

Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it



Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 2 del 27/9/2016

Moti quasi-unidimensionali e quasi stazionari generalizzati

Sono stati già analizzati vari tipi di moti quasi-unidimensionali e quasi stazionari:

- Moto isentropico con variazione d'area
- Moto con attrito
- Moto con adduzione di energia nel modo calore
- Moto con adduzione di massa

In molti problemi pratici alcuni, o tutti questi effetti, sono presenti simultaneamente:

- Ugelli di endoreattori
- Camere di combustione
- Iniettori ed eiettori
- Scambiatori di calore



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Moti quasi-unidimensionali e quasi stazionari generalizzati

Le fenomenologie considerate sono:

- Variazione d'area
- Attrito alla parete
- Resistenza di corpi all'interno del condotto
- Scambio di energia nel modo calore e/o lavoro
- Adduzione di massa

Le ipotesi sono:

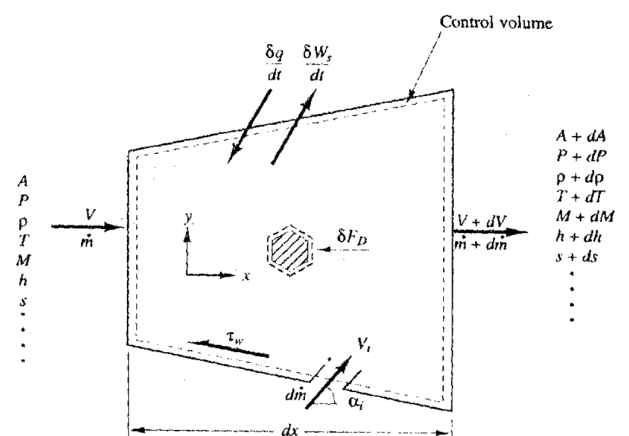
- Il moto è quasi-unidimensionale e quasi-stazionario;
- Le variazioni lungo il condotto sono continue;
- Gas più che perfetto



Equazione di stato

$$p = \rho RT$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

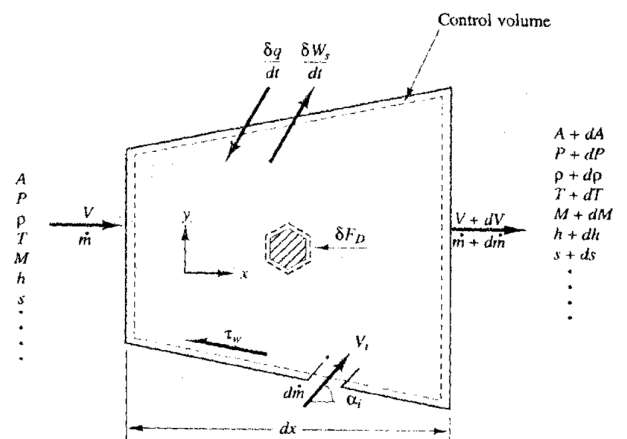


Numero di Mach

$$M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}}$$

$$M^2 = \frac{V^2}{\gamma RT}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T}$$

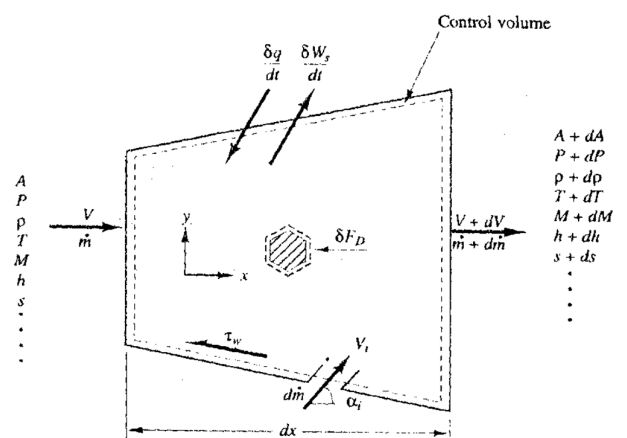


Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Conservazione della Massa

$$\dot{m} = \rho VA$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A}$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Bilancio della quantità di moto

Dalla figura si ha:

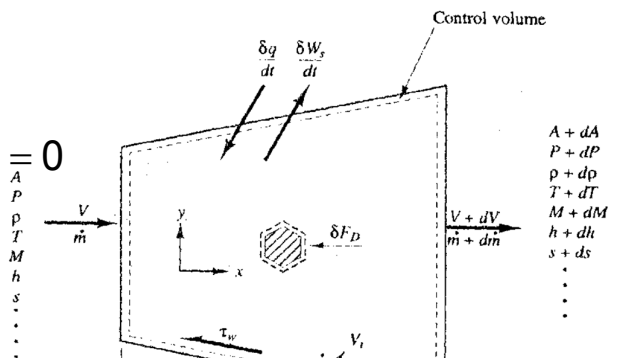
$$pA + \left(p + \frac{dp}{2} \right) dA + \dot{m}V + d\dot{m}V_{ix} = (\dot{m} + d\dot{m})(V + dV) + (p + dp)(A + dA) + \tau_w dA_w + dF_D$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$d\dot{m}V_{ix} = \dot{m}dV + d\dot{m}V + dpA + \tau_w dA_w + dF_D$$

