Corso di
Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it

Moto Supersonico

L'equazione del potenziale è:

$$\left(1-M_\infty^2\right)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0 \qquad c_1=1-M_\infty^2$$

Ricordando che:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_2\pm\sqrt{c_2^2-c_1c_3}}{c_1}=\frac{0\pm\sqrt{0-\left(1-M_\infty^2\right)1}}{1-M_\infty^2}=\frac{\pm\sqrt{M_\infty^2-1}}{1-M_\infty^2}=\mp\frac{1}{\sqrt{\left(M_\infty^2-1\right)}}=\mp tg(\mu)$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{0\mp\sqrt{0-\left(1-M_\infty^2\right)1}}{1}=\mp\sqrt{M_\infty^2-1}$$

Con:

$$\beta=\sqrt{M_\infty^2-1} \qquad \varphi=\varphi'+u_\infty x \qquad u'=\varphi'_x \quad v'=\varphi'_y$$

Si ha: $\dfrac{dy}{dx}=\mp\dfrac{1}{\beta}$ $\qquad \dfrac{dv}{du}=\mp\beta$ $\qquad -\beta^2\varphi'_{xx}+\varphi'_{yy}=0$

Che è l'equazione delle onde a volte scritta anche come:

$$\varphi_{tt}=c^2\varphi_{xx}$$

Moto Supersonico

Integrando l'equazione $\frac{dy}{dx} = \mp \frac{1}{\beta}$ si ha: $\beta y \pm x = cost$ $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$

Imponendo $\xi = x + \beta y$ e $\eta = x - \beta y$ la soluzione generale dell'equazione del potenziale è:

$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\xi_x = 1 \quad \xi_y = \beta$$
$$\eta_x = 1 \quad \eta_y = -\beta$$

Infatti:

$$\varphi'_x = f'(\xi)\xi_x + g'(\eta)\eta_x = f' + g' \qquad \varphi'_{xx} = f'' + g''$$

$$\varphi'_y = f'(\xi)\xi_y + g'(\eta)\eta_y = (f' - g')\beta \qquad \varphi'_{yy} = (f'' + g'')\beta^2$$

Da cui:

$$-\beta^2 \varphi'_{xx} + \varphi'_{yy} = 0$$

Che è identicamente soddisfatta.

$$-\beta^2 (f'' + g'') + (f'' + g'')\beta^2 = 0$$

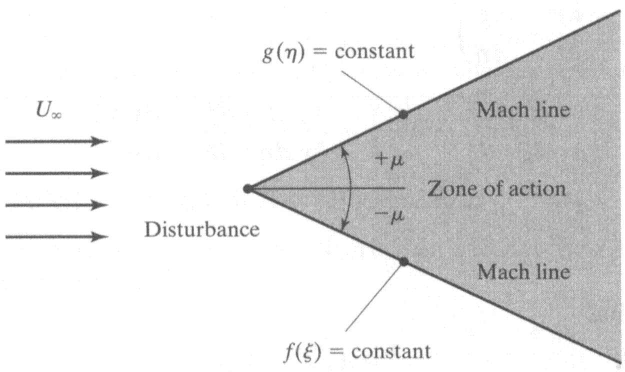
Moto Supersonico

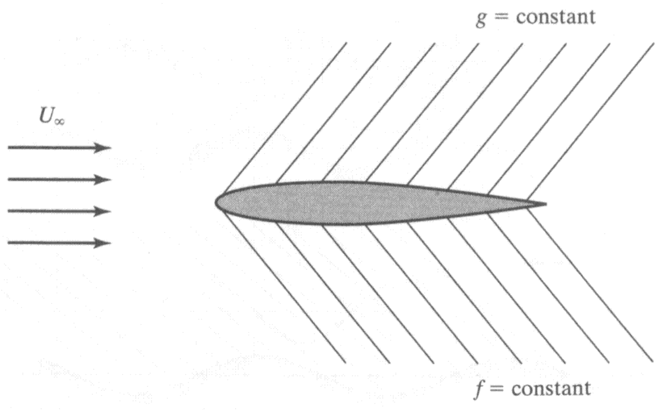
$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

L'equazione delle curve caratteristiche $\xi = x + \beta y$ $\eta = x - \beta y$

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{1}{\beta} = \mp \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \mp \tan(\mu) = \tan(\mp \mu) \qquad \beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

Implica che lungo la prima caratteristica (quella identificata dal segno meno) ξ è costante viceversa lungo la seconda caratteristica η è costante.





Moto Supersonico su parete sinusoidale

Si supponga che la superficie del corpo sia data dall'equazione:

$$y\big|_{\text{Corpo}} = A\,sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \qquad A \ll \lambda$$

L'ipotesi aggiuntiva serve per assicurare che l'ipotesi dei piccoli disturbi sia verificata. Le condizioni al contorno sono:

$$v'(x,0) = \varphi'_y(x,0) = u_\infty \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{Corpo}} = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \qquad y \to \infty \quad u', v' \text{ finiti}$$

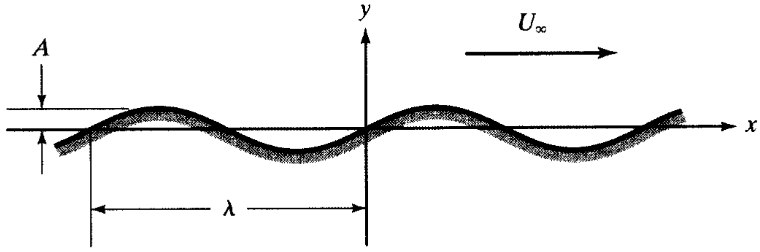
Per y>0 poiché il disturbo parte dal basso la funzione f è identicamente nulla. Quindi:

$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\varphi'_y(x,0) = g'\left(\eta\big|_{y=0}\right)\eta_y = -\beta g'\left(\eta\big|_{y=0}\right) = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \qquad \xi = x + \beta y \qquad \eta = x - \beta y$$

Per y=0 si ha che η=x e la relazione precedente diventa:

$$\beta g'(\eta) = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} cos\left(\frac{2\pi\eta}{\lambda}\right)$$



Moto Supersonico su parete sinusoidale

$$\beta g'(\eta) = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} cos\left(\frac{2\pi\eta}{\lambda}\right) \qquad \varphi' = f(\xi) + g(\eta) \qquad \xi = x + \beta y \qquad \eta = x - \beta y$$

$$g = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda\beta} \int cos\left(\frac{2\pi\eta}{\lambda}\right) d\eta = -u_\infty A \frac{1}{\beta} sin\left(\frac{2\pi\eta}{\lambda}\right) + C$$

