente dal punto b . Le condizioni in d si ottengono con le relazioni:

$$\begin{aligned} J_a^+ = u_a + F_a = u_d + F_d & \quad \rightarrow \quad u_d = \frac{J_a^+ + J_b^-}{2} \\ J_b^- = u_b - F_b = u_d - F_d & \quad \rightarrow \quad F_d = \frac{J_a^+ - J_b^-}{2} \end{aligned}$$



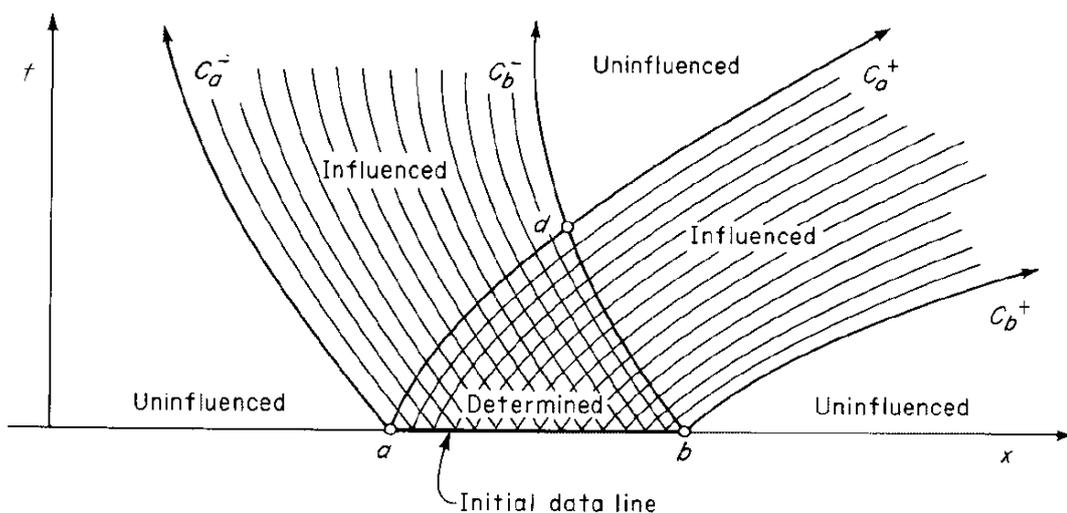
Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

Nelle ipotesi di moto isentropico la determinazione di F permette di valutare le altre grandezze termodinamiche.

Se le condizioni iniziali sono date su tutto il segmento ab si possono ricavare i valori di u ed F in tutti i punti compresi fra le due caratteristiche.

Tutti i punti raggiunti da una curva caratteristica sono influenzati dalle condizioni iniziali sul segmento ab .

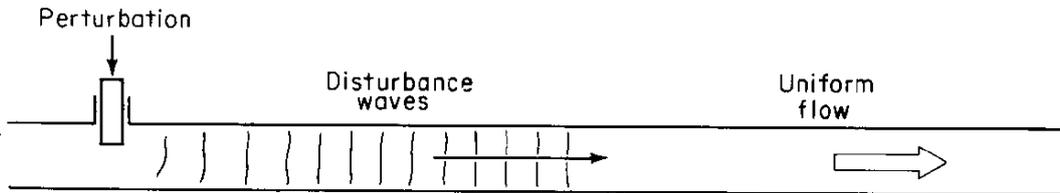


Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

Onde semplici.

Si analizzerà ad esempio il moto in un condotto a sezione costante. Per $t < 0$ si suppone che il moto sia uniforme con velocità costante, subsonica e diretta verso destra. All'istante $t = 0$ si chiude la valvola nel punto a e si vuole analizzare la parte destra del condotto. Il disturbo provocato dalla chiusura della valvola si propaga con onde di Mach che si muovono alla velocità $u + a$.



Dopo un certo tempo il disturbo raggiungerà il punto b ma i punti a destra di quest'ultimo continueranno ad essere nella condizione iniziale uniforme. La zona a sinistra della zona uniforme è una regione semplice perché da una parte è confinata da una zona uniforme. Per il caso in esame lungo le caratteristiche C^- che si propagano verso monte l'invariante J^- rimane costante ovunque.



Moto non stazionario

Chiaramente lungo le caratteristiche C^+ l'invariante J^+ rimane costante ma il suo valore cambia da caratteristica a caratteristica.

Riassumendo:

$$J^- = J_o^- = u_o - F_o = \text{cost}$$

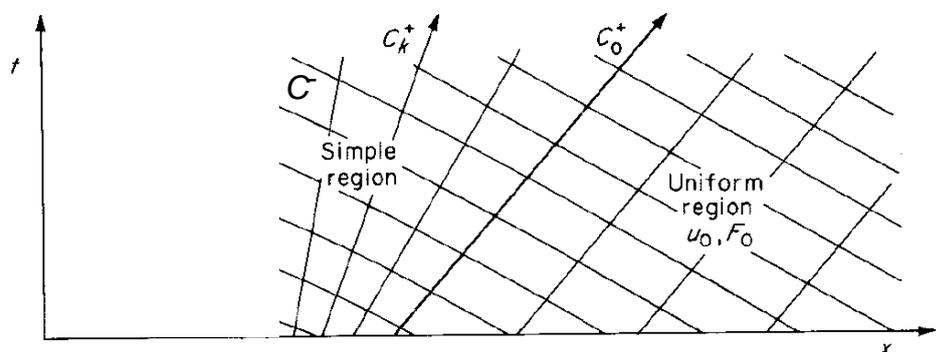
Questa relazione vale ovunque con lo stesso valore della costante ed il pedice o indica le condizioni iniziali. Invece, lungo la generica caratteristica C_k^+ (dove il pedice k indica la singola caratteristica) si ha:

$$J_k^+ = u + F = \text{cost}$$

Ed in questo caso la costante varia per ogni k .

$$u_k = \frac{J_k^+ + J_o^-}{2}$$

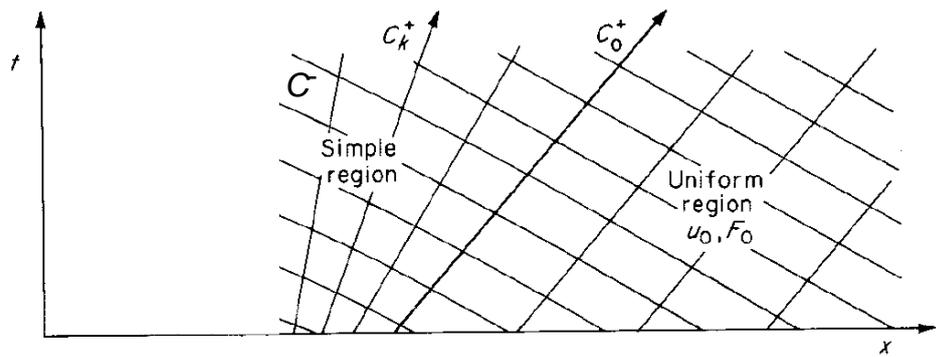
$$F_k = \frac{J_k^+ - J_o^-}{2}$$



Moto non stazionario

$$u_k = \frac{J_k^+ + J_o^-}{2}$$

$$F_k = \frac{J_k^+ - J_o^-}{2}$$



In particolare poiché lungo C_k^+ l'invariante J_k^+ è costante, mentre come già detto, J_o^- è costante ovunque u e F non variano lungo la curva caratteristica e, di conseguenza, anche $\lambda_k^+ = u_k + a_k$ è costante e le curve caratteristiche sono delle rette. Ad un analogo risultato si arriva se consideriamo disturbi semplici che si propagano lungo la curva caratteristica C_k^-



Moto non stazionario

Formazione di un'onda d'urto in un gas più che perfetto.

Si supponga di avere l'onda, mostrata in figura, che si propaga verso destra in un gas in quiete.

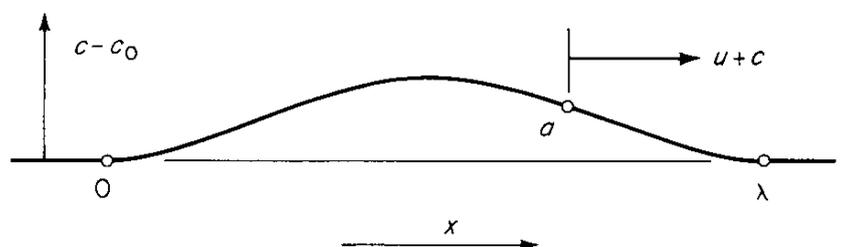
Nell'ipotesi di moto isentropico, nota la distribuzione di a si possono ricavare tutte le altre grandezze termodinamiche.

Lungo la curva caratteristica C^- che parte dalla zona uniforme a monte J^- è costante quindi:

$$J^- = u - F = u - \frac{2}{\gamma - 1} a = -\frac{2}{\gamma - 1} a_o \rightarrow u = \frac{2}{\gamma - 1} (a - a_o)$$

Se $a > a_o$ (regione di compressione) l'onda si propaga verso destra con velocità:

$$\lambda^+ = u + a = \frac{2}{\gamma - 1} (a - a_o) + a = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} a - \frac{2}{\gamma - 1} a_o$$



Moto non stazionario

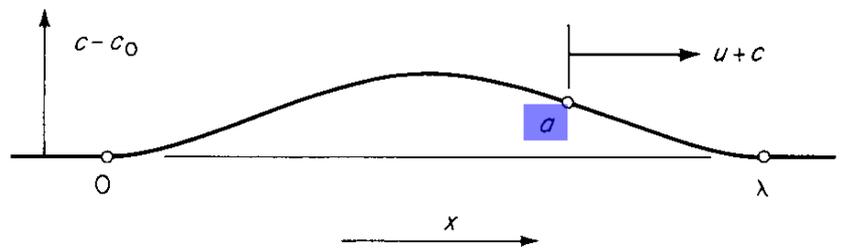
$$u = \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_0)$$

Poiché il termine $a - a_0$ è positivo sia la velocità locale che la velocità di propagazione aumentano in particolare se valutiamo $u + a$ nel generico punto **A** e lo confrontiamo con la velocità alla testa dell'onda si ha:

$$u + a - (u_0 + a_0) = u + a - a_0 = \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_0) + a - a_0 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}(a - a_0)$$

Quindi dopo un tempo Δt il punto **A** si sarà spostato verso destra rispetto alla sua posizione iniziale di:

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}(a - a_0)\Delta t$$

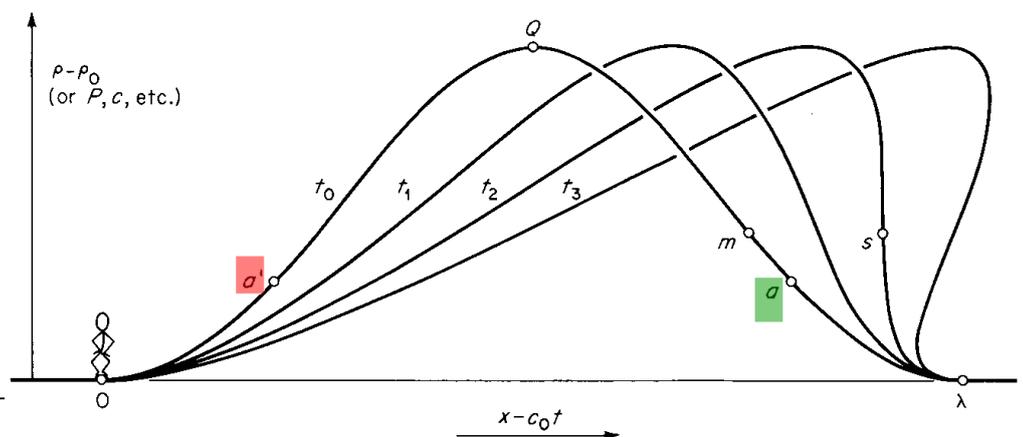


Complementi di Gasdinamica - T Astarita

Moto non stazionario

Applicando questa procedura per ogni punto dell'onda si ottiene il diagramma di figura. Evidentemente il punto **Q** avendo la massima velocità del suono iniziale è quello che tende ad avanzare più velocemente.

La parte anteriore dell'onda (dal punto **Q** in avanti) è una zona di compressione mentre la parte posteriore è una zona di espansione. Dalla figura si vede che la parte anteriore dell'onda tende, con il passare del tempo, a diventare più ripida, mentre nella parte posteriore la pendenza diminuisce. In particolare i punti **A** ed **A'**, relativi ad uno stesso valore iniziale di a , si muovono alla stessa velocità relativa quindi la loro distanza non varia nel tempo.



Complementi di Gasdinamica -

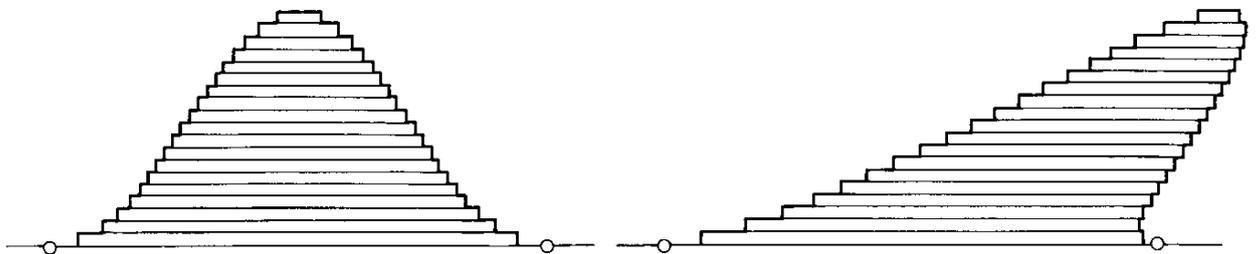
Moto non stazionario

In generale si ha che la distanza fra i punti che si trovano nella parte anteriore dell'onda e quelli, aventi la stessa velocità del suono iniziale, che si trovano nella parte posteriore dell'onda non varia.

Si ha quindi una configurazione simile a quella mostrata in figura.



Compl



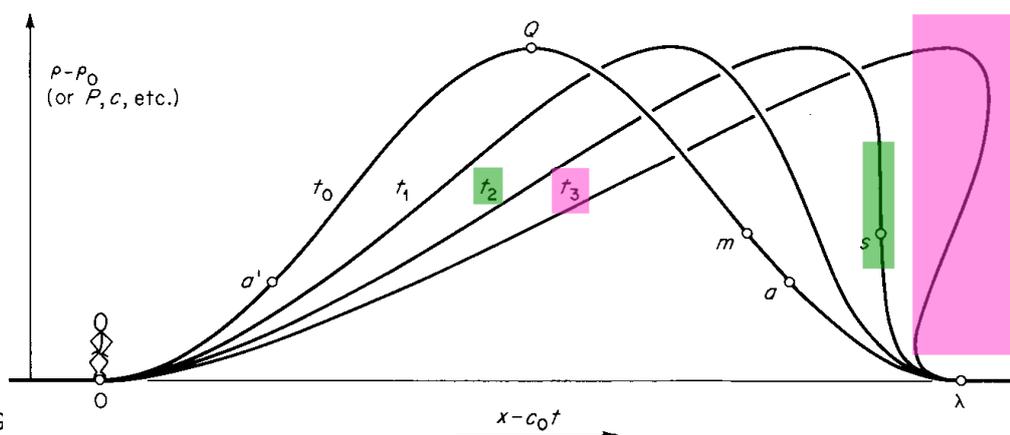
Moto non stazionario

Al tempo t_2 (vedi figura) una porzione della parte frontale dell'onda è diventata verticale. Il che provoca che i gradienti diventino infiniti, cioè si forma un'onda d'urto.

All'istante t_3 si vede che alcuni punti hanno tre valori distinti di a allo stesso tempo. Chiaramente questa è una eventualità impossibile. La forma dell'onda è simile ad un maroso. La differenza è che il maroso si estende in verticale e non nel tempo, quindi, è possibile avere una soluzione multipla.