Dividendo per pA :

$$\frac{\dot{m}dV}{pA} + \frac{d\dot{m}V}{pA} + \frac{dp}{p} + \frac{\tau_w dA_w}{pA} + \frac{dF_D}{pA} - \frac{d\dot{m}V_{ix}}{pA} = 0$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

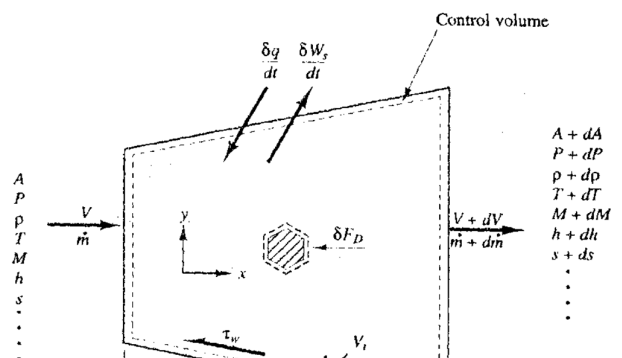
Bilancio della quantità di moto

$$\frac{\dot{m}dV}{pA} + \frac{d\dot{m}V}{pA} + \frac{dp}{p} + \frac{\tau_w dA_w}{pA} + \frac{dF_D}{pA} - \frac{d\dot{m}V_{ix}}{pA} = 0$$

Come già visto il termine dovuto all'attrito può essere riscritto come:

$$\frac{\tau_w dA_w}{pA} = \frac{f \frac{1}{2} \rho V^2 P_w dx}{pA} = \frac{\gamma M^2}{2} 4f \frac{dx}{D}$$

Dove evidentemente D è il diametro idraulico



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Bilancio della quantità di moto

Gli altri termini diventano:

$$\frac{\dot{m}dV}{\rho A} = \frac{\rho V^2 A}{\rho A} \frac{dV}{V} = \gamma M^2 \frac{dV}{V}$$

$$\frac{d\dot{m}V}{\rho A} = \frac{d\dot{m}}{\rho VA} \frac{\rho V^2}{p} = \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

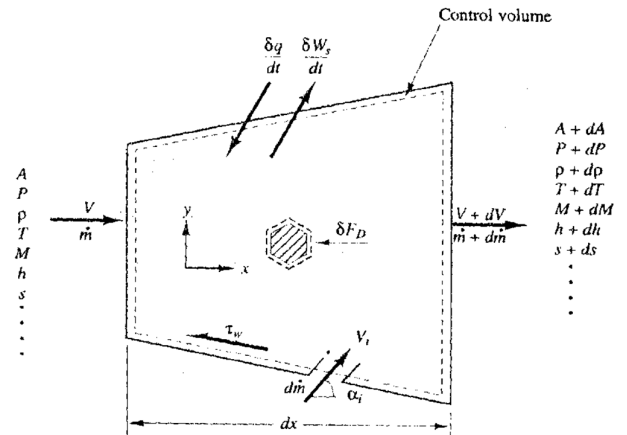
$$\frac{d\dot{m}V_{ix}}{\rho A} = \frac{d\dot{m}}{\rho VA} \frac{\rho V^2 y}{p} = \gamma M^2 y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Dove:

$$y = \frac{V_{ix}}{V}$$

Quindi:

$$\gamma M^2 \frac{dV}{V} + \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{2} 4f \frac{dx}{D} + \frac{dF_D}{\rho A} - \gamma M^2 y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0$$

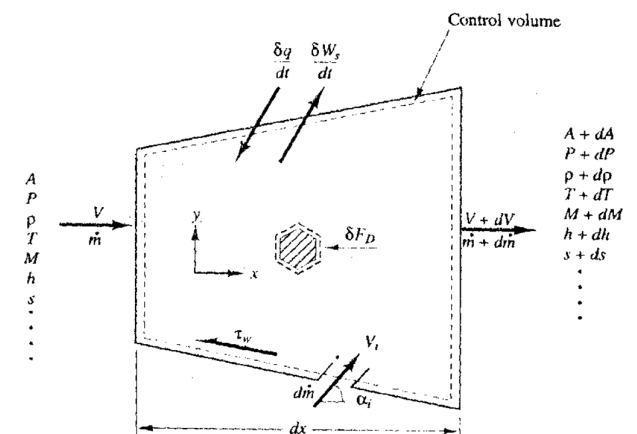


Bilancio della quantità di moto

$$\gamma M^2 \frac{dV}{V} + \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{2} 4f \frac{dx}{D} + \frac{dF_D}{\rho A} - \gamma M^2 y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0$$