Senza perdere di generalità si può imporre C=0. Quindi il potenziale diventa:

$$\varphi' = -u_\infty A \frac{1}{\beta} sin\left(\frac{2\pi\eta}{\lambda}\right) = -u_\infty A \frac{1}{\beta} sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

Le componenti della velocità:

$$u' = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right) \qquad v' = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda} cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

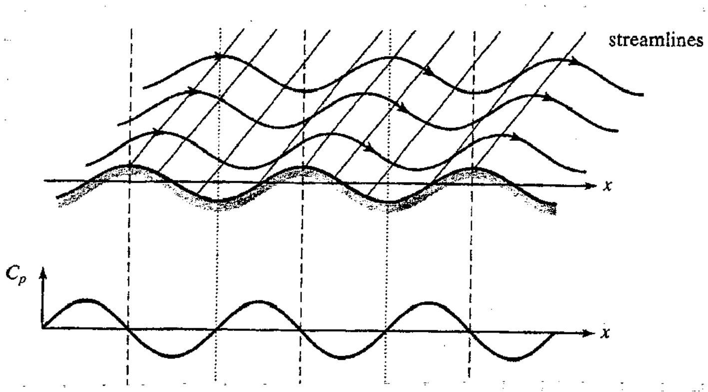
$$C_p = \frac{-2u'}{u_\infty} = A \frac{4\pi}{\lambda} \frac{1}{\beta} cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - \beta y)\right)$$

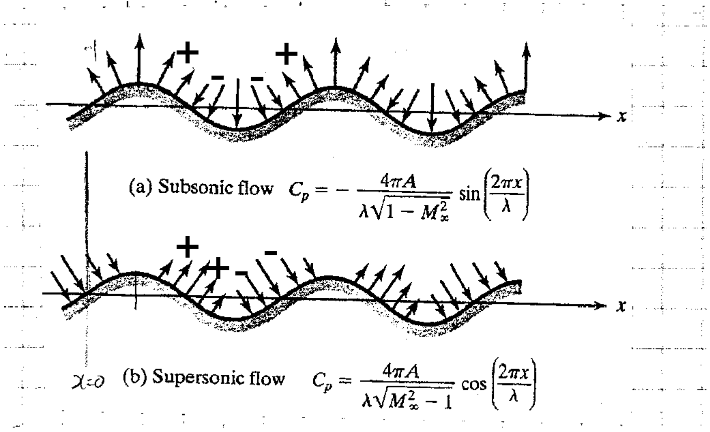
Moto Supersonico su parete sinusoidale

$$u' = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{\beta}cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\beta y)\right) \qquad v' = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda}cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\beta y)\right)$$

$$C_p = \frac{-2u'}{u_\infty} = A\frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\beta}cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\beta y)\right)$$

- L'ampiezza delle oscillazioni, al contrario di quello che succede in regime subsonico, non si smorza al tendere di y verso l'infinito. La perturbazione viene trasmessa attraverso le linee di Mach;
- Il coefficiente di pressione è sfasato di 90° rispetto alla superficie producendo una resistenza;
- I disturbi aumentano al diminuire del numero di Mach (M che tende ad 1).



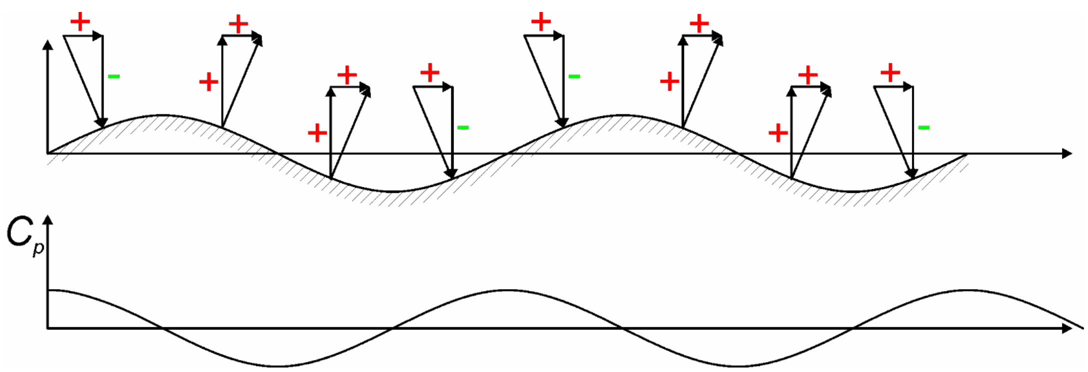


Moto Supersonico su parete sinusoidale

$$u' = -u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{\beta}cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\beta y)\right) \qquad v' = u_\infty A \frac{2\pi}{\lambda}cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\beta y)\right)$$

$$C_p = \frac{-2u'}{u_\infty} = A\frac{4\pi}{\lambda}\frac{1}{\beta}cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\beta y)\right) \qquad \varphi' = -u_\infty A\frac{1}{\beta}sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\beta y)\right)$$

$$y\big|_{Corpo} = A\,sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \qquad A \ll \lambda$$



Profili sottili

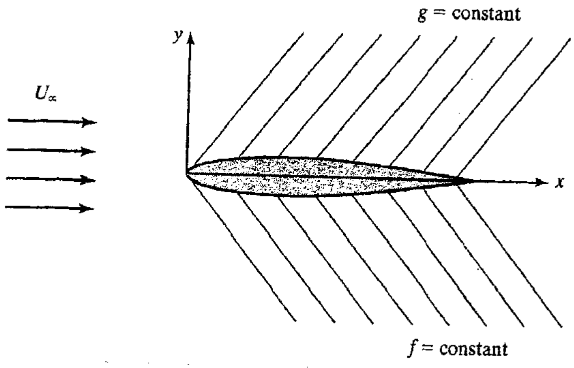
$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\xi = x + \beta y \qquad \eta = x - \beta y$$

Sulla parte superiore del profilo (upper) si può supporre che *f* sia nulla quindi: $\varphi' = g(\eta)$

La condizione al contorno è:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_u = y'_u = \frac{v'(x,0)}{u_\infty} = \frac{\varphi'_y(x,0)}{u_\infty} = \frac{g'\,\eta_y}{u_\infty} = -\frac{g'\,\beta}{u_\infty}$$