Complementi di G

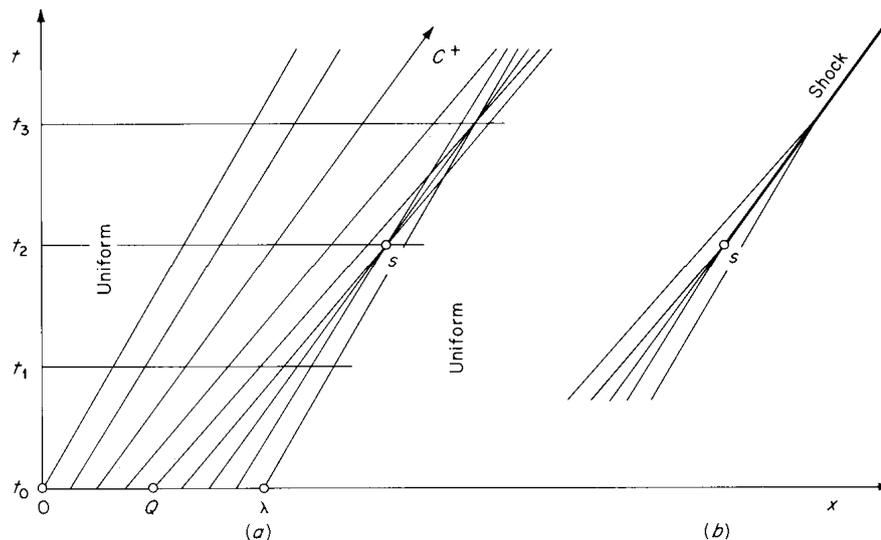


Moto non stazionario

In un piano (x, t) si ha che il punto s corrisponde al punto in cui si intersecano 2 o più caratteristiche.

Poiché ogni caratteristica porta con se una informazione diversa un'intersezione provoca valori multipli. Un possibile meccanismo fisico che permette di avere due valori è un'onda d'urto. La formazione dell'onda però provoca la non omotopia del flusso.

Il tempo $t_2 = t^*$ in cui si forma un'onda d'urto si può calcolare facilmente.



Moto non stazionario

Supponendo che $v = u + a$, considerando due punti vicini l'onda diventa verticale quando il punto che segue raggiunge, e poi supera, quello precedente. In queste ipotesi $dv < 0$:

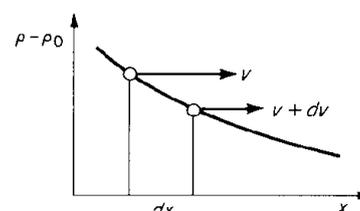
$$-dv t^* = dx \rightarrow t^* = -\frac{1}{\frac{dv}{dx}}$$

Evidentemente si è interessati al minimo valore di t^* per il quale è verificata la relazione precedente. Quindi si deve trovare:

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| = \max$$

Ricordando che: $\lambda^+ = v = u + a = \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_0) + a = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}a - \frac{2}{\gamma - 1}a_0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{da}{dx}$$



Moto non stazionario

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{da}{dx}$$

$$t^* = -\frac{1}{\frac{dv}{dx}}$$

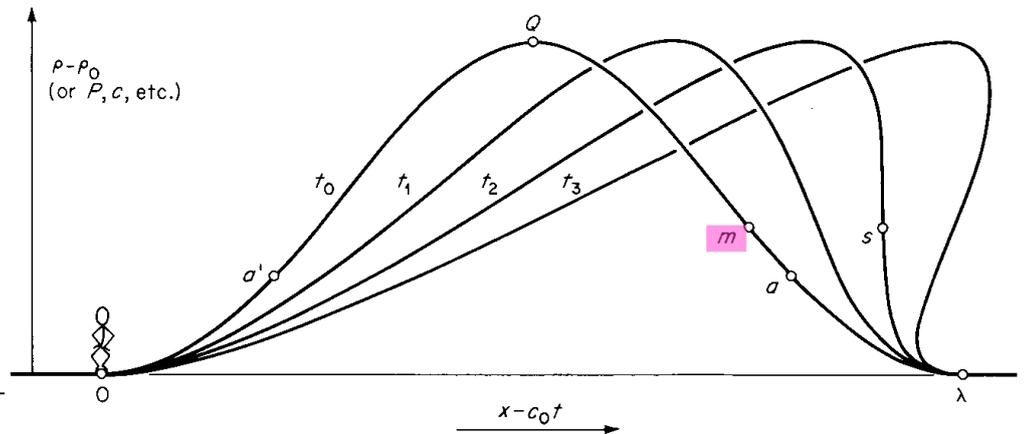
La condizione: $\left| \frac{da}{dx} \right| = \max$

è soddisfatta quando la curva iniziale ha un flesso cioè nel punto **M** di figura.

$$x^* = vt^* = -\frac{v}{\left. \frac{dv}{dx} \right|_{Min}} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{v}{\left. \frac{da}{dx} \right|_{Min}}$$

In particolare se il disturbo iniziale è piccolo si ha:

$$v \cong a_0$$



Complementi di Gasdinamica -

Moto non stazionario

Il caso in cui il fluido sia qualsiasi è stato già analizzato da un altro punto di vista:

$$[s] = s - s_1 = \frac{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s}{2T_1} \frac{[\rho]^3}{6}$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{v^2}{a^2} \right) = \frac{v^2}{a^4} \left(2v + \frac{\partial a^2}{\partial p} \right)$$

$$\left(\frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s = 2v \left(\frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s - 1 \right)$$

$$\text{Imponendo: } \Gamma = \frac{a^4}{2v^3} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s = \left(1 + \frac{1}{2v} \frac{\partial a^2}{\partial p} \right)$$

dove Γ è la derivata fondamentale della gasdinamica. Si ha:

$$\left(\frac{\partial a^2}{\partial p} \right)_s = 2v(\Gamma - 1) \rightarrow dp = \frac{da^2}{2v(\Gamma - 1)} = \frac{ada}{v(\Gamma - 1)}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

Moto non stazionario

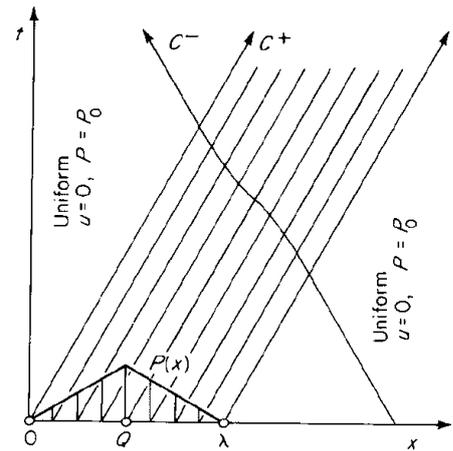
$$dp = \frac{ada}{v(\Gamma - 1)}$$

Ricordando che:

$$dF = \frac{dp}{\rho a} = \frac{ada}{v(\Gamma - 1)} \frac{1}{\rho a}$$

Si ha:

$$dF = \frac{da}{(\Gamma - 1)}$$



Si supponga che l'onda iniziale sia rappresentata in termini di pressione. Per un modello di gas generico non è vero che la relazione fra la pressione e la velocità del suono sia monotona. Quindi la forma delle onde potrebbe essere qualsiasi.

Inoltre le curve caratteristiche, anche se relative ad una zona semplice non è detto che siano delle rette parallele ma potrebbero sia convergere che divergere. Nel primo caso è possibile la formazione di un'onda d'urto.



Moto non stazionario

Le curve caratteristiche C^+ convergono se $u+a$ (che è proprio la pendenza) aumenta lungo la caratteristica C^- . Poiché, come già detto, l'invariante J^- è costante in tutto il dominio si ha:

$$dJ^- = du - dF = 0 \rightarrow du = dF$$

quindi:

$$d(u+a) = du + da = dF + (\Gamma - 1)dF = \Gamma dF$$

$$d(u+a) = \Gamma dF = \Gamma \frac{dp}{\rho a}$$

$$dF = \frac{da}{(\Gamma - 1)}$$

$$dF = \frac{dp}{\rho a}$$

Le curve caratteristiche C^+ convergono a seconda del segno sia di dp che della derivata fondamentale.



Moto non stazionario

$$d(u+a) = \Gamma dF = \Gamma \frac{dp}{\rho a}$$

Esistono due possibilità affinché un'onda d'urto si formi:

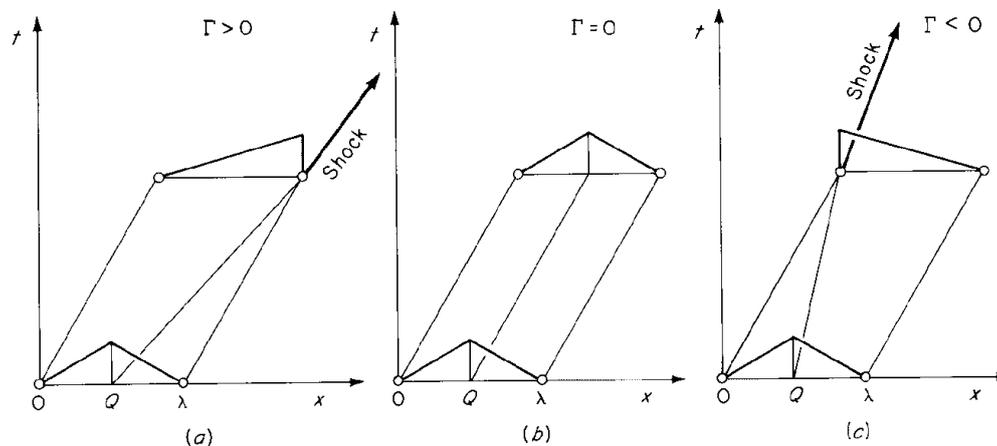
- $\Gamma > 0$ e $dp > 0$ convergenza delle C^+ ;
- $\Gamma < 0$ e $dp < 0$ convergenza delle C^+ ;

Chiaramente se $\Gamma = 0$ la condizione iniziale rimane invariata.

Questo risultato conferma quanto già detto.



Complementi



31

Moto non stazionario

Compression shocks	$\Gamma > 1$	$\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_s > 0$	Normal case, e.g., perfect gas
	$\Gamma = 1$	$\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_s = 0$	Acoustic equation of state; P is a linear function of ρ ; $c = \text{const}$
	$0 < \Gamma < 1$	$\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_s < 0$	Possible in some liquids and low-temperature gases
No shocks	$\Gamma = 0$	$\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_s < 0$	Stationary waves; P a linear function of v
Rarefaction shocks	$\Gamma < 0$	$\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_s < 0$	Possible near a critical point



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

32

Moto non stazionario

Moto indotto da un pistone che si muove verso sinistra.

Se si considera la parte destra del condotto si avrà un'espansione.

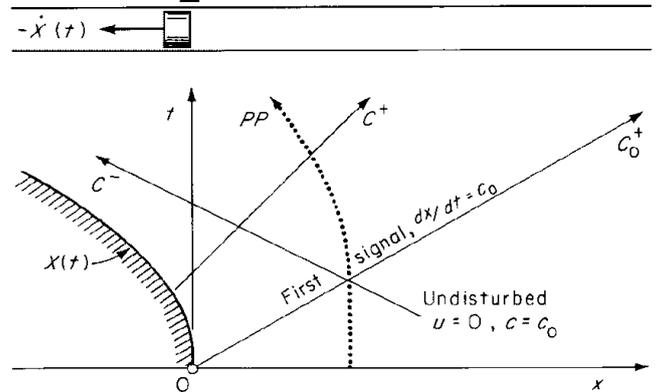
Al tempo $t=0$ $u=0$ ed $a=a_0$. Si supponga inoltre che il condotto sia sufficientemente lungo in modo che non ci siano onde riflesse. Si avrà quindi una regione semplice. Supponiamo che l'accelerazione del pistone sia costante e finita e che sia nota la funzione $X(t)$.

Per gas più che perfetto lungo C^- si ha:

$$J^- = u - \frac{2}{\gamma-1} a = -\frac{2}{\gamma-1} a_0 = \text{cost} \rightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{\gamma-1} (a - a_0) \\ a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} u \end{cases}$$

Affinché, ci sia continuità la velocità del gas in prossimità del pistone è data da:

$$u_p = \dot{x}(t)$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

Da queste due relazioni sul pistone si ha

$$a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} u_p = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{x}$$

$$u = \frac{2}{\gamma-1} (a - a_0)$$

$$a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} u$$

$$u_p = \dot{x}(t)$$

Poiché il pistone si muove verso sinistra $u_p < 0$ e, di conseguenza, si ha un'espansione.

$$\lambda^+ = \frac{dx}{dt} = u_p + a = \dot{x} + a_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{x} = a_0 + \frac{\gamma+1}{2} \dot{x}$$

Quando $u+a=0$ la pendenza è verticale e $M=1$. Le condizioni in questo punto non variano nel tempo.

Annullando la relazione precedente si trova il valore sonico:

$$u_p|_{M=1} = \dot{x} = -a_0 \frac{2}{\gamma+1}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

$$u = \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_0)$$

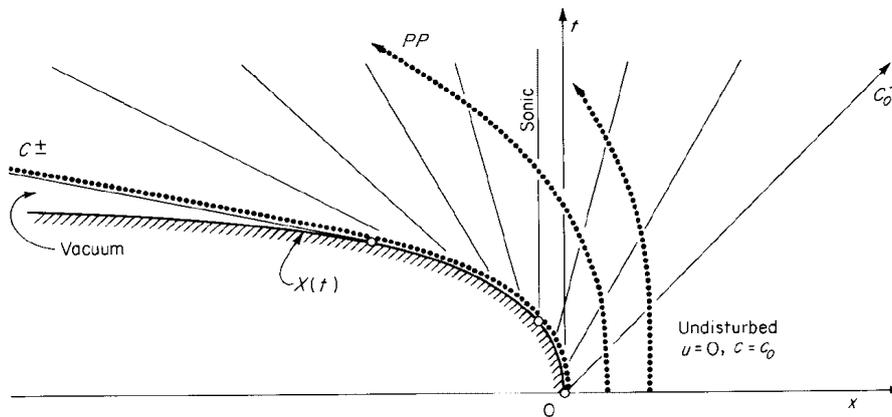
$$u = \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_0)$$

$$a = a_0 + \frac{\gamma - 1}{2}u$$

Nel limite in cui la velocità del suono tende a zero, cioè per velocità del pistone molto elevate si può raggiungere la velocità di fuga (velocità limite):

$$u_{Lim} = \frac{-2a_0}{\gamma - 1}$$

In questo caso le due curve caratteristiche diventano coincidenti ed il gas non è più capace di seguire il pistone quindi si ha una separazione.

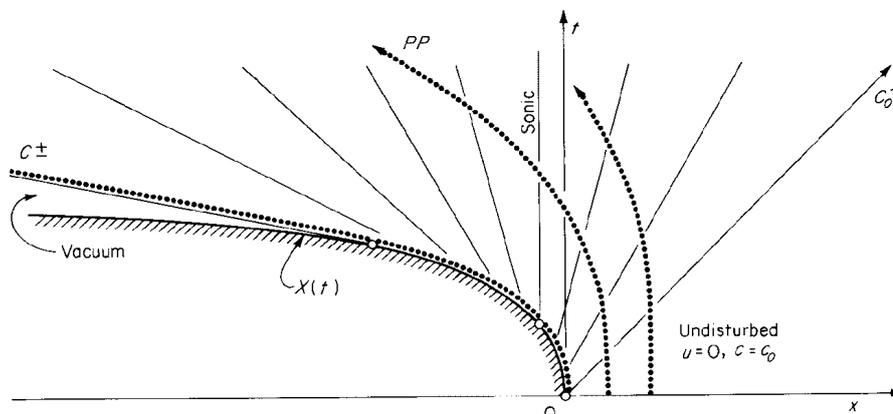


Moto non stazionario

È interessante confrontare le velocità limite e critiche in regime stazionario ed non stazionario.

$$V_{Lim} = \frac{2a_0}{\gamma - 1} > V_{Lim}^{Iso} = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

$$V^* = \frac{2a_0}{\gamma + 1} < V_{Iso}^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$



Moto non stazionario

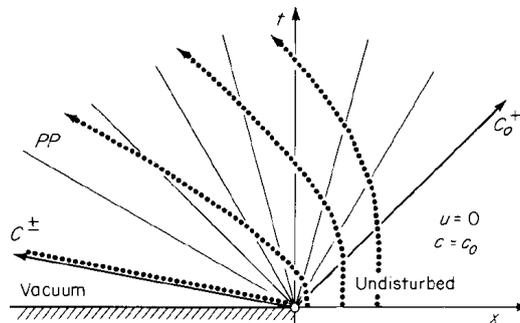
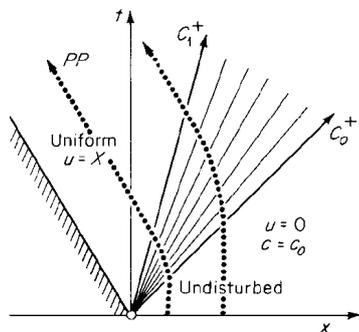
Si esaminerà ora il caso in cui il pistone venga spostato in modo impulsivo:

$$\dot{x} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \text{cost} < 0 & t > 0 \end{cases}$$

Come accade per l'espansione di Prandtl e Meyer, l'origine è un punto singolare dove la velocità assume tutti i possibili valori. Per $t=0$ si ha una discontinuità per $x=0$ che, all'aumentare del tempo diventa instabile e si trasforma in un treno di onde di Mach. Il campo di moto può essere diviso in tre regioni: una zona uniforme in cui $u = \dot{x}$, la zona del ventaglio e la zona indisturbata.



