Corso di Gasdinamica II

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it

Potenziale

Equazioni di bilancio in forma locale:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = 0 \qquad \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{V} \cdot \underline{\nabla}\rho$$

$$\rho \frac{D\underline{V}}{Dt} + \underline{\nabla} p = \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau_d}} \qquad \underline{\underline{\tau_d}} = 2\mu\left(\underline{\nabla}\underline{V}\right)_0^s + k\left(\underline{\nabla} \cdot \underline{V}\right)\underline{\underline{U}}$$

$$\rho \frac{DE_t}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \left(\lambda \underline{\nabla} T + \underline{V} \cdot \underline{\underline{\tau_d}} - p\underline{V}\right) \qquad E_t = u + \frac{V^2}{2}$$

In forma conservativa diventano:

$$\rho_t + \underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{V}\right) = 0 \qquad \rho_t = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\left(\rho \underline{V}\right)_t + \underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{V}\underline{V}\right) + \underline{\nabla} p = \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\tau_d}}$$

$$\left(\rho E_t\right)_t + \underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{V} E_t\right) = \underline{\nabla} \cdot \left(\lambda \underline{\nabla} T + \underline{V} \cdot \underline{\underline{\tau_d}} - p\underline{V}\right)$$

Potenziale

Bilancio dell'entropia:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \underline{\nabla} \cdot \left(\lambda \underline{\nabla} T \right) + \frac{\phi^2}{T} \qquad \phi^2 = \underline{\underline{\tau}}_d : \left(\underline{\nabla} \underline{V} \right)_0^s$$

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\lambda \underline{\nabla} T}{T} \right) + \frac{1}{T} \left(\frac{\lambda \left(\underline{\nabla} T \right)^2}{T} + \phi^2 \right)$$

Potenziale

Trascurando i flussi dissipativi e in coordinate cartesiane le equazioni possono essere messe nella forma:

$$\frac{\partial \underline{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{E}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial y} + \frac{\partial \underline{G}}{\partial z} = 0$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E_t \end{bmatrix} \qquad \underline{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ \rho u E_t + p u \end{bmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ \rho v E_t + p v \end{bmatrix} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \\ \rho w E_t + p w \end{bmatrix}$$

Potenziale

Nell'ipotesi aggiuntiva di moto stazionario per il teorema di **Crocco**, a parte per casi particolari (moto alla Beltrami), il moto è anche irrotazionale.

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{V} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \underline{\sigma_k} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{V} = 0 \rightarrow \begin{cases} w_y = v_z \\ u_z = w_x \\ v_x = u_y \end{cases}$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto diventa:

$$\rho \underline{V} \cdot \underline{\nabla} \underline{V} + \underline{\nabla} p = 0$$

$$\rho\left(u u_x + v u_y + w u_z\right) + p_x = 0 \rightarrow \rho\left(u u_x + v v_x + w w_x\right) + p_x = 0$$
$$\rho\left(u v_x + v v_y + w v_z\right) + p_y = 0 \rightarrow \rho\left(u u_y + v v_y + w w_y\right) + p_y = 0$$
$$\rho\left(u w_x + v w_y + w w_z\right) + p_z = 0 \rightarrow \rho\left(u u_z + v v_z + w w_z\right) + p_z = 0$$

Potenziale

Luigi Crocco
Palermo – 1909 -1986

Eugenio Beltrami
Cremona - 1835-1899

Potenziale

$$\rho\left(uu_x + vv_x + ww_x\right) + p_x = \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + p_x = \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right) + p_x = 0$$

$$\rho\left(uv_x + vv_y + wv_z\right) + p_y = \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + p_y = \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right) + p_y = 0$$

$$\rho\left(uw_x + vw_y + ww_z\right) + p_z = \rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) + p_z = \rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right) + p_z = 0$$

Moltiplicando la prima per *dx* la seconda per *dy* e la terza per *dz* e sommando si ha:

$$\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)dx + \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right)dy + \rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right)dz = \rho d\left(\frac{V^2}{2}\right) =$$

$$= -p_x dx - p_y dy - p_z dz = -dp$$

$$\rho d\left(\frac{V^2}{2}\right) = -dp \rightarrow \underline{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\frac{\underline{\nabla} p}{\rho}$$

Potenziale

Lo stesso risultato si può ottenere un termini vettoriali dall'identità:

$$\left(\underline{\nabla} \wedge \underline{V}\right) \wedge \underline{V} = \underline{V} \cdot \left(\underline{\nabla}\underline{V}\right) - \underline{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$\rho \underline{V} \cdot \underline{\nabla}\underline{V} + \underline{\nabla} p = 0$$

$$\underline{V} \cdot \underline{\nabla}\underline{V} = \left(\underline{\nabla} \wedge \underline{V}\right) \wedge \underline{V} + \underline{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) = \underline{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\frac{\underline{\nabla} p}{\rho}$$

Potenziale

$$\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{V}\right)\wedge\underline{V}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\underline{\sigma_k}\wedge V_l\underline{\sigma_l}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_l\underline{\sigma_m}=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_l\underline{\sigma_m}$$

