

Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it



Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 1 del 13.10.2014

Moto con adduzione (rimozione) di massa

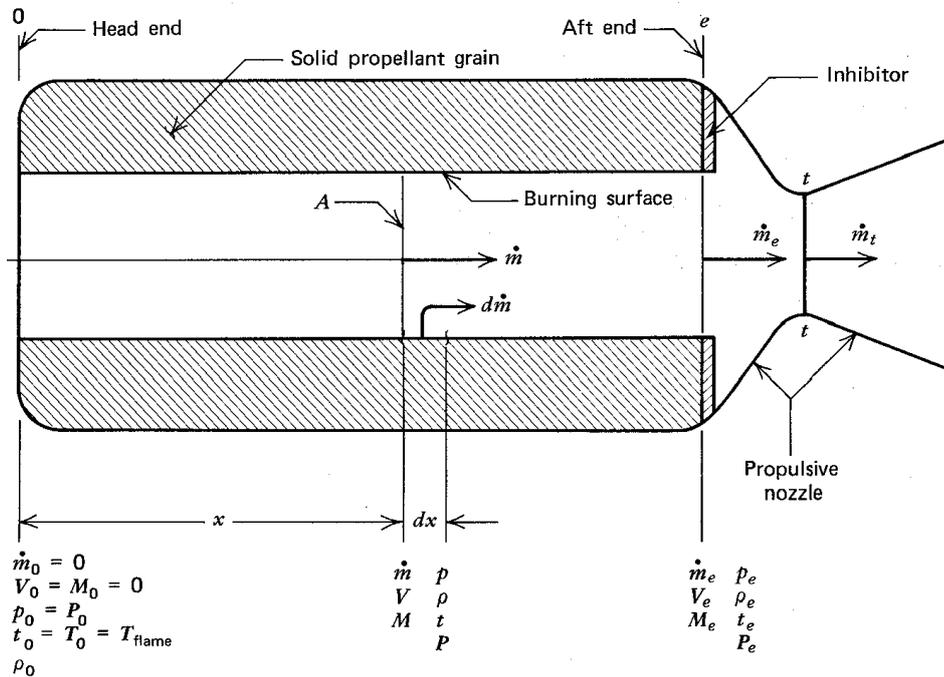
- il moto è quasi-unidimensionale e quasi-stazionario;
- l'area della sezione di passaggio del fluido nel condotto è costante;
- il fluido non scambia lavoro ne calore con l'ambiente e sia gli effetti diffusivi, che quelli delle forze gravitazionali, sono trascurabili;
- la produzione di entropia è trascurabile, in altre parole la trasformazione termofluidodinamica è considerata reversibile;
- l'unica forza spingente è l'adduzione (rimozione) di massa.



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

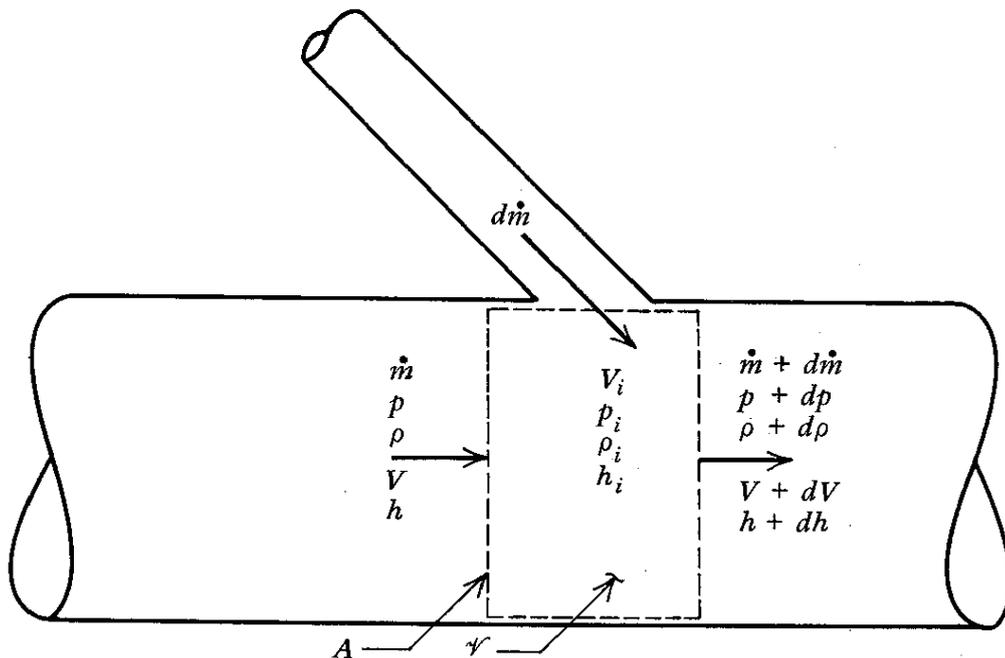
Applicazioni

- Razzi a propellenti solidi;
- Raffreddamento per traspirazione.



Moto con adduzione di massa “semplice”

- Stesso gas;
- Stessa entalpia totale ($H_i=H$).



Bilancio della quantità di moto

$$\rho A + \dot{m} V + d\dot{m} V_{ix} = (\rho + d\rho)A + (\dot{m} + d\dot{m})(V + dV)$$

$$d\dot{m} V_{ix} = dpA + \dot{m} dV + d\dot{m} V$$

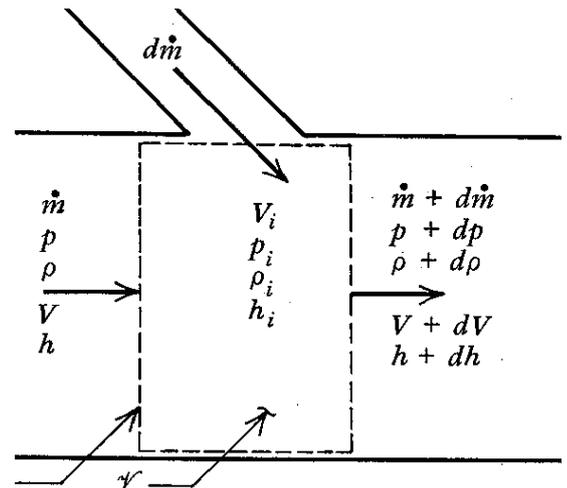
$$\dot{m} = \rho VA$$

$$dp + \rho V dV + \rho V \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (V - V_{ix}) = 0$$

$$\rho V \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = d(\rho V)$$

$$y = \frac{V_{ix}}{V}$$

$$dp + \rho V dV + \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1 - y) = 0$$



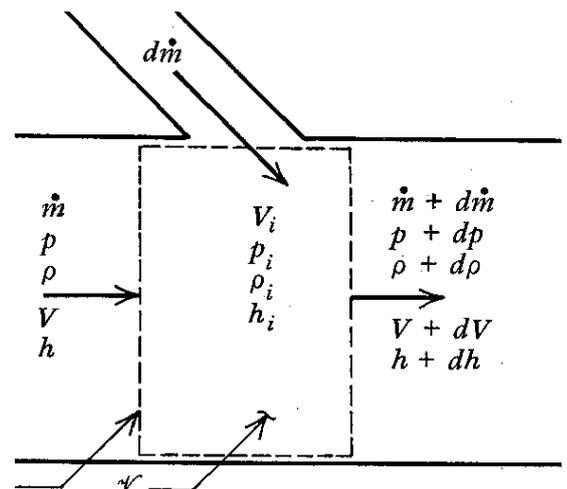
Bilancio della quantità di moto

$$\rho_1 A + \dot{m}_1 V_1 + \Delta \dot{m} V y = \dot{m}_2 V_2 + \rho_2 A$$

$$I_1 A + \Delta \dot{m} V y = I_2 A$$

Se $y=0$ si ha una adduzione di massa normale alla corrente principale e l'impulso specifico rimane costante.

$$\rho_1 + \rho_1 V_1^2 = \rho_2 + \rho_2 V_2^2 = I$$



Conservazione della Massa

$$\rho VA + d\dot{m} = (\rho + d\rho)(V + dV)A$$

$$d\dot{m} = d(\rho V)A$$

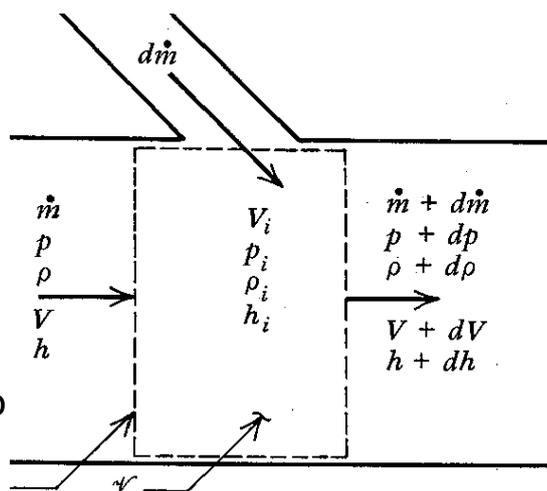
Supponendo che il flusso di massa sia uniformemente distribuito sulla superficie S del condotto in modo che:

$$\frac{d\dot{m}}{dS} = W = \text{cost} \quad G = \rho V$$

$$d\dot{m} = W dS = W \pi D dx$$

$$\frac{d\dot{m}}{A} = dG = \frac{W \pi D dx}{\pi D^2 / 4} = 4W \frac{dx}{D}$$

Dove con D si è indicato il diametro idraulico

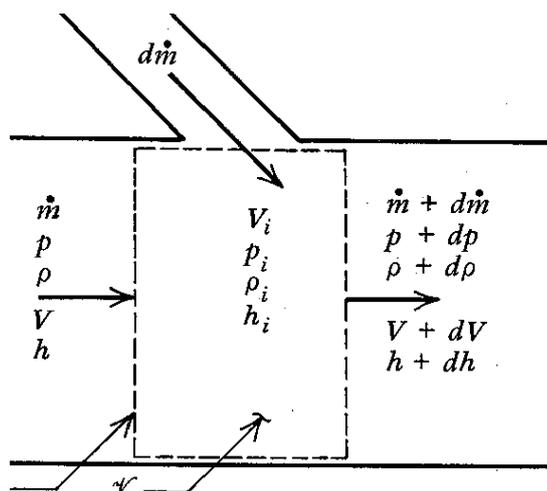


Conservazione della Massa

Che in forma integrale diventa:

$$\frac{\Delta \dot{m}}{A} = \Delta G = G_2 - G_1 = 4W \frac{L_{12}}{D}$$

$$\frac{\Delta \dot{m}}{G_1 A} = \frac{\Delta G}{G_1} = \frac{G_2}{G_1} - 1 = 4 \frac{W}{G_1} \frac{L_{12}}{D}$$



Moto con adduzione di massa

Si supponga inizialmente che $y=0$, la parete sia rigida e che $V_2=V_3$, $T_2=T_3$ etc. Si ha:

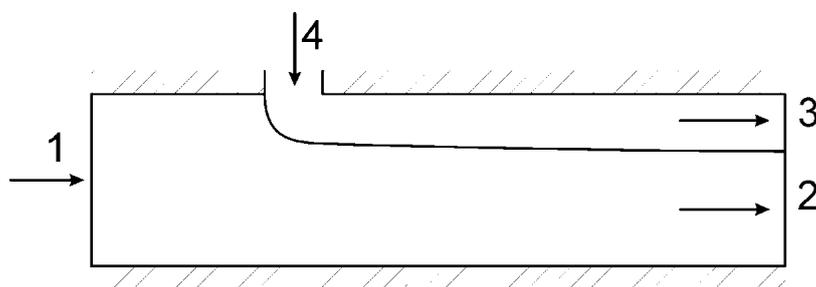
$$\left. \begin{array}{l} \rho_2 = \rho_3 \\ V_2 = V_3 \end{array} \right\} \rightarrow G_2 = G_3 = \frac{\dot{m}_3}{A_3}$$

Poiché $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = A_2 G_2$ si ha: $A_2 = \frac{\dot{m}_1}{G_2} = \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_3} A_3$

Chiaramente:

$$A_1 = A_2 + A_3 \rightarrow A_1 = A_3 \left(1 + \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_3} \right) \rightarrow A_3 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$$

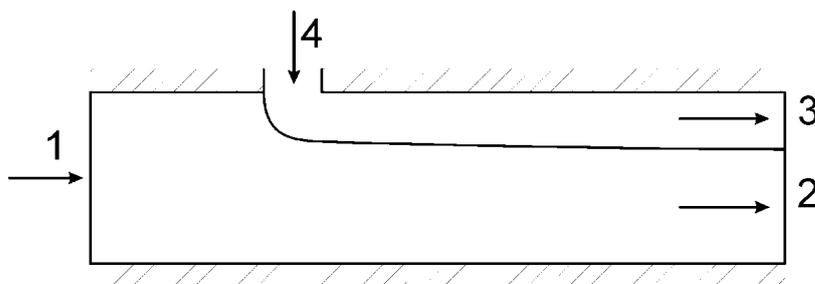
Ovvero: $A_2 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$



Moto con adduzione di massa

$$A_2 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$$

$$A_3 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$$



Quindi nota la portata entrante, che dipende solo da V_{iy} , si può facilmente trovare la percentuale di area occupata dai due flussi.

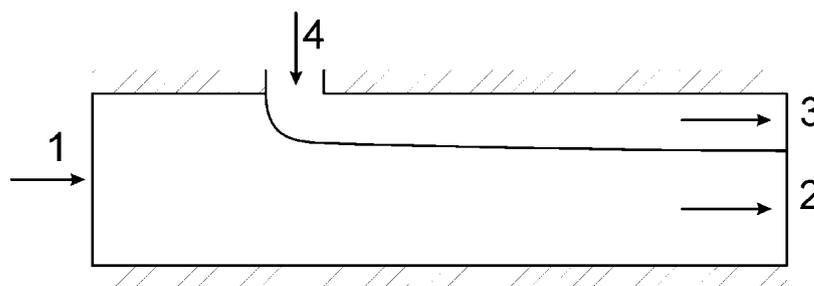
Evidentemente nel caso di parete rigida il moto risulta isentropico ed equivalente ad un moto con variazione di area. A causa del flusso secondario la parete viene spinta verso il basso e verso sinistra e di conseguenza il flusso secondario accelera verso l'alto (fino ad avere $V_{iy}=0$) e verso destra (da $V_{ix}=0$ a V).