Riordinando:

$$\frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{dV}{V} + \frac{\gamma M^2}{2} \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 \rho A} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0$$



Conservazione dell'energia

$$\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) + d\dot{m}\left(h_i + \frac{V_i^2}{2}\right) + dQ = (\dot{m} + d\dot{m})\left(h + dh + \frac{V^2}{2} + d\frac{V^2}{2}\right) + dW$$

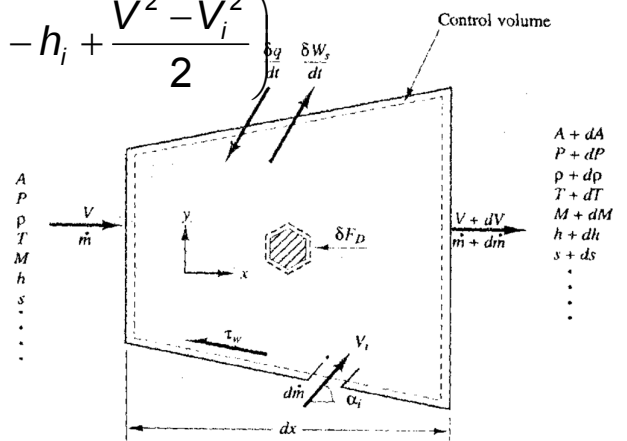
Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$d\dot{m}\left(h_i + \frac{V_i^2}{2}\right) + dQ = \dot{m}\left(dh + d\frac{V^2}{2}\right) + d\dot{m}\left(h + \frac{V^2}{2}\right) + dW$$

Dividendo per la portata e raggruppando:

$$\left(dh + d\frac{V^2}{2}\right) = dH = c_p dT_o = dq - dw - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}\left(h - h_i + \frac{V^2 - V_i^2}{2}\right)$$

$$\frac{dT_o}{T_o} = \frac{dq - dw - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}\left(h - h_i + \frac{V^2 - V_i^2}{2}\right)}{c_p T_o}$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Conservazione dell'energia

$$\frac{dT_o}{T_o} = \frac{dq - dw - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}\left(h - h_i + \frac{V^2 - V_i^2}{2}\right)}{c_p T_o}$$

Gli effetti combinati del flusso d'energia nel modo calore e lavoro e della variazione d'entalpia totale associata con l'eventuale adduzione di massa sono equivalenti ad una variazione di entalpia totale. Che nel caso specifico è stata espressa in termini di variazione di temperatura di ristagno. Evidentemente anche le eventuali reazioni chimiche e/o passaggi di fase possono essere inglobati in questo unico termine.



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

Conservazione dell'energia

Dalla relazione:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Differenziando logaritmicamente si ha:

$$\frac{dT_o}{T_o} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$



Impulso

L'impulso I_t è definito come:

$$I_t = IA = pA + \dot{m}V = pA(1 + \gamma M^2)$$

Dove I è l'impulso specifico. Differenziando logaritmicamente si ha

$$\frac{dI_t}{I_t} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dI}{I} + \frac{dA}{A}$$



Pressione di ristagno

Dalla relazione:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Differenziando logaritmicamente si ha:

$$\frac{dp_o}{p_o} = \frac{dp}{p} + \frac{\frac{\gamma}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$



Bilancio d'entropia

Dalla relazione di Gibbs:

$$dh = c_p dT = T ds + v dp$$

Si ha:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p}$$



Riepilogo delle equazioni

Le equazioni trovate sono otto:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dl_t}{l_t} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T}$$

$$\frac{dp_o}{p_o} = \frac{dp}{p} + \frac{\frac{\gamma}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A}$$

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{dV}{V} + \frac{\gamma M^2}{2} \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0$$

$$\frac{dT_o}{T_o} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

17

Riepilogo delle equazioni

Le variabili presenti sono 12:

$$\frac{dp}{p}, \frac{d\rho}{\rho}, \frac{dT}{T}, \frac{ds}{c_p}$$

$$\frac{dM^2}{M^2}, \frac{dV}{V}, \frac{dl_t}{l_t}, \frac{dp_o}{p_o}$$

$$\frac{dT_o}{T_o}, \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}, \frac{dA}{A}$$

$$dN = \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

18

Riepilogo delle equazioni

È necessario assegnarne quattro. Una scelta ragionevole è:

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$\frac{dA}{A}$$

$$\left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2\gamma \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

$$\frac{dT_o}{T_o} = \frac{dq - dw - \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \left(h - h_i + \frac{V^2 - V_i^2}{2} \right)}{c_p T_o}$$

Queste variabili sono le forze spingenti e devono essere considerate come funzioni note della variabile indipendente x .