Da cui si può ricavare *g'*.

$$g' = -\frac{u_\infty y'_u}{\beta}$$

Il coefficiente di pressione è:

$$C_{pu} = \frac{-2u'(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2\varphi'_x(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2g'\,\eta_x}{u_\infty} = \frac{2u_\infty y'_u}{\beta}\frac{1}{u_\infty} = \frac{2y'_u}{\beta}$$

Profili sottili

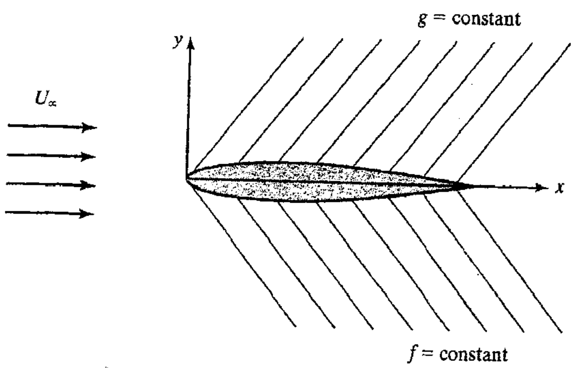
$$\varphi' = f(\xi) + g(\eta)$$

$$\xi = x + \beta y \qquad \eta = x - \beta y$$

In modo analogo sulla parte inferiore del profilo (lower) si può supporre che *g* sia nulla quindi: $\varphi' = f(\xi)$

La condizione al contorno è:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_l = y'_l = \frac{v'(x,0)}{u_\infty} = \frac{\varphi'_y(x,0)}{u_\infty} = \frac{f'\,\xi_y}{u_\infty} = \frac{f'\,\beta}{u_\infty}$$



Da cui si può ricavare *f'*.

$$f' = \frac{u_\infty y'_l}{\beta}$$

Il coefficiente di pressione è:

$$C_{pl} = \frac{-2u'(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2\varphi'_x(x,0)}{u_\infty} = \frac{-2f'\,\xi_x}{u_\infty} = -\frac{2u_\infty y'_l}{\beta}\frac{1}{u_\infty} = -\frac{2y'_l}{\beta}$$

Al primo ordine si ha (il segno + vale per il dorso):

$$(1) \quad C_p = \pm\frac{2y'}{\beta}$$

Profili sottili

Allo stesso risultato si può arrivare anche a partire dalla relazione che lega δ, ε e M attraverso un'onda d'urto obliqua. Seguendo questa strada è possibile ricavare, abbastanza facilmente, anche una relazione che tiene in conto anche i termini del secondo ordine.

$$\tan(\delta) = \frac{M_\infty^2 \sin^2(\varepsilon) - 1}{\tan(\varepsilon)\left(\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 - M_\infty^2\sin^2(\varepsilon) + 1\right)}$$

$$\tan(\delta)\tan(\varepsilon)\left(\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 - M_\infty^2\sin^2(\varepsilon) + 1\right) = \left(M_\infty^2\sin^2(\varepsilon) - 1\right)$$

$$(2) \quad \tan(\delta)\tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = \left(M_\infty^2\sin^2(\varepsilon) - 1\right)\left(1 + \tan(\delta)\tan(\varepsilon)\right)$$

Supponendo:

$$\delta \to 0 \quad e \quad \varepsilon \to \mu + a \quad con \quad a \to 0$$

Si ha sviluppando in serie fino al primo ordine in a:

$$\sin^2(\varepsilon) = \sin^2(\mu) + \left.\frac{d\sin^2(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_\mu a + o\left(a^2\right)$$

Profili sottili

$$\sin^2(\varepsilon) \cong \sin^2(\mu) + \left.\frac{d\sin^2(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_\mu a = \sin^2(\mu) + 2\sin(\mu)\cos(\mu)a$$

$$\tan(\varepsilon) \cong \tan(\mu) + \left.\frac{d\tan(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_\mu a = \tan(\mu) + \frac{a}{\cos^2(\mu)}$$

Ma:

$$\sin^2(\mu) = \frac{1}{M_\infty^2} \qquad \cos(\mu) = \sqrt{\frac{M_\infty^2 - 1}{M_\infty^2}} = \frac{1}{M_\infty}\sqrt{M_\infty^2 - 1} = \frac{1}{M_\infty}\beta \qquad \tan(\mu) = \frac{1}{\beta}$$

$$\sin^2(\varepsilon) \cong \frac{1}{M_\infty^2} + 2\frac{\beta}{M_\infty^2}a \qquad \tan(\varepsilon) \cong \frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}$$

Inoltre:

$$\tan(\delta) \cong \tan(0) + \left.\frac{d\tan(\delta)}{d\delta}\right|_0 \delta + \left.\frac{d^2\tan(\delta)}{d\delta^2}\right|_0 \frac{\delta^2}{2} + o\left(\delta^3\right) =$$

$$= \tan(0) + \left.\frac{1}{\cos^2(\delta)}\right|_0 \delta - \left.\frac{2\sin(\delta)}{\cos^3(\delta)}\right|_0 \frac{\delta^2}{2} + o\left(\delta^3\right) = \delta + o\left(\delta^3\right)$$

Profili sottili

$$sin^2(\varepsilon) \cong \frac{1}{M_\infty^2} + 2\frac{\beta}{M_\infty^2}a \qquad tan(\varepsilon) \cong \frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2} \qquad tan(\delta) \cong \delta$$

La (2) $tan(\delta)tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = \left(M_\infty^2 sin^2(\varepsilon) - 1\right)\left(1 + tan(\delta)tan(\varepsilon)\right)$

$$tan(\delta)\left(\frac{1}{\beta} + \cancel{\frac{aM_\infty^2}{\beta^2}}\right)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = \left(M_\infty^2\left(\cancel{\frac{1}{M_\infty^2}} + 2\frac{\beta}{M_\infty^2}a\right) - \cancel{1}\right)\left(1 + \cancel{tan(\delta)}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)\right)$$

Da cui trascurando termini di ordine a e δ rispetto a termini unitari:

$$\tan(\delta)\frac{1}{\beta}\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = 2\beta a$$

$$a = \frac{1}{\beta^2}\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2 \, tan(\delta)$$

Che è un legame tra a e δ.