Moto con adduzione di massa

$$A_2 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$$

$$A_3 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$$

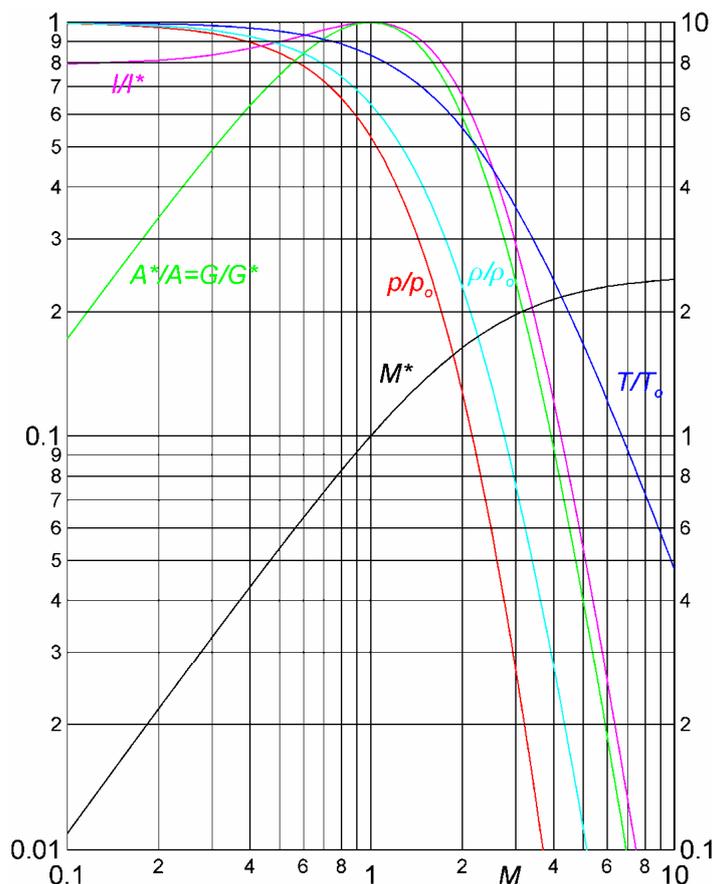


Se ora pensiamo di rimuovere la parete, sempre per $y=0$, è evidente che per decelerare il flusso secondario in ingresso il condotto subirà una spinta verso il basso. D'altro canto l'accelerazione verso destra (da $V_{ix}=0$ a V) avviene a scapito della quantità di moto presente nel flusso principale. In un ugello convergente l'impulso specifico tende ad aumentare questo aumento viene esattamente compensato per $y=0$.

$$I_1 A + \Delta \dot{m} V y = I_2 A$$



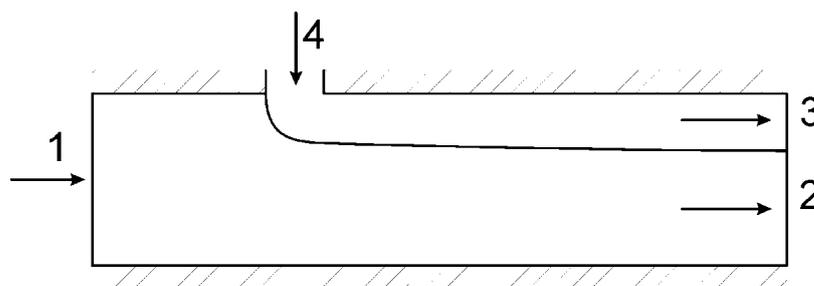
Moto isoentropico



Moto con adduzione di massa

$$A_2 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$$

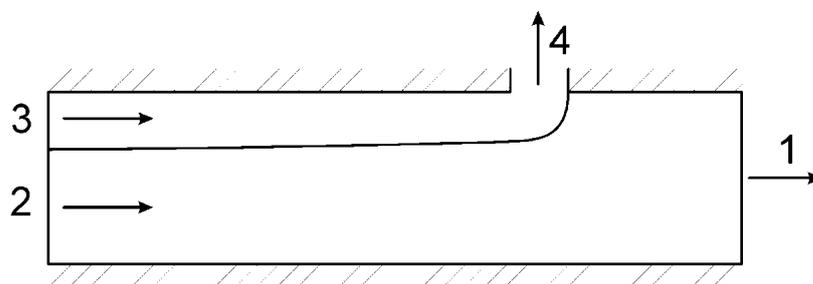
$$A_3 = A_1 \left(\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1 + \dot{m}_3} \right)$$



Se invece $y=1$ non è necessario accelerare il flusso secondario verso destra ed il moto rimane isentropico.

Per $y>1$ il flusso secondario tende a trainare il flusso principale ed in questo caso si parla di eiettore.

Discorso analogo per la rimozione di fluido.



Relazioni Fondamentali

Con le seguenti posizioni:

$$A = \text{cost} \quad y = \frac{V_{ix}}{V} \quad l = p + \rho V^2 \quad G = \rho V = \text{Variabile}$$

Differenziando logicamente la formula della portata:

$$\dot{m} = \rho VA = GA \quad \rightarrow \quad \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V}$$

Da cui:

$$(1) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dV}{V}$$

Differenziando logicamente la prima equazione di stato dei gas più che perfetti si ha:

$$p = \rho RT \quad \rightarrow \quad (2) \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$



Relazioni Fondamentali

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$dp + \rho V dV + \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1-y) = 0$$

Ricordando che per gas più che perfetti:

$$\frac{\rho V^2}{p} = \frac{\gamma V^2}{\gamma R T} = \gamma M^2$$

Si ha:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho V^2 dV}{\rho V} - \frac{\rho V^2}{p} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1-y) = -\gamma M^2 \frac{dV}{V} - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1-y)$$

$$(3) \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \left(\frac{dV}{V} + (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$



Relazioni Fondamentali

Dall'equazione di conservazione dell'energia:

$$dh + V dV = 0$$

e dalla seconda equazione di stato dei gas più che perfetti si ha:

$$dh + V dV = c_p dT + V dV = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{T} = -\frac{V^2}{c_p T} \frac{dV}{V}$$

Ricordando che:

$$\frac{V^2}{c_p T} = \frac{V^2}{\left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \right) T} = (\gamma - 1) \frac{V^2}{\gamma R T} = (\gamma - 1) M^2$$

Si ha:

$$(4) \quad \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V}$$



Relazioni Fondamentali

Sostituendo la (2) nella (3) si ha:

$$(2) \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

$$(3) \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \left(\frac{dV}{V} + (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} = -\gamma M^2 \left(\frac{dV}{V} + (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

Sostituendo in questa relazione le (1) e (4) si ha :

$$(1) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dV}{V}$$

$$(4) \quad \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V}$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dV}{V} - (\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V} = -\gamma M^2 \left(\frac{dV}{V} + (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1 + (1-y)\gamma M^2) = \frac{dV}{V} (1 + \cancel{(\gamma - 1)} M^2 - \cancel{\gamma} M^2)$$



Relazioni Fondamentali

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1 + (1-y)\gamma M^2) = \frac{dV}{V} (1 + \cancel{(\gamma - 1)} M^2 - \cancel{\gamma} M^2)$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1 + (1-y)\gamma M^2) = \frac{dV}{V} (1 - M^2)$$

Da cui imponendo $\psi = 1 + (1-y)\gamma M^2$ si ha:

$$(5) \quad \frac{dV}{V} = \frac{1 + (1-y)\gamma M^2}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{\psi}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Sostituendo la (5) nella (4) si ha:

$$(4) \quad \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V}$$

$$(6) \quad \frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma - 1) M^2 \psi}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Relazioni Fondamentali

$$(5) \quad \frac{dV}{V} = \frac{\psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\psi = 1 + (1-y)\gamma M^2$$

Sostituendo la (5) nella (1) si ha:

$$(1) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dV}{V}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{\psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \left(1 - \frac{1+(1-y)\gamma M^2}{1-M^2}\right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{1-M^2 - 1 - (1-y)\gamma M^2}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-M^2 - (1-y)\gamma M^2}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = -\frac{(1+\gamma)M^2 - \gamma y M^2}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Da cui:

$$(7) \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{(\gamma+1)M^2 - \gamma y M^2}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = -M^2 \frac{1+\gamma(1-y)}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Relazioni Fondamentali

$$(5) \quad \frac{dV}{V} = \frac{\psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\psi = 1 + (1-y)\gamma M^2$$

Sostituendo la (5) nella (3) si ha:

$$(3) \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \left(\frac{dV}{V} + (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \left(\frac{\psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2} (\psi + (1-y)(1-M^2)) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2} (1 + (1-y)\gamma M^2 + (1-y)(1-M^2)) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2} ((1-y)(1+(\gamma-1)M^2) + (1-y) + y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Da cui:

$$(8) \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2} \left(2(1-y) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) + y \right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Relazioni Fondamentali

Differenziando logicamente la relazione $M^2 = \frac{V^2}{\gamma RT}$ si ha:

$$\frac{2dM}{M} = \frac{2dV}{V} - \frac{dT}{T}$$

Sostituendo la (4) nella relazione precedente:

$$\frac{dM}{M} = \frac{dV}{V} + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \frac{dV}{V} \quad (4) \quad \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V}$$

Sostituendo la (5) nella relazione precedente si ha: $\psi = 1 + (1 - \gamma) \gamma M^2$

$$(9) \quad \frac{dM}{M} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \psi}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \quad (5) \quad \frac{dV}{V} = \frac{\psi}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Relazioni Fondamentali

Differenziando logicamente la relazione $\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$ si ha:

$$\frac{dp}{p} - \frac{dp_0}{p_0} = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\gamma - 1}{2} \frac{2M dM}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} = -\frac{\gamma M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\psi = 1 + (1 - \gamma) \gamma M^2$$

Sostituendo la (9) nella relazione precedente:

$$(9) \quad \frac{dM}{M} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \psi}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \psi}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma \psi M^2}{1 - M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \left(1 + (1 - \gamma) \gamma M^2\right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Relazioni Fondamentali

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1-M^2} (1 + (1-y)\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Sostituendo la (8) nella relazione precedente:

$$(8) \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2} \left(2(1-y) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) + y \right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2} \left(-2(1-y) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) - y + 1 + (1-y)\gamma M^2 \right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2} (1-y) \left(-2 - (\gamma-1)M^2 + 1 + \gamma M^2 \right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2} (1-y) (M^2 - 1) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = -2\gamma M^2 (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(10) \quad \frac{dp_0}{p_0} = -\gamma M^2 (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Relazioni Fondamentali

Per l'impulso si ha:

$$dI = dp + \rho V dV + V dG = dp + \rho V dV + \rho V^2 \frac{dG}{G} = dp + \rho V dV + \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Dall'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$dp + \rho V dV + \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} (1-y) = 0 \quad \rightarrow \quad dp + \rho V dV + \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = y \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$dI = dp + \rho V dV + \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = y \rho V^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Da cui:

$$\frac{dI}{I} = y \frac{\rho V^2}{p + \rho V^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = y \frac{\rho V^2}{p(1 + \gamma M^2)} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = y \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Infine:

$$(11) \quad \frac{dI}{I} = y \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Relazioni Fondamentali

Ricordando che:

$$\frac{ds}{c_p} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp_0}{p_0}$$

$$(10) \quad \frac{dp_0}{p_0} = -\gamma M^2 (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\psi = 1 + (1-y)\gamma M^2$$

Ed utilizzando la (10) si ha:

$$(12) \quad \frac{ds}{c_p} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp_0}{p_0} = (\gamma-1)M^2(1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(6) \quad \frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1)M^2\psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Sostituendo nella (12) la (6) si ha:

$$\frac{ds}{c_p} = -(\gamma-1)M^2(1-y) \frac{1-M^2}{(\gamma-1)M^2\psi} \frac{dT}{T} = (1-y) \frac{M^2-1}{1+(1-y)\gamma M^2} \frac{dT}{T}$$

Da cui:

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{H,\gamma} = \frac{1+(1-y)\gamma M^2}{(M^2-1)(1-y)}$$



Relazioni Fondamentali

$$\psi = 1 + (1-y)\gamma M^2$$

$$(5) \quad \frac{dV}{V} = \frac{\psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(6) \quad \frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1)M^2\psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(7) \quad \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{1+\gamma(1-y)}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(8) \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2} \left(2(1-y) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) + y \right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(9) \quad \frac{dM}{M} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \psi}{1-M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(10) \quad \frac{dp_0}{p_0} = -\gamma M^2 (1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(11) \quad \frac{dl}{l} = y \frac{\gamma M^2}{1+\gamma M^2} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(12) \quad \frac{ds}{c_p} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp_0}{p_0} = (\gamma-1)M^2(1-y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{H,\gamma} = \frac{1+(1-y)\gamma M^2}{(M^2-1)(1-y)}$$



Curva del moto con adduzione di massa

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{H,?} = \frac{1 + (1-y)\gamma M^2}{(M^2 - 1)(1-y)}$$

Evidentemente, nel caso particolare di adduzione con $y=1$, la pendenza è infinita e la curva tende ad una isentropica.

Nel secondo caso limite di adduzione normale ($y=0$) l'impulso è costante (vedere anche la (11)) e la pendenza della curva del moto con adduzione di massa diventa:

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{H,l} = \frac{1 + \gamma M^2}{M^2 - 1} \quad (11) \quad \frac{dl}{l} = y \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dm}{m}$$

Nel seguito sarà analizzato solo il caso di adduzione normale ($y=0$).



Relazioni Fondamentali

Per $y=0$ si ha:

$$l = \text{cost} = p(1 + \gamma M^2) = p^*(1 + \gamma) \rightarrow \frac{p}{p^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2}$$

$$H = \text{cost} = c_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) = c_p T^* \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \rightarrow \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{p}{p^*} \frac{T^*}{T} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2} \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \gamma M^2}$$

$$\frac{V}{V^*} = \frac{M}{1} \frac{\sqrt{\gamma RT}}{\sqrt{\gamma RT^*}} = M \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}}$$

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = \frac{G}{G^*} = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{V}{V^*} = \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \gamma M^2} M \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}} = M \frac{\sqrt{(\gamma + 1)(2 + (\gamma - 1)M^2)}}{1 + \gamma M^2}$$



Relazioni Fondamentali

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p} \frac{p}{p^*} \frac{p^*}{p_0^*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}$$

Ed infine dalla relazione:
$$\frac{\Delta s}{c_p} = \ln \left[\left(\frac{p_0^*}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \ln \left[\left(\frac{p_0^*}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = \ln \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \left(\frac{1+\gamma M^2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$



Relazioni Fondamentali

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{2+(\gamma-1)M^2}{1+\gamma M^2} \quad \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \left(\frac{2+(\gamma-1)M^2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \quad \frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = \frac{G}{G^*} = M \frac{\sqrt{(\gamma+1)(2+(\gamma-1)M^2)}}{1+\gamma M^2}$$

M	p/p^*	ρ/ρ^*	T/T^*	p_0/p_0^*	G/G^*
.00	2.400	2.000	1.200	1.268	.0000
.01	2.400	2.000	1.200	1.268	.2191 -1
.02	2.399	1.999	1.200	1.268	.4380 -1
.03	2.397	1.998	1.200	1.267	.6565 -1
.04	2.395	1.996	1.200	1.266	.8745 -1
.05	2.392	1.994	1.199	1.266	.1092
.06	2.388	1.991	1.199	1.265	.1308
.07	2.384	1.988	1.199	1.264	.1524
.08	2.379	1.985	1.198	1.262	.1738
.09	2.373	1.981	1.198	1.261	.1951
.10	2.367	1.976	1.198	1.259	.2163



La curva del moto con adduzione di massa

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{I,H} = \frac{1 + \gamma M^2}{M^2 - 1}$$

per **moto iposonico** ($M \rightarrow 0$), la tangente è negativa quindi si raggiungono le condizioni di ristagno per un valore d'entropia finito;

per **moto subsonico** ($M < 1$), la pendenza della curva risulta sempre **negativa**;

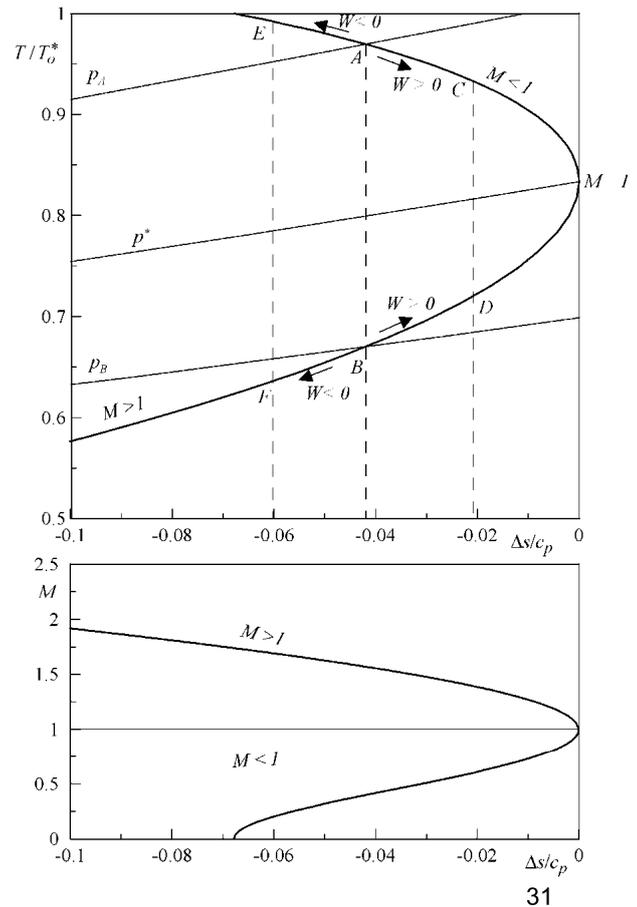
per $M \rightarrow 1$, si ha:

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{I,H} \rightarrow \pm \infty$$

e cioè nelle condizioni soniche la curva presenta tangente verticale e l'entropia raggiunge un **massimo**;



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita



31

La curva del moto con adduzione di massa

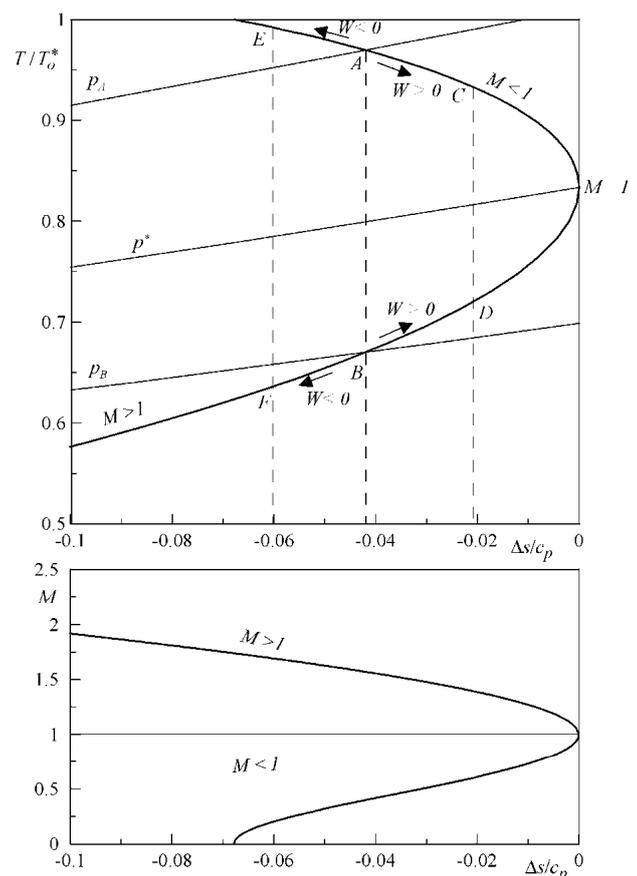
$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{I,H} = \frac{1 + \gamma M^2}{M^2 - 1}$$

per **moto supersonico** ($M > 1$), la pendenza della curva risulta sempre **positiva**;

per **moto ipersonico** ($M \rightarrow \infty$), si ha:

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{I,H} \rightarrow \gamma$$

che, ricordando la definizione di c_p , comporta che la curva deve tendere ad una **isocora** ($\rho = \text{cost}$).