Soluzione delle equazioni

Le prime tre equazioni possono essere messe nella forma:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}$$

$$(1) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

$$(2) \quad \frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T}$$

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A}$$

$$(3) \quad \frac{dV}{V} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A}$$



Soluzione delle equazioni

Le seguenti due equazioni possono essere messe nella forma:

$$\frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{dV}{V} + \frac{\gamma M^2}{2} \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0$$

Con:

$$dN = \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

$$(4) \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V} - \frac{\gamma M^2}{2} dN - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(5) \quad \frac{dT}{T} = \frac{dT_o}{T_o} - \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$



Soluzione delle equazioni

La (4) sostituita nella (1) da:

$$(4) \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V} - \frac{\gamma M^2}{2} dN - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(6) \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V} - \frac{\gamma M^2}{2} dN - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{dT}{T}$$

$$(1) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}$$

Sostituendo la (6) nella (3)

$$(3) \quad \frac{dV}{V} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A}$$

$$(7) \quad \frac{dV}{V} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \gamma M^2 \frac{dV}{V} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \frac{dT}{T} - \frac{dA}{A}$$

$$(8) \quad (1 - \gamma M^2) \frac{dV}{V} = (1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \frac{dT}{T} - \frac{dA}{A}$$



Soluzione delle equazioni

$$(2) \quad \frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T} \quad (8) \quad (1 - \gamma M^2) \frac{dV}{V} = (1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \frac{dT}{T} - \frac{dA}{A}$$

La (8) sostituita nella (2) da:

$$(9) \quad \frac{dM^2}{M^2} = \frac{2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \gamma M^2 dN + 2 \frac{dT}{T} - 2 \frac{dA}{A}}{1 - \gamma M^2} - \frac{dT}{T}$$

Raggruppando:

$$(10) \quad (1 - \gamma M^2) \frac{dM^2}{M^2} = 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \gamma M^2 dN - 2 \frac{dA}{A} + (1 + \gamma M^2) \frac{dT}{T}$$



Soluzione delle equazioni

$$(10) \quad (1 - \gamma M^2) \frac{dM^2}{M^2} = 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \gamma M^2 dN - 2 \frac{dA}{A} + (1 + \gamma M^2) \frac{dT}{T}$$

Sostituendo la (5) nella (10):

$$(11) \quad \left((1 - \gamma M^2) + \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} (1 + \gamma M^2) \right) \frac{dM^2}{M^2} = (5) \quad \frac{dT}{T} = \frac{dT_o}{T_o} - \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$

$$2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \gamma M^2 dN - 2 \frac{dA}{A} + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o}$$

$$\left((1 - \gamma M^2) + \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} (1 + \gamma M^2) \right) =$$

$$\frac{1 - \gamma M^2 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 - \gamma M^2 \frac{\gamma-1}{2} M^2 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \gamma M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = \frac{1 - M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$$



Soluzione delle equazioni

$$(11) \left((1 - \gamma M^2) + \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} (1 + \gamma M^2) \right) \frac{dM^2}{M^2} =$$

$$2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} + \gamma M^2 dN - 2 \frac{dA}{A} + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o}$$

La (11) diventa:

$$\left((1 - \gamma M^2) + \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} (1 + \gamma M^2) \right) = \frac{1 - M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$$

$$(12) \frac{1 - M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Soluzione delle equazioni

$$(2) \frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T} \quad (5) \frac{dT}{T} = \frac{dT_o}{T_o} - \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$

Sostituendo la (5) nella (2) :

$$(13) 2 \frac{dV}{V} = \frac{dM^2}{M^2} + \frac{dT_o}{T_o} - \frac{\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} = \frac{dT_o}{T_o} + \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$

Dalla (12):

$$(12) \frac{1 - M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Si ha:

$$(14) 2 \frac{dV}{V} = \frac{dT_o}{T_o} + \frac{-2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$



Soluzione delle equazioni

$$(14) \quad 2 \frac{dV}{V} = \frac{dT_o}{T_o} + \frac{-2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$

La (14) diventa:

$$(15) \quad \frac{dV}{V} = \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2\right) \frac{dT_o}{T_o} + (1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$



Soluzione delle equazioni

$$(5) \quad \frac{dT}{T} = \frac{dT_o}{T_o} - \frac{\frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$

$$(12) \quad \frac{1 - M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Sostituendo la (12) nella (5):

$$(16) \quad \frac{dT}{T} = \frac{dT_o}{T_o} - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{-2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$

$$(17) \quad \frac{dT}{T} = \frac{(\gamma - 1)}{1 - M^2} \left(M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma}{2} M^4 dN - (1 + \gamma M^2) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + \frac{\left(1 - M^2 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 (1 + \gamma M^2) \right) \frac{dT_o}{T_o}}{1 - M^2}$$