Ma: $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$

Supponiamo k=1 il primo membro è diverso da 0 solo se $i\neq j$, $l\neq m$ e $i\neq 1$, $j\neq 1$, $l\neq 1$, $m\neq 1$. Quindi:

$$\begin{cases} i=l \quad j=m & \rightarrow \quad \delta_{il}\delta_{jm} \\ i=m \quad j=l & \rightarrow \quad -\delta_{im}\delta_{jl}\left(permutazione\right) \end{cases}$$

$$\left(\underline{\nabla}\wedge\underline{V}\right)\wedge\underline{V}=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\underline{\sigma_k}\wedge V_l\underline{\sigma_l}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_l\underline{\sigma_m}=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_l\underline{\sigma_m}=$$

$$\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_l\underline{\sigma_m}=\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_i\underline{\sigma_j}-\frac{\partial V_j}{\partial x_i}V_j\underline{\sigma_i}=\underline{V}\cdot\left(\underline{\nabla}\underline{V}\right)-\underline{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Potenziale

Il potenziale φ è tale che:

$$\underline{V}=\underline{\nabla}\varphi \qquad u=\varphi_x \quad v=\varphi_y \quad w=\varphi_z$$

Se è possibile definire una funzione che soddisfa queste condizioni il moto si dice a potenziale. Per flussi **incompressibili** si ha:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{V}=0 \quad\rightarrow\quad \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{\nabla}\varphi\right)=\nabla^2\varphi=0$$

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0$$

Equazione di Laplace. Dal teorema di Schwartz:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{xy}=\varphi_{yx} &\rightarrow u_y=v_x \\ \varphi_{xz}=\varphi_{zx} &\rightarrow u_z=w_x \\ \varphi_{yz}=\varphi_{zy} &\rightarrow w_y=v_z \end{aligned}\right\}\rightarrow \underline{\nabla}\wedge\underline{V}=0$$

Potenziale

Pierre-Simon, Marchese di Laplace (Beaumont-en-Auge, Normandia, 23 marzo 1749 - Parigi, 5 marzo 1827)

Potenziale

In generale si può applicare la decomposizione di Helmholtz:

$$\underline{V} = \underline{\nabla}\varphi + \underline{\nabla} \wedge \underline{a}$$

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (August 31, 1821 – September 8, 1894)

Potenziale

Dall'equazione della continuità si ha:

$$\underline{\nabla} \cdot \left(\rho \underline{V}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho w\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \varphi_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \varphi_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \varphi_z\right) = 0$$

$$(1) \quad \rho_x \varphi_x + \rho_y \varphi_y + \rho_z \varphi_z + \rho\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}\right) = 0$$

Potenziale

Nelle stesse ipotesi si ha:

$$d\rho = \frac{d\rho}{dp}dp = \frac{-1}{a^2}\rho d\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\frac{\rho}{a^2} d\left(\frac{\varphi_x^{\ 2} + \varphi_y^{\ 2} + \varphi_z^{\ 2}}{2}\right)$$

$$\rho_x = -\frac{\rho}{a^2}\left(\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_{xz}\right)$$

$$\rho_y = -\frac{\rho}{a^2}\left(\varphi_x \varphi_{xy} + \varphi_y \varphi_{yy} + \varphi_z \varphi_{yz}\right)$$

$$\rho_z = -\frac{\rho}{a^2}\left(\varphi_x \varphi_{xz} + \varphi_y \varphi_{yz} + \varphi_z \varphi_{zz}\right)$$

Che sostituite nella (1) danno: $(1) \quad \rho_x \varphi_x + \rho_y \varphi_y + \rho_z \varphi_z + \rho\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}\right) = 0$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \frac{1}{a^2}\varphi_x\left(\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_{xz}\right) +$$

$$-\frac{1}{a^2}\varphi_y\left(\varphi_x \varphi_{xy} + \varphi_y \varphi_{yy} + \varphi_z \varphi_{yz}\right) - \frac{1}{a^2}\varphi_z\left(\varphi_x \varphi_{xz} + \varphi_y \varphi_{yz} + \varphi_z \varphi_{zz}\right) = 0$$

Potenziale

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}-\frac{1}{a^2}\varphi_x\left(\varphi_x\varphi_{xx}+\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_z\varphi_{xz}\right)+$$
$$-\frac{1}{a^2}\varphi_y\left(\varphi_x\varphi_{xy}+\varphi_y\varphi_{yy}+\varphi_z\varphi_{yz}\right)-\frac{1}{a^2}\varphi_z\left(\varphi_x\varphi_{xz}+\varphi_y\varphi_{yz}+\varphi_z\varphi_{zz}\right)=0$$

Raggruppando:

$$(2)\quad \begin{aligned}&\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}+\\&-\frac{1}{a^2}\left(\varphi_x^2\varphi_{xx}+\varphi_y^2\varphi_{yy}+\varphi_z^2\varphi_{zz}\right)-\frac{2}{a^2}\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}+\varphi_z\varphi_x\varphi_{xz}\right)=0\end{aligned}$$

Per $a^2\rightarrow\infty$ si ricade nelle ipotesi di moto incompressibile e l'equazione si riduce a quella di Laplace.