Profili sottili

Poiché: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma+1}\left(2\gamma M_\infty^2 sin^2(\varepsilon) - (\gamma - 1)\right)$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{1}{\gamma+1}\left(2\gamma M_\infty^2 sin^2(\varepsilon) - (\gamma-1)\right) - 1 = \frac{1}{\gamma+1}\left(2\gamma M_\infty^2 sin^2(\varepsilon) - \gamma \cancel{+1} - \gamma \cancel{-1}\right)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_\infty^2 sin^2(\varepsilon) - 1\right)$$

Dalla (2) si ha: (2) $tan(\delta)tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2 = \left(M_\infty^2 sin^2(\varepsilon) - 1\right)\left(1 + tan(\delta)tan(\varepsilon)\right)$

$$M_\infty^2 sin^2(\varepsilon) - 1 = \frac{tan(\delta)tan(\varepsilon)\frac{\gamma+1}{2}M_\infty^2}{1 + tan(\delta)tan(\varepsilon)} \qquad tan(\varepsilon) = \frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}$$

Quindi:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \cancel{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\left(\frac{tan(\delta)tan(\varepsilon)\cancel{\frac{\gamma+1}{2}}M_\infty^2}{1 + tan(\delta)tan(\varepsilon)}\right) \cong \frac{\gamma\, tan(\delta)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)M_\infty^2}{1 + tan(\delta)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)}$$

Profili sottili

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}\cong\gamma\frac{\tan(\delta)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)M_\infty^2}{1+\tan(\delta)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)}\cong\gamma\frac{\delta M_\infty^2\left(\frac{1}{\beta}+\frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)}{1+\delta\left(\frac{1}{\beta}+\frac{aM_\infty^2}{\beta^2}\right)}\qquad \tan(\delta)=\delta+o(\delta^3)$$

Da cui sostituendo $a=\boxed{\frac{1}{\beta^2}\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2\tan(\delta)}$ si ha:

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}\cong\gamma\delta M_\infty^2\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\boxed{\frac{1}{\beta^2}\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2\delta} M_\infty^2}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{\delta}{\beta}+\frac{\delta\,\cancel{\frac{1}{\beta^2}\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^2\delta M_\infty^2}}{\beta^2}\right)^{-1}=$$

$$=\gamma\delta M_\infty^2\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma+1}{4}\frac{\delta}{\beta^4}M_\infty^4\right)\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)^{-1}\cong\gamma\delta M_\infty^2\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma+1}{4}\frac{\delta}{\beta^4}M_\infty^4\right)\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)=$$

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}\cong\gamma M_\infty^2\frac{\delta}{\beta}\left(1+\frac{\delta}{\beta}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)-\cancel{\frac{\delta^2}{\beta^4}\frac{\gamma+1}{4}M_\infty^4}\right)$$

Profili sottili

$$\frac{p_2-p_1}{p_1}\cong\gamma M_\infty^2\frac{\delta}{\beta}\left(1+\frac{\delta}{\beta}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)\right)$$

Imponendo $p_1=p_\infty$ $p_2=p$:

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}=\frac{p_2-p_1}{p_1}\frac{p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}=\frac{p_2-p_1}{p_1}\frac{2}{\gamma M_\infty^2}$$

Si ha:

$$C_p=2\frac{\delta}{\beta}\left[1+\frac{\delta}{\beta}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)\right]$$

L'angolo di deviazione δ può essere ricavato dalla seguente relazione (il segno + vale per il dorso):

$$\delta\cong\tan(\delta)=\begin{cases}+y'_u & \text{Sul dorso}\\ -y'_l & \text{Sul ventre}\end{cases}\qquad\qquad \delta\cong\tan(\delta)=\pm y'$$

Profili sottili

$$C_p = 2\frac{\delta}{\beta}\left[1+\frac{\delta}{\beta}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)\right] \qquad \delta \cong tan(\delta) = \pm y'$$

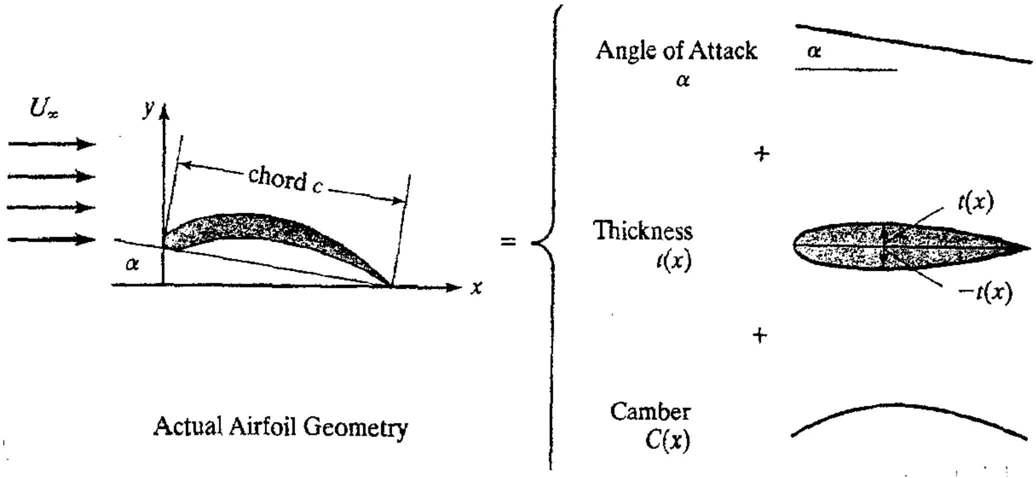
Quindi:

$$C_p = \pm\frac{2y'}{\beta}\left[1+\frac{\pm y'}{\beta}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)\right]$$

Evidentemente al primo ordine si ritrova la: $(1) \quad C_p = \pm\frac{2y'}{\beta}$

Come mostrato in figura *y*' può essere ricavato a partire dalla conoscenza delle caratteristiche geometriche del profilo.

$$y'\big|_l^u = -\alpha \pm \frac{dt}{dx} + \frac{dC}{dx}$$



Profili sottili

La forza elementare agente sulla superficie superiore può essere ricavata con la relazione:

$$dF_u = pds = C_{pu}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}ds + p_\infty ds \qquad C_p = \frac{p-p_\infty}{p_\infty}\frac{2}{\gamma M_\infty^2}$$