Complementi



37

Moto non stazionario

Nella zona d'espansione l'invariante J^- è costante

$$J^- = u - \frac{2}{\gamma-1}a = -\frac{2}{\gamma-1}a_0 = \text{cost} \rightarrow a = a_0 + u \frac{\gamma-1}{2}$$

Le curve caratteristiche C^+ sono delle rette:

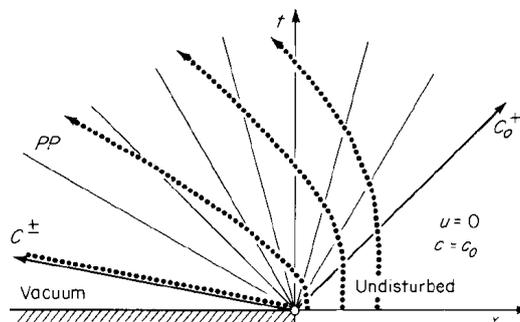
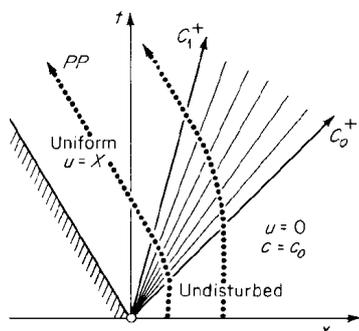
$$\lambda^+ = \frac{dx}{dt} = u + a = u + a_0 + u \frac{\gamma-1}{2} = a_0 + u \frac{\gamma+1}{2}$$

Integrando questa relazione, ricordando che lungo la C^+ il secondo membro è costante si ha:

$$\frac{x}{t} = u + a = a_0 + u \frac{\gamma+1}{2} \rightarrow \frac{x}{ta_0} = 1 + \frac{u}{a_0} \frac{\gamma+1}{2} \rightarrow \frac{u}{a_0} = -\frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{x}{ta_0} \right)$$



Complementi



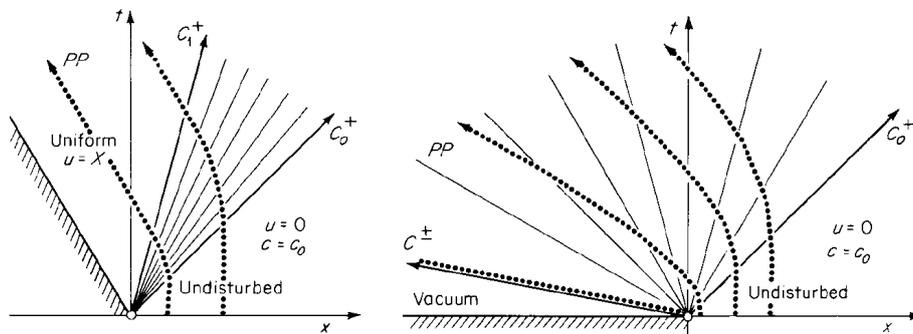
38

Moto non stazionario

$$\frac{x}{t} = u + a = a_0 + u \frac{\gamma+1}{2} \rightarrow \frac{x}{ta_0} = 1 + \frac{u}{a_0} \frac{\gamma+1}{2} \rightarrow \frac{u}{a_0} = -\frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{x}{ta_0} \right)$$

Sostituendo questa relazione nella $a = a_0 + u \frac{\gamma-1}{2}$ si ha:

$$\begin{cases} \frac{u}{a_0} = -\frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{x}{ta_0} \right) \\ \frac{a}{a_0} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(1 - \frac{x}{ta_0} \right) \end{cases}$$



Moto non stazionario

$$\frac{x}{a_0 t} = 1 + \frac{u}{a_0} \frac{\gamma+1}{2} \quad \begin{cases} \frac{u}{a_0} = -\frac{2}{\gamma+1} \left(1 - \frac{x}{ta_0} \right) \\ \frac{a}{a_0} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(1 - \frac{x}{ta_0} \right) \end{cases} \quad J^- = \text{cost} \rightarrow a = a_0 + u \frac{\gamma-1}{2}$$

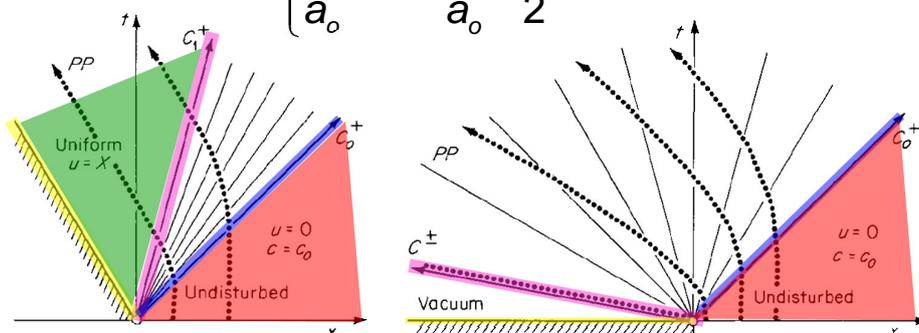
Queste relazioni valgono nelle zone in cui è presente il ventaglio cioè per:

$$1 \geq \frac{x}{a_0 t} \geq 1 + \frac{\gamma+1}{2} \frac{\dot{x}}{a_0}$$

Chiaramente nella **zona indisturbata** si ha:

Mentre nella **zona uniforme**

$$\begin{cases} \frac{u}{a_0} = 0 \\ \frac{a}{a_0} = 1 \\ \frac{u}{a_0} = \frac{\dot{x}}{a_0} \\ \frac{a}{a_0} = 1 + \frac{\dot{x}}{a_0} \frac{\gamma-1}{2} \end{cases}$$



Moto non stazionario

La **zona uniforme** è compresa fra la **fine del ventaglio** ed **il pistone**:

$$1 + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\dot{x}}{a_0} \geq \frac{x}{a_0 t} \geq \frac{\dot{x}}{a_0}$$

$$J^- = \text{cost} \rightarrow a = a_0 + u \frac{\gamma - 1}{2}$$

Se la velocità del pistone è inferiore a quella di fuga, altrimenti il ventaglio termina quando $a=0$ cioè per:

$$1 \geq \frac{x}{a_0 t} \geq -\frac{2}{\gamma - 1}$$

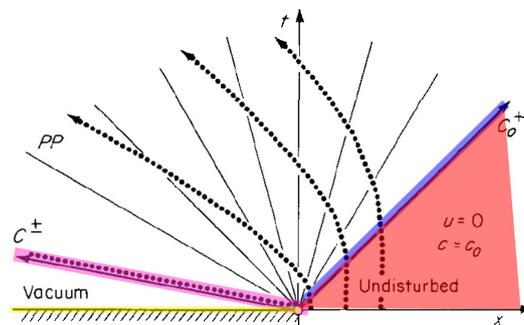
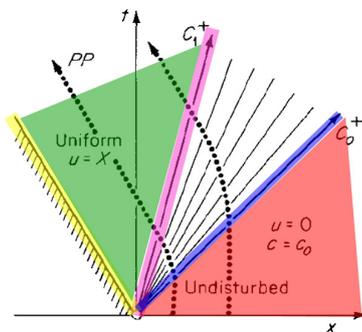
$$u_{\text{Lim}} = \frac{-2a_0}{\gamma - 1}$$

La **zona uniforme** viene sostituita in questo caso da una zona di vuoto:

$$-\frac{2}{\gamma - 1} \geq \frac{x}{a_0 t} \geq \frac{\dot{x}}{a_0}$$



Complementi



41

Moto non stazionario

Il percorso di una particella si può ricavare dall'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{dt} = u$$

$$J^- = \text{cost} \rightarrow a = a_0 + u \frac{\gamma - 1}{2}$$

Nella zona indisturbata si ha $x=x_0$ mentre all'interno del ventaglio:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2a_0}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{x}{ta_0}\right) = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x}{t} - \frac{2a_0}{\gamma + 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x}{t} - \frac{2a_0}{\gamma + 1}$$

$$\begin{cases} \frac{u}{a_0} = -\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{x}{ta_0}\right) \\ \frac{a}{a_0} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{x}{ta_0}\right) \end{cases}$$

La soluzione dell'**equazione omogenea** associata è:

$$\ln(x_h) = \frac{2}{\gamma + 1} \ln(t) + \ln(A) \rightarrow x_h = At^{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Mentre una possibile soluzione dell'equazione particolare è:

$$x_p = -\frac{2a_0 t}{\gamma - 1}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

42

Moto non stazionario

$$x_p = \frac{2a_0 t}{\gamma - 1}$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{2a_0}{\gamma - 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x}{t} - \frac{2a_0}{\gamma + 1}$$

Infatti sostituendo si ha:

$$\frac{-2a_0}{\gamma - 1} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{-2a_0}{\gamma - 1} - \frac{2a_0}{\gamma + 1} = -\frac{2a_0}{\gamma + 1} \frac{2 + \gamma - 1}{\gamma - 1} = -\frac{2a_0}{\gamma + 1} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = -\frac{2a_0}{\gamma - 1}$$

Quindi:

$$x = At^{\frac{2}{\gamma + 1}} - \frac{2a_0 t}{\gamma - 1}$$

$$x_h = At^{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Imponendo la condizione al contorno che per $t=t_0$ si ha $x=x_0$ dove, come già detto $t_0 = \frac{x_0}{a_0}$ si ha:

$$x_0 = A \left(\frac{x_0}{a_0} \right)^{\frac{2}{\gamma + 1}} - \frac{2a_0 \frac{x_0}{a_0}}{\gamma - 1} \rightarrow A = \frac{x_0 \left(1 + \frac{2}{\gamma - 1} \right)}{\left(\frac{x_0}{a_0} \right)^{\frac{2}{\gamma + 1}}} = \frac{x_0^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}{\left(\frac{x_0}{a_0} \right)^{\frac{2}{\gamma + 1}}} = x_0^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{a_0}{x_0} \right)^{\frac{2}{\gamma + 1}}$$



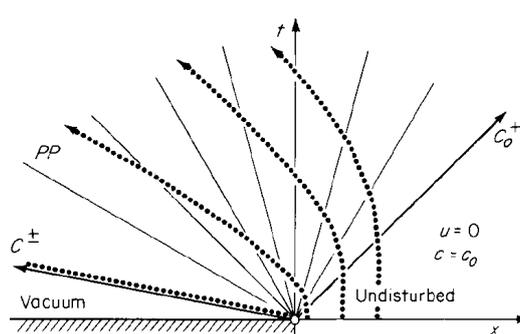
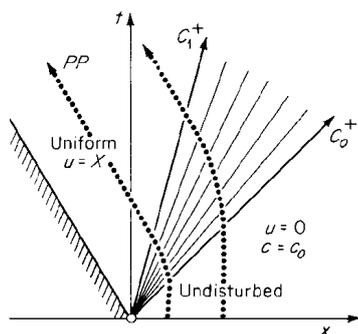
Moto non stazionario

$$x = At^{\frac{2}{\gamma + 1}} - \frac{2a_0 t}{\gamma - 1}$$

$$A = x_0^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{a_0}{x_0} \right)^{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Da cui:

$$x = x_0^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{a_0 t}{x_0} \right)^{\frac{2}{\gamma + 1}} - \frac{2a_0 t}{\gamma - 1}$$



Moto non stazionario

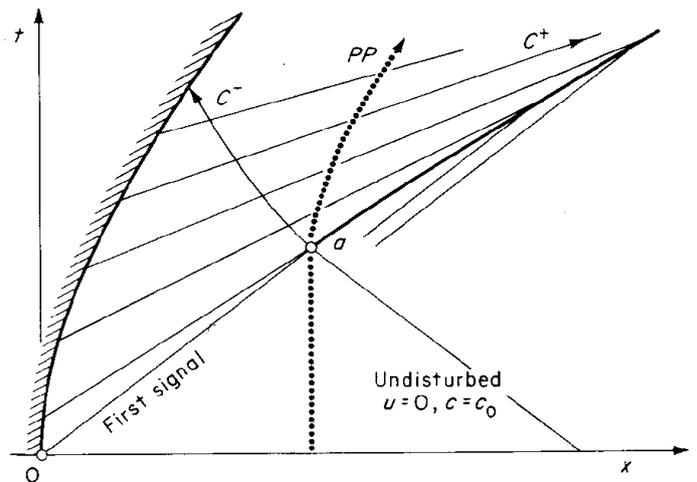
Moto indotto da un pistone che si muove verso destra.

Se si considera la parte destra del condotto si avrà una compressione. Quanto detto per il caso dell'espansione vale ancora solo che ad un certo punto si formerà un'onda d'urto.

$$J^- = u - \frac{2}{\gamma-1}a = -\frac{2}{\gamma-1}a_0 = \text{cost} \rightarrow a = a_0 + u \frac{\gamma-1}{2}$$

$$\lambda^+ = u_p + a = \dot{x} + a_0 + \frac{\gamma-1}{2}\dot{x} = a_0 + \frac{\gamma+1}{2}\dot{x}$$

Le caratteristiche C^+ tendono a convergere. A sinistra della curva caratteristica C^- di figura vale quanto detto per il caso dell'espansione. La formazione dell'onda d'urto complica la trattazione nella zona a destra della curva caratteristica C^- .



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

Per determinare il tempo t^* in cui si forma l'onda d'urto si procede con la stessa logica utilizzata in precedenza. Dalla figura:

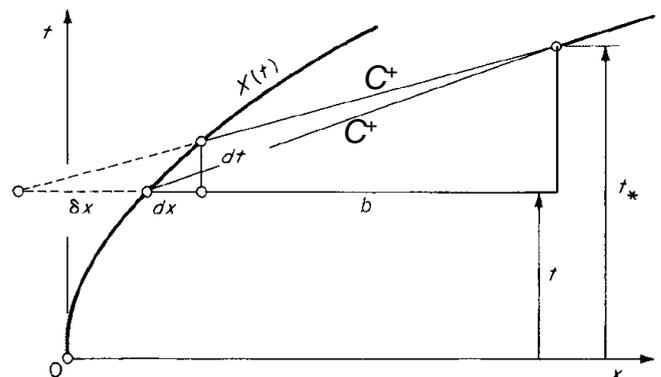
$$\lambda^+ = u + a = \frac{b+dx}{t^*-t} \quad \lambda^+ = u + a + d(u+a) = \frac{b+dx+\delta x}{t^*-t}$$

Quindi:

$$t^* - t = \frac{b+dx}{u+a} = \frac{b+dx+\delta x}{u+a+d(u+a)} \rightarrow (b+dx)(u+a+d(u+a)) = (b+dx+\delta x)(u+a)$$

$$(b+dx)d(u+a) = \delta x(u+a) \rightarrow (b+dx) = \delta x \frac{(u+a)}{d(u+a)}$$

$$\frac{b+dx}{u+a} = t^* - t = \frac{\delta x}{d(u+a)}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

$$\frac{b + dx}{u + a} = t^* - t = \frac{\delta x}{d(u + a)}$$

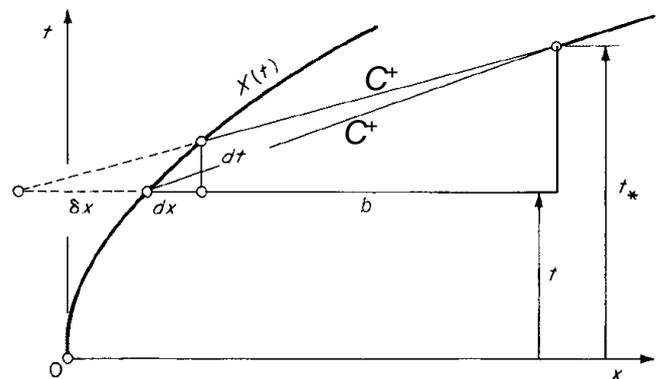
$$\lambda^+ = u + a = a_o + \frac{\gamma + 1}{2} \dot{x}$$