$$a^2=\gamma RT=\gamma\frac{R}{c_p}\left(c_pT_o-\frac{V^2}{2}\right)=\gamma RT_o-\frac{\gamma-1}{2}V^2=a_o^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)$$

Potenziale

$$(2)\quad \begin{aligned}&\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}+\\&-\frac{1}{a^2}\left(\varphi_x^2\varphi_{xx}+\varphi_y^2\varphi_{yy}+\varphi_z^2\varphi_{zz}\right)-\frac{2}{a^2}\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}+\varphi_z\varphi_x\varphi_{xz}\right)=0\end{aligned}$$

$$a^2=a_o^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)$$

La (2) diventa:

$$(3)\quad \begin{aligned}&\left(a_o^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)\right)\left(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}\right)+\\&-\left(\varphi_x^2\varphi_{xx}+\varphi_y^2\varphi_{yy}+\varphi_z^2\varphi_{zz}\right)-2\left(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+\varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}+\varphi_z\varphi_x\varphi_{xz}\right)=0\end{aligned}$$

Questa espressione è una equazione differenziale alle derivate parziali quasi lineare di non facile soluzione. Ha senso riscrivere questa equazione in termini vettoriali:

$$\underline{\nabla}\cdot\left(\rho\underline{V}\right)=\underline{\nabla}\cdot\left(\rho\underline{\nabla}\varphi\right)=\underline{\nabla}\rho\cdot\underline{\nabla}\varphi+\rho\nabla^2\varphi=0$$

Potenziale

$$\underline{\nabla}\cdot\left(\rho\underline{V}\right)=\underline{\nabla}\cdot\left(\rho\underline{\nabla}\varphi\right)=\underline{\nabla}\rho\cdot\underline{\nabla}\varphi+\rho\nabla^2\varphi=0$$

$$\underline{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{\underline{\nabla}p}{\rho}$$

$$\underline{\nabla}\rho=\frac{1}{a^2}\underline{\nabla}p=-\frac{\rho}{a^2}\underline{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right)=-\frac{\rho}{2a^2}\underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\varphi\cdot\underline{\nabla}\varphi\right)$$

$$-\frac{\rho}{2a^2}\underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\varphi\cdot\underline{\nabla}\varphi\right)\cdot\underline{\nabla}\varphi+\rho\nabla^2\varphi=0$$

$$a^2=a_o^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2\right)=a_o^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(\underline{\nabla}\varphi\cdot\underline{\nabla}\varphi\right)$$

$$(4)\quad 2\left(a_o^2-\frac{\gamma-1}{2}\left(\underline{\nabla}\varphi\cdot\underline{\nabla}\varphi\right)\right)\nabla^2\varphi=\underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\varphi\cdot\underline{\nabla}\varphi\right)\cdot\underline{\nabla}\varphi$$

Che essendo generale può essere applicata in qualunque sistema di riferimento.

Potenziale

In Ref. (11.10), it is shown for a scalar quantity, say, the velocity potential ϕ, that

$$\nabla\phi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\mathbf{e}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\mathbf{e}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\mathbf{e}_3 \qquad (11.50)$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right] \qquad (11.51)$$

and for a vector quantity, say, velocity $\mathbf{V}=(V_1, V_2, V_3)$, that

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3V_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3V_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2V_3)\right] \qquad (11.52)$$

Potenziale

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 V_2)\right]\frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} + \left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 V_3)\right]\frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 V_1)\right]\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \qquad (11.53)$$

where u_1, u_2, and u_3 are the *orthogonal curvilinear coordinates* and h_1, h_2, and h_3 are the *scale factors* relating the differential arc length to the differential coordinate length. That is, if ds is the differential arc length, it can be shown that

$$(ds)^2 = h_1^2(du_1)^2 + h_2^2(du_2)^2 + h_3^2(du_3)^2$$

Potenziale

If we possess the various scale factors of a particular coordinate system, then by using the preceding equation, we will be able to directly express a given equation in that system. Table 11.1 lists the scale factors for the three most common coordinate

TABLE 11.1 Coordinate Scale Factors

Coordinate System	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2	h_3
Cartesian	x	y	z	1	1	1
Cylindrical	r	θ	z	1	r	1
Spherical	r	θ	φ	1	r	$r\sin\theta$

Teoria delle caratteristiche

La (3) e, in generale la (4), per moto bidimensionale possono essere messe nella forma:

$$(5) \quad c_1\varphi_{xx} + 2c_2\varphi_{xy} + c_3\varphi_{yy} = c_4$$

Che è una equazione differenziale **quasi lineare** (le costanti possono dipendere anche dalle derivate prime di φ) alle derivate parziali del secondo ordine.