32



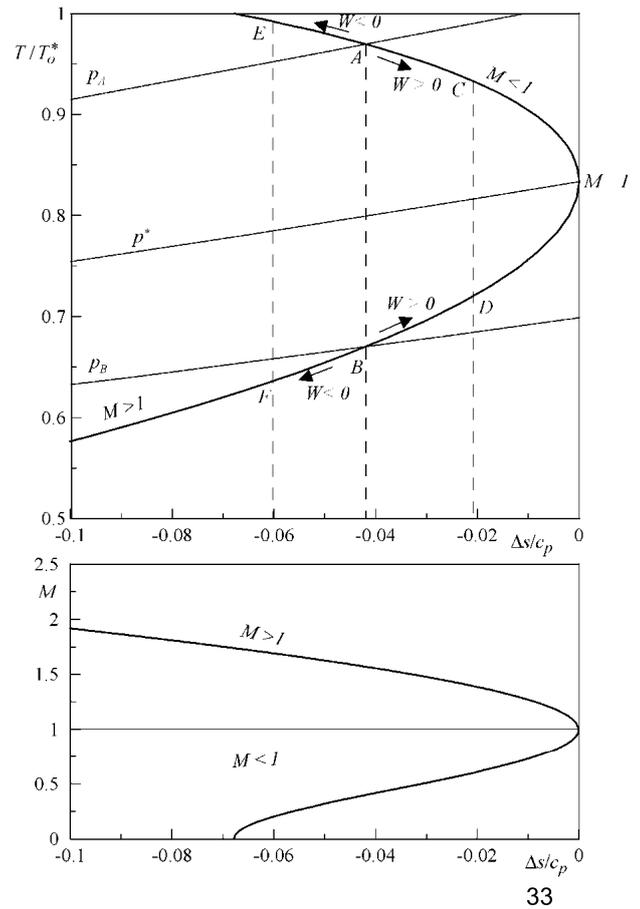
Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

La curva del moto con adduzione di massa

$$\frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{I,H} = \frac{1 + \gamma M^2}{M^2 - 1}$$

Occorre notare che, per un determinato valore di γ , utilizzando le coordinate adimensionali di figura e la posizione $\Delta s^* = 0$, **la curva è unica**. In coordinate dimensionali, invece, ad ogni coppia di valori I e H corrisponde una particolare curva.

Poiché un flusso convettivo di massa dall'ambiente al sistema provoca un aumento dell'entropia $W > 0$ implica uno spostamento verso entropie crescenti viceversa per $W < 0$.

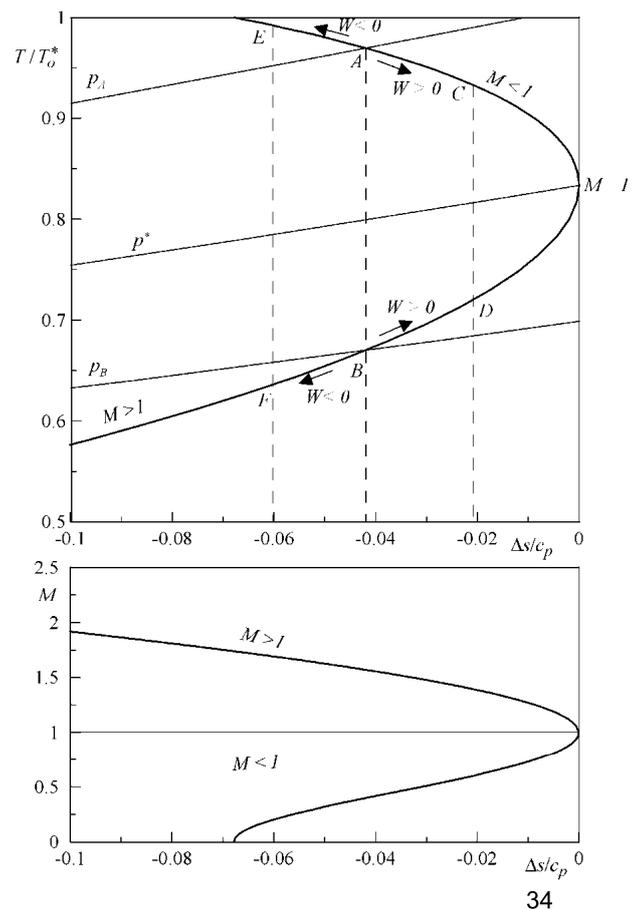


La curva del moto con adduzione di massa

Nel diagramma in basso è stato riportato, in funzione del livello entropico, l'andamento del numero di Mach $M = M(\Delta s)$, ponendolo in corrispondenza del diagramma in alto.

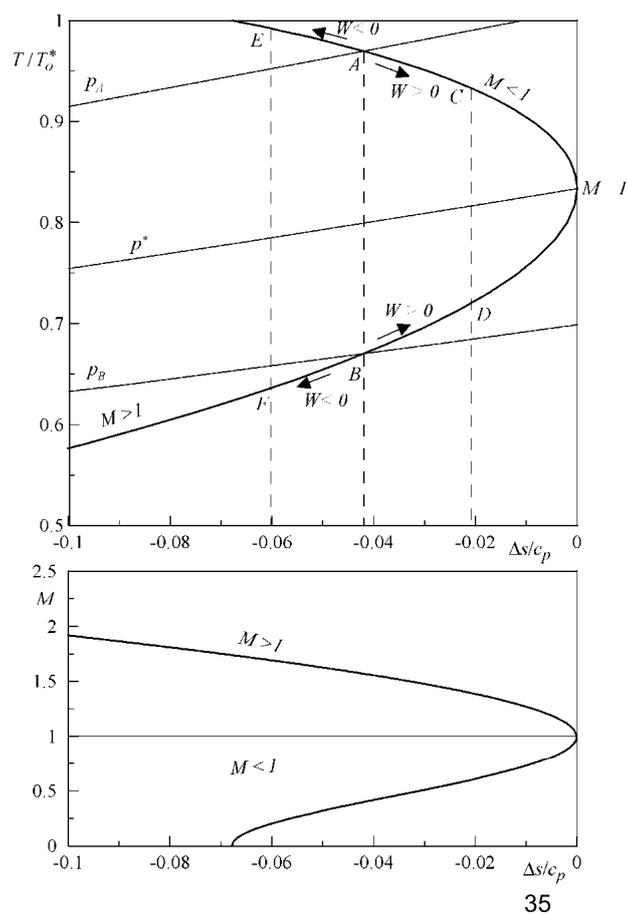
Per $W > 0$ e moto subsonico, oppure per $W < 0$ e moto supersonico, si ha un aumento del numero di Mach che comporta anche un aumento della velocità del fluido e una diminuzione della sua pressione e della sua densità.

Il ramo in alto della curva $T = T(s)$ corrisponde a quello in basso del grafico di M e viceversa.



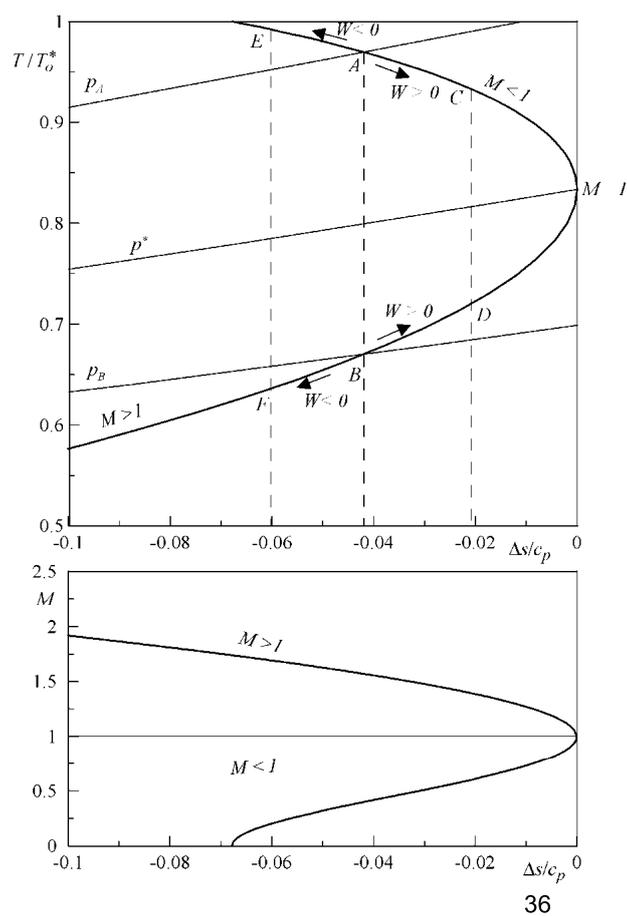
La curva del moto con adduzione di massa

Se la condizione iniziale del moto è rappresentata dal punto A (rispettivamente B), il moto evolverà raggiungendo il punto C (risp. D) a pressione minore (risp. maggiore) quando il flusso di massa è positivo, o verso il punto E (risp. F) a pressione maggiore (risp. minore) quando il flusso di massa è negativo.



La curva del moto con adduzione di massa

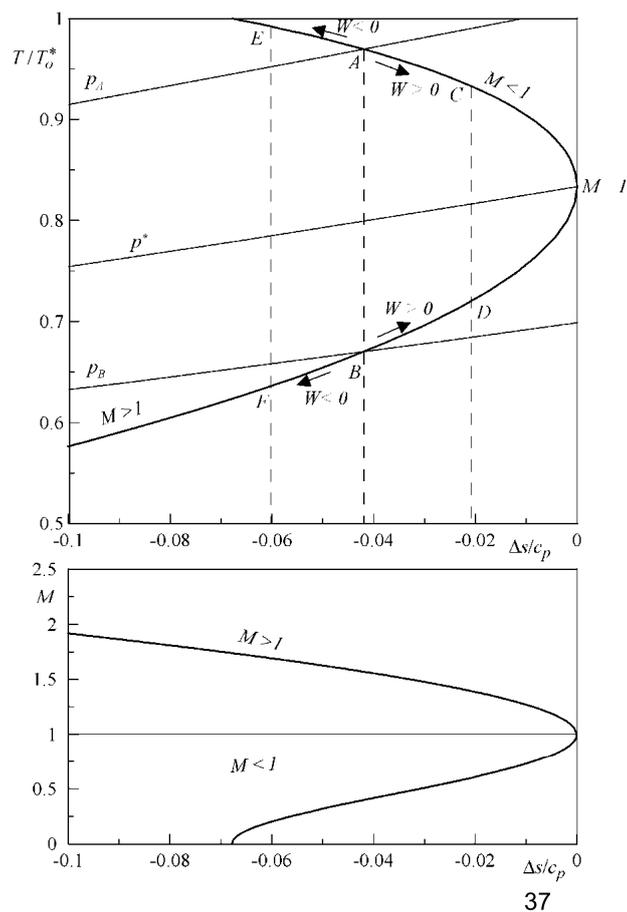
Sia per moto subsonico che supersonico, se il flusso di massa è positivo si possono raggiungere le condizioni critiche che corrispondono alle condizioni soniche di $M = 1$. Queste condizioni possono essere raggiunte solo all'uscita del condotto cioè, quando è stata fornita al fluido tutta la massa che è possibile fornire.



La curva del moto con adduzione di massa

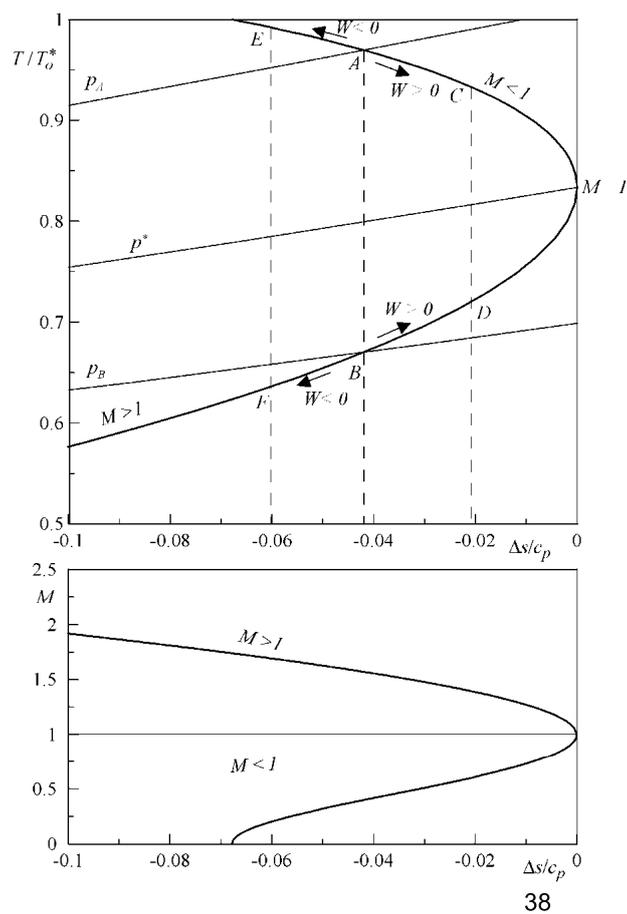
In effetti, **se si sta** fornendo massa al fluido, anche nel moto con adduzione di massa (come in quello alla Fanno ed alla Rayleigh) **le condizioni corrispondenti a $M = 1$ rappresentano le condizioni critiche che danno luogo allo strozzamento del moto.**

In realtà, anche **la sottrazione di massa è limitata** potendosi, in linea di principio, **sottrarre al più la massa totale posseduta inizialmente dal fluido.**



La curva del moto con adduzione di massa

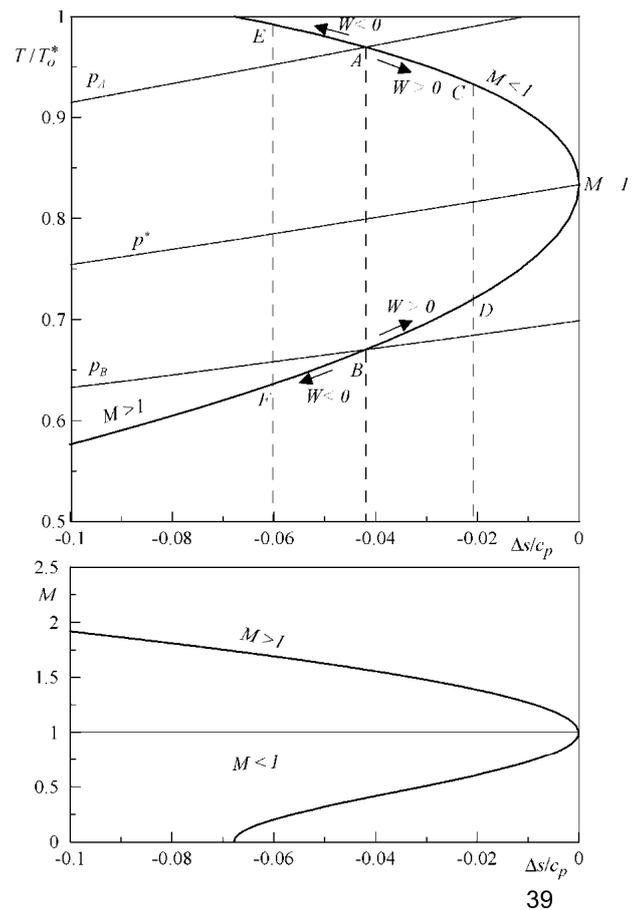
Come nel moto alla Rayleigh in linea del tutto teorica, sarebbe possibile accelerare un flusso subsonico fino a $M > 1$ (decelerare un flusso supersonico fino a $M < 1$) prima fornendo e poi sottraendo massa al fluido.