Dalla figura si ha:

$$\delta x + dx = (u + a + d(u + a)) dt \quad dx = \dot{x} dt$$

Da cui, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$\delta x = (u + a) dt - \dot{x} dt = \left(a_o + \frac{\gamma + 1}{2} \dot{x} - \dot{x} \right) dt = \left(a_o + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{x} \right) dt$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

$$t^* - t = \frac{\delta x}{d(u + a)}$$

$$\delta x = \left(a_o + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{x} \right) dt$$

$$\lambda^+ = u + a = a_o + \frac{\gamma + 1}{2} \dot{x}$$

$$t^* - t = \frac{a_o + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{x}}{\frac{\gamma + 1}{2} \ddot{x}}$$

$$d(u + a) = \frac{\gamma + 1}{2} \ddot{x} dt$$

Chiaramente si è interessati al minimo tempo che causa una coalescenza delle onde. Derivando si ha:

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = 1 + \frac{\frac{\gamma - 1}{2} \ddot{x}}{\frac{\gamma + 1}{2} \ddot{x}} - \frac{\left(a_o + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{x} \right) \frac{\gamma + 1}{2} \ddot{x}}{\left(\frac{\gamma + 1}{2} \ddot{x} \right)^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} - \frac{\left(a_o + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{x} \right) \ddot{x}}{\frac{\gamma + 1}{2} \ddot{x}^2} = 0$$

$$\ddot{x}^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right) = \left(a_o + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{x} \right) \ddot{x}$$

$$\gamma \ddot{x}^2 = \left(a_o + \frac{\gamma - 1}{2} \dot{x} \right) \ddot{x}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

$$\gamma \ddot{x}^2 = \left(a_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{x} \right) \ddot{x}$$

Che deve essere risolta sulla base della conoscenza del reale percorso del pistone. Per il caso particolare in cui il percorso del pistone sia dato da:

$$x = At^n \quad \dot{x} = Ant^{n-1} \quad \ddot{x} = An(n-1)t^{n-2} \quad \ddot{x} = An(n-1)(n-2)t^{n-3}$$

Si ha:

$$\gamma (An(n-1)t^{n-2})^2 = \left(a_0 + \frac{\gamma-1}{2} Ant^{n-1} \right) An(n-1)(n-2)t^{n-3}$$

$$\gamma A^2 n^2 (n-1)^2 t^{2n-4} = a_0 An(n-1)(n-2)t^{n-3} + \frac{\gamma-1}{2} Ant^{n-1} An(n-1)(n-2)t^{n-3}$$

Dividendo per $An(n-1)$:

$$\gamma An(n-1)t^{2n-4} = a_0(n-2)t^{n-3} + \frac{\gamma-1}{2} nA(n-2)t^{2n-4}$$

Dividendo per $(n-2)$:

$$\gamma An \frac{(n-1)}{(n-2)} t^{n-1} = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} nAt^{n-1} \rightarrow a_0 = An \left(\gamma \frac{(n-1)}{(n-2)} - \frac{\gamma-1}{2} \right) t^{n-1}$$



Moto non stazionario

$$a_0 = An \left(\gamma \frac{(n-1)}{(n-2)} - \frac{\gamma-1}{2} \right) t^{n-1} \quad \gamma \ddot{x}^2 = \left(a_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{x} \right) \ddot{x}$$

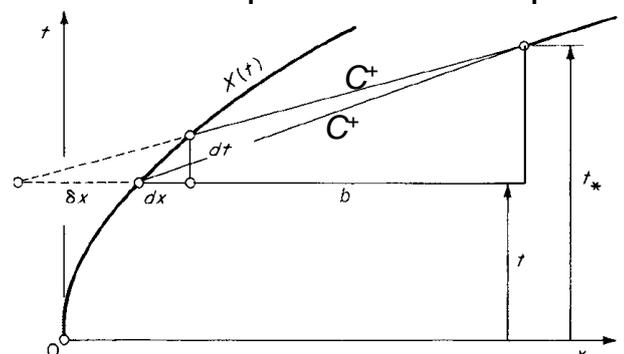
Questa equazione deve essere risolta nel tempo.

Per $n=2$ (movimento del pistone con legge parabolica) si deve riprendere la relazione iniziale e si ha:

$$t^* = t + \frac{a_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{x}}{\frac{\gamma+1}{2} \ddot{x}} = t + \frac{a_0 + \frac{\gamma-1}{2} 2At}{\frac{\gamma+1}{2} 2A}$$

Che è una relazione strettamente crescente di t il minimo per t^* si ha dunque al tempo iniziale $t=0$.

$$t^* = \frac{a_0}{(\gamma+1)A} = \frac{x^*}{a_0} \quad x^* = \frac{a_0^2}{(\gamma+1)A}$$

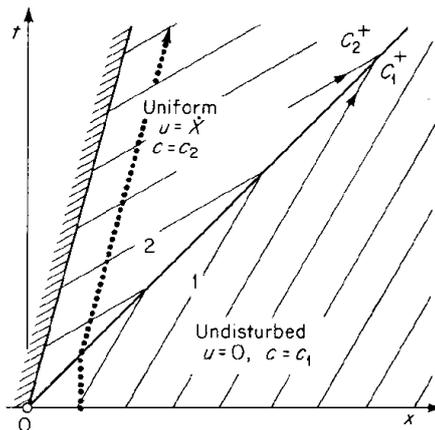


Moto non stazionario

Il caso di accelerazione impulsiva è stato trattato nel corso di Gasdinamica I. In particolare:

$$\frac{\dot{x}}{a_1} = \frac{2}{\gamma+1} \left(M_1 - \frac{1}{M_1} \right)$$

Dove a_1 è la velocità del suono indisturbata e M_1 è il numero di Mach dell'onda d'urto.



Moto non stazionario

Interazioni di onde

Si esamina ora il caso di riflessione su una **superficie solida**. È conveniente considerare la riflessione di una caratteristica C^+ con una di tipo C^- . Lungo la curva caratteristica C^+ è noto J^+ e si vorrebbe ricavare il valore J^- sulla curva caratteristica riflessa. Nel caso generale in cui la parete solida si muove con velocità u_b si ha:

$$J_i^+ = u_b + F_b \quad J_r^- = u_b - F_b$$

Eliminando F_b :

$$J_r^- = -J_i^+ + 2u_b$$

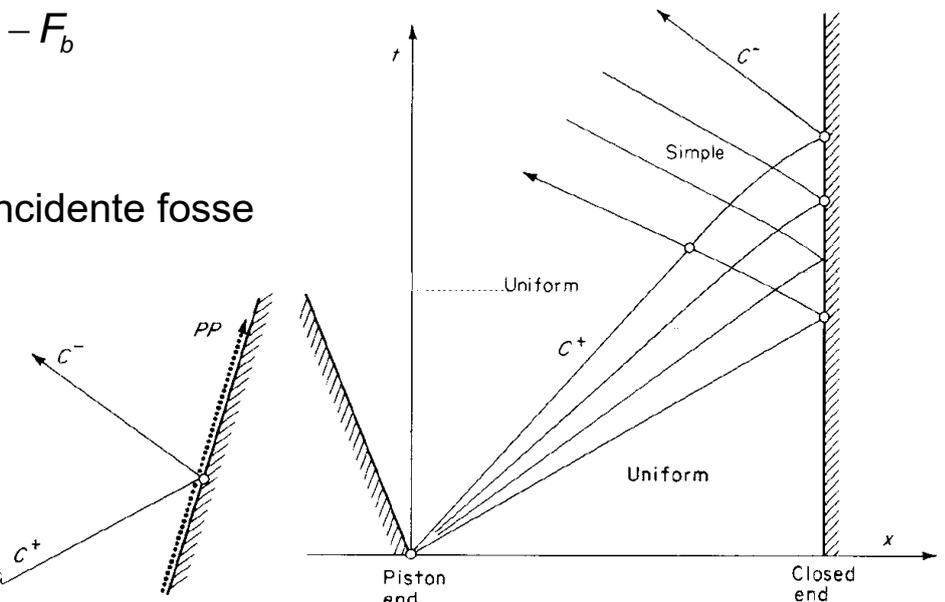
Se la curva caratteristica incidente fosse la C^- si avrebbe:

$$J_r^+ = -J_i^- + 2u_b$$

Se la parete fosse fissa

$u_b=0$ e

$$J_r^- = -J_i^+ \quad J_r^+ = -J_i^-$$



Moto non stazionario

Superficie libera

In regime subsonico, sulla curva caratteristica C^+ , si ha la condizione $p=p_a$ quindi $F=F_a$:

$$J_i^+ = u + F_a \quad J_r^- = u - F_a$$

Eliminando u :

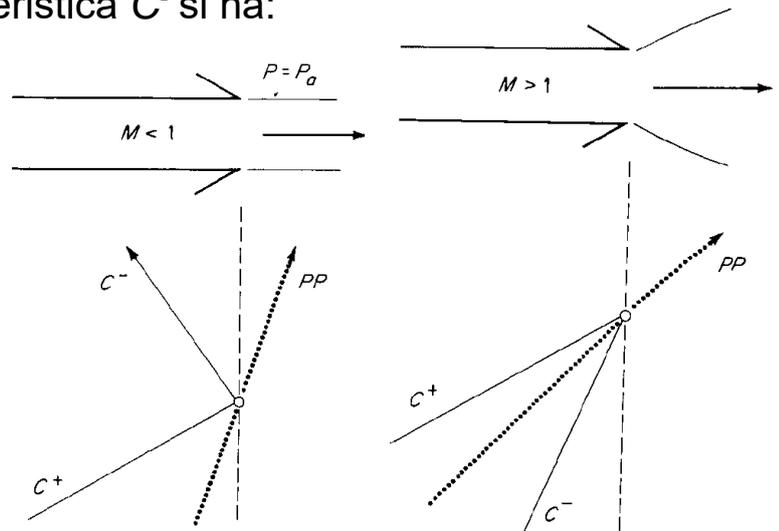
$$J_r^- = J_i^+ - 2F_a$$

In modo analogo per la curva caratteristica C^- si ha:

$$J_r^+ = J_i^- + 2F_a$$

Nel caso supersonico entrambe le caratteristiche arrivano dall'interno e non ci saranno riflessioni. In particolare, a parte casi particolari, si ha:

$$p \neq p_a$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario

Superficie di contatto fra due fluidi diversi

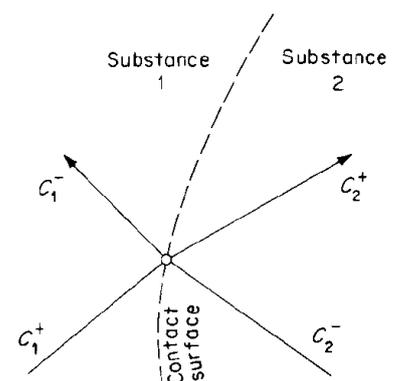
In regime subsonico, sulla curva caratteristica C^+ , si ha la condizione $p=p_1=p_2$ quindi:

$$J_1^+ = u + F_1(p) \quad J_2^- = u - F_2(p)$$

Eliminando u :

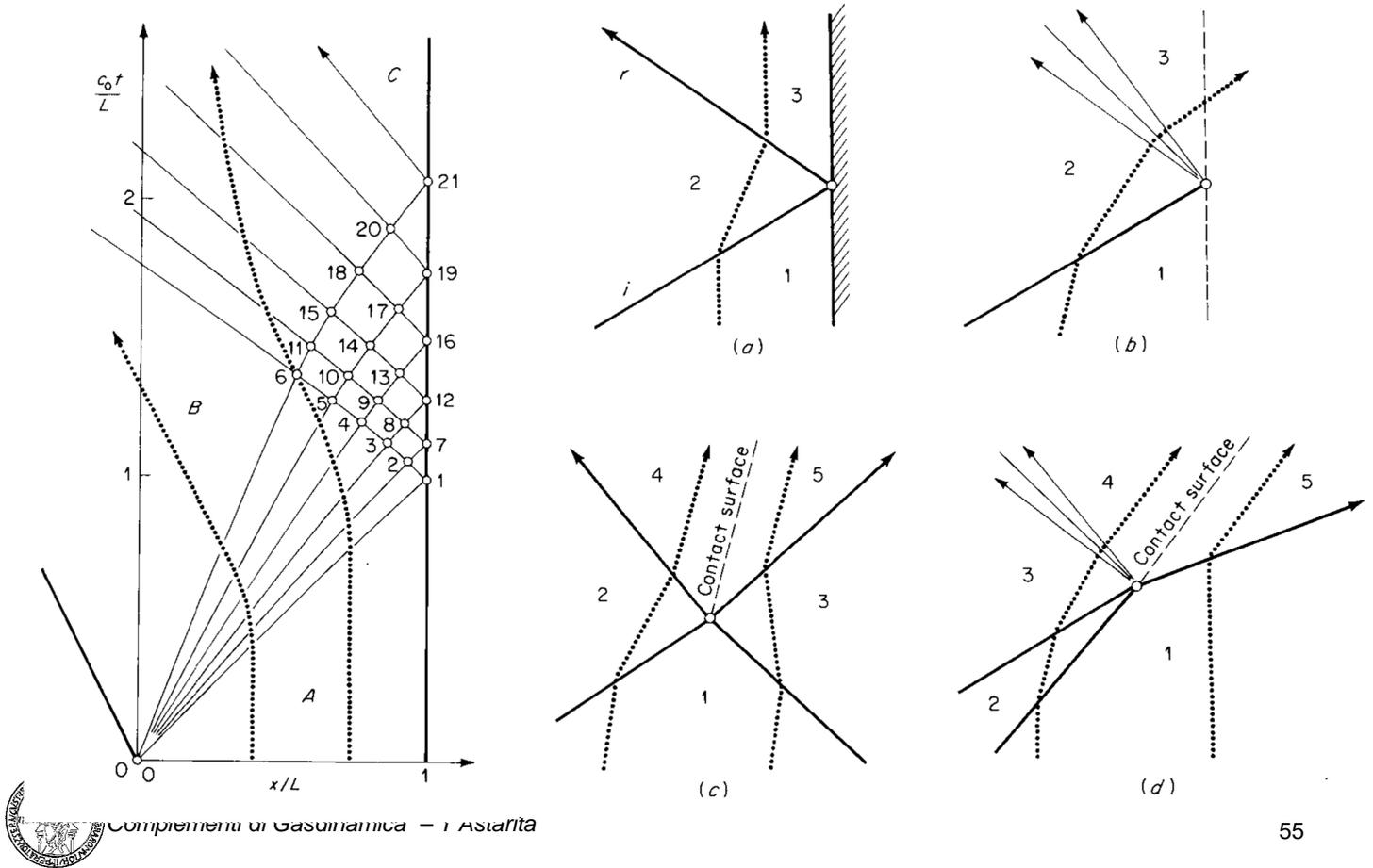
$$J_1^+ - J_2^- = F_1(p) + F_2(p)$$

Che è una equazione nell'incognita p . Ricavata la pressione si può determinare F e successivamente u da cui si ricavano gli invarianti trasmessi.



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Moto non stazionario



Moto non stazionario

EXAMPLE 8.7 SHOCK INCIDENT ON AN OPEN END

A shock travels down a tube containing perfect gas ($\gamma = 1.40$) and approaches an open end. The fluid ahead of the shock is at rest. Find the flow conditions within the tube after the shock reaches the exit plane, for three different shock Mach numbers M_{1n} ,

Case *a*: $M_{1n} = 1.25$

Case *b*: $M_{1n} = 1.50$

Case *c*: $M_{2n} = 2.50$

These three cases have been calculated and are illustrated in Fig. 8.38.