Soluzione delle equazioni

$$(17) \quad \frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)}{1-M^2} \left(M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma}{2} M^4 dN - (1+\gamma M^2) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) +$$

$$\frac{\left(1-M^2 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 (1+\gamma M^2) \right) \frac{dT_o}{T_o}}{1-M^2}$$

$$1-M^2 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 (1+\gamma M^2) = 1-M^2 \left(\frac{2+\gamma-1}{2} \right) - \frac{\gamma-1}{2} \gamma M^4 =$$

$$= 1-M^2 \frac{2\gamma-(\gamma-1)}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \gamma M^4 = 1-\gamma M^2 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 - \frac{\gamma-1}{2} \gamma M^4 =$$

$$= 1-\gamma M^2 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 (1-\gamma M^2) = (1-\gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

$$(18) \quad \frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)}{1-M^2} \left(M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma}{2} M^4 dN - (1+\gamma M^2) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

$$+ \frac{\left(1-\gamma M^2 \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o}}{1-M^2}$$



Soluzione delle equazioni

$$(4) \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V} - \frac{\gamma M^2}{2} dN - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(15) \quad \frac{dV}{V} = \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o} + (1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1-M^2}$$

Sostituendo la (15) nella (4):

$$(19) \quad \frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o} + (1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1-M^2}$$

$$- \frac{\gamma M^2}{2} dN - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(20) \quad \frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1+(\gamma-1)M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1-M^2}$$



Soluzione delle equazioni

$$(3) \quad \frac{dV}{V} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dA}{A}$$

$$(15) \quad \frac{dV}{V} = \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right) \frac{dT_o}{T_o} + (1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$

Sostituendo la (15) nella (3):

$$(21) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} - \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right) \frac{dT_o}{T_o} + (1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2} - \frac{dA}{A}$$

$$(22) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} dN - \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right) \frac{dT_o}{T_o} - M^2(1 + \gamma) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$



Soluzione delle equazioni

$$(12) \quad \frac{1 - M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(20) \quad \frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma-1) M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}\right)}{1 - M^2}$$

Dalla seguente equazione e dalle (12) e (20) si ha:

$$\frac{dl_t}{l_t} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2}$$

$$(23) \quad \frac{dl_t}{l_t} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma-1) M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}\right)}{1 - M^2}$$

$$+ \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2} \left(-2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$



Soluzione delle equazioni

$$(23) \quad \frac{dl_t}{l_t} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma - 1) M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1 - M^2} + \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 - M^2} \left(-2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

Dalla (23) si ha:

$$(24) \quad 1 - M^2 \frac{dl_t}{l_t} = \left(\gamma M^2 + 1 - M^2 - 2 \frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} \left(1 + (\gamma - 1) M^2 - \frac{2 \gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right) dN$$



Soluzione delle equazioni

$$(24) \quad 1 - M^2 \frac{dl_t}{l_t} = \left(\gamma M^2 + 1 - M^2 - 2 \frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} \left(1 + (\gamma - 1) M^2 - \frac{2 \gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right) dN =$$

$$= \left(\gamma M^2 + 1 - M^2 - 2 \frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{1 + \gamma M^2} \right) \left(\frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} dN \right)$$

$$\gamma M^2 + 1 - M^2 - 2 \frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{1 + \gamma M^2} =$$

$$\frac{1 + (\gamma - 1) M^2 + \gamma M^2 + \gamma (\gamma - 1) M^4 - 2 \gamma M^2 - \gamma (\gamma - 1) M^4}{1 + \gamma M^2} = \frac{1 - M^2}{1 + \gamma M^2}$$



Soluzione delle equazioni

La (24) diventa:

$$(25) \quad \frac{dl_t}{l_t} = \frac{1}{1+\gamma M^2} \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2(1+\gamma M^2)} dN$$



Soluzione delle equazioni

$$(12) \quad \frac{1-M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1+\gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(20) \quad \frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1+(\gamma-1)M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1-M^2}$$

Dalla seguente equazione e dalle (12) e (20) si ha:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{dp_o}{p_o} &= \frac{dp}{p} + \frac{\frac{\gamma}{2} M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \\ &= \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1+(\gamma-1)M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1-M^2} \\ &\quad + \frac{\frac{\gamma}{2} M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{1+\frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2} \left(-2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1+\gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) \end{aligned}$$



Soluzione delle equazioni

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \frac{dp_o}{p_o} &= \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma - 1) M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1 - M^2} \\
 &+ \frac{\frac{\gamma}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 - M^2} \left(-2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) \\
 \frac{dp_o}{p_o} &= \frac{-\frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma - 1) M^2 - \gamma M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 - \frac{1}{2} - \frac{\gamma M^2}{2} \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1 - M^2}
 \end{aligned}$$



Soluzione delle equazioni

Da cui:

$$(27) \quad \frac{dp_o}{p_o} = -\frac{\gamma M^2}{2} dN - \frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT_o}{T_o} - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Soluzione delle equazioni