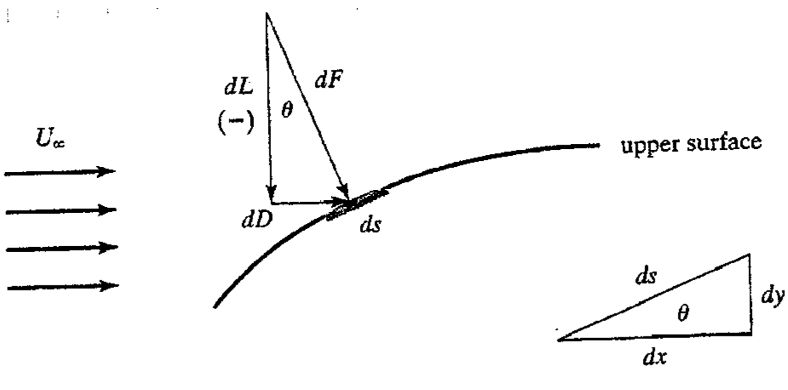
Proiettando questa forza sugli assi di riferimento (l'asse *x* è allineato con la velocità asintotica) si ottengono la portanza e la resistenza elementari:

$$dL_u = -dF_u \cos\theta = -C_{pu}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dx - p_\infty dx$$

$$dD_u = dF_u \sin\theta = C_{pu}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dy + p_\infty dy$$

Si considera sempre *y*'>0

in modo che *ds* sin(θ)=*dy*



Profili sottili

Procedendo in modo analogo sulla superficie inferiore si ha:

$$dF_l = pds = C_{pl}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}ds + p_\infty ds \qquad C_p = \frac{p-p_\infty}{p_\infty}\frac{2}{\gamma M_\infty^2}$$

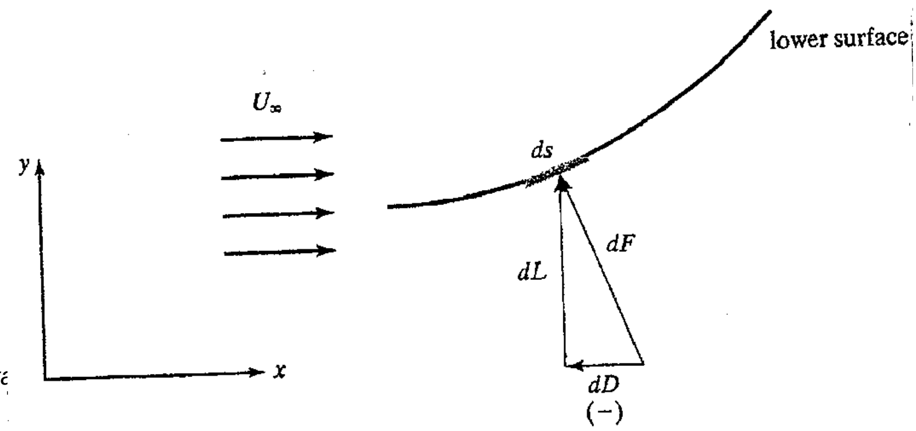
Proiettando questa forza sugli assi di riferimento (l'asse x è allineato con la velocità asintotica) si ottengono la portanza e la resistenza elementari:

$$dL_l = dF_l\cos\theta = C_{pl}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dx + p_\infty dx$$

$$dD_l = -dF_l\sin\theta = -C_{pl}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dy - p_\infty dy$$

Si considera sempre $y'>0$

in modo che $ds\,\sin(\theta)=dy$



Profili sottili

$$dL_u = -C_{pu}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dx - p_\infty dx \qquad dL_l = C_{pl}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dx + p_\infty dx$$

$$dD_u = C_{pu}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dy + p_\infty dy \qquad dD_l = -C_{pl}\frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}dy - p_\infty dy$$

Le forze aerodinamiche sul profilo si ricavano integrando le forze elementari:

$$L = \int_0^c (dL_u + dL_l) = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\int_0^c (C_{pl} - C_{pu})\,dx + \cancel{\int_0^c (p_\infty - p_\infty)\,dx}$$

$$D = \int_0^c (dD_u + dD_l) = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\int_0^c \left(C_{pu}\left.\frac{dy}{dx}\right|_u - C_{pl}\left.\frac{dy}{dx}\right|_l\right)dx + \int_0^c \left(p_\infty\left.\frac{dy}{dx}\right|_u - p_\infty\left.\frac{dy}{dx}\right|_l\right)dx =$$

$$= \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\int_0^c \left(C_{pu}y'_u - C_{pl}y'_l\right)dx + p_\infty\cancel{\int_0^c (y'_u - y'_l)dx}$$

L'ultimo integrale è nullo perché è esteso ad una superficie chiusa.

Profili sottili

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\int_0^c \left(C_{pl} - C_{pu}\right)dx \qquad C_p = \pm\frac{2y'}{\beta}\left[1+\frac{\pm y'}{\beta}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)\right]$$

Sostituendo si ha:

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\left[\frac{2}{\beta}\int_0^c \left(-y'_l - y'_u\right)dx + \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)\int_0^c \left(y'^2_l - y'^2_u\right)dx\right]$$

Ricordando che:

$$y'\Big|_l^u = -\alpha \pm \frac{dt}{dx} + \frac{dC}{dx}$$

Il primo integrale diventa:

$$\int_0^c \left(+2\alpha - \left(\cancel{-\frac{dt}{dx}+\frac{dC}{dx}}\right)_l - \left(\cancel{+\frac{dt}{dx}+\frac{dC}{dx}}\right)_u\right)dx = 2\alpha c$$

Il secondo e terzo integrando si annullano perché sia lo spessore che la curvatura sono nulli sia sul bordo d'attacco che su quello d'uscita.