Case *a*. The shock tables give directly that $u_2 = 0.375c_1$, $c_2 = 1.077c_1$, and $P_2 = 1.656P_1$. Assuming that the outflow is subsonic, $P_3 = P_1$; then

$$\frac{c_3}{c_2} = \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} = \left(\frac{1}{1.656}\right)^{1/2} = 0.9305$$

This gives $c_3 = 1.002c_1$. From the constancy of the Riemann invariant between fields 2 and 3, find

$$\frac{u_3}{c_1} = \frac{u_2}{c_1} + 5\left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{c_3}{c_1}\right) = 0.375 + 0.375 = 0.750$$



That the velocity jump is the same across the shock and the reflected rarefaction fan is a consequence of the weakness of the incident shock. The flow in field 3, the outflow, is indeed subsonic since

$$M_3 = \frac{u_3}{c_3} = \frac{u_3}{c_1} \frac{c_1}{c_3} = 0.748$$

Case b. Under the same assumptions as above, and proceeding in exactly the same way, obtain

$$\frac{u_3}{c_1} = 1.389 \quad \frac{c_3}{c_1} = 1.010$$

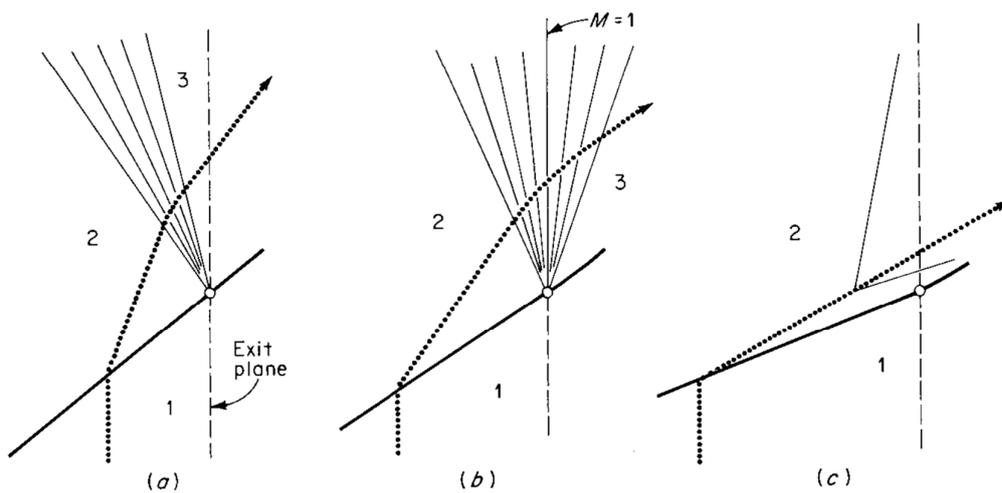


Figure 8.38 Shock incident on an open end.

Moto non stazionario

The flow is now supersonic in field 3, which in fact lies *outside* the tube [this can be verified by calculating the slope of the final characteristic C^- in the fan: $(u_3 - c_3)/c_1 = +0.373$, as drawn in Fig. 8.38b]. That part of the calculation which falls outside the tube is of course invalid. The result which is valid is that the exit flow is sonic, corresponding to the vertical characteristic standing in the mouth of the tube. The pressure P_e along this characteristic is found to be $P_e = 1.639P_1$, with expansion to pressure P_1 taking place outside the tube. For a photograph of such an expansion, see Fig. 8.39.

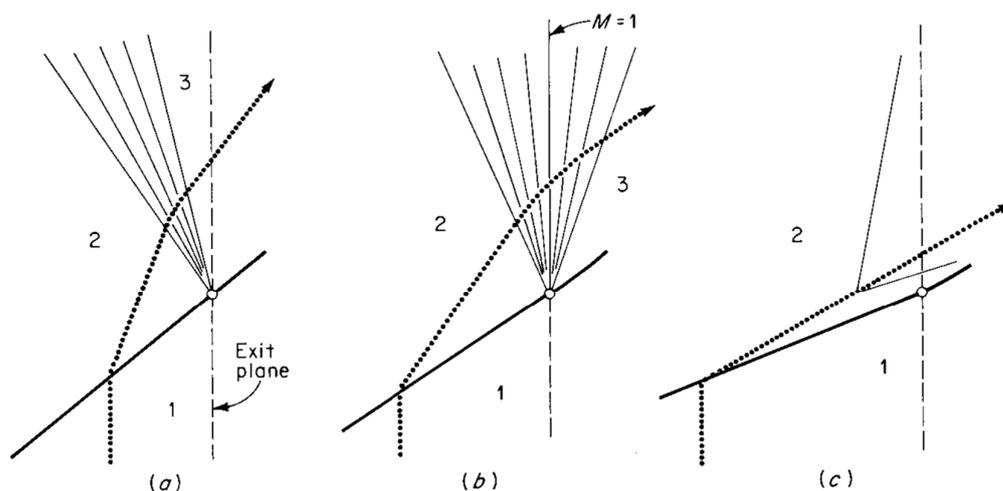


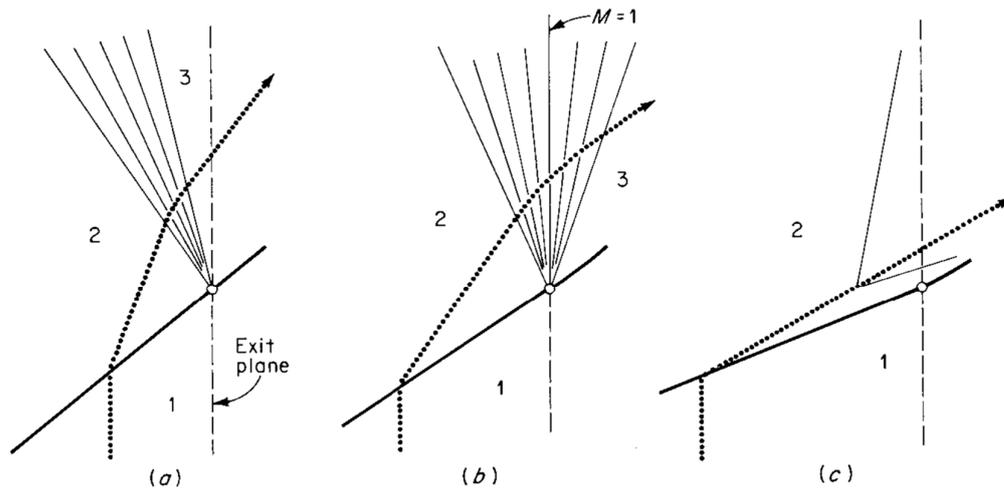
Figure 8.38 Shock incident on an open end.

Moto non stazionario

Case c. The shock itself is sufficiently strong to accelerate the gas to supersonic speed. From the shock tables

$$\frac{u_2}{c_1} = 1.750 \quad \frac{c_2}{c_1} = 1.462$$

Thus $M_2 = 1.197$, and both sets of characteristics travel toward the exit plane. There can be no reflected wave, and the outflow is supersonic at state 2.



Com **Figure 8.38**
Shock incident on an open end.

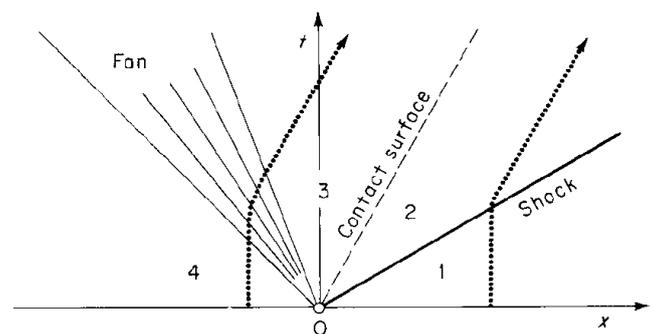
Tubo d'urto

Il tubo d'urto è utilizzato per ottenere flussi con alte temperature, numeri di Mach relativamente elevati e tempi di prova piccoli. Nella forma più semplice è un tubo chiuso alle estremità diviso da un diaframma. Nelle due sezioni sono contenuti due gas uno ad alta pressione (Driver gas) e l'altro a bassa pressione (Test gas). Con un carico sufficiente il diaframma si rompe e, idealmente svanisce. In questo istante nasce un'onda d'urto che viaggia verso il gas a bassa pressione ed un ventaglio di espansione che si muove in direzione opposta. Si formano quattro zone la 1 e la 4 sono indisturbate mentre la 2 e la 3 sono zone a pressione e velocità costanti.

La zona 2 è quella in cui si hanno condizioni di alta velocità e temperatura.

Tipicamente il rapporto p_4/p_1 è particolarmente elevato perché p_1 è molto piccolo. Attraverso il ventaglio d'espansione si ha:

$$J^+ = u_4 + \frac{2}{\gamma_4 - 1} a_4 = \text{cost}$$



High - pressure driver gas	Low - pressure driven gas
----------------------------	---------------------------

Diaphragm



Tubo d'urto

Nella zona indisturbata la velocità è nulla quindi:

$$J^+ = \frac{2}{\gamma_4 - 1} a_4 = u_3 + \frac{2}{\gamma_4 - 1} a_3 \rightarrow \frac{a_3}{a_4} = 1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_3}{a_4}$$

Che sempre nell'ipotesi $\gamma_3 = \gamma_4$ può essere trasformata in termini di pressione come:

$$\frac{p_3}{p_4} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_3}{a_4} \right)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$

Si è già visto che:

$$u_2 = \frac{2a_1}{\gamma_1 + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right)$$

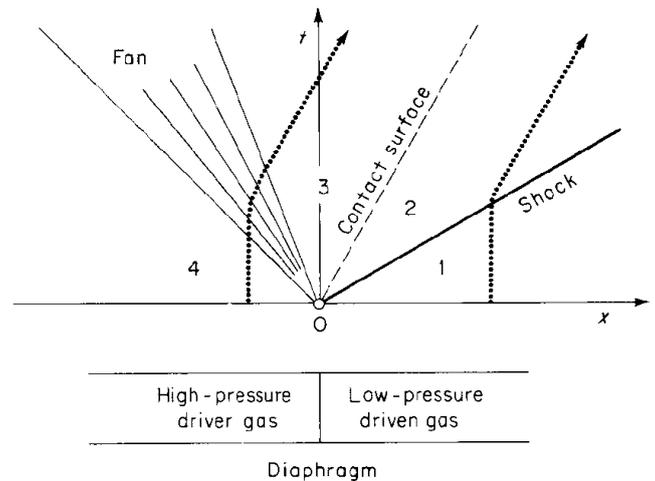
Dove di nuovo $\gamma_1 = \gamma_2$ e M_s è il numero di Mach dell'onda d'urto.

Dalle equazioni delle onde d'urto normali si ha:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma_1 M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita



Tubo d'urto

$$\frac{p_3}{p_4} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_3}{a_4} \right)^{\frac{2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma_1 M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1}$$

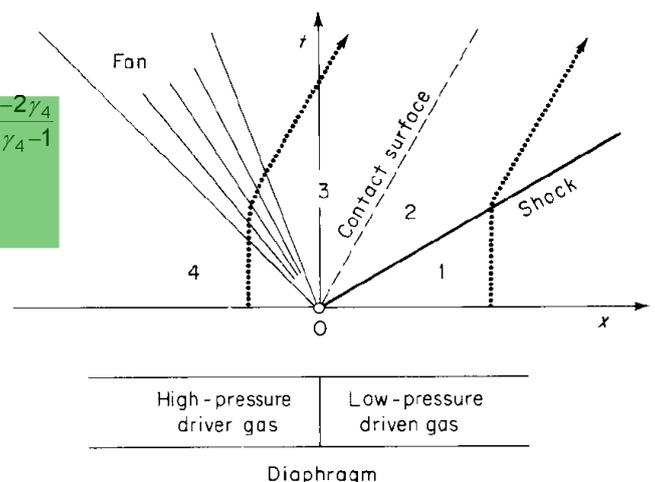
$$u_2 = \frac{2a_1}{\gamma_1 + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right)$$

Ricordando che $u_2 = u_3$ e $p_2 = p_3$ si ha:

$$\frac{p_4}{p_3} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_3}{a_4} \right)^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \frac{u_2}{a_1} \frac{a_1}{a_4} \right)^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} = \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{a_1}{a_4} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \right)^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4}{p_3} \frac{p_3}{p_2} \frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{2\gamma_1 M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1} \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{a_1}{a_4} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \right)^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

Tubo d'urto

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{2\gamma_1 M_s^2 - (\gamma_1 - 1)}{\gamma_1 + 1} \left(1 - \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{a_1}{a_4} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \right)^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}}$$

Supponendo che $\frac{p_4}{p_1} \rightarrow \infty$ in modo da avere una idea di come i vari parametri influenzano il M_s . Le possibili soluzioni sono:

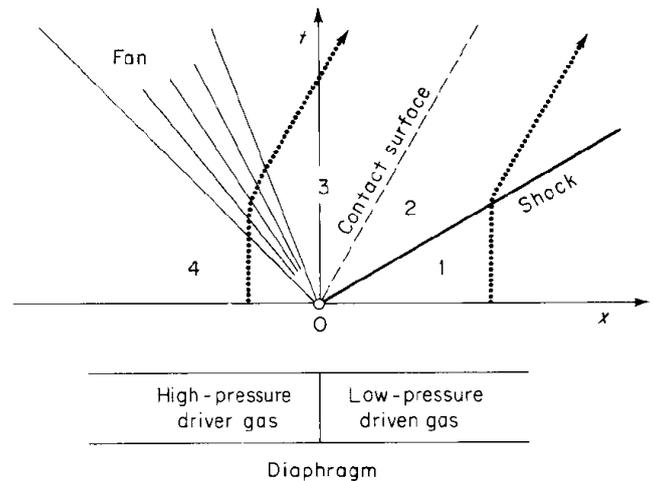
$$\begin{cases} M_s \rightarrow \infty \\ 1 - \frac{\gamma_4 - 1}{\gamma_1 + 1} \frac{a_1}{a_4} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ha:

$$\left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \rightarrow \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \frac{a_4}{a_1}$$

Che per M_s elevato fornisce:

$$M_s = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \frac{a_4}{a_1}$$



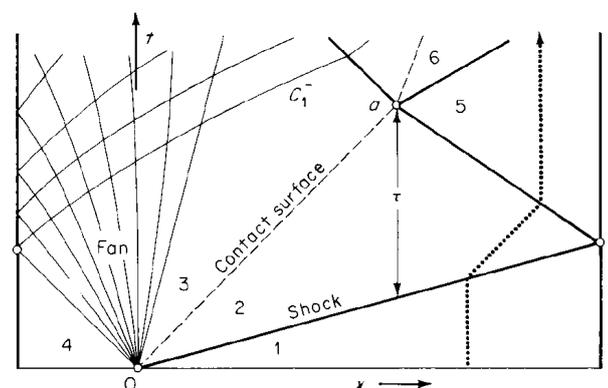
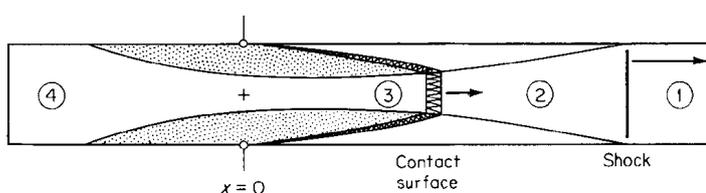
Complementi di Gasdinamica – T Astarita

Tubo d'urto

$$M_s = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_4 - 1} \frac{a_4}{a_1}$$

Per avere M_s elevato conviene avere a_4 grande e γ_4 piccolo. L'idrogeno è un gas che soddisfa queste condizioni.

Le onde riflesse dalle superfici terminali del tubo riducono il tempo di prova ad un massimo teorico di τ che tipicamente è dell'ordine di qualche millisecondo. Allungando il tubo non è detto che aumenti τ infatti il passaggio dell'onda d'urto provoca la formazione di uno strato limite che aumenta lo spessore col tempo e al limite potrebbe occupare tutto il tubo.