La curva del moto con adduzione di massa

Come nel moto alla *Rayleigh*, le **condizioni soniche** possono essere raggiunte **anche all'inizio del condotto**, qualora lungo ci sia una sottrazione di massa.

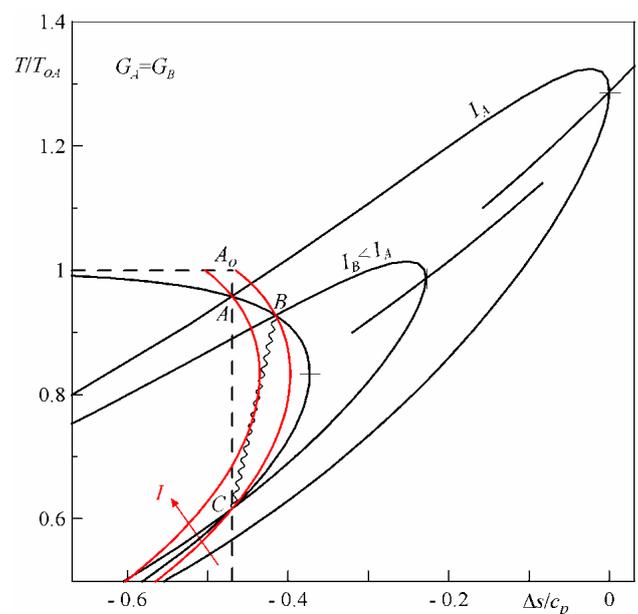
In questo caso, il seguire il ramo supersonico, o quello subsonico, della curva (o parte di entrambi) dipende dal valore della pressione all'uscita del condotto.



La curva del moto con adduzione di massa

Mantenendo costante l'entalpia totale H e variando l'impulso specifico I , si ottiene un'infinità di curve, due delle quali sono mostrate nella figura insieme con una curva di Fanno e due di Rayleigh.

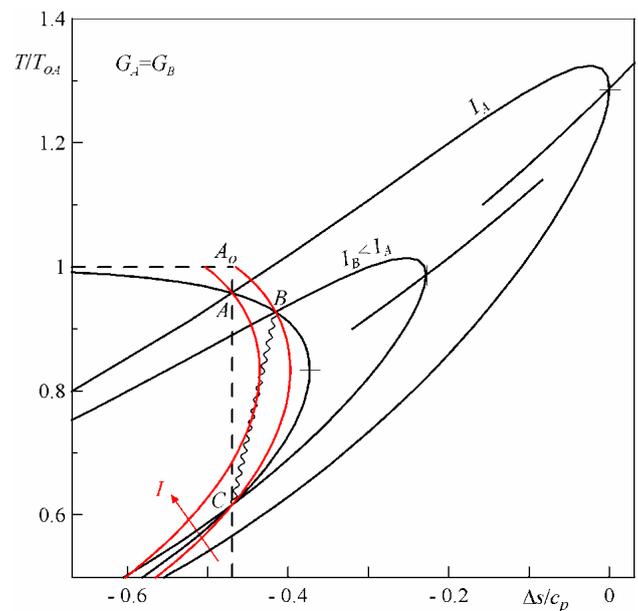
Si fissi come entropia di riferimento quella relativa al **punto sonico** della curva di Rayleigh più esterna e come temperatura di riferimento la temperatura di ristagno del suo punto A , cioè T_{0A} (curva tratteggiata orizzontale di figura).



La curva del moto con adduzione di massa

Considerando una espansione isoentropica (in particolare quella che origina dalle condizioni di ristagno del punto A , cioè A_0) in un ugello convergente divergente (curva tratteggiata verticale di figura), si possono determinare sul piano T - s , **i tre punti caratteristici all'uscita dell'ugello** corrispondenti ai tre rapporti critici di pressione r_1 , r_2 e r_3 .

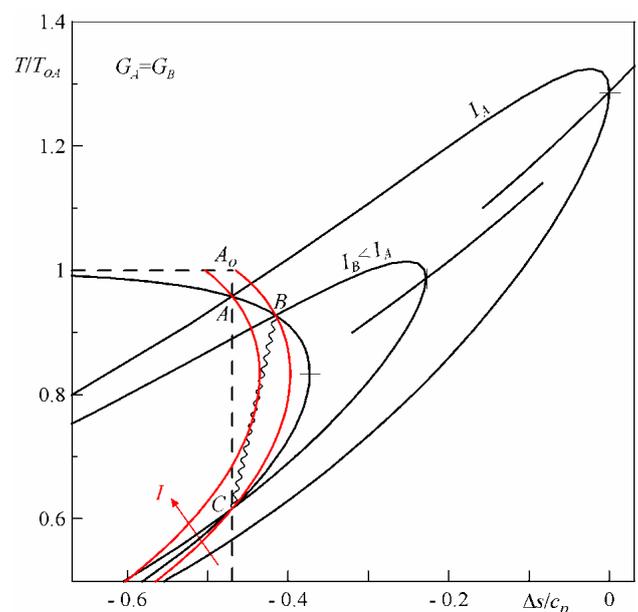
Questa ricerca risulta più semplice utilizzando la curva di Fanno tracciata nella figura, asintotica alla T_{0A} , passante per il punto A (curva ABC) e che ha lo stesso valore di G delle due curve.



La curva del moto con adduzione di massa

I punti A , B e C di figura corrispondono rispettivamente ai rapporti r_1 , r_2 e r_3 . Si nota che i punti B e C sono sulla curva del moto con adduzione di massa più a destra (dovendo avere lo stesso valore sia di G che di I , oltre che di H , in quanto punti a valle e a monte di un'onda d'urto), mentre il punto A si trova su quella a sinistra (interna) avendo, in generale, un diverso valore dell'impulso specifico.

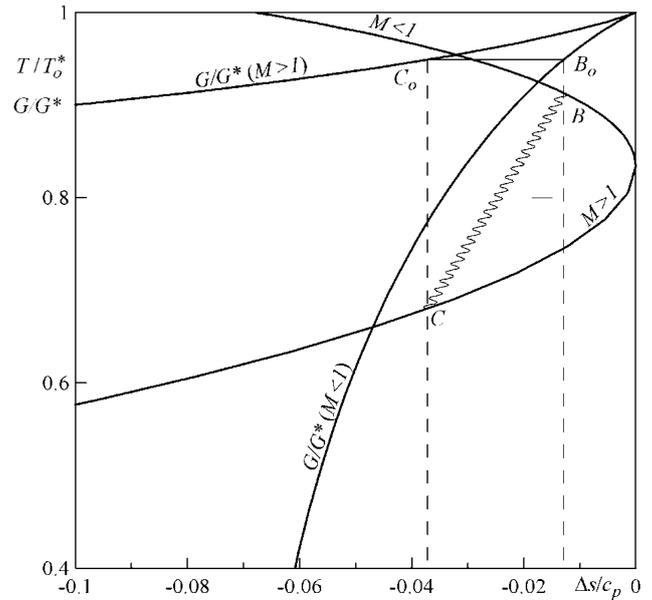
Con lo stesso ragionamento effettuato per le curve di Rayleigh si vede che la curva più a destra (esterna) corrisponde ad un valore dell'impulso specifico I minore rispetto alla curva a sinistra.



La curva del moto con adduzione di massa

In figura sono mostrati i due punti **a monte C** (supersonico) ed **a valle B** (subsonico ad entropia maggiore) di un'onda d'urto normale i quali, come visto nella figura precedente, avendo in comune le quantità l ed H , devono trovarsi su una stessa curva uno sul tratto supersonico e l'altro, avente entropia maggiore, su quello subsonico. I punti C e B devono avere anche lo stesso flusso di massa G .

Nella figura sono rappresentate anche le due curve che mostrano l'andamento di G/G^* , una relativa al ramo subsonico e l'altra a quello supersonico.



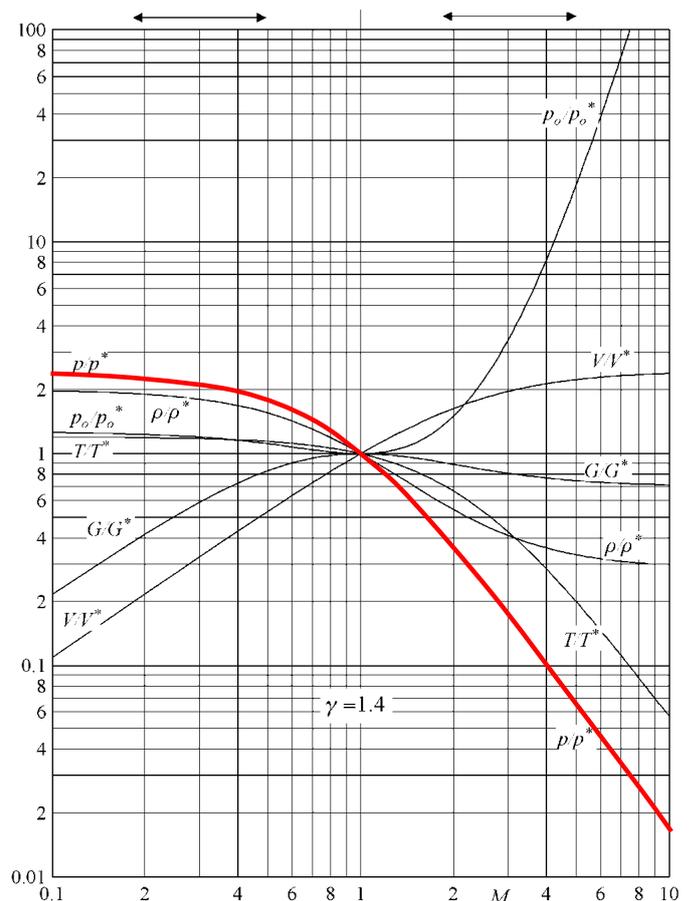
I rapporti caratteristici

Il rapporto di pressione è una funzione strettamente decrescente del numero di Mach (stessa funzione del moto alla Rayleigh)

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{p}{p^*} = \gamma + 1 (= 2.4)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{p}{p^*} = 0$$



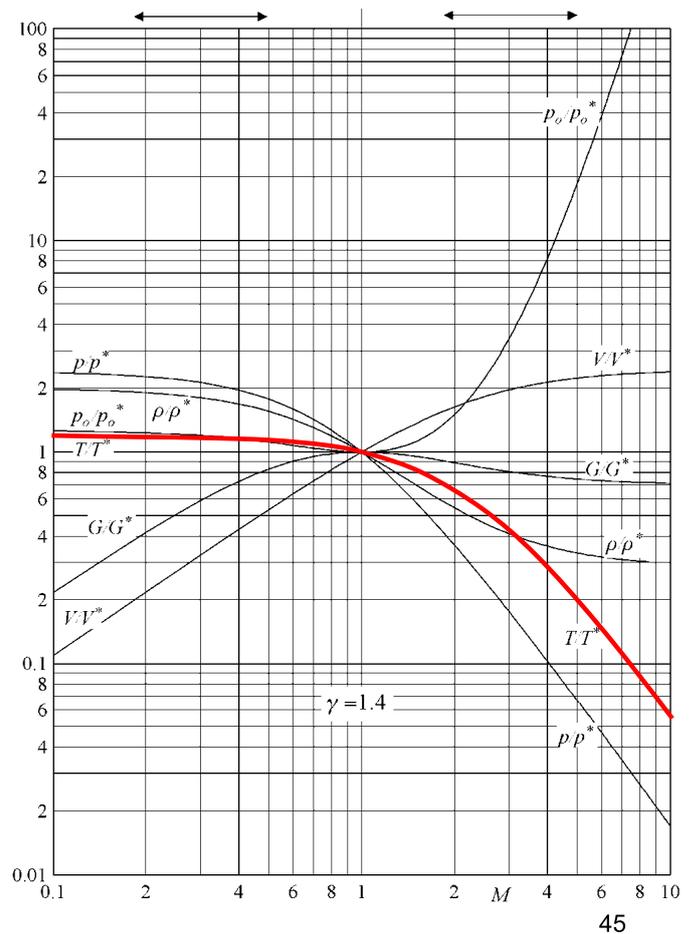
I rapporti caratteristici

Il rapporto di temperature è una funzione strettamente decrescente del numero di Mach (stessa funzione del moto alla Fanno)

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2} (= 1.2)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{T}{T^*} = 0$$



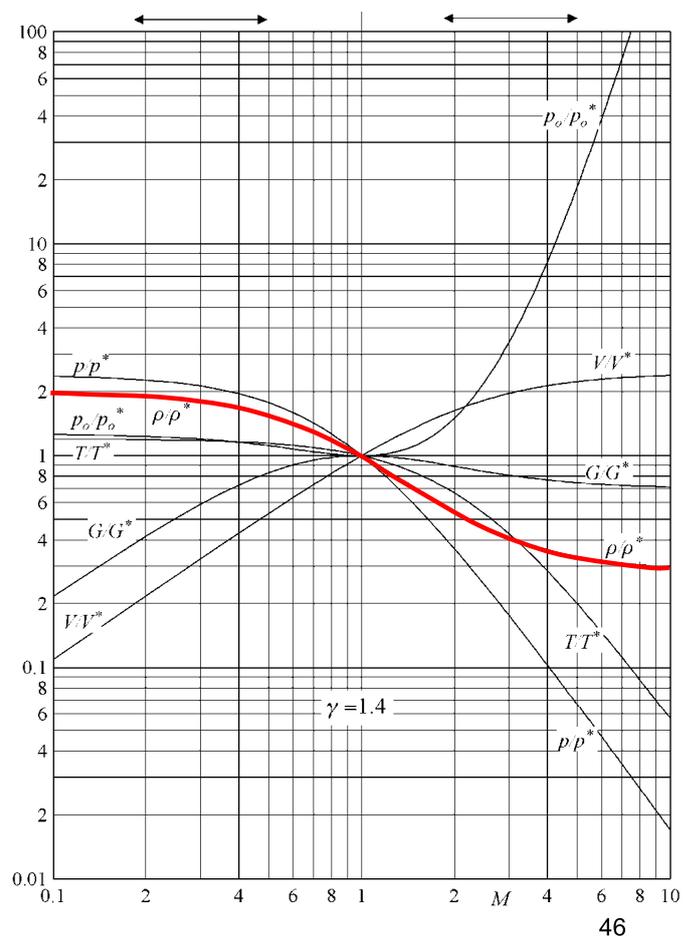
I rapporti caratteristici

Il rapporto di densità è una funzione strettamente decrescente del numero di Mach.