Profili sottili

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\left[\frac{2}{\beta}\int_0^c \left(-y'_l - y'_u\right)dx + \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)\int_0^c \left(y'^2_l - y'^2_u\right)dx\right] \qquad y'\Big|_l^u = -\alpha \pm t' + C'$$

Il secondo integrale diventa:

$$\int_0^c \left(y'^2_l - y'^2_u\right)dx = \int_0^c \left(\left(-\alpha - t' + C'\right)^2 - \left(-\alpha + t' + C'\right)^2\right)dx =$$

$$= \int_0^c \left(\left(\cancel{\alpha^2} + \cancel{t'^2} + \cancel{C'^2} + 2\alpha t' - \cancel{2\alpha C'} - 2t'C'\right) - \left(\cancel{\alpha^2} + \cancel{t'^2} + \cancel{C'^2} - 2\alpha t' - \cancel{2\alpha C'} + 2t'C'\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^c \left(\cancel{4\alpha t'} - 4t'C'\right)dx = -4c\overline{t'C'}$$

La portanza diventa quindi:

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty c}{2}\left[\frac{4\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2}-1\right)4\overline{t'C'}\right]$$

Profili sottili

$$L = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty c}{2}\left[\frac{4\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1\right)4\overline{t'C'}\right]$$

Il coefficiente di portanza diventa:

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{L}{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2 p_\infty c} = \left[\frac{4\alpha}{\beta} - \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1\right)4\overline{t'C'}\right]$$

Al primo ordine si ha:

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Mentre al secondo ordine si aggiunge un termine:

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\overline{t'C'}}{M_\infty^2 - 1}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1} - 1\right)$$

Che per freccia positiva è negativo. Quindi un profilo supersonico si comporta in modo opposto ad uno subsonico anche se questo effetto è del secondo ordine.

Profili sottili

$$D = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\int_0^c \left(C_{pu}y'_u - C_{pl}y'_l\right)dx \qquad C_p = \pm\frac{2y'}{\beta}\left[1 + \frac{\pm y'}{\beta}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{\beta^2} - 1\right)\right]$$

Per valutare la resistenza si procede in modo simile. Per ottenere un risultato accurato al secondo ordine è inutile considerare i due termini presenti nell'espressione del coefficiente di pressione. Infatti nella formula per la resistenza C_p è moltiplicato per un termine del primo ordine. Quindi:

$$D = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\frac{2}{\beta}\int_0^c \left(y'^2_u + y'^2_l\right)dx \qquad y'\Big|_l^u = -\alpha \pm t' + C'$$

$$D = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\frac{2}{\beta}\int_0^c \left(\left(-\alpha + t' + C'\right)^2 + \left(-\alpha - t' + C'\right)^2\right)dx =$$

$$= \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\frac{2}{\beta}\int_0^c \left(\left(\alpha^2 + t'^2 + C'^2 - \cancel{2\alpha t'} - 2\alpha C' + \cancel{2t'C'}\right) + \left(\alpha^2 + t'^2 + C'^2 + \cancel{2\alpha t'} - 2\alpha C' - \cancel{2t'C'}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\frac{2}{\beta}\int_0^c \left(2\alpha^2 + 2t'^2 + 2C'^2 - \cancel{4\alpha C'}\right)dx = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\frac{4c}{\beta}\left(\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2}\right)$$

Profili sottili

$$D = \frac{\gamma M_\infty^2 p_\infty}{2}\frac{4c}{\beta}\left(\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2}\right)$$

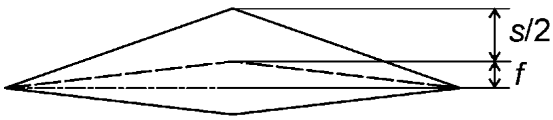
Il coefficiente di resistenza diventa:

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2 p_\infty c} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left(\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2}\right) \qquad C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\overline{t'C'}}{M_\infty^2 - 1}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1} - 1\right)$$

Che è una formula accurata al secondo ordine. Si vede che il coefficiente di resistenza è legato al quadrato dell'angolo d'attacco, della freccia e dello spessore percentuale. Il coefficiente di portanza invece ha una proporzionalità diretta con l'angolo d'attacco mentre al secondo ordine dipende anche dallo spessore e dalla freccia.

Profili sottili

Esaminiamo ora il caso di un semplice profilo a diamante:



$$\tan(\alpha_c) = \frac{f}{c/2} \qquad \tan(\alpha_t) = \frac{s}{c}$$

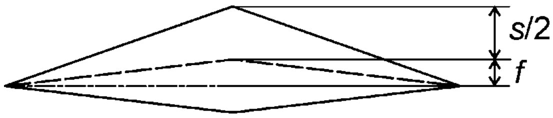
$$t(x) = \begin{cases} x\tan(\alpha_t) & x < \frac{c}{2} \\ (1-x)\tan(\alpha_t) & x > \frac{c}{2} \end{cases} \qquad C(x) = \begin{cases} x\tan(\alpha_C) & x < \frac{c}{2} \\ (1-x)\tan(\alpha_C) & x > \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$\overline{t'^2} = \frac{1}{c}\int_0^c t'^2\,dx = \frac{1}{c}\int_0^c \tan^2(\alpha_t)dx = \tan^2(\alpha_t)$$

$$\overline{C'^2} = \frac{1}{c}\int_0^c C'^2\,dx = \frac{1}{c}\int_0^c \tan^2(\alpha_C)dx = \tan^2(\alpha_C)$$

$$\overline{t'C'} = \frac{1}{c}\int_0^c t'C'\,dx = \frac{1}{c}\int_0^c \tan(\alpha_t)\tan(\alpha_c)dx = \tan(\alpha_t)\tan(\alpha_c)$$

Profili sottili



$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\overline{t'C'}}{M_\infty^2 - 1}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{M_\infty^2-1} - 1\right)$$

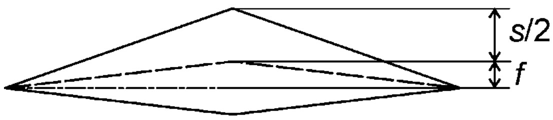
$$C_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left(\alpha^2 + \overline{t'^2} + \overline{C'^2}\right)$$

$$\overline{t'^2} = tan^2(\alpha_t) \qquad \overline{C'^2} = tan^2(\alpha_C) \qquad \overline{t'C'} = tan(\alpha_t)tan(\alpha_c)$$

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\,tan(\alpha_t)tan(\alpha_c)}{M_\infty^2 - 1}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{M_\infty^2-1} - 1\right)$$

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2 p_\infty c} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left(\alpha^2 + tan^2(\alpha_t) + tan^2(\alpha_C)\right)$$