Teoria delle caratteristiche

La teoria delle caratteristiche può essere utilizzata per la soluzione di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico. Come si vedrà in seguite nella gasdinamica l'equazione del potenziale diventa **iperbolica** quando il moto è **supersonico**. In questo caso è possibile definire delle proprietà delle curve caratteristiche:

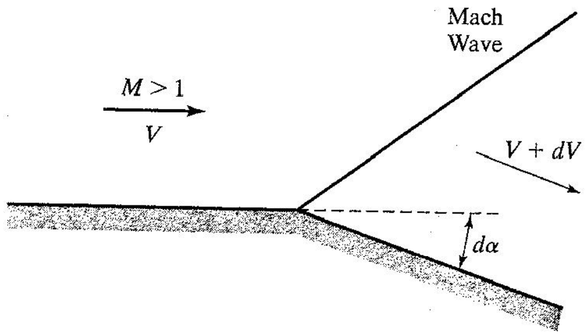
- Lungo una curva caratteristica si propagano i piccoli disturbi alla velocità del suono locale.

Dovrebbe essere noto che in moto subsonico i piccoli disturbi possono raggiungere tutti i punti del dominio d'interesse. Mentre in regime supersonico i piccoli disturbi non essendo in grado di risalire la corrente possono raggiungere solo alcuni punti del dominio d'interesse.

Teoria delle caratteristiche

- Attraverso una curva caratteristica le proprietà del flusso sono continue, anche se le derivate possono essere discontinue, mentre lungo una curva caratteristica le derivate sono indeterminate.

La prima caratteristica è evidente in un'espansione alla Prandtl e Meyer infatti, in questo caso le curve caratteristiche sono le rette che partono dallo spigolo e attraverso queste curve la funzione è continua ma le sue derivate no. Infatti prima o dopo la curva la funzione è costante e, quindi la derivata è nulla, mentre sulla curva caratteristica deve essere diversa da zero per consentire la variazione infinitesima.



Teoria delle caratteristiche

La seconda caratteristica può essere verificata con un esempio:

$$au_x + bu_y = c$$

Il differenziale di u può essere espresso come:

$$du = u_x dx + u_y dy$$

Queste due equazioni possono essere viste come due equazioni nelle due incognite u_x e u_y:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ du \end{bmatrix}$$

Che risolta con la regola di Cramer da:

$$u_x = \frac{\begin{bmatrix} c & b \\ du & dy \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ dx & dy \end{bmatrix}} = \frac{cdy - bdu}{ady - bdx} = \frac{\frac{c}{a}\frac{dy}{dx} - \frac{b}{a}\frac{du}{dx}}{\frac{dy}{dx} - \frac{b}{a}}$$

Teoria delle caratteristiche

$$\begin{bmatrix} a & b \\ dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ du \end{bmatrix}$$

$$u_y = \frac{\begin{bmatrix} a & c \\ dx & du \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ dx & dy \end{bmatrix}} = \frac{adu - cdx}{ady - bdx} = \frac{\dfrac{du}{dx} - \dfrac{c}{a}}{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{b}{a}}$$

Quando $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a}$ le derivate u_x e u_y risultano indeterminate. Le **curve** di questo tipo sono evidentemente **particolari** e vengono chiamate **curve caratteristiche**. Se imponiamo che anche il numeratore sia nullo il sistema è indeterminato. Per risolvere il problema si devono risolvere due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \qquad\qquad \frac{du}{dx} = \frac{c}{a}$$

Teoria delle caratteristiche

- Lungo una curva caratteristica l'equazione differenziale alle derivate parziali può essere trasformata in una equazione differenziale ordinaria.

$$au_x + bu_y = c \qquad\qquad u_x + \frac{b}{a}u_y = \frac{c}{a}$$

Che confrontata con la derivata totale lungo una curva caratteristica:

$$\frac{du}{dx} = u_x + u_y\frac{dy}{dx} = u_x + u_y\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \qquad\qquad \frac{du}{dx} = \frac{c}{a}$$

Teoria delle caratteristiche

Si supponga di avere la seguente equazione differenziale ordinaria:

$$z'' + z = 0$$

La soluzione generale è:

$$z = c_1 \, sin(x) + c_2 \, cos(x)$$

Infatti derivando si ha:

$$z' = c_1 \, cos(x) - c_2 \, sin(x)$$

$$z'' = -c_1 \, sin(x) - c_2 \, cos(x)$$

Con un problema di valori iniziali (problema di Cauchy) è facile trovare il valore delle costanti e la soluzione è unica. Ad esempio se supponiamo che il punto iniziale sia per *x*=0 si ha:

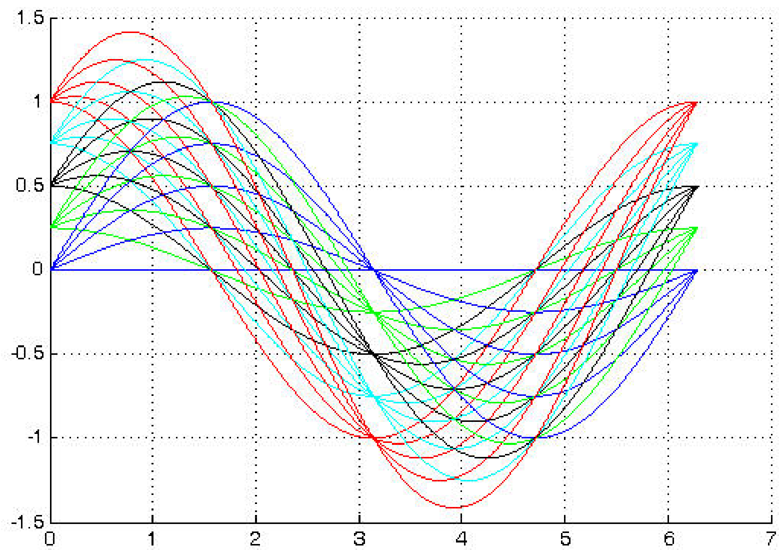
$$z(0) = c_2$$

$$z'(0) = c_1$$

Teoria delle caratteristiche

Fissando i valori delle due costanti la soluzione è unica.