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \gamma M^2}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{\rho}{\rho^*} = 2$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (= .2857)$$



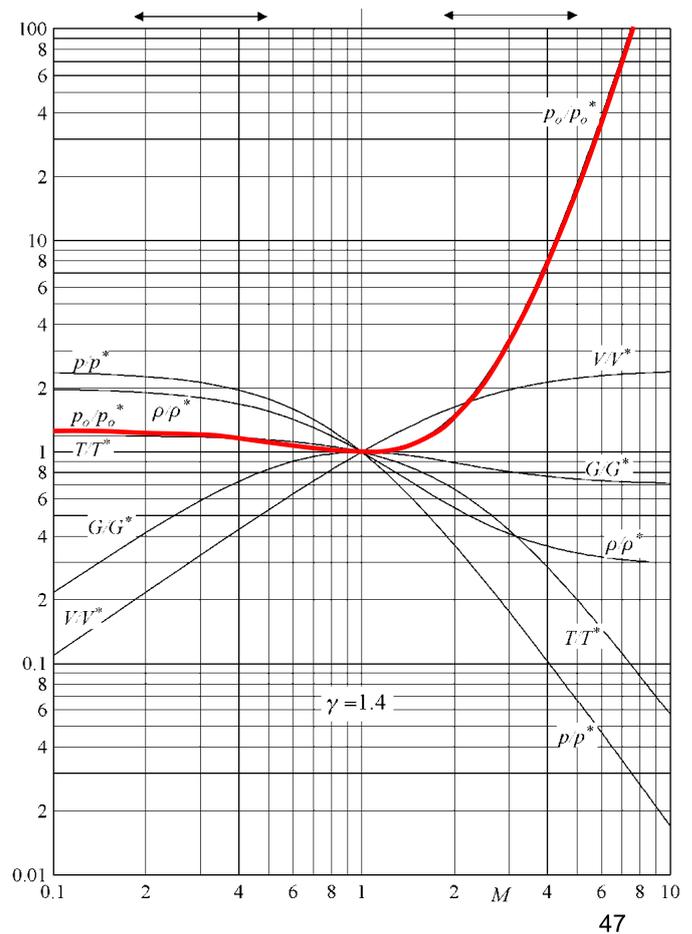
I rapporti caratteristici

Il rapporto di pressioni di ristagno presenta un minimo in condizioni critiche (stessa funzione del moto alla Rayleigh).

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \frac{\gamma + 1}{1 + \gamma M^2}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{p_o}{p_o^*} = \left(\frac{2^\gamma}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} (= 1.2679)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{p_o}{p_o^*} = M^{\frac{2}{\gamma - 1}} = \infty$$



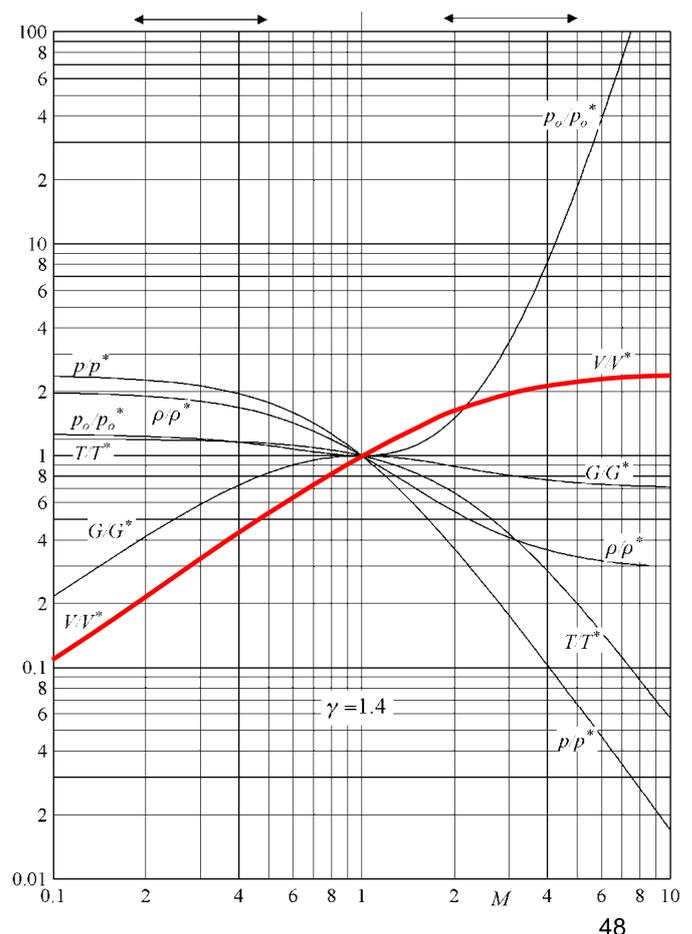
I rapporti caratteristici

Il rapporto di velocità è una funzione strettamente crescente del numero di Mach (stessa funzione del moto alla Fanno).

$$\frac{V}{V^*} = M \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{V}{V^*} = 0$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{V}{V^*} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} (= 2.4495)$$



I rapporti caratteristici

Il rapporto dei flussi di massa presenta un massimo in condizioni critiche:

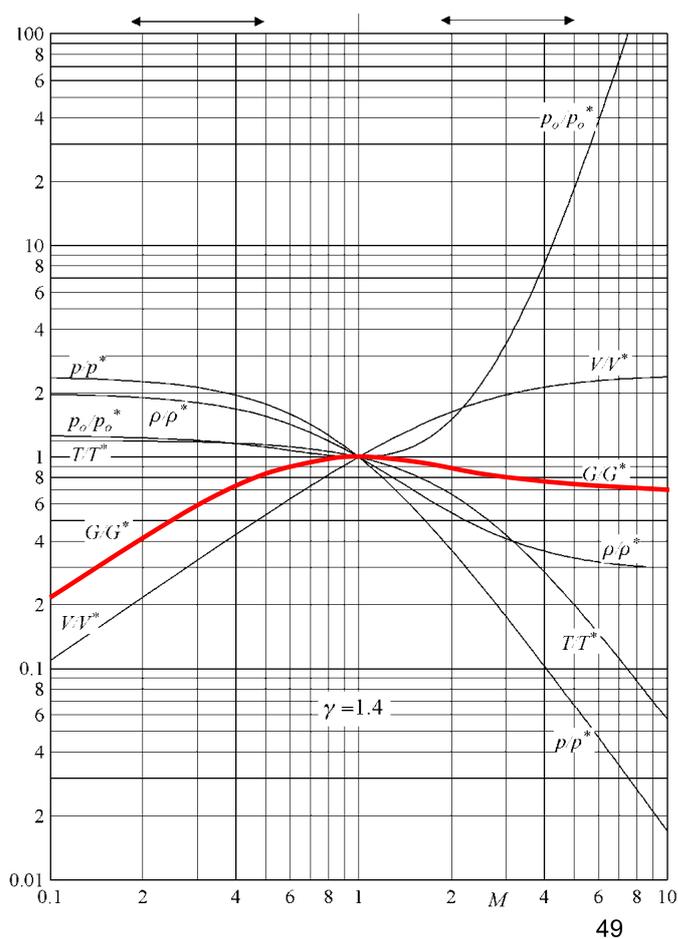
$$\frac{G}{G^*} = \frac{M \sqrt{(\gamma + 1)(2 + (\gamma - 1)M^2)}}{1 + \gamma M^2}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{G}{G^*} = 0$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{G}{G^*} = \sqrt{\frac{(\gamma + 1)(\gamma - 1)}{\gamma^2}} (= 0.6999)$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita



I rapporti caratteristici

Per il moto alla Fanno si ha:

$$\frac{l}{l^*} = \frac{1 + \gamma M^2}{M \sqrt{(\gamma + 1)(2 + (\gamma - 1)M^2)}}$$

Per il moto alla Rayleigh si ha:

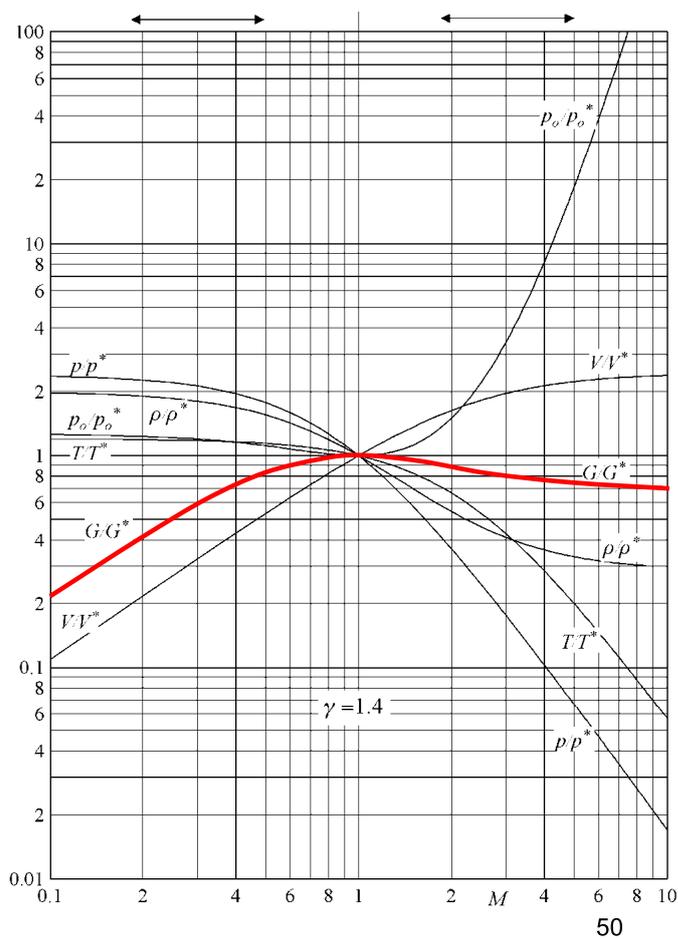
$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{M^2(\gamma + 1)(2 + (\gamma - 1)M^2)}{(1 + \gamma M^2)^2}$$

$$\frac{G}{G^*} = \frac{l^*}{l} = \sqrt{\frac{T_o}{T_o^*}}$$

La costanza dell'impulso, della temperatura di ristagno e del flusso di massa attraverso un'onda d'urto spiega questa "coincidenza".



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

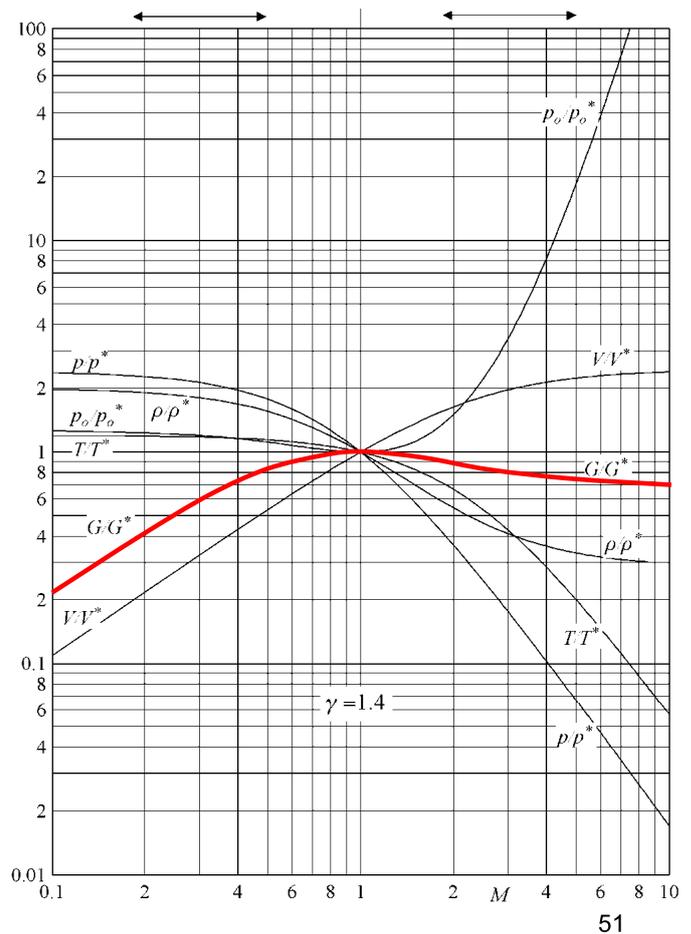


I rapporti caratteristici

Dall'espressione della portata si ha:

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} = \frac{G}{G^*} = \frac{\rho_o A^* \psi^*}{a_o} \frac{a_o}{\rho_o^* A \psi^*} = \frac{\rho_o}{\rho_o^*} \frac{A^*}{A}$$

Dove l'ultimo rapporto è quello relativo al moto isentropico.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

Il comportamento di un condotto, collegato ad un ugello convergente, nel quale si ha una adduzione di massa, è molto simile a quello già descritto nel caso di moti alla Fanno e Rayleigh.

L'ugello si intende collegato a monte ad un serbatoio; quindi il moto del fluido che lo attraversa è senz'altro subsonico e inoltre può essere considerato, in esso, adiabatico ed isoentropico.

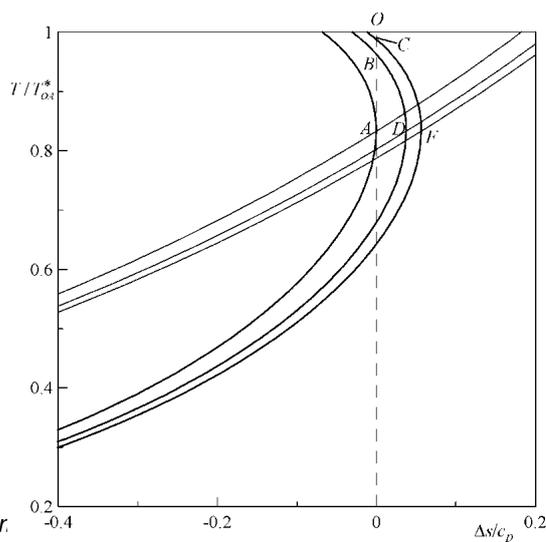
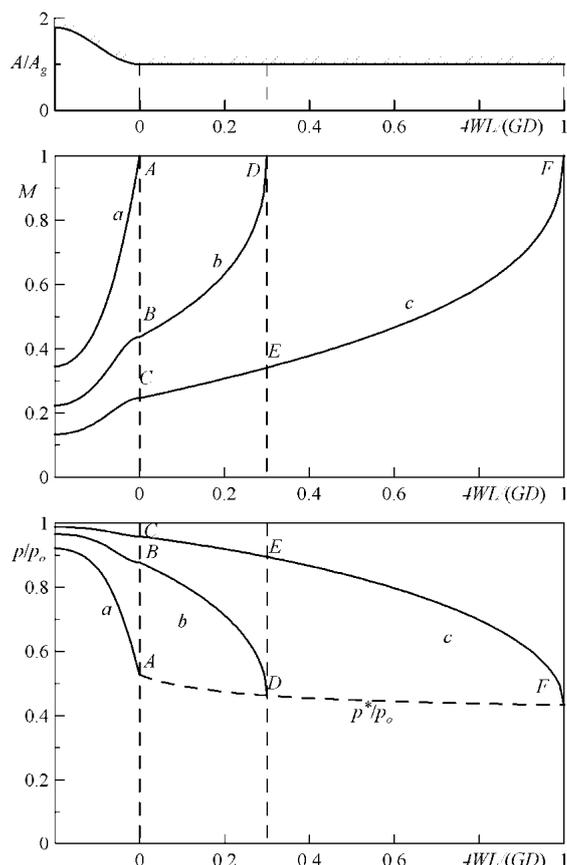
La determinazione delle curve di funzionamento del sistema è del tutto analoga a quella sviluppata per il moto alla Fanno a condizione che il rapporto $4fL^*/D_e$ sia sostituito da:

$$\frac{\Delta \dot{m}}{G_1 A} = \frac{\Delta G}{G_1} = \frac{G_2}{G_1} - 1 = 4 \frac{W}{G_1} \frac{L_{12}}{D}$$



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

In figura sono riportate, per alcuni valori particolari della quantità adimensionale $4WL/(GD)$, le curve caratteristiche con i relativi diagrammi di pressione e del numero di Mach, e le corrispondenti curve nel piano $T-s$.