Linearizzazione delle equazioni

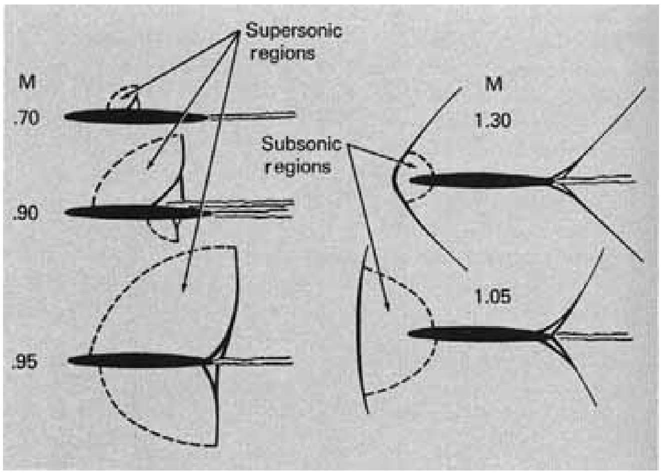


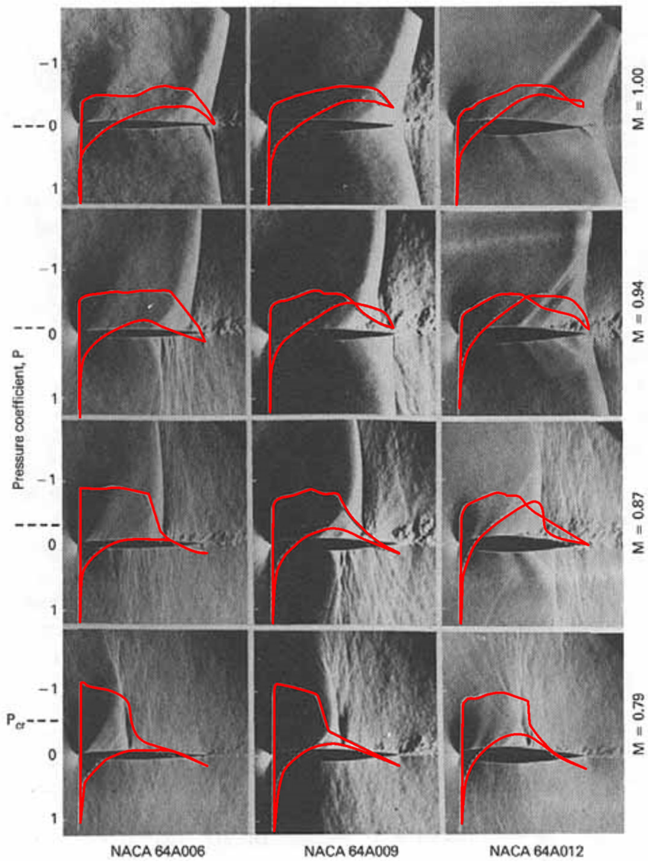
$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} - \frac{8\,tan(\alpha_t)tan(\alpha_c)}{M_\infty^2 - 1}\left(\frac{\gamma+1}{4}\frac{M_\infty^4}{M_\infty^2-1} - 1\right)$$

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2}\gamma M_\infty^2 p_\infty c} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left(\alpha^2 + tan^2(\alpha_t) + tan^2(\alpha_C)\right)$$

alpha	s/2	f	Cl	Cl 1°	Cl 2°	Err% 1°	Err% 2°	Cd	Cd	Err %
0	0.01	0.01	-0.00235	0	-0.00235	-100	-0.32249	0.00185	0.001847	-0.1796
5	0.01	0.01	0.199958	0.201533	0.199187	0.787982	-0.38544	0.018972	0.019434	2.434225
0	0.02	0.01	-0.00472	0	-0.00469	-100	-0.6195	0.004632	0.004615	-0.36568
5	0.02	0.01	0.19803	0.201533	0.196842	1.769196	-0.59956	0.021232	0.022202	4.566143
0	0.02	0.02	-0.00946	0	-0.00938	-100	-0.81197	0.007435	0.007382	-0.70905
5	0.02	0.02	0.19363	0.201533	0.192152	4.081543	-0.76361	0.022883	0.024969	9.117418
0	0.05	0.05	-0.06037	0	-0.05847	-100	-3.14665	0.047983	0.045884	-4.37507
5	0.05	0.05	0.148915	0.201533	0.143059	35.33445	-3.9324	0.051467	0.063471	23.32312

Moto Transonico

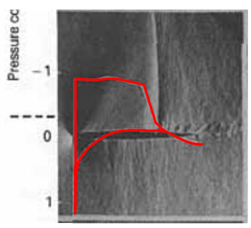




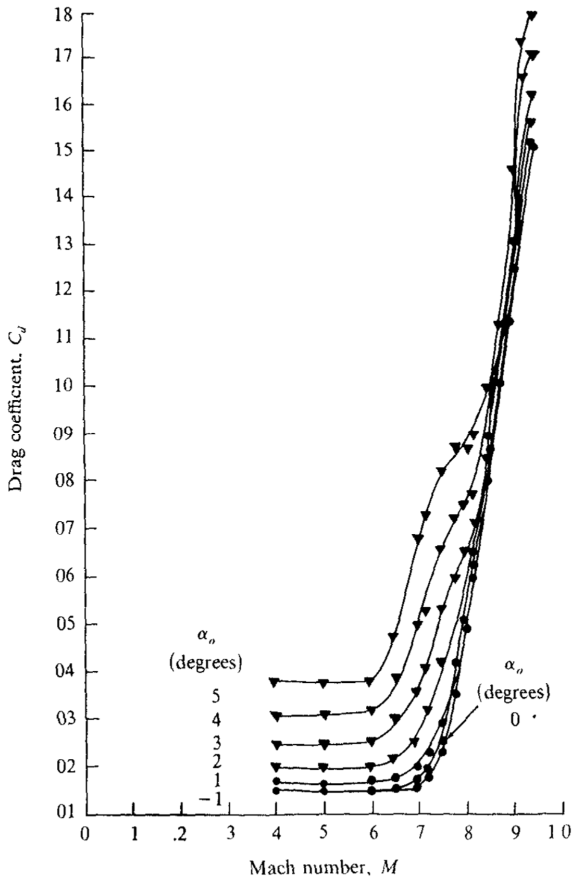
Transonic flows and pressure distributions, Mach. 0.79 to 1.00. Angle of attack, 3.2 deg. From the 4 x 19-Inch Semi-Open High-Speed Tunnel, 1949. Becker, The high speed frontier, sp445, 1980.

http://www.hq.nasa.gov/office/pao/History/SP-445/cover.htm

Moto Transonico



Moto Transonico



Moto Transonico

Si supponga che: $\tau = \dfrac{s}{c} << 1$

Come si è visto nell'analisi qualitativa del campo di moto i disturbi, in regime transonico, tendono ad essere più estesi in direzione normale alla direzione del flusso principale. Per questo motivo si impone:

$$\xi = \frac{x}{c} \qquad \eta = \frac{y\tau^{\frac{1}{3}}}{c} \qquad \varphi' = \frac{\varphi}{cu_\infty \tau^{\frac{2}{3}}} \qquad\qquad \xi_x = \frac{1}{c} \qquad \eta_y = \frac{\tau^{\frac{1}{3}}}{c}$$