Dalla seguente equazione e dalle (18) e (20) si ha:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

$$(28) \quad \frac{ds}{c_p} = \frac{(\gamma - 1)}{1 - M^2} \left(M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma}{2} M^4 dN - (1 + \gamma M^2) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + \frac{(1 - \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{1 - M^2} \frac{dT_o}{T_o} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma}{2} (1 + (\gamma - 1) M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1 - M^2}$$



Soluzione delle equazioni

Da cui:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{(\gamma - 1)}{1 - M^2} \left(\left(-\frac{\gamma}{2} M^4 + \frac{M^2}{2} (1 + (\gamma - 1) M^2) \right) dN - (1 + \gamma M^2 - (2 + (\gamma - 1) M^2)) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) + \frac{(1 - \gamma M^2 + (\gamma - 1) M^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{1 - M^2} \frac{dT_o}{T_o}$$

$$(29) \quad \frac{ds}{c_p} = (\gamma - 1) \frac{M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o} + (\gamma - 1) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Soluzione delle equazioni

$$dN = \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2\gamma \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

$$(12) \quad \frac{1-M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1+\gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(15) \quad \frac{dV}{V} = \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o} + (1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1-M^2}$$

$$(18) \quad \frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)}{1-M^2} \left(M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma}{2} M^4 dN - (1+\gamma M^2) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) +$$

$$+ \frac{(1-\gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) dT_o}{1-M^2 T_o}$$



Soluzione delle equazioni

$$(20) \quad \frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1+(\gamma-1)M^2) dN - \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \left(\frac{dT_o}{T_o} + 2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)}{1-M^2}$$

$$(22) \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} dN - \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o} - M^2 (1+\gamma) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1-M^2}$$

$$(25) \quad \frac{dl_t}{l_t} = \frac{1}{1+\gamma M^2} \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2(1+\gamma M^2)} dN$$

$$(27) \quad \frac{dp_o}{p_o} = -\frac{\gamma M^2}{2} dN - \frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT_o}{T_o} - \gamma M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

$$(29) \quad \frac{ds}{c_p} = (\gamma-1) \frac{M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o} + (\gamma-1) M^2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$



Soluzione delle equazioni

In quasi tutte le equazioni compare il termine M^2-1 al denominatore quindi, per $M=1$ le equazioni sono indeterminate. Evidentemente in prossimità di queste condizioni le variazioni delle grandezze termofluidodinamiche possono diventare illimitate provocando uno strozzamento del flusso.

I coefficienti delle variabili indipendenti sono normalmente chiamati **coefficienti d'influenza** perché permettono di valutare l'influenza di ogni variabile indipendente su parametri dipendenti.



Coefficienti d'influenza

	$\frac{dA}{A}$	dN	$\frac{dT_o}{T_o}$	$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$-2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$	$\gamma M^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$	$(1 + \gamma M^2) \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$	$2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2} (1 + \gamma M^2)$
$\frac{dV}{V}$	$\frac{-1}{1-M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}$	$\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$	$\frac{1 + \gamma M^2}{1-M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2} \frac{(1 + (\gamma-1)M^2)}{1-M^2}$	$-\gamma M^2 \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{1-M^2}$	$-2\gamma M^2 \frac{(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{1-M^2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)}$	$\frac{(1 - \gamma M^2)(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma-1)(1 + \gamma M^2)M^2}{1-M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}$	$-\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma+1)M^2}{1-M^2}$
$\frac{dl_t}{l_t}$	$\frac{1}{1 + \gamma M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1 + \gamma M^2)}$	0	0
$\frac{dp_o}{p_o}$	0	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\gamma M^2$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$(\gamma-1) \frac{M^2}{2}$	$(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)$	$(\gamma-1)M^2$



$M < 1$ $M > 1$

Coefficienti d'influenza

	$\frac{dA}{A}$	$\frac{dN}{M^2}$	$\frac{dT_o}{T_o}$	$\frac{dm}{\dot{m}}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{-2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{\gamma M^2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{(1+\gamma M^2) \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{2 \frac{1-M^2}{1-M^2} (1+\gamma M^2)}$
$\frac{dV}{V}$	$\frac{-1}{1-M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1-M^2}$	$\frac{1+\gamma M^2}{1-M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2} \frac{(1+(\gamma-1)M^2)}{1-M^2}$	$-\gamma M^2 \frac{(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2}$	$-2\gamma M^2 \frac{(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{\gamma-1}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)}$	$\frac{(1-\gamma M^2)(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma-1)(1+\gamma M^2)M^2}{1-M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$-\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma+1)M^2}{1-M^2}$
$\frac{dl_t}{l_t}$	$\frac{1}{1+\gamma M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1+\gamma M^2)}$	0	0
$\frac{dp_o}{p_o}$	0	$\frac{\gamma M^2}{2}$	$\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\gamma M^2$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$(\gamma-1) \frac{M^2}{2}$	$(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)$	$(\gamma-1)M^2$