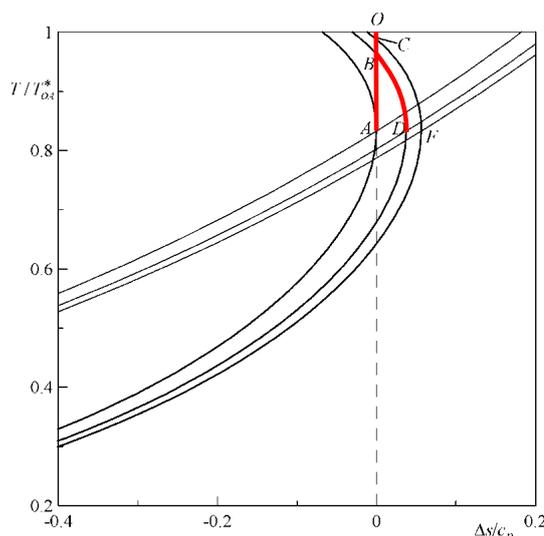
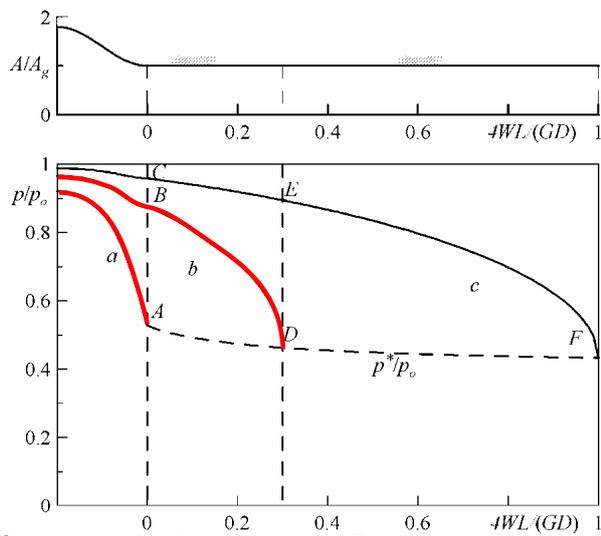
Compler.

Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

Per $4WL/(GD)=0$, il sistema coincide con quello serbatoio-ugello convergente.

Per $4WL/(GD) > 0$, il numero di Mach all'uscita dell'ugello deve essere minore di uno per consentire una adduzione di massa. Quindi, le curve caratteristiche sono, ad esempio, del tipo **b** dove $M_B < 1$ e $p_B > p_A$.

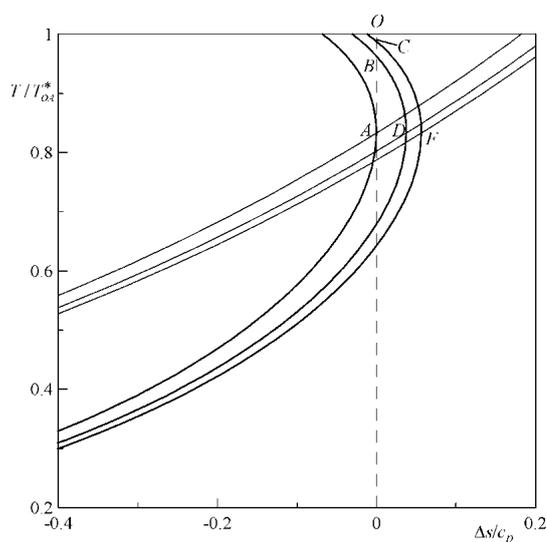
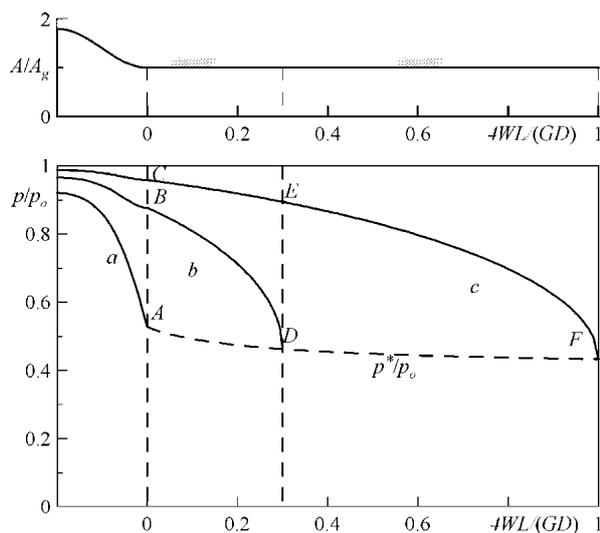
Nella sezione di uscita del condotto si raggiunge, ovviamente, ancora $M = 1$.



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

All'aumentare della lunghezza del condotto, il numero di Mach all'uscita dell'ugello deve continuamente diminuire ($M_C < M_B$ e $p_C > p_B$) e, di conseguenza, il flusso di massa iniziale andrà anch'esso diminuendo. Come nel moto alla Rayleigh, la curva tratteggiata che rappresenta l'andamento di p^*/p_o decresce leggermente all'aumentare di L .



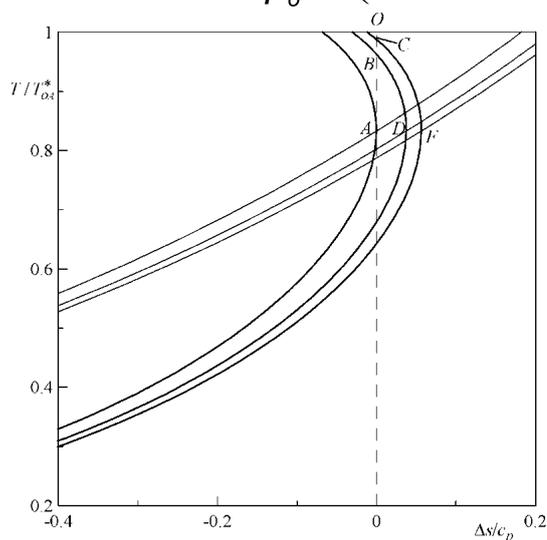
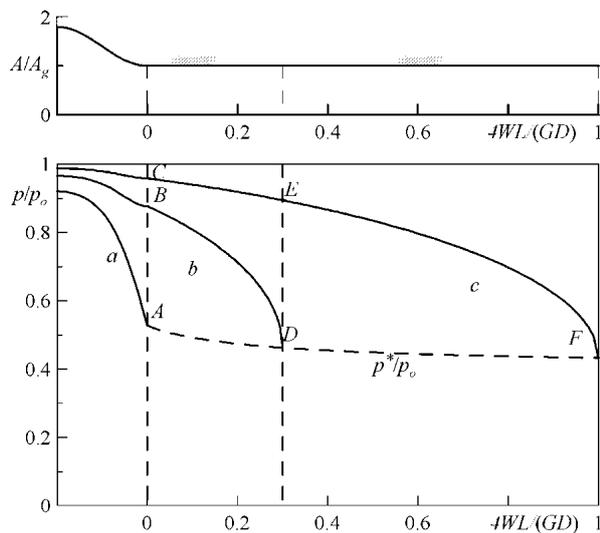
Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

In particolare la funzione p^*/p_o è esattamente uguale a quella che si ha per il moto alla Rayleigh (M è il numero di Mach all'uscita dell'ugello):

$$\frac{p^*}{p_o} = \frac{p^*}{p_o} \frac{p_o}{p_o} = \frac{p^*}{p} \frac{p}{p_o} = \frac{(1 + \gamma M^2)}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p^*}{p} = \frac{(1 + \gamma M^2)}{\gamma + 1}$$

$$\frac{p}{p_o} = \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

Moto con adduzione di massa e Rayleigh:

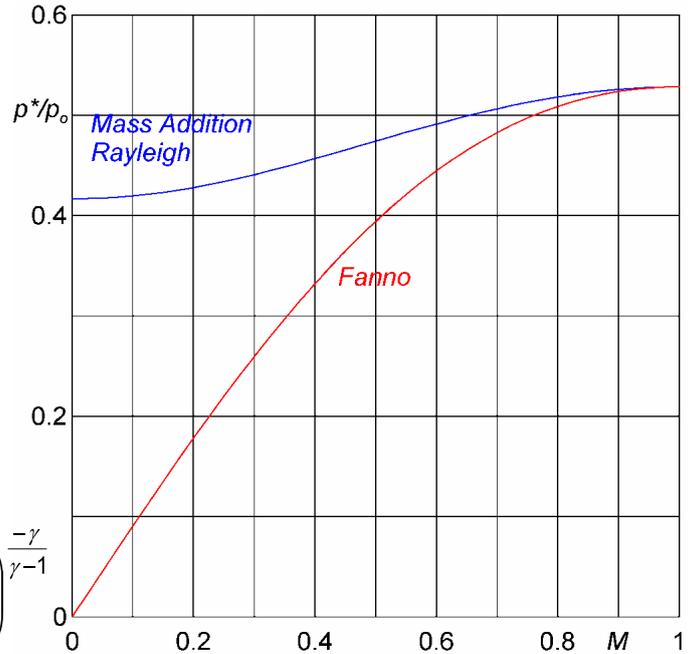
$$\frac{p^*}{p_0} = \frac{(1 + \gamma M^2)}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{p^*}{p_0} = \frac{1}{\gamma + 1} (= 0.4167)$$

Moto alla Fanno:

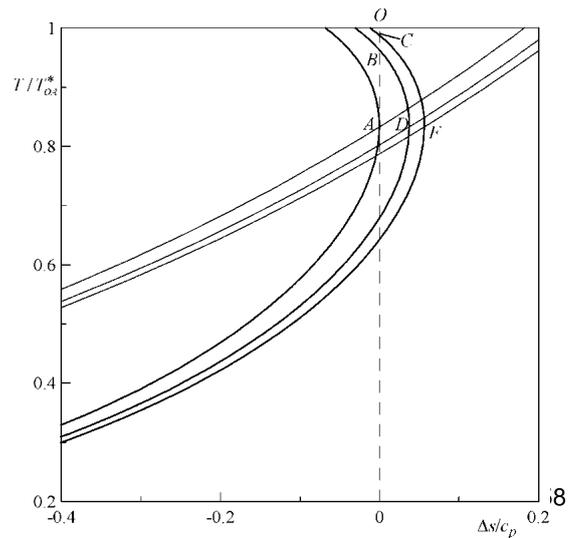
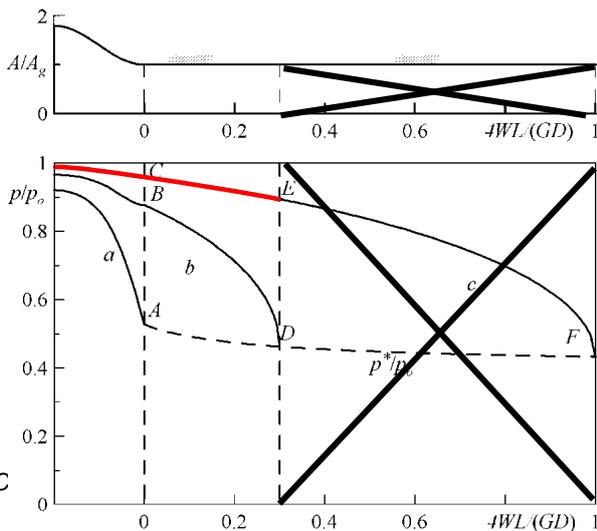
$$\frac{p^*}{p_0} = M \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\lim_{M \rightarrow 0} \frac{p^*}{p_0} = 0$$



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

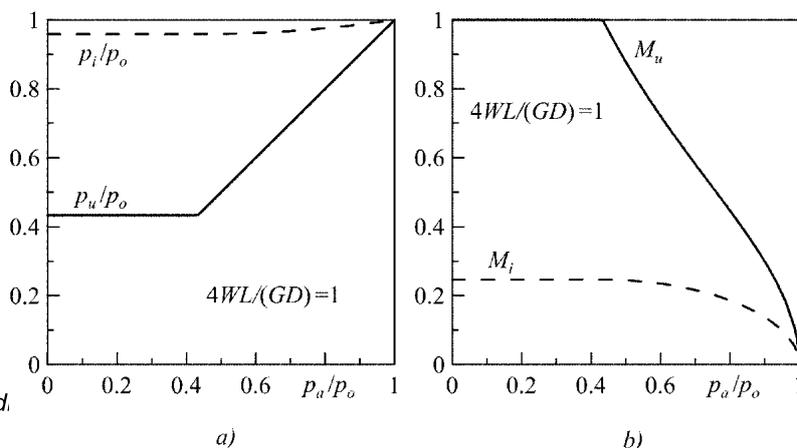
Se per le condizioni di uscita dall'ugello relative ai punti C ed F si somministra la stessa quantità di massa necessaria per evolvere da B a D, il punto E in uscita al condotto si troverebbe sulla stessa curva CF. Il funzionamento lungo il tratto BD, o lungo CE, è ovviamente stabilito dal valore della pressione allo scarico. Se la pressione ambiente è minore, o uguale alla p_D , il fluido segue sempre il tratto BD. Se, viceversa, la pressione allo scarico è più alta e in particolare pari a p_E , il fluido evolve lungo il tratto CE, rispettando la condizione di Kutta.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

La curva a tratto continuo della Fig. **a** rappresenta l'andamento del rapporto tra la pressione all'uscita del condotto p_u e la pressione di ristagno nel serbatoio p_0 , in funzione del rapporto tra la pressione ambiente p_a e p_0 .

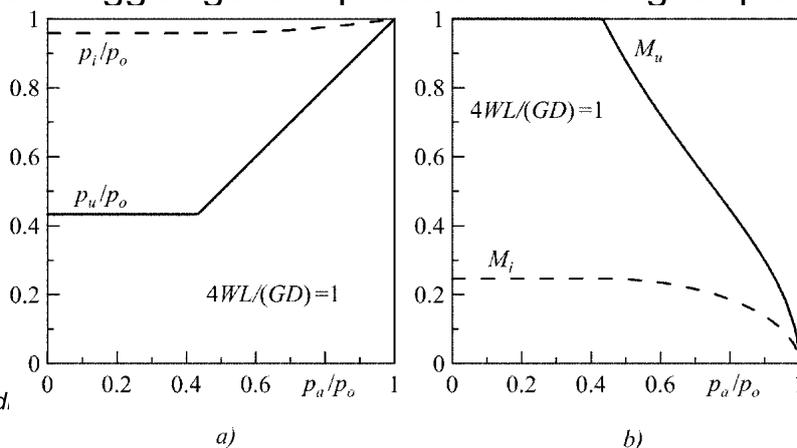
Quando la pressione ambiente è uguale alla pressione di ristagno, il rapporto p_u/p_0 è unitario. Una diminuzione della pressione ambiente fa abbassare linearmente $p_u/p_0 = p_a/p_0$, poiché si deve rispettare la condizione di Kutta.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

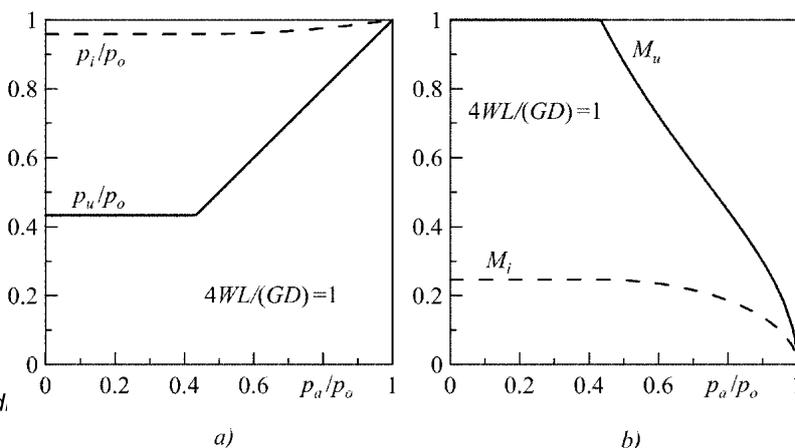
Questo fatto si verifica fino al raggiungimento delle condizioni critiche (soniche) all'uscita del condotto. Ulteriori abbassamenti della p_a provocano lo strozzamento del sistema e la pressione all'uscita del condotto resta costante.