Tubo d'urto

Il numero di Mach nella zona 2 è:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] [2/M_1^2 + (\gamma - 1)]}{(\gamma + 1)^2}$$

$$u_2 = \frac{2a_1}{\gamma_1 + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \rightarrow M_2 = \frac{u_2}{a_2} = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$M_2 = \frac{2}{\gamma_1 + 1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) (\gamma_1 + 1) \sqrt{\frac{1}{[2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)] [2/M_s^2 + (\gamma - 1)]}}$$

Nel limite $M_s \rightarrow \infty$ si ha:

$$\lim_{M_s \rightarrow \infty} M_2 = 2 \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) \sqrt{\frac{1}{[2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)] [2/M_s^2 + (\gamma - 1)]}} =$$

$$\lim_{M_s \rightarrow \infty} M_2 = 2M_s \sqrt{\frac{1}{2\gamma M_s^2 (\gamma - 1)}} = \frac{2}{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}$$

Che per $\gamma = 1.4$ fornisce:

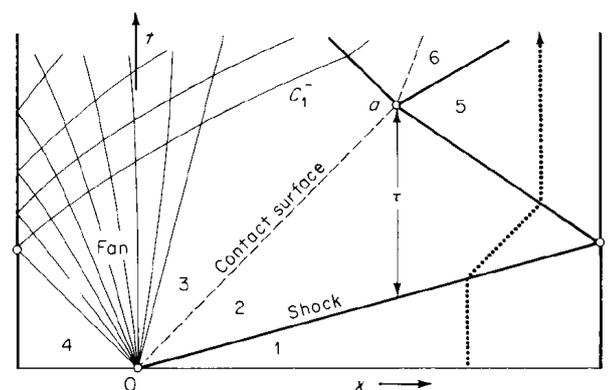
$$\lim_{M_s \rightarrow \infty} M_2 = \frac{2}{\sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}} = \frac{5}{\sqrt{7}} = 1.89$$



Tubo d'urto

Se si è interessati solo ad avere temperature molto elevate si può utilizzare la zona 5. In questo caso se il tubo è ben progettato si può ritardare di molto l'arrivo dell'onda d'urto che separa la zona 5 dalla 6 producendo così un elevato tempo di prova.

Una ulteriore possibilità è di utilizzare la zona 5 come zona di ristagno di una galleria del vento a svuotamento (shock tunnel).

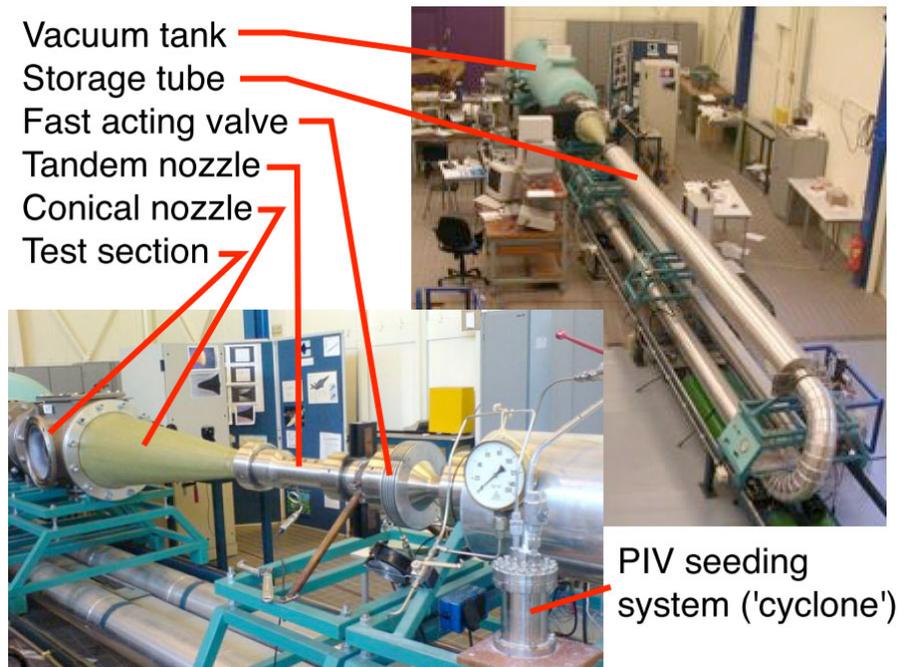


Hypersonic Ludwieg tube

I tubi di Ludwieg (1955) avendo dei bassi costi operativi ed una buona qualità del flusso sono una valida alternativa alle gallerie del vento a svuotamento.

Non sono necessari dei grossi serbatoi ne sistemi di controllo particolarmente sofisticati.

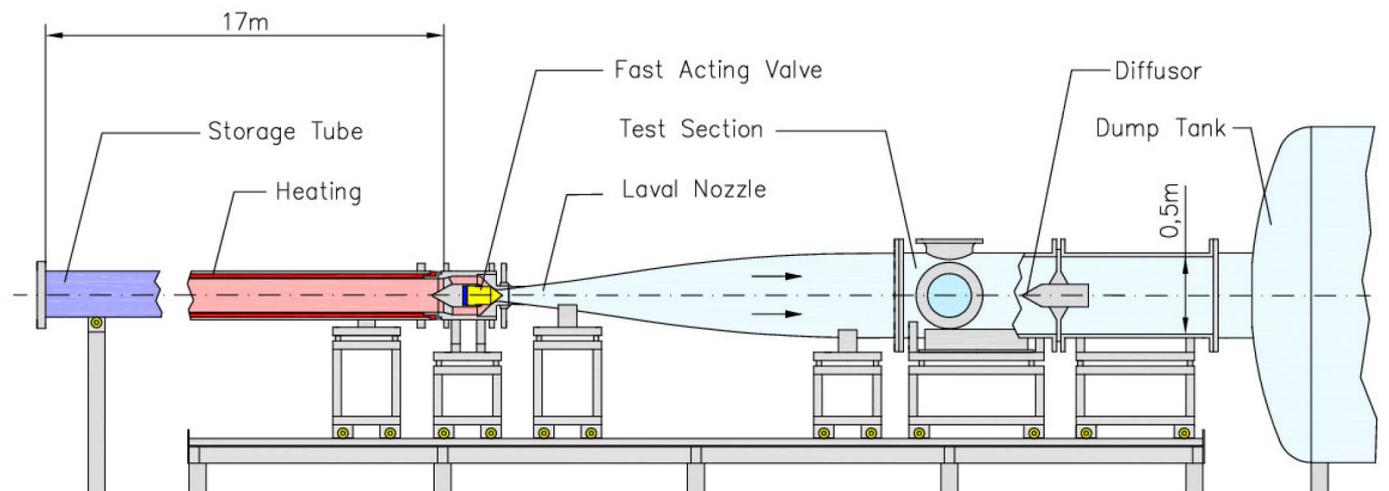
I costi operativi possono essere ridotti utilizzando una valvola ad apertura rapida piuttosto che il diaframma proposto da Ludwieg.



Hypersonic Ludwieg tube

L'aria usata negli esperimenti è conservata nel tubo, ad alta temperatura e pressione. All'apertura della valvola (che considereremo istantanea) nasce una onda d'urto che si propaga verso la zona a bassa pressione accelerando il fluido verso l'ugello.

Dopo il passaggio dell'onda si può supporre che il moto nell'ugello e nella camera di prova sia stazionario.



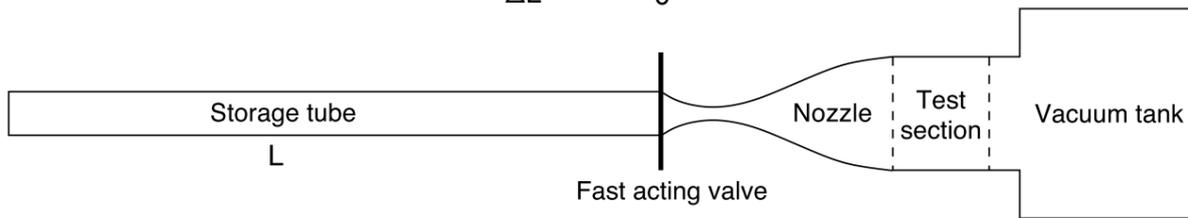
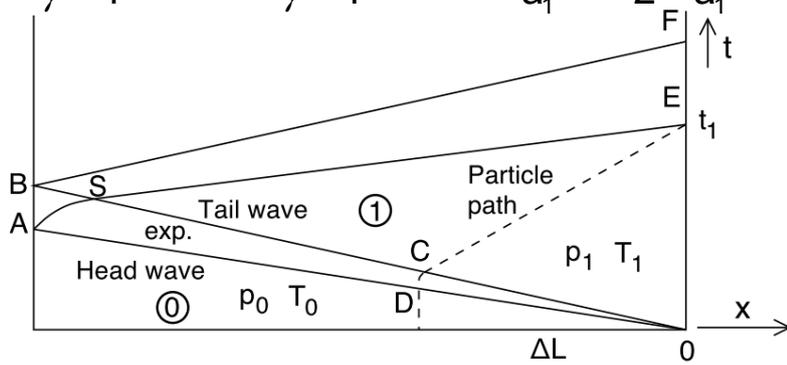
Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2$$

Nel tubo, invece, si propagherà un treno di onde di espansione che possono essere descritte come onde semplici.

Le condizioni in 1 possono essere ricavate facilmente. Dalla geometria dell'ugello, nelle ipotesi di moto stazionario ed isentropico, si trova il M_1 , invece dalla teoria delle caratteristiche si ha:

$$J^+ = \frac{2}{\gamma - 1} a_0 = u_1 + \frac{2}{\gamma - 1} a_1 \rightarrow \frac{a_0}{a_1} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1}{a_1} + 1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1 = \zeta_1$$



Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2$$

$$J^+ = \frac{2}{\gamma - 1} a_0 = u_1 + \frac{2}{\gamma - 1} a_1 \rightarrow \frac{a_0}{a_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1 = \zeta_1 \rightarrow \frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{\zeta_1}$$

Moltiplicando per u_1 :

$$\frac{a_0 u_1}{a_1} = u_1 \zeta_1 \rightarrow \frac{u_1}{a_0} = \frac{M_1}{\zeta_1}$$

Per le curve caratteristiche:

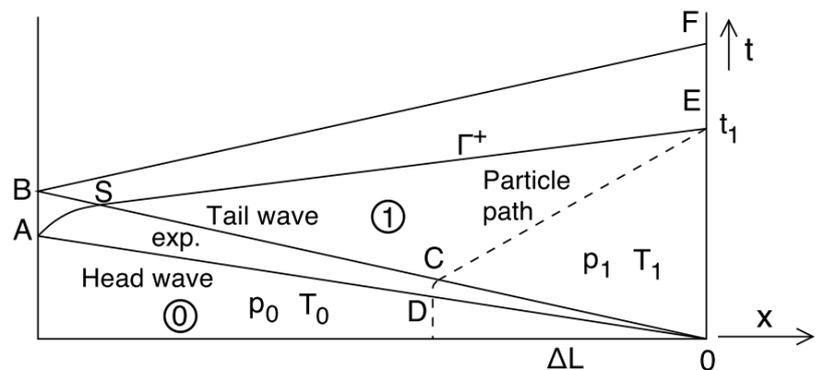
$$\frac{u_1 + a_1}{a_0} = \frac{M_1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_1} = \frac{M_1 + 1}{\zeta_1}$$

$$\frac{u_1 - a_1}{a_0} = \frac{M_1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_1} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1}$$

Lungo C^+ :

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{(\zeta_1)^2}$$

$$\frac{p_1}{p_0} = (\zeta_1)^{-\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$



$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{(\zeta_1)^2}$$

Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1$$

Le condizioni di ristagno nella zona 1 (indicate con il pedice t) si determinano immediatamente:

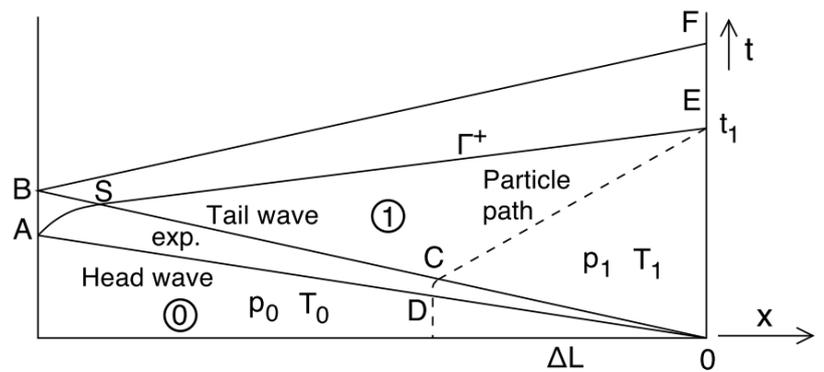
$$\frac{T_{t1}}{T_0} = \frac{T_{t1}}{T_1} \frac{T_1}{T_0} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\zeta_1^2} \quad \frac{p_{t1}}{p_0} = \left(\frac{T_{t1}}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\zeta_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Il tempo di prova è indicato in figura come t_1 . Una sua stima approssimata è:

$$t_1 = \frac{L}{a_0} + \frac{L}{u_1 + a_1} = \frac{L}{a_0} \left(1 + \frac{\zeta_1}{M_1 + 1} \right)$$

$$\frac{u_1 + a_1}{a_0} = \frac{M_1 + 1}{\zeta_1}$$

Dove L è la lunghezza del tubo.



Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1$$

Per una stima più accurata si devono integrare le equazioni. Lungo la caratteristica AS si ha:

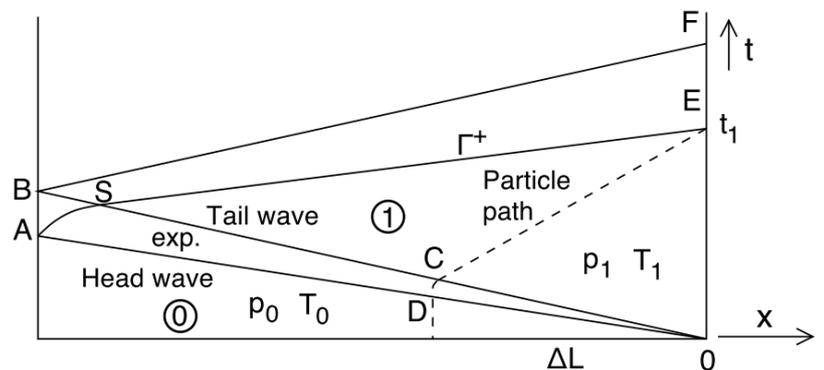
$$J^+ = \frac{2}{\gamma - 1} a_0 = u + \frac{2}{\gamma - 1} a \rightarrow a = a_0 - \frac{\gamma - 1}{2} u$$

Mentre nel ventaglio le curve C sono delle rette:

$$u - a = \frac{x}{t} \rightarrow u = a_0 - \frac{\gamma - 1}{2} u + \frac{x}{t} \rightarrow u \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right) = a_0 + \frac{x}{t} \rightarrow u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(a_0 + \frac{x}{t} \right)$$

Sostituendo nella precedente:

$$a = a_0 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(a_0 + \frac{x}{t} \right)$$



$$x = \frac{2a_0}{\gamma-1}t + \beta t^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}$$

Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2$$

Dalle condizioni al contorno si ha:

$$t = t_A = L/a_0 \quad x = x_A = -L$$

$$x_A = -L = \frac{2a_0}{\gamma-1}t_A + \beta t_A^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}} = \frac{2L}{\gamma-1} + \beta t_A^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}} \rightarrow \beta t_A^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}} = -L \frac{2+\gamma-1}{\gamma-1} = -L \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\beta = -L \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{t_A^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}} \quad \frac{x}{L} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t}{t_A} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t}{t_A} \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}} \quad a_0 = \frac{L}{t_A}$$