Sostituendo nella $\left(1 - M_\infty^2\right)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = \left(\gamma + 1\right) M_\infty^2 \dfrac{u'}{u_\infty} \varphi_{xx}$

$$\left(1 - M_\infty^2\right) cu_\infty \tau^{\frac{2}{3}} \varphi'_{\xi\xi} \left(\xi_x\right)^2 + cu_\infty \tau^{\frac{2}{3}} \varphi'_{\eta\eta} \left(\eta_y\right)^2 = \left(\gamma + 1\right) \frac{M_\infty^2}{u_\infty} \left(cu_\infty \tau^{\frac{2}{3}} \right)^2 \varphi'_\xi \, \xi_x \varphi'_{\xi\xi} \left(\xi_x\right)^2$$

$$\left(1 - M_\infty^2\right) \frac{cu_\infty \tau^{\frac{2}{3}}}{c^2} \varphi'_{\xi\xi} + \frac{cu_\infty \tau^{\frac{4}{3}}}{c^2} \varphi'_{\eta\eta} = \left(\gamma + 1\right) M_\infty^2 \left(\frac{c^2 u_\infty \tau^{\frac{4}{3}}}{c^3} \right) \varphi'_\xi \, \varphi'_{\xi\xi}$$

Moto Transonico

$$\left(1-M_\infty^2\right)\frac{cu_\infty\tau^{\frac{2}{3}}}{c^2}\varphi'_{\xi\xi}+\frac{cu_\infty\tau^{\frac{4}{3}}}{c^2}\varphi'_{\eta\eta}=(\gamma+1)M_\infty^2\left(\frac{c^2u_\infty\tau^{\frac{4}{3}}}{c^3}\right)\varphi'_\xi\,\varphi'_{\xi\xi}$$

$$\left(1-M_\infty^2\right)\varphi'_{\xi\xi}+\tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_{\eta\eta}=(\gamma+1)M_\infty^2\tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_\xi\,\varphi'_{\xi\xi}$$

$$\left[\frac{\left(1-M_\infty^2\right)}{\tau^{\frac{2}{3}}}-(\gamma+1)M_\infty^2\varphi'_\xi\right]\varphi'_{\xi\xi}+\varphi'_{\eta\eta}=0$$

Introducendo il parametro di similitudine: $k=\dfrac{1-M_\infty^2}{\tau^{\frac{2}{3}}}$

$$\left[k-(\gamma+1)M_\infty^2\varphi'_\xi\right]\varphi'_{\xi\xi}+\varphi'_{\eta\eta}=0$$

Supponendo inoltre che il numero di Mach sia prossimo all'unità:

$$\left[k-(\gamma+1)\varphi'_\xi\right]\varphi'_{\xi\xi}+\varphi'_{\eta\eta}=0$$

Moto Transonico

Se si hanno due flussi in cui il parametro *k* rimane costante allora l'equazione rimane invariata e si avrà la stessa soluzione. In particolare:

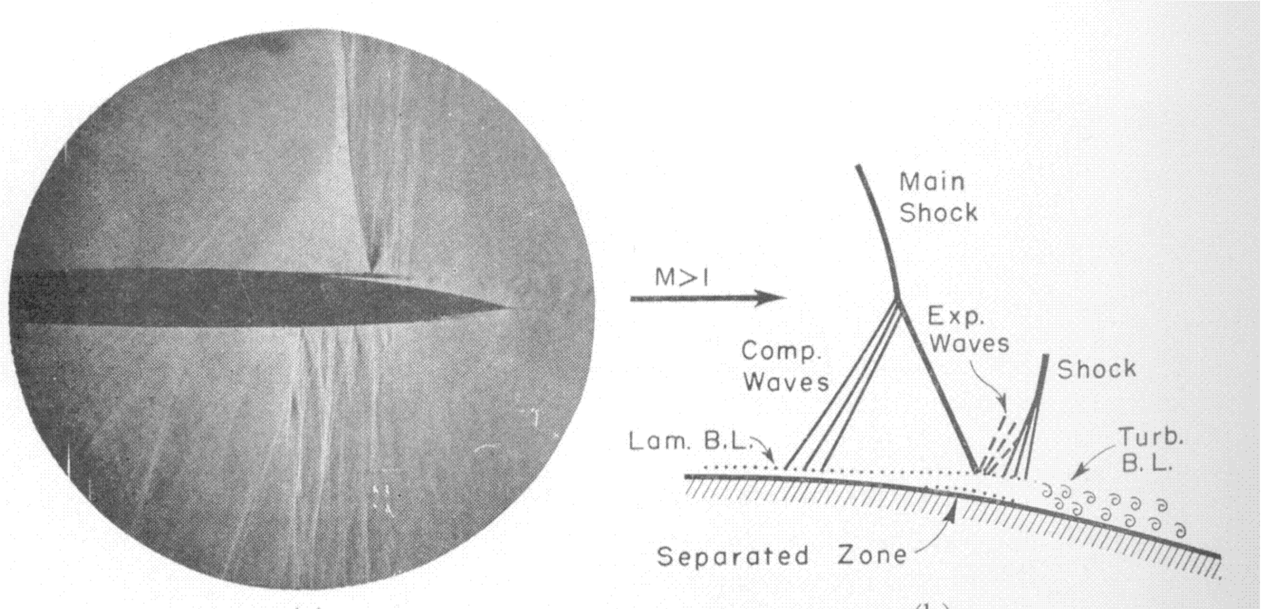
$$C_p=-\frac{2u'}{u_\infty}=-\frac{2cu_\infty\tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_\xi}{cu_\infty}=-2\tau^{\frac{2}{3}}\varphi'_\xi$$

Quindi formalmente si ha:

$$\xi=\frac{x}{c}\qquad\eta=\frac{y\tau^{\frac{1}{3}}}{c}\qquad\varphi'=\frac{\varphi}{cu_\infty\tau^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{C_p}{\tau^{\frac{2}{3}}}=-2\varphi'_\xi=f(k,\xi,\eta)$$

Linearizzazione delle equazioni



(a) (b)