Comportamento simile ha il rapporto fra la pressione all'ingresso del condotto p_i e la pressione di ristagno nel serbatoio p_0 (curva tratteggiata). Per pressioni ambiente inferiori alla pressione critica il moto è strozzato e p_i/p_0 rimane costante, mentre, all'aumentare della p_a al di sopra della pressione critica, la pressione p_i cresce con legge non lineare fino a raggiungere la pressione di ristagno quando $p_a/p_0=1$.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

In Fig. *b*, nelle medesime condizioni, si vedono i due numeri di Mach, all'ingresso M_i (curva tratteggiata) e all'uscita M_u (curva continua) del condotto, in funzione di p_a/p_0 . Entrambi sono costanti per p_a minore, o uguale, alla pressione critica ($p_a/p_0 \leq 0.435$), in particolare $M_u = 1$ e $M_i \approx 0.25$, e decrescono, fino ad annullarsi, per pressione ambiente tendente a quella di ristagno.

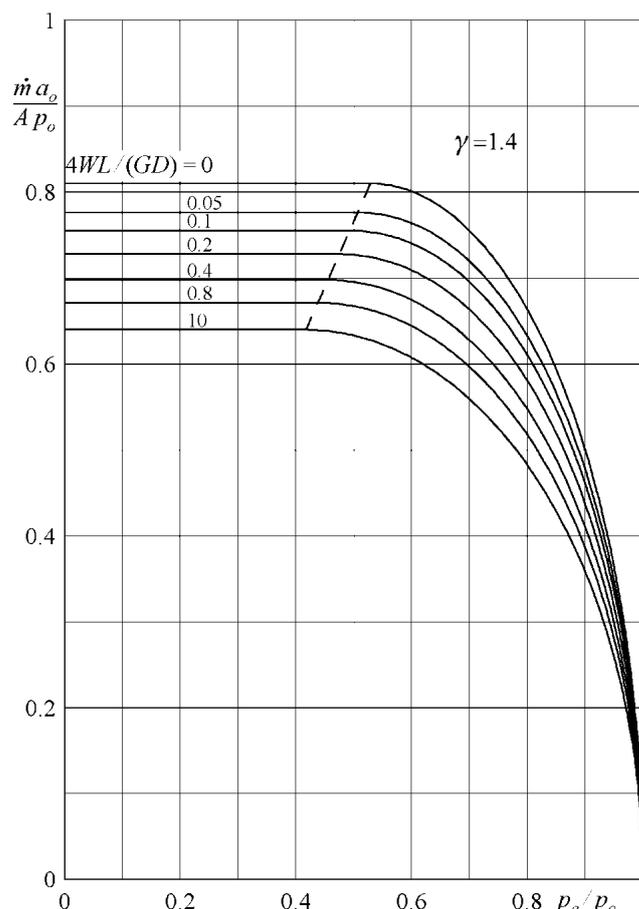


Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

I diagrammi a lato mostrano l'andamento della **portata di massa adimensionale**, attraverso condotti in cui si ha moto con adduzione di massa collegati ad un serbatoio mediante un ugello convergente, in funzione della pressione ambiente, per diversi valori del parametro adimensionale $4WL/(GD)$.

Sull'asse delle ordinate è in pratica riportato **il fattore di efflusso Ψ** già definito per gli ugelli.

All'aumentare di $4WL/(GD)$, il moto strozza per pressioni ambiente via via leggermente più basse e questo giustifica la diminuzione della lunghezza del tratto orizzontale a portata costante



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

La **curva tratteggiata**, che divide ciascun diagramma nelle due parti, in cui la portata è costante ovvero decresce, rappresenta proprio **il luogo dei valori della pressione ambiente che danno luogo alla condizione critica all'uscita del condotto, cioè allo strozzamento del sistema.**

L'andamento di questa curva, come nel moto alla **Fanno**, è lineare infatti il rapporto p_a/p_o è proprio uguale a:

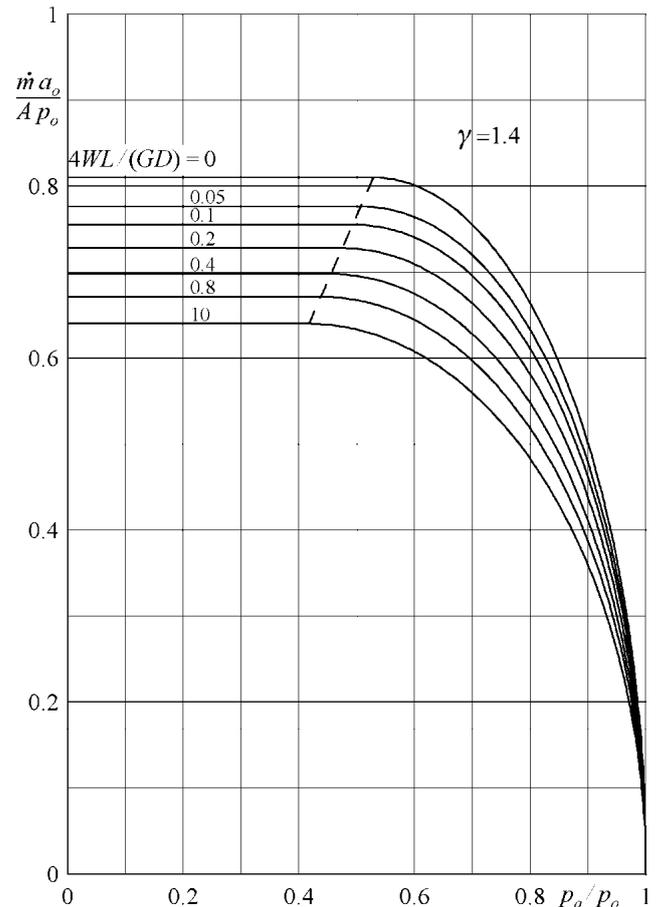
$$\frac{p_a}{p_o} = \frac{p^*}{p_o} = \frac{p^*}{p_o} \frac{p_o^*}{p_o^*}$$

Cioè:

$$\frac{p_o^*}{p_o} = \frac{p_a}{p_o} \frac{p_o^*}{p_o^*}$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

Poiché la temperatura di ristagno è costante la portata di massa adimensionale è proporzionale all'inverso del rapporto fra le pressioni di ristagno. Ma ricordando la relazione precedente si ha:

$$\frac{p_o^*}{p_o} = \frac{p_a}{p_o} \frac{p_o^*}{p_o^*}$$

$$\frac{\dot{m} a_o}{A p_o} = \frac{p_o^* A \psi^*}{a_o A p_o} \frac{a_o}{p_o} = \frac{p_o^*}{p_o} \psi^* = \frac{p_a}{p_o} \frac{p_o^*}{p_o^*} \psi^* = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \frac{p_a}{p_o}$$

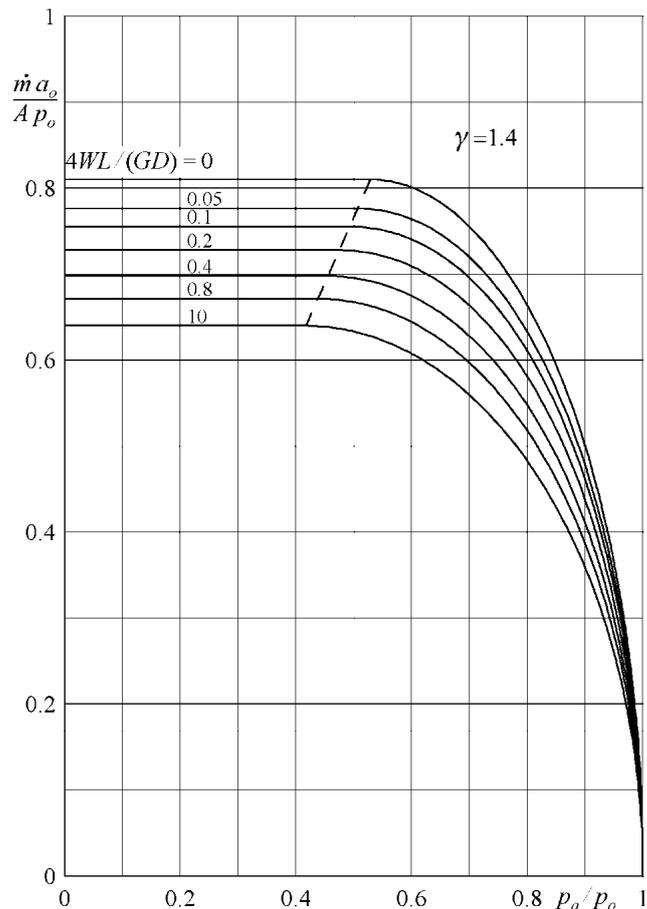
$$\frac{\dot{m} a_o}{A p_o} = \gamma \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{p_a}{p_o} \left(= 1.534 \frac{p_a}{p_o} \right)$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

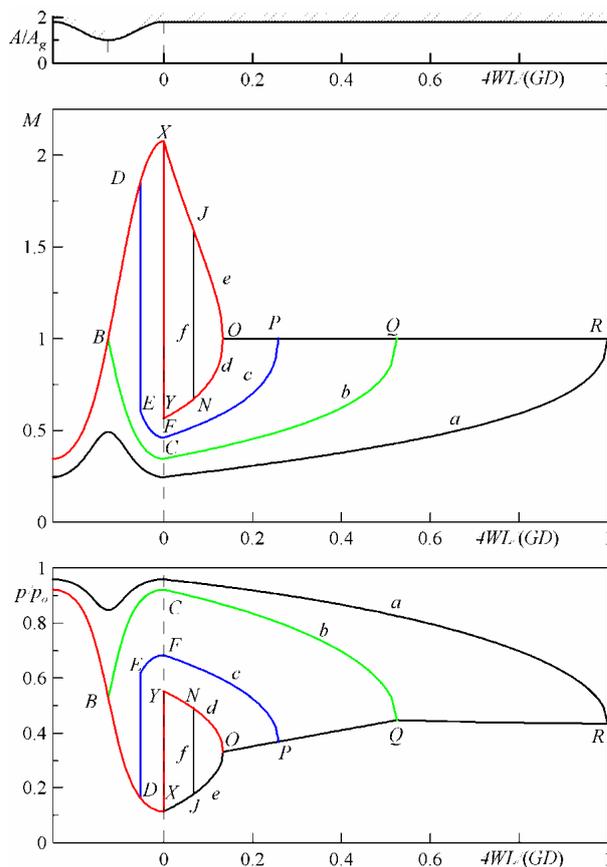
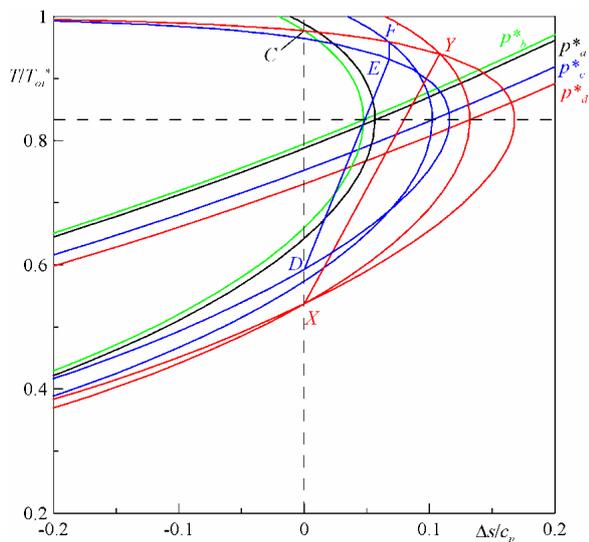
Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente

Il valore della portata massima diminuisce all'aumentare della quantità di massa aggiunta. Evidentemente questo effetto è associato alla diminuzione della pressione di ristagno critica. Come si vede dalla figura però la diminuzione è abbastanza piccola.



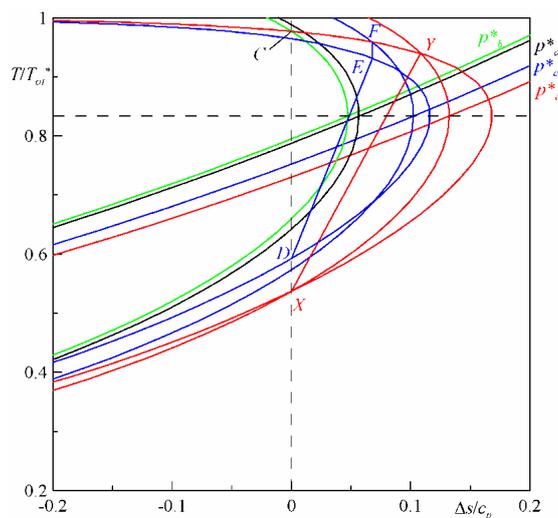
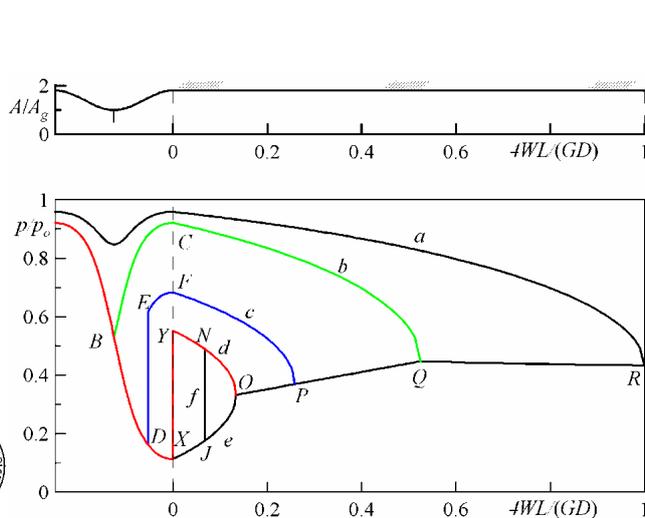
Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

Il comportamento di un condotto, collegato ad un ugello convergente divergente, nel quale si ha una adduzione di massa, è molto simile a quello già descritto nel caso di moto alla Fanno e Rayleigh.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

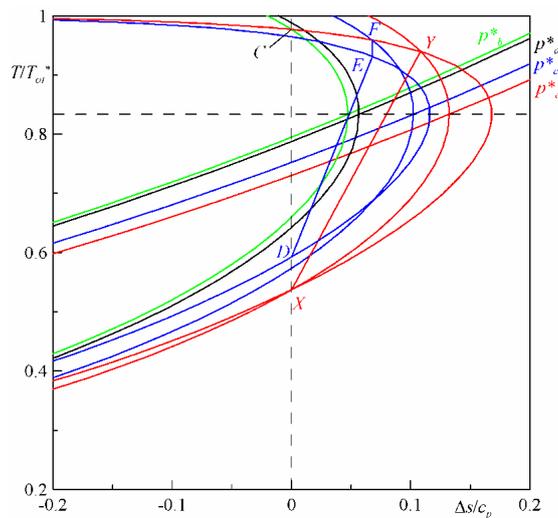
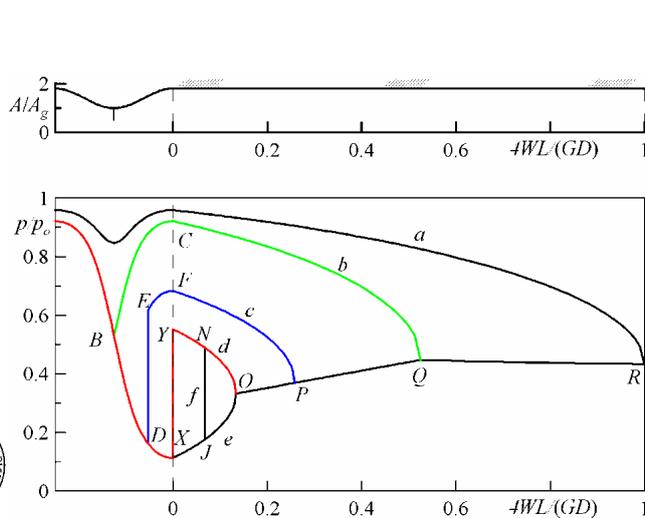
Ad ogni punto di funzionamento all'uscita dell'ugello strozzato, corrisponde in generale una diversa curva e, in particolare, al diminuire della pressione di uscita dal rapporto r_1 al rapporto r_2 (dal punto C al punto Y) l'impulso specifico diminuisce e le curve sono sempre più esterne (si spostano verso destra) di conseguenza **la pressione critica diminuisce**. Come nel caso di moto alla Fanno, quando il regime di moto nell'ugello è alla Venturi (curve **a**), il funzionamento è analogo a quello descritto in precedenza per l'ugello semplicemente convergente.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