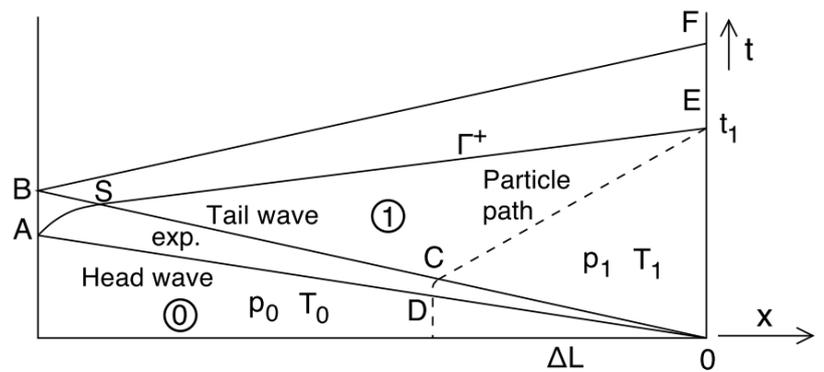
Nel punto S si ha:

$$\frac{x_S}{t_S} = u_1 - a_1 = a_0 \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \rightarrow$$

$$\frac{x_S}{L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{a_0}{L} t_S = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_S}{t_A}$$

$$\frac{x_S}{L} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t_S}{t_A} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_S}{t_A} \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}$$

$$\frac{u_1 - a_1}{a_0} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2$$

Uguagliando:

$$\frac{x_S}{L} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t_S}{t_A} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_S}{t_A} \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}$$

$$\frac{x_S}{L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_S}{t_A}$$

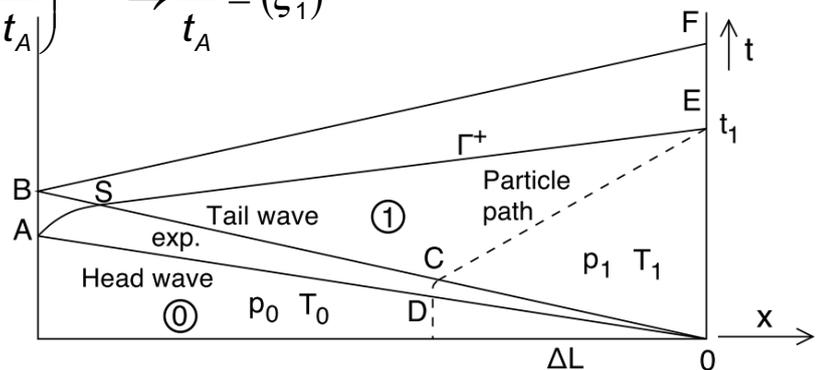
$$\frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_S}{t_A} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t_S}{t_A} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_S}{t_A} \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}} \rightarrow \left(\frac{2}{\gamma-1} - \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \right) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_S}{t_A} \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}}$$

$$\frac{2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2 \right) - M_1 + 1 = \frac{2}{\gamma-1} + M_1 - M_1 + 1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_S}{t_A} \right)^{\frac{3-\gamma-\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_S}{t_A} \right)^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}} \rightarrow \frac{t_S}{t_A} = (\zeta_1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Sostituendo:

$$\frac{x_S}{L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} (\zeta_1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2$$

Infinite:

$$t_1 = t_s - \frac{x_s}{u_1 + a_1} = t_s - \frac{L}{a_0} \frac{M_1 - 1}{M_1 + 1} t_s = t_s \left(\frac{M_1 + 1 - M_1 + 1}{M_1 + 1} \right) = t_s \frac{2}{M_1 + 1}$$

$$\frac{x_s}{L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_s}{t_A}$$

$$\frac{u_1 + a_1}{a_0} = \frac{M_1 + 1}{\zeta_1}$$

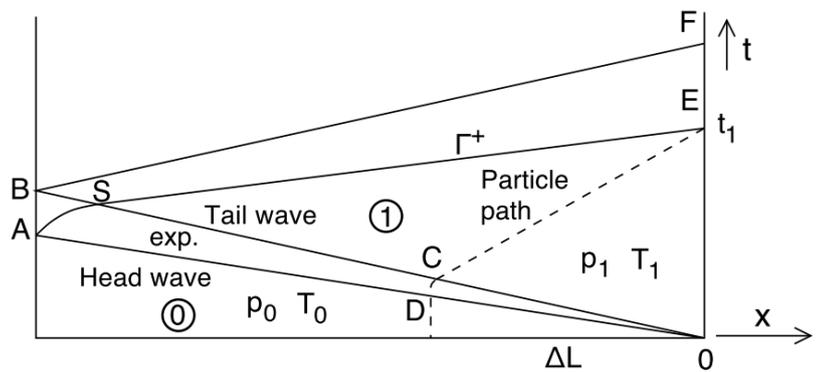
$$t_A = L/a_0$$

$$t_1 = \frac{2}{M_1 + 1} t_A (\zeta_1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{L}{a_0} \frac{2}{M_1 + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\frac{t_s}{t_A} = (\zeta_1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Mentre la formula approssimata era:

$$t_1 = \frac{L}{a_0} + \frac{L}{u_1 + a_1} = \frac{L}{a_0} \left(1 + \frac{\zeta_1}{M_1 + 1} \right)$$



M ₁	tapp	tesa	Err%
0.1	1.927273	1.929469	0.114
0.2	1.866667	1.874773	0.432
0.3	1.815385	1.832332	0.925
0.4	1.771429	1.799589	1.565



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

$$\frac{x_s}{L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_s}{t_A}$$

Hypersonic Ludwieg tube

$$\frac{t_s}{t_A} = (\zeta_1)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Evidentemente solo la porzione di fluido compresa nella parte destra del tubo (ΔL di figura) rimane indisturbata ed è inutile riscaldare l'intero tubo.

Con ragionamento analogo al precedente si ha:

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(a_0 + \frac{x}{t} \right) = A + B \frac{x}{t} \rightarrow A = \frac{2a_0}{\gamma + 1} \quad B = \frac{2}{\gamma + 1} \begin{cases} t = t_D = \Delta L/a_0 \\ x = x_D = -\Delta L \end{cases}$$

La soluzione della precedente equazione differenziale è:

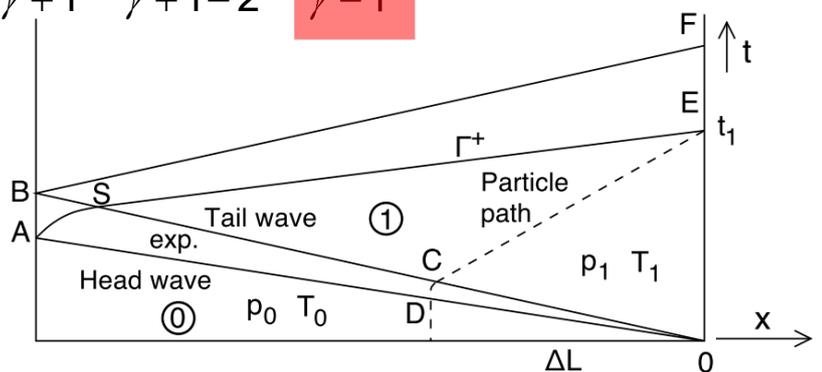
$$x = \alpha t + \beta t^k \rightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha + \beta k t^{k-1} = A + B (\alpha + \beta t^{k-1})$$

Quindi

$$\alpha = A + B\alpha \rightarrow \alpha = \frac{A}{1 - B} = \frac{1}{1 - \frac{2}{\gamma + 1}} \frac{2a_0}{\gamma + 1} = \frac{2a_0}{\gamma + 1 - 2} = \frac{2a_0}{\gamma - 1}$$

$$\beta k = B\beta \rightarrow k = B = \frac{2}{\gamma + 1}$$

$$x = \frac{2a_0}{\gamma - 1} t + \beta t^{\frac{2}{\gamma + 1}}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

$$x = \frac{2a_0}{\gamma-1}t + \beta t^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2$$

$$t = t_D = \Delta L/a_0 \quad x = x_D = -\Delta L$$

Dalle condizioni al contorno si ha:

$$x_D = -\Delta L = \frac{2a_0}{\gamma-1}t_D + \beta t_D^{\frac{2}{\gamma+1}} = \frac{2\Delta L}{\gamma-1} + \beta t_D^{\frac{2}{\gamma+1}} \rightarrow \beta t_D^{\frac{2}{\gamma+1}} = -\Delta L \frac{2+\gamma-1}{\gamma-1} = -\Delta L \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\beta = -\Delta L \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{t_D^{\frac{2}{\gamma+1}}}$$

$$\frac{x}{\Delta L} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t}{t_D} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t}{t_D} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

$$a_0 = \frac{\Delta L}{t_D}$$

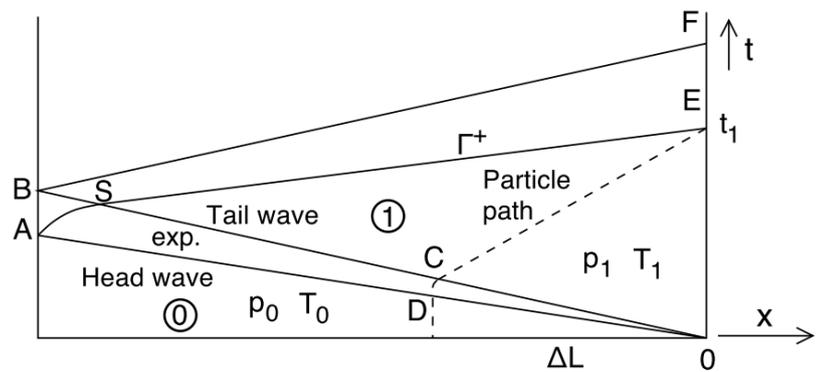
Nel punto C si ha:

$$\frac{x_C}{t_C} = u_1 - a_1 = a_0 \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \rightarrow$$

$$\frac{x_C}{\Delta L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{a_0}{\Delta L} t_C = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_C}{t_D}$$

$$\frac{x_C}{\Delta L} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t_C}{t_D} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_C}{t_D} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

$$\frac{u_1 - a_1}{a_0} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2$$

Uguagliando:

$$\frac{x_C}{\Delta L} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t_C}{t_D} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_C}{t_D} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}}$$

$$\frac{x_C}{\Delta L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_C}{t_D}$$

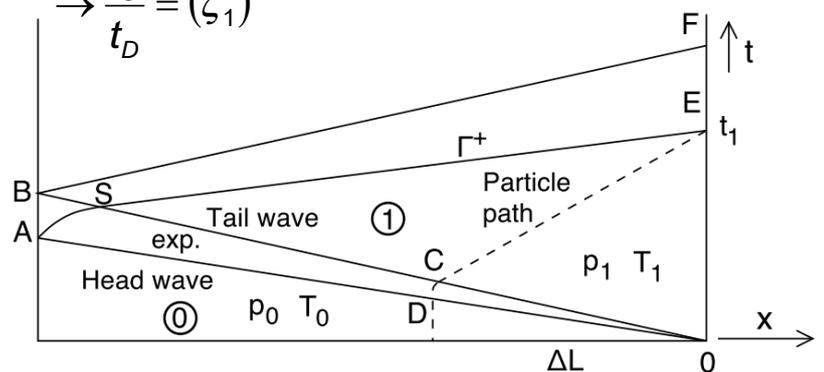
$$\frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \frac{t_C}{t_D} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{t_C}{t_D} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_C}{t_D} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}} \rightarrow \left(\frac{2}{\gamma-1} - \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \right) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_C}{t_D} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}-1}$$

$$\frac{2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2 \right) - M_1 + 1 = \frac{2}{\gamma-1} + M_1 - M_1 + 1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_C}{t_D} \right)^{\frac{2-\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{t_C}{t_D} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma+1}} \rightarrow \frac{t_C}{t_D} = (\zeta_1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Sostituendo:

$$\frac{x_C}{\Delta L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} (\zeta_1)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita

$$\frac{x_C}{\Delta L} = \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \left(\zeta_1 \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Hypersonic Ludwieg tube

$$\frac{t_C}{t_D} = \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

Quindi:

$$t_1 = t_C - \frac{x_C}{u_1} = t_D \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \frac{\Delta L}{u_1} \frac{t_D}{\Delta L} \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = t_D \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{\zeta_1}{M_1} \frac{M_1 - 1}{\zeta_1} \right) = t_D \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{M_1}{M_1} = t_D \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$t_D = \Delta L / a_0$$

$$\frac{u_1}{a_0} = \frac{M_1}{\zeta_1}$$

$$t_1 = t_D \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{M_1 - 1}{M_1} \right) = t_D \frac{\zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{M_1} = \frac{\Delta L}{a_0} \frac{\zeta_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{M_1}$$

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2$$

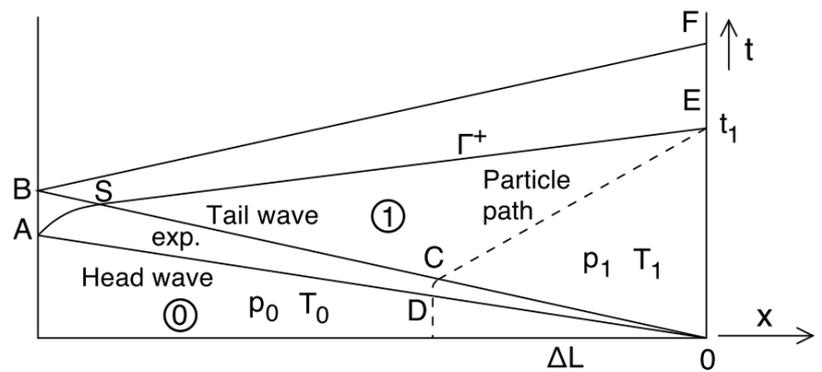
Ricordando che:

$$t_1 = \frac{2}{M_1 + 1} \frac{L}{a_0} \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \frac{\Delta L}{a_0} \frac{\zeta_1^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{M_1}$$

Da cui:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{2M_1}{M_1 + 1} \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{2M_1}{M_1 + 1} \zeta_1^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}}$$



$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{\zeta_1}$$

Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

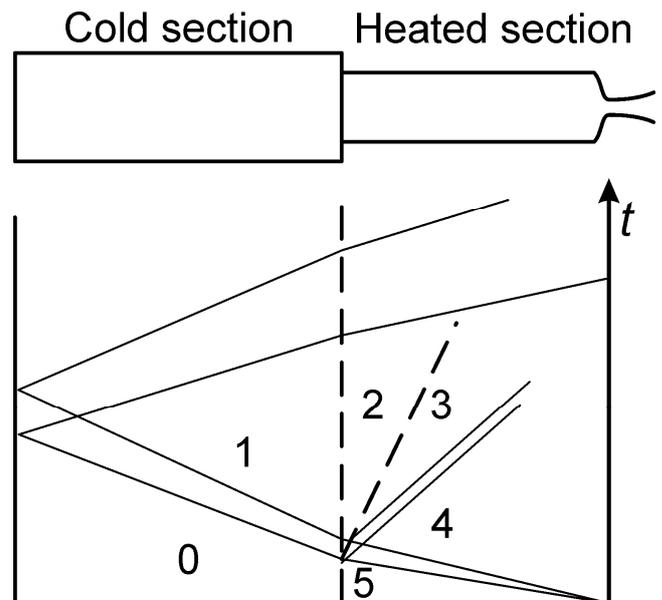
Nasce però il problema di evitare la riflessione delle onde nel passaggio dalla zona calda alla zona fredda.

La riflessione (eventuale zona 3) avviene a causa di una possibile differenza di pressione attraverso la superficie di contatto (freddo/caldo) e può essere mitigata con una variazione della sezione di passaggio (fra le zone 1 e 2).

Sia nella sezione fredda che in quella calda la pressione è legata a quella iniziale da:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\zeta_1 \right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{p_4}{p_5} = \left(\zeta_4 \right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$



$$\psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M$$

Fra la zona 1 e la zona 2 si può supporre che il moto sia stazionario, omoenergetico

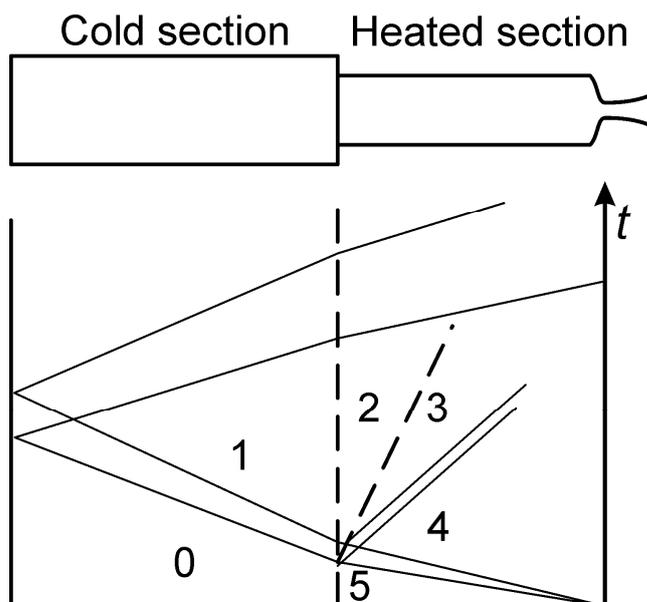
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} = \frac{\psi_1}{\psi_2}$$

e isentropico:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$



$$\psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M$$

La pressione nella zona 2 è:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \frac{1}{\zeta_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Mentre nella zona 3 in assenza di riflessione:

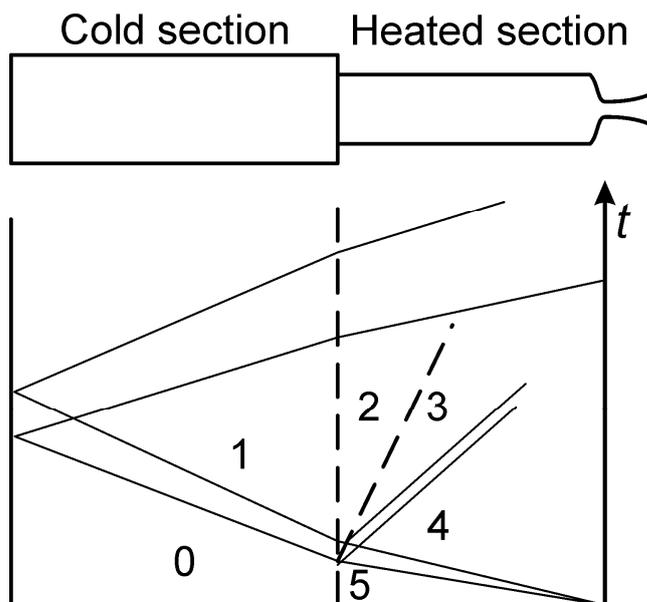
$$\frac{p_3}{p_5} = \frac{p_4}{p_5} = \left(\frac{1}{\zeta_3^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Imponendo l'uguaglianza delle pressioni attraverso la superficie di contatto (zone 2 e 3):

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_3}{p_5} \rightarrow \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \frac{1}{\zeta_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(\frac{1}{\zeta_3^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \rightarrow \frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_3^2} \quad (1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\zeta_1 \right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}$$



$$\psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M$$

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_3^2} \quad (1)$$

Risolvendo la (1), trascurando i termini di ordine superiore:

$$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3\right)^2 = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1\right)^2$$

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 + 2 \frac{\gamma-1}{2} M_3 + \dots = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 + 2 \frac{\gamma-1}{2} M_1$$

$$M_1 = M_3 - \frac{M_2^2}{2}$$

Avendo trascurato M_1^2 rispetto a M_1 .