Coefficienti d'influenza

	$\frac{dA}{A}$	$M < 1$ $\frac{dN}{M^2}$ $M > 1$	$\frac{dT_o}{T_o}$	$\frac{dm}{\dot{m}}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{-2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{\gamma M^2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{(1+\gamma M^2) \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{2 \frac{1-M^2}{1-M^2} (1+\gamma M^2)}$
$\frac{dV}{V}$	$\frac{-1}{1-M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1-M^2}$	$\frac{1+\gamma M^2}{1-M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2} \frac{(1+(\gamma-1)M^2)}{1-M^2}$	$-\gamma M^2 \frac{(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2}$	$-2\gamma M^2 \frac{(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)}$	$\frac{(1-\gamma M^2)(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma-1)(1+\gamma M^2)M^2}{1-M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2 \frac{1-M^2}{1-M^2}}$	$-\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma+1)M^2}{1-M^2}$
$\frac{dl_t}{l_t}$	$\frac{1}{1+\gamma M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1+\gamma M^2)}$	0	0
$\frac{dp_o}{p_o}$	0	$\frac{\gamma M^2}{2}$	$\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\gamma M^2$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$(\gamma-1) \frac{M^2}{2}$	$(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)$	$(\gamma-1)M^2$



Coefficienti d'influenza

	$\frac{dA}{A}$	dN	$M < 1$ $\frac{dT_o}{T_o}$ $M > 1$	$\frac{dm}{\dot{m}}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$-2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$\gamma M^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$(1 + \gamma M^2) \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2} (1 + \gamma M^2)$
$\frac{dV}{V}$	$\frac{-1}{1 - M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$\frac{1 + \gamma M^2}{1 - M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma-1) M^2)$	$-\gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right)$	$-2 \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right)$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma-1) M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1) M^4}{2(1 - M^2)}$	$\frac{(1 - \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}{1 - M^2}$	$-\frac{(\gamma-1)(1 + \gamma M^2) M^2}{1 - M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{(\gamma+1) M^2}{1 - M^2}$
$\frac{dl_t}{l_t}$	$\frac{1}{1 + \gamma M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1 + \gamma M^2)}$	0	0
$\frac{dp_o}{p_o}$	0	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\gamma M^2$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$(\gamma-1) \frac{M^2}{2}$	$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$	$(\gamma-1) M^2$



Coefficienti d'influenza

	$\frac{dA}{A}$	dN	$\frac{dT_o}{T_o}$	$M < 1$ $\frac{dm}{\dot{m}}$ $M > 1$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$-2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$\gamma M^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$(1 + \gamma M^2) \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2} (1 + \gamma M^2)$
$\frac{dV}{V}$	$\frac{-1}{1 - M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$\frac{1 + \gamma M^2}{1 - M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma-1) M^2)$	$-\gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right)$	$-2 \gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right)$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma-1) M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1) M^4}{2(1 - M^2)}$	$\frac{(1 - \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}{1 - M^2}$	$-\frac{(\gamma-1)(1 + \gamma M^2) M^2}{1 - M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{(\gamma+1) M^2}{1 - M^2}$
$\frac{dl_t}{l_t}$	$\frac{1}{1 + \gamma M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1 + \gamma M^2)}$	0	0
$\frac{dp_o}{p_o}$	0	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\gamma M^2$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$(\gamma-1) \frac{M^2}{2}$	$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$	$(\gamma-1) M^2$



Confronto moto isentropico e mass addition con $\gamma=1$

	$\frac{dA}{A}$	$dN = -2 \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$	$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$	$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$-2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$	$\gamma M^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$	$2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2} (1 + \gamma M^2)$	$2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1-M^2}$
$\frac{dV}{V}$	$\frac{-1}{1-M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}$	$\frac{1 + \gamma M^2}{1-M^2}$	$\frac{1}{1-M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2} \frac{(1 + (\gamma-1)M^2)}{1-M^2}$	$-\frac{2\gamma M^2 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right)}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{1-M^2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)}$	$-\frac{(\gamma-1)(1 + \gamma M^2)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}$
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}$	$-\frac{(\gamma+1)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{M^2}{1-M^2}$
$\frac{dI_t}{I_t}$	$\frac{1}{1 + \gamma M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1 + \gamma M^2)}$	0	$\frac{\gamma M^2}{(1 + \gamma M^2)}$
$\frac{dp_o}{p_o}$	0	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\gamma M^2$	0
$\frac{ds}{c_p}$	0	$(\gamma-1) \frac{M^2}{2}$	$(\gamma-1)M^2$	0

$$dN = \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2\gamma \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right) \quad \text{A}$$

B

$-2 \cdot A + B$

49

Confronto moto isentropico e mass addition con $\gamma=1$

$$\frac{dI_t}{I_t} = \frac{1}{1 + \gamma M^2} \frac{dA}{A}$$

Per moto isentropico si ha:

$$\frac{dI_t}{I_t} = \frac{d(IA)}{IA} = \frac{dI}{I} + \frac{dA}{A} = \frac{1}{1 + \gamma M^2} \frac{dA}{A} \rightarrow \frac{dI}{I} = \left(\frac{1}{1 + \gamma M^2} - 1 \right) \frac{dA}{A} = -\frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dA}{A}$$

Quindi la variazione d'impulso specifico ha la stessa forma funzionale.