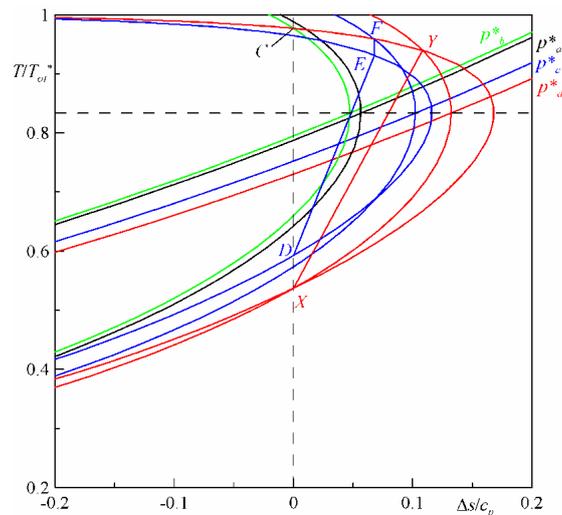
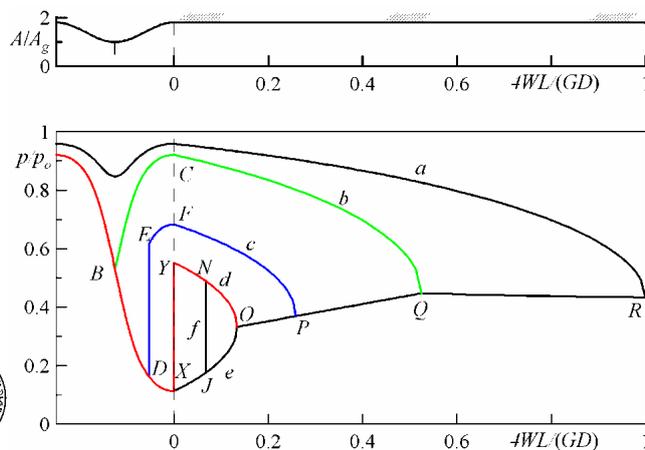
Occorre ricordare che, al diminuire della lunghezza del condotto la **pressione critica** tende debolmente ad **umentare**. Questo comportamento si ha fino a che la lunghezza del condotto non risulta esattamente uguale a quella per la quale si hanno le condizioni critiche anche nella sezione di gola dell'ugello (punto Q).

Per successive diminuzioni c'è una progressiva diminuzione della pressione critica.



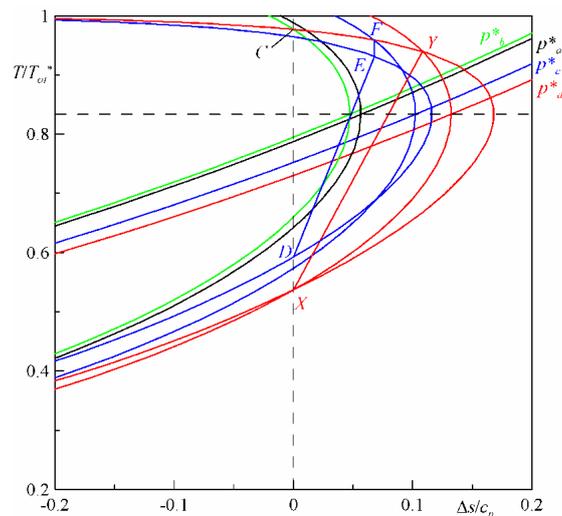
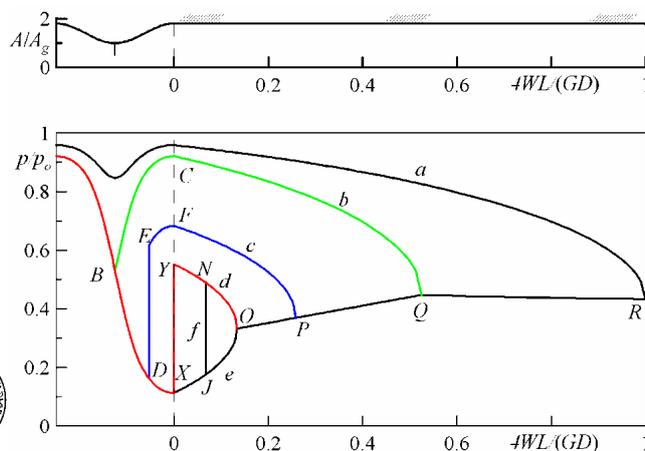
Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

Quando, però, la lunghezza del condotto è **esattamente** uguale a quella corrispondente al punto O, è chiaro che il regime di funzionamento caratteristico del sistema risulta indeterminato perché al punto O si può pervenire sia seguendo la curva **d** (XYNO), che seguendo la curva **e** (XJO). Inoltre, anche una qualunque curva del tipo **f** (XJNO) continua ad essere soluzione del problema.



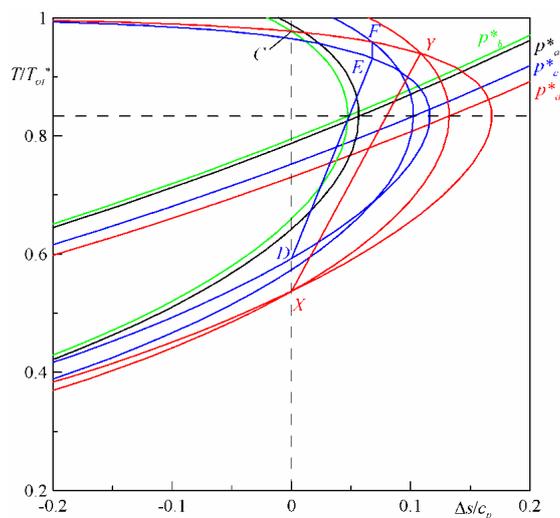
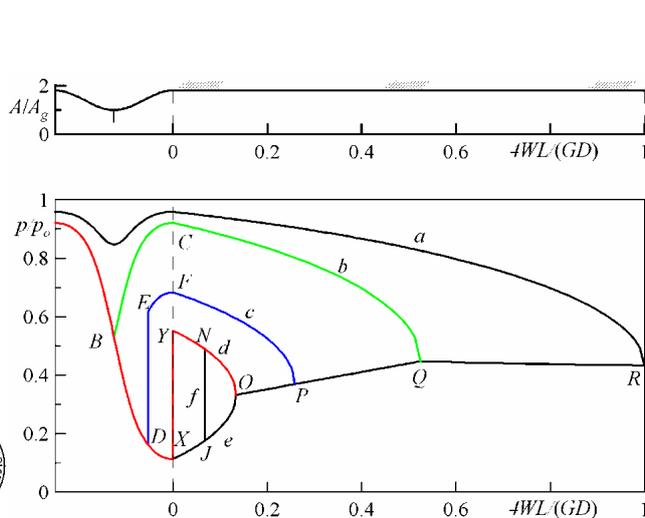
Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

Si può facilmente dimostrare che la quantità di massa critica da aggiungere per il caso corrispondente al rapporto di pressione r_3 è uguale a quella che si ha con il funzionamento con onda d'urto all'uscita dell'ugello (rapporto r_2), o in qualsiasi sezione del condotto. Se, in particolare, si suppone che **l'onda d'urto si trovi all'uscita dell'ugello**, il flusso di massa rimane invariato nel passare dalle condizioni a monte a quelle a valle dell'onda, quindi **la massima quantità di massa scambiabile seguendo la curva d, o quella seguendo la curva e, risulta la stessa.**



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

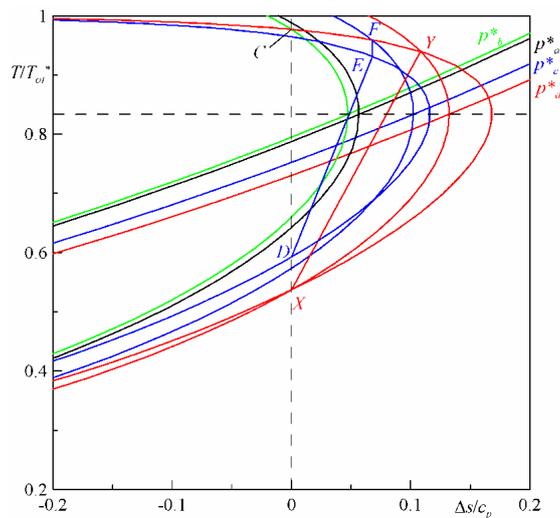
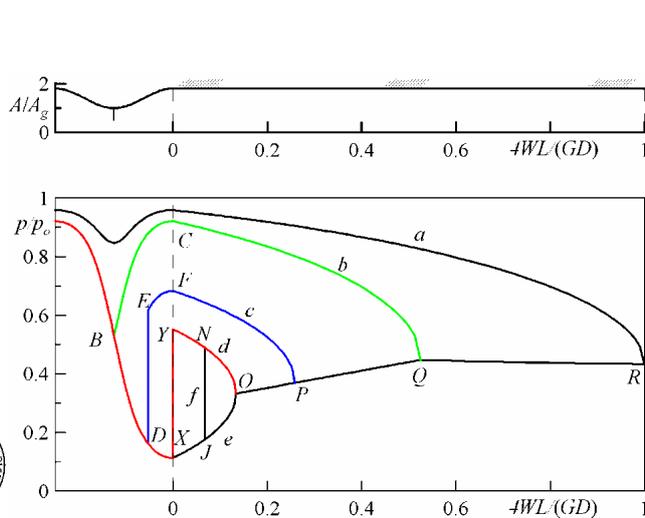
Lo stesso ragionamento è valido anche per un'onda d'urto **ovunque posizionata all'interno del condotto**. Quindi, se il punto all'uscita del condotto, definito dalla quantità di massa fornita al flusso principale e dalla pressione ambiente, coincide con il punto O , **un'onda d'urto nel condotto con adduzione di massa è metastabile**.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

Bisogna esplicitamente notare che **solo in queste condizioni può essere presente un'onda d'urto nel condotto**.

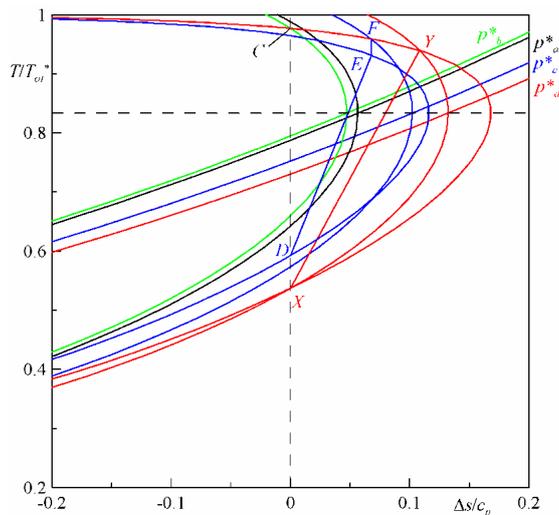
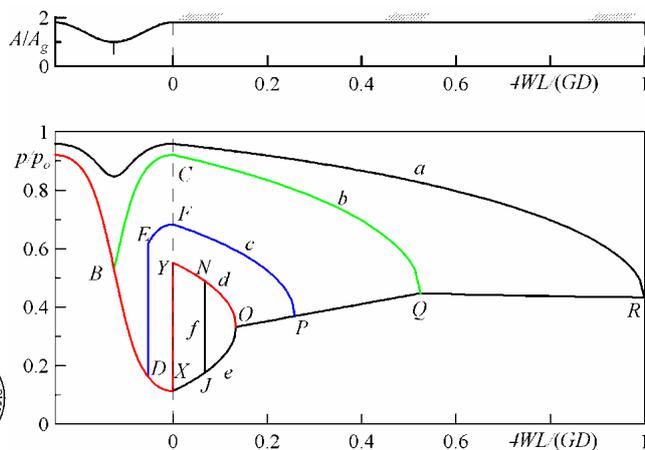
Infatti, se la pressione ambiente (rispettivamente, la quantità di massa scambiata) fosse leggermente maggiore, a parità di quantità di massa scambiata (rispettivamente, di pressione ambiente), l'onda si troverebbe nella parte divergente dell'ugello. Ovviamente per pressione ambiente inferiore, le condizioni all'uscita resterebbero bloccate a quelle del punto O per cui l'incertezza del funzionamento rimarrebbe.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

Per quantità flussi di massa inferiori a quella corrispondente al punto O, ad es. quella relativa ai punti J, o N, il comportamento del sistema risulta più articolato.

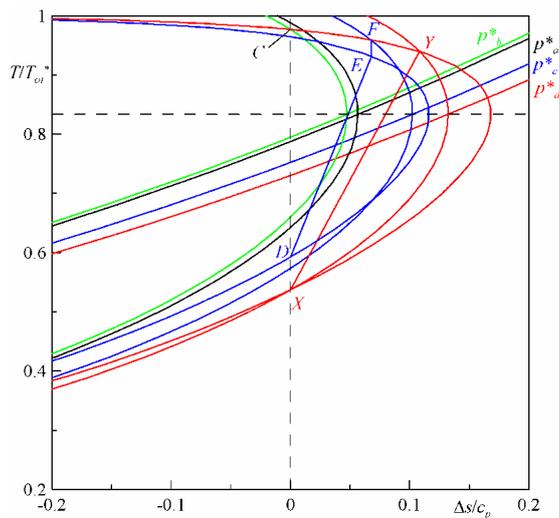
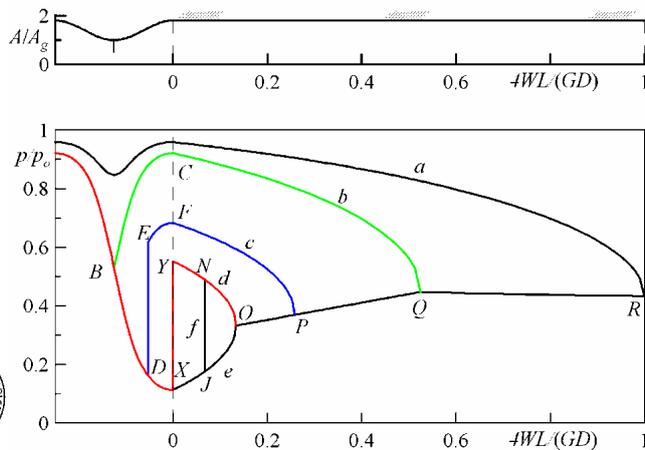
Per valori della pressione ambiente inferiori a quello del punto J, il condotto scarica nelle condizioni relative al punto J e si ha un ventaglio di espansione nella sezione di uscita.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

Per valori della p_a compresi tra quelli dei punti J e N, si ha un'onda d'urto obliqua all'uscita del condotto ed in particolare un'onda di Mach per il punto J che, man mano che la pressione p_a sale, diventa sempre più normale alla corrente.

Per $p_a = p_N$, sono possibili non solo le evoluzioni del fluido lungo le curve $BXYN$ e $BXJN$, ma anche quelli che prevedono un'onda d'urto normale ovunque posizionata nel condotto tra X e J.



Condotto con adduzione di massa collegato ad un ugello convergente divergente

Man mano che la pressione ambiente sale a partire dal valore p_N , l'onda d'urto risale il divergente dell'ugello sino a diventare un'onda di Mach posizionata in gola.

Per pressioni ambiente ancora maggiori l'ugello segue un comportamento alla Venturi.