$$z = c_1 \, sin(x) + c_2 \, cos(x) \qquad z(0) = c_2 \quad z'(0) = c_1$$

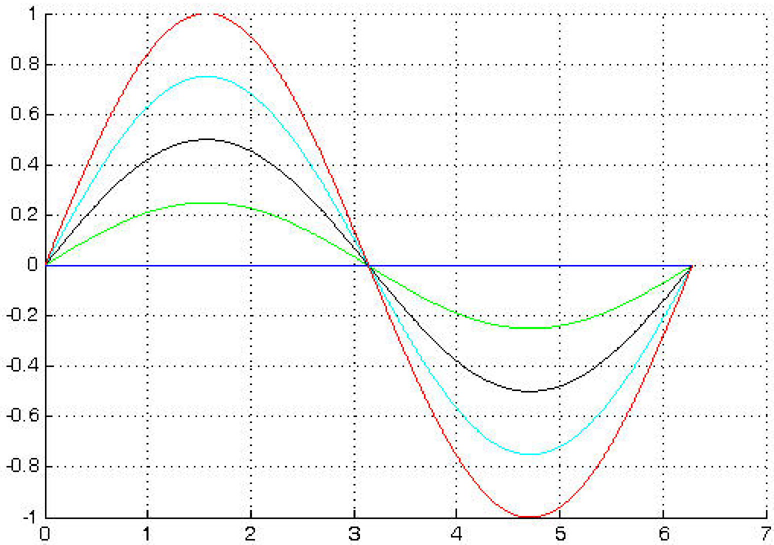


Teoria delle caratteristiche

Supponendo che: $z(0)=0$

$z'(0)=c_1$

$$z = c_1 \, sin(x) + c_2 \, cos(x)$$

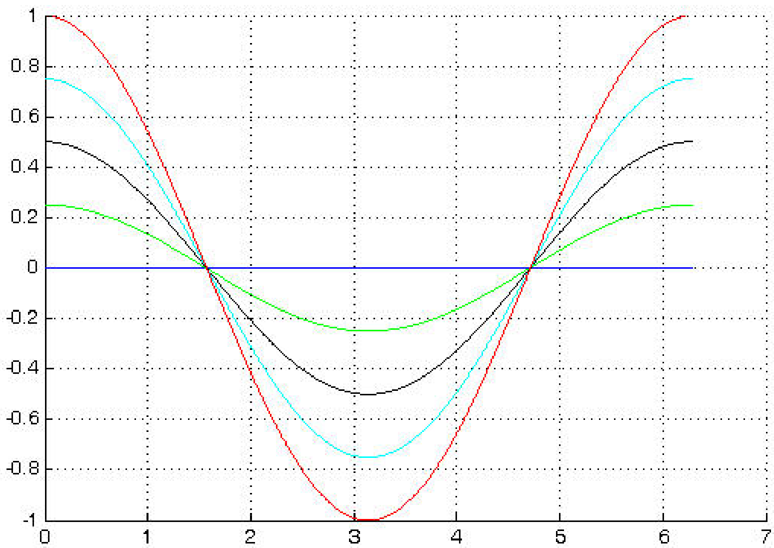


Teoria delle caratteristiche

Supponendo che: $z(0)=c_2$

$z'(0)=0$

$$z = c_1 \, sin(x) + c_2 \, cos(x)$$



Teoria delle caratteristiche

Per un problema ai limiti invece la situazione è più complessa infatti se le condizioni sono imposte per x=0 e per x=ξ:

$$z(0)=c_2$$
$$z(\xi)=c_1 \sin(\xi)+c_2 \cos(\xi)$$

$$z=c_1 \sin(x)+c_2 \cos(x)$$

È facile capire che per certi valori di ξ non è garantita l'esistenza della soluzione. Ad esempio per.

$$\xi=2\pi$$

Non è possibile assegnare il valore della funzione a piacere. Ma per l'esistenza della soluzione è necessario che:

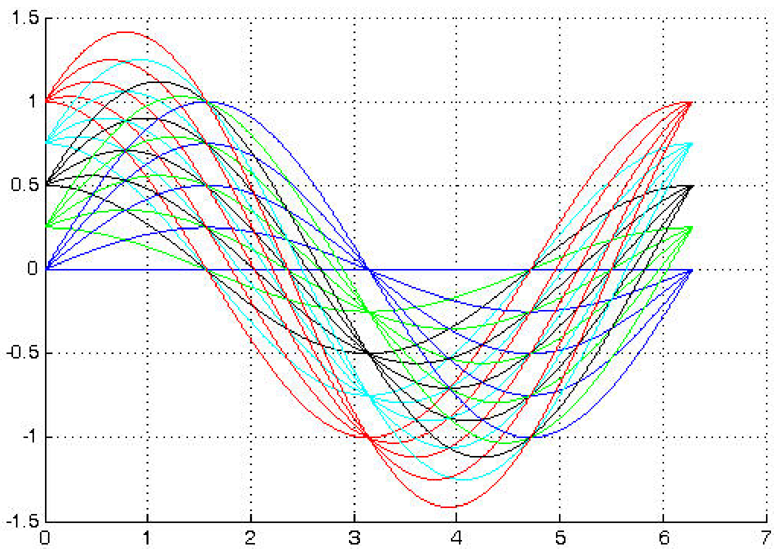
$$z(0)=z(\xi)$$

Ed in questo caso esistono infinite soluzioni possibili.

Teoria delle caratteristiche

$$z(0)=c_2$$
$$z(2\pi)=c_2$$

$$z=c_1 \sin(x)+c_2 \cos(x)$$



Teoria delle caratteristiche

$$(5)\quad c_1\varphi_{xx} + 2c_2\varphi_{xy} + c_3\varphi_{yy} = c_4$$

Nel caso generale di una equazione del secondo ordine tipo quella del potenziale si possono utilizzare vari **metodi** per la determinazione delle equazioni delle curve caratteristiche e delle condizioni di compatibilità.

Metodo 1 – Metodo delle **derivate indeterminate**.

È la generalizzazione del metodo già visto:

$$d(\varphi_x) = \varphi_{xx}dx + \varphi_{xy}dy$$
$$d(\varphi_y) = \varphi_{xy}dx + \varphi_{yy}dy$$

Le tre equazioni messe in forma matriciale diventano:

$$\begin{bmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ c_1 & 2c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_{xx} \\ \varphi_{xy} \\ \varphi_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(\varphi_x) \\ d(\varphi_y) \\ c_4 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ c_1 & 2c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \varphi_{xx} \\ \varphi_{xy} \\ \varphi_{yy} \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} d(\varphi_x) \\ d(\varphi_y) \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Ovvero in forma matriciale: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \underline{c}$

Teoria delle caratteristiche

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \underline{c} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ c_1 & 2c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \varphi_{xx} \\ \varphi_{xy} \\ \varphi_{yy} \end{bmatrix} \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} d(\varphi_x) \\ d(\varphi_y) \\ c_4 \end{bmatrix}$$

Questo sistema di equazioni è indeterminato quando il determinante della matrice A è nullo:

$$\left|\underline{\underline{A}}\right| = dx(dxc_3 - 2dyc_2) - dy(0 - dyc_1) = dx^2c_3 - 2dxdyc_2 + dy^2c_1 = 0$$

Dividendo per dx^2 si ha:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 c_1 - 2\frac{dy}{dx}c_2 + c_3 = 0$$

Che risolta da le equazioni delle due famiglie di curve caratteristiche:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1c_3}}{c_1}$$

Se il discriminante $c_2^2 - c_1c_3$ fosse negativo le equazioni delle curve caratteristiche sarebbero complesse.

Teoria delle caratteristiche

$$c_2^2 - c_1 c_3 \begin{cases} > 0 & \text{Equazione iperbolica} \\ = 0 & \text{Equazione parabolica} \\ < 0 & \text{Equazione ellittica} \end{cases}$$

Equazioni iperboliche

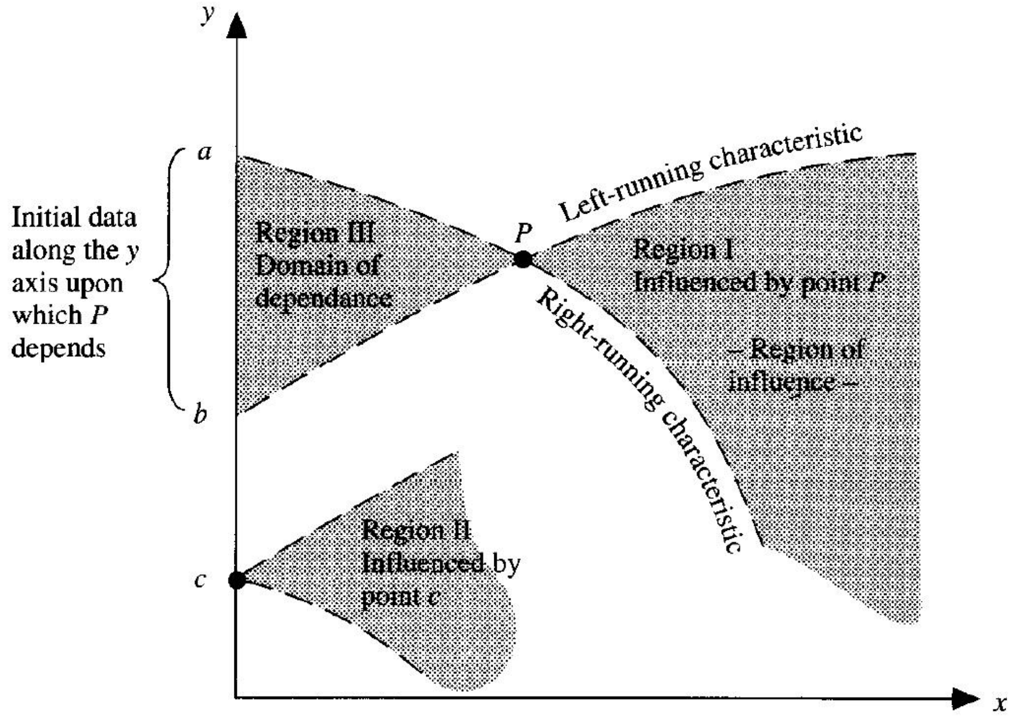
- Equazione delle onde; $\varphi_{tt} = c^2 \varphi_{yy}$
- Moto supersonico;
- Moto non stazionario inviscido.