In prima approssimazione si può supporre:

$$M_1 = M_3$$



$$\frac{u_1}{a_0} = \frac{M_1}{\zeta_1}$$

Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1$$

Evidentemente:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1}$$

Mentre nella zona 3 e nella zona 1:

$$\frac{u_3}{a_5} = \frac{M_3}{\zeta_3} \quad \frac{u_1}{a_0} = \frac{M_1}{\zeta_1}$$

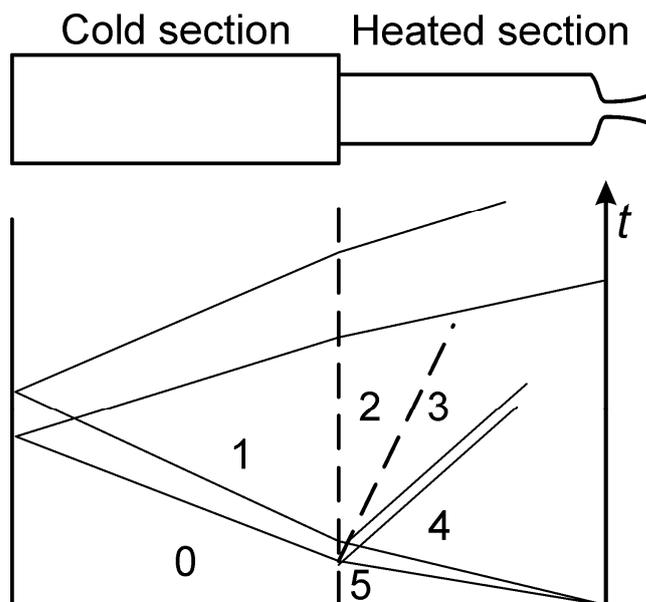
Imponendo l'uguaglianza delle velocità attraverso la superficie di contatto (zone 2 e 3):

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1} = \frac{u_3}{u_1} = \frac{a_5 M_3 \zeta_1}{a_0 \zeta_3 M_1}$$

$$M_2 = M_3 \frac{a_5}{a_0} \sqrt{\frac{\psi_2 \zeta_1^2}{\psi_1 \zeta_3^2}} = M_3 \frac{a_5}{a_0}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_3^2} \quad (1)$$



Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2$$

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_3^2} \quad (1)$$

$$M_2 = M_3 \frac{a_5}{a_0}$$

Risolvendo queste due equazioni si possono trovare i valori del numero di Mach nelle zone 1 e 2 e di conseguenza le altre grandezze termodinamiche.

Dopo il passaggio delle onde il moto è stazionario e, da un bilancio di massa, si ha:

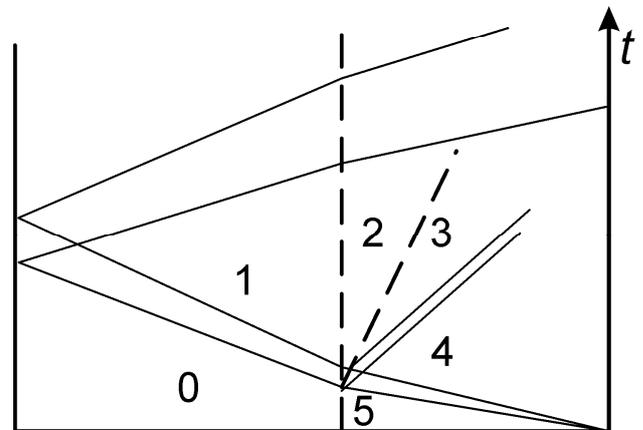
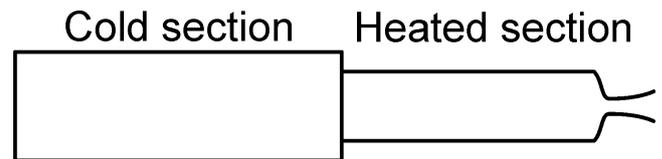
$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

Ovvero:

$$\frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_1} = \frac{a_5 M_3 \zeta_1}{a_0 \zeta_3 M_1}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita



$$\frac{a_2}{a_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_1} = \frac{a_5 M_3 \zeta_1}{a_0 \zeta_3 M_1} \quad 87$$

Hypersonic Ludwig tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2$$

$$\frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_1} = \frac{a_5 M_3 \zeta_1}{a_0 \zeta_3 M_1}$$

Risolvendo:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\rho_2 a_5 M_3 \zeta_1}{\rho_1 a_0 \zeta_3 M_1} = \frac{a_5 M_3 \zeta_1}{a_0 M_1 \zeta_3} \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Che usando la (1) si può riscrivere come:

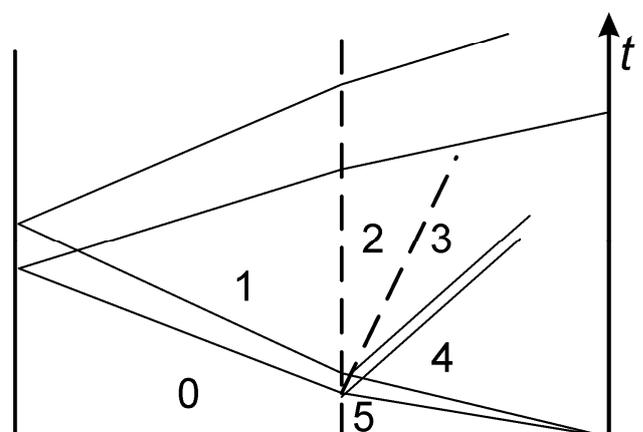
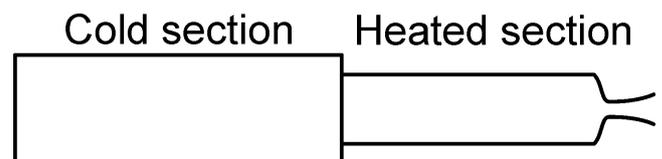
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_5 M_3}{a_0 M_1} \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Nell'ipotesi che $M_3 \rightarrow 0$ il primo termine è predominante:

$$\frac{A_1}{A_2} \cong \frac{a_5}{a_0}$$



Complementi di Gasdinamica - T Astarita



$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$M_2 = M_3 \frac{a_5}{a_0}$$

$$M_1 = M_3 - \frac{M_2^2}{2} \quad \frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_3^2} \quad (1) \quad 88$$

Hypersonic Ludwieg tube

$$\zeta_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2$$

$$\psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$M_1 = M_3 - \frac{M_2^2}{2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_5}{a_0} \frac{M_3}{M_1} \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$M_2 = M_3 \frac{a_5}{a_0}$$

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{\zeta_1^2}{\zeta_3^2}$$

(1)

$$\frac{A_1}{A_2} \cong \frac{a_5}{a_0}$$

a5/a0	2		App	Esatto							
M3	zita3	M2	psi2	M1	M1	Zita1	Psi1	A1/A2	Err%	M3/M1	RappPsi
0.01	1.002	0.02	1.0001	0.01	0.00985	1.002	1	2.0305	1.5001	1.0154	0.9998
0.02	1.004	0.04	1.0003	0.019	0.01939	1.004	1.0001	2.0619	3.0007	1.0317	0.9993
0.03	1.006	0.06	1.0007	0.028	0.0286	1.006	1.0002	2.0943	4.5025	1.0489	0.9983
0.04	1.008	0.08	1.0013	0.037	0.03749	1.007	1.0003	2.1278	6.006	1.0671	0.997
0.05	1.01	0.1	1.002	0.045	0.04603	1.009	1.0004	2.1624	7.5118	1.0863	0.9953
0.1	1.02	0.2	1.008	0.08	0.08324	1.017	1.0014	2.3557	15.1	1.2013	0.9804

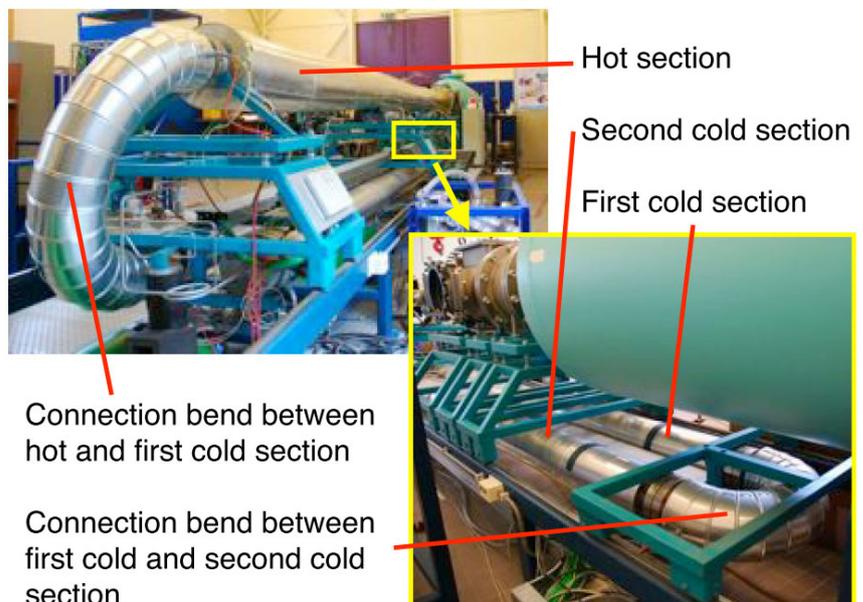
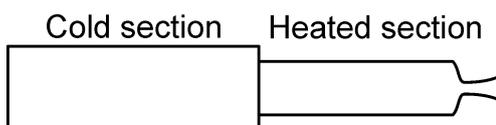


Hypersonic ludwieg tube

Quindi si deve imporre una variazione di area inversamente proporzionale alla radice quadrata delle temperature iniziali.

$$\frac{A_c}{A_h} \cong \frac{a_{0h}}{a_{0c}} = \sqrt{\frac{T_{0h}}{T_{0c}}}$$

Per evitare effetti di convezione naturale e ridurre gli ingombri si possono utilizzare tubi curvi.



Elementi di teoria acustica

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$\rho u_t + \rho u u_x + p_x = 0$$

Nell'ipotesi che le perturbazioni rispetto ad un campo indisturbato siano piccole si può imporre:

$$\rho = \rho_\infty + \rho' \quad u = u_\infty + u' = u'$$

Dove l'ultima uguaglianza è possibile perché la velocità asintotica è nulla.

$$\rho'_t + \rho'_x u' + (\rho' + \rho_\infty) u'_x = 0$$

$$(\rho' + \rho_\infty) u'_t + (\rho' + \rho_\infty) u' u'_x + \frac{dp}{d\rho} \rho'_x = 0$$

Queste equazioni sono ancora esatte. Nell'ipotesi che le perturbazioni siano trascurabili rispetto alle grandezze asintotiche si ha:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 = a_\infty^2 + \frac{da^2}{d\rho} (\rho - \rho_\infty) + o(\rho - \rho_\infty)^2 \cong a_\infty^2 + \frac{da^2}{d\rho} \rho' \cong a_\infty^2$$



Elementi di teoria acustica

$$\rho'_t + \rho'_x u' + (\rho' + \rho_\infty) u'_x = 0$$

$$(\rho' + \rho_\infty) u'_t + (\rho' + \rho_\infty) u' u'_x + \frac{dp}{d\rho} \rho'_x = 0$$

$$\frac{dp}{d\rho} = a_\infty^2$$

Nell'ipotesi che i termini del **secondo ordine** siano trascurabili si trovano le equazioni dell'acustica:

$$\rho'_t + \rho_\infty u'_x = 0$$

$$\rho_\infty u'_t + a_\infty^2 \rho'_x = 0$$

Queste equazioni sono approssimate ma sono tanto più accurate tanto più piccoli sono i disturbi iniziali. Evidentemente sono equazioni lineari.

Derivando la prima rispetto a t , la seconda rispetto a x e sottraendo oppure derivando la prima rispetto a x , la seconda rispetto a t e sottraendo si ha:

$$\left. \begin{aligned} \rho'_{tt} + \rho_\infty u'_{xt} = 0 \\ \rho_\infty u'_{tx} + a_\infty^2 \rho'_{xx} = 0 \end{aligned} \right\} \rho'_{tt} = a_\infty^2 \rho'_{xx}$$

$$\left. \begin{aligned} a_\infty^2 \rho'_{tx} + a_\infty^2 \rho_\infty u'_{xx} = 0 \\ \rho_\infty u'_{tt} + a_\infty^2 \rho'_{xt} = 0 \end{aligned} \right\} u'_{tt} = a_\infty^2 u'_{xx}$$



Elementi di teoria acustica

$$\rho'_{tt} = a_\infty^2 \rho'_{xx}$$

$$u'_{tt} = a_\infty^2 u'_{xx}$$

$$\rho'_t + \rho_\infty u'_x = 0$$

$$\rho_\infty u'_t + a_\infty^2 \rho'_x = 0$$

Le soluzioni generali di queste equazioni sono:

$$\rho' = F(x - a_\infty t) + G(x + a_\infty t)$$

$$u' = f(x - a_\infty t) + g(x + a_\infty t)$$

Dove le funzioni F , G , f e g sono funzioni generiche.

Una generica onda si propaga con velocità a_∞ e la sua forma, come già visto in altri casi, rimane invariata nel tempo.

Chiaramente la densità e la velocità sono strettamente legate e per $g=0$ si ha:

$$u'_x = f' \quad u'_t = -a_\infty f' \quad \rightarrow \quad u'_x = -\frac{u'_t}{a_\infty}$$

Che sostituita nella equazione per la densità fornisce:

$$\rho'_t - \rho_\infty \frac{u'_t}{a_\infty} = 0$$



Elementi di teoria acustica

$$\rho'_t - \rho_\infty \frac{u'_t}{a_\infty} = 0$$

$$\rho'_t + \rho_\infty u'_x = 0$$

$$\rho_\infty u'_t + a_\infty^2 \rho'_x = 0$$

Integrando questa equazione differenziale si ha:

$$\rho' = \rho_\infty \frac{u'}{a_\infty}$$

Dove si è annullata la costante perché la condizione indisturbata implica $\rho'=0$ e $u'=0$. Per la pressione si ha:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{p'}{\rho'} = a_\infty^2 \quad \rightarrow \quad p' = a_\infty^2 \rho' = \rho_\infty a_\infty u'$$

Un ragionamento analogo si può fare per la seconda curva caratteristica, quindi, in generale si ha:

$$u' = \pm \frac{a_\infty}{\rho_\infty} \rho' = \pm \frac{p'}{\rho_\infty a_\infty}$$

Normalmente in acustica se $\rho' > 0$ si parla di condensazione mentre per $\rho' < 0$ di rarefazione