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= -c^2 \end{aligned}\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} = \frac{\pm\sqrt{0 + c^2}}{1} = \pm c$$

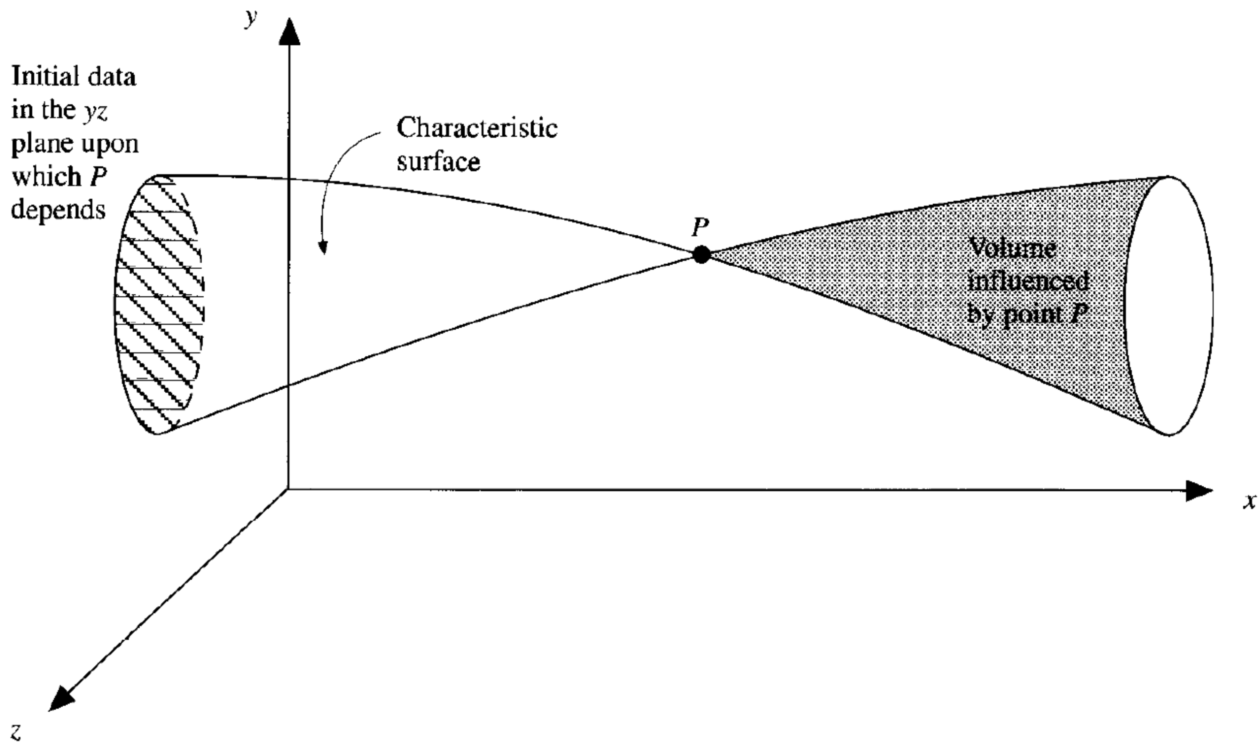
$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_1}$$

$$(5) \quad c_1 \varphi_{xx} + 2 c_2 \varphi_{xy} + c_3 \varphi_{yy} = c_4$$

Equazioni iperboliche



Equazioni iperboliche



Equazioni paraboliche

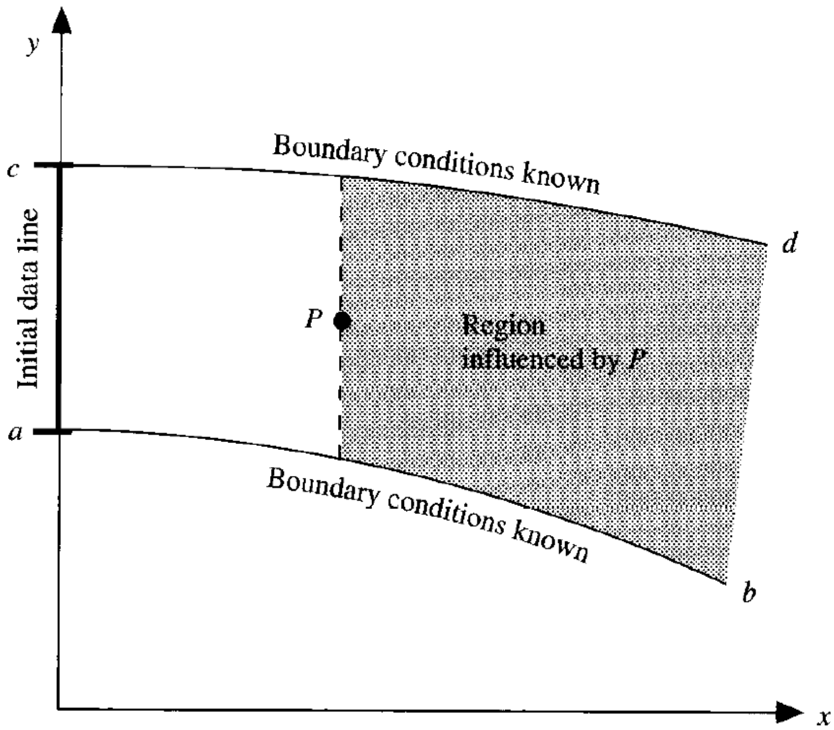
- Equazione del calore; $\varphi_t = \alpha \varphi_{xx}$
- Equazioni dello strato limite.

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = \alpha \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{array}\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} = \frac{0}{\alpha} = 0$$

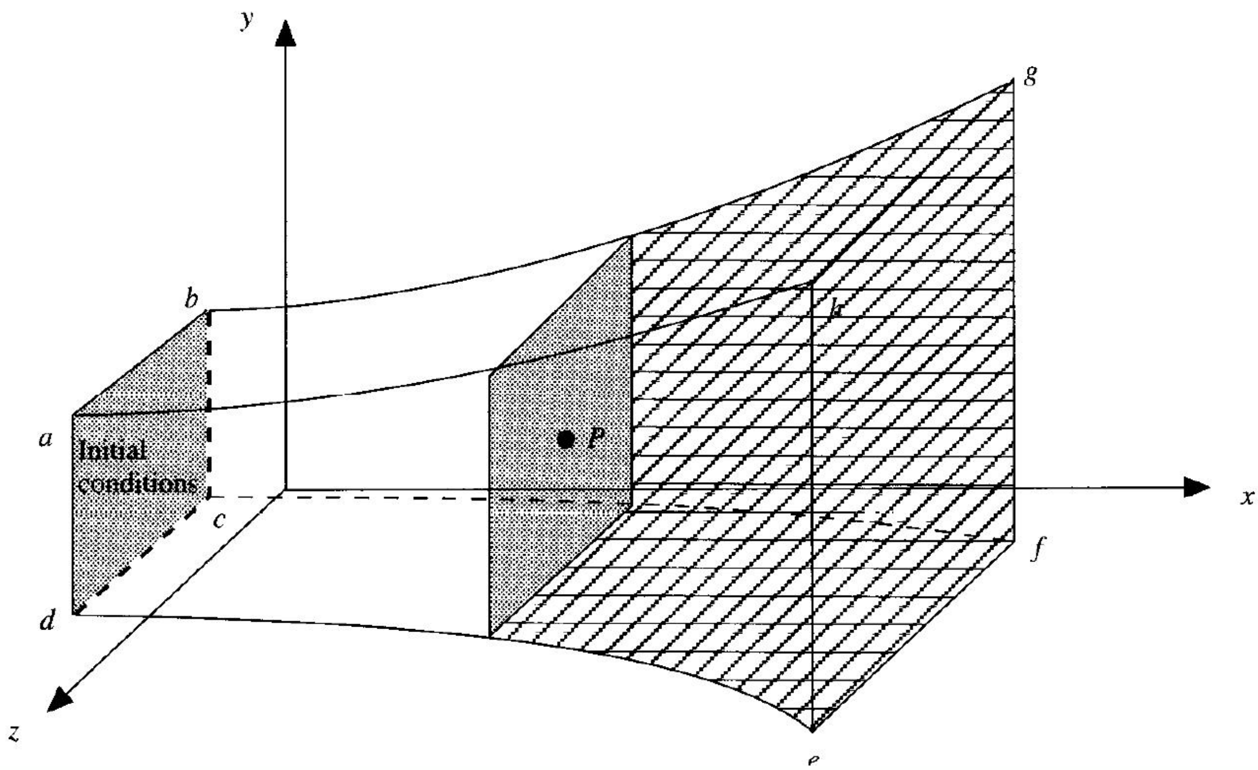
$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - c_1 c_3}}{c_1}$$

$$(5) \quad c_1 \varphi_{xx} + 2 c_2 \varphi_{xy} + c_3 \varphi_{yy} = c_4$$

Equazioni paraboliche



Equazioni paraboliche



Equazioni ellittiche

- Equazione di Laplace; $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$
- Moto a potenziale subsonico.

Equazioni ellittiche