Forma integrale delle equazioni

La relazione:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Applicata fra le generiche sezioni 1 e 2 fornisce:

$$(30) \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_{o2}}{T_{o1}} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}$$

Dalla definizione di portata si ha:

$$\dot{m} = \frac{p}{RT} M \sqrt{\gamma RT} A = \sqrt{\frac{\gamma}{RT}} p M A$$

Che applicata fra le generiche sezioni 1 e 2 fornisce:

$$(31) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_{o2}}{T_{o1}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}}$$



Forma integrale delle equazioni

Dall'equazione di stato dei gas e dalla (31) si ha:

$$(32) \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_{o1}}{T_{o2}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}}$$

Dalla definizione del numero di Mach:

$$(33) \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{M_2}{M_1} \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}} = \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_{o2}}{T_{o1}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}}$$

Ricordando che:

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{T}{T_o} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Si ha:

$$(34) \quad \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_{o2}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{o1}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{T_{o2}}{T_2} \frac{T_1}{T_{o1}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_{o2}}{T_{o1}}} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$



Flussi semplici

La soluzione dei flussi semplici (moto con variazione d'area, moto alla Fanno, moto alla Rayleigh e moto con adduzione di massa) può essere ricavata come caso particolare dei moti unidimensionali generalizzati. In particolare ogni termine della (12) può essere integrato analiticamente

$$(12) \quad \frac{1-M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1+\gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

fornendo una relazione fra il numero di Mach e la generica forza spingente. Evidentemente il risultato finale è lo stesso già presentato in precedenza.



Flussi semplici

Le variazioni degli altri parametri possono essere ricavati dalle relazioni (30-34). Ad esempio nel caso di moto con variazione d'area si ha:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad \text{che inserita nella (31) fornisce:}$$

$$(31) \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_{o2}}{T_{o1}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} \frac{A^*}{A} \frac{M^*}{M} \sqrt{\frac{T_o}{T_{o1}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_2^2}} = M \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}}$$



Flussi semplici

Che è la relazione, già trovata, che lega la pressione nella generica sezione alla pressione nella sezione critica.

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1}{2}} = \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}}$$

Con un poco di pazienza è possibile costruire una tabella generale. Con le seguenti posizioni:

$$\theta = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\Theta = \frac{2}{\gamma + 1} \theta$$

Si ha:



	Area	Fanno	Rayleigh	Massa
$\frac{A}{A^*}$	$\frac{1}{M} \Theta^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	1	1	1
$\frac{4fL}{D}$	0	$\frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln\left(\frac{M^2}{\Theta}\right)$	0	0
$\frac{T_o}{T_o^*}$	1	1	$\frac{2(\gamma+1)M^2\theta}{(1+\gamma M^2)^2}$	1
$\frac{G}{G^*}$	$M\Theta^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	1	1	$\frac{\sqrt{2(\gamma+1)M^2\theta}}{1+\gamma M^2}$
$\frac{p}{p^*}$	$\Theta^{\frac{-\gamma}{(\gamma-1)}}$	$\frac{1}{M\sqrt{\Theta}}$	$\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}$	$\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}$
$\frac{\rho}{\rho^*}$	$\Theta^{\frac{-1}{(\gamma-1)}}$	$\frac{\sqrt{\Theta}}{M}$	$\frac{1+\gamma M^2}{(\gamma+1)M^2}$	$\frac{2\theta}{1+\gamma M^2}$
$\frac{T}{T^*}$	$\frac{1}{\Theta}$	$\frac{1}{\Theta}$	$\left(\frac{(\gamma+1)M^2}{1+\gamma M^2}\right)^2$	$\frac{1}{\Theta}$
$\frac{V}{V^*}$	$\frac{M}{\sqrt{\Theta}}$	$\frac{M}{\sqrt{\Theta}}$	$\frac{(\gamma+1)M^2}{1+\gamma M^2}$	$\frac{M}{\sqrt{\Theta}}$
$\frac{p_o}{p_o^*}$	1	$\frac{1}{M} \Theta^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \Theta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$	$\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \Theta^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
$\frac{I_t}{I_t^*}$	$\frac{1+\gamma M^2}{\sqrt{2(\gamma+1)M^2\theta}}$	$\frac{1+\gamma M^2}{\sqrt{2(\gamma+1)M^2\theta}}$	1	1
$\frac{s-s^*}{C_p}$	0	$\ln\left(M^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Theta^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\right)$	$\ln\left(M^2 \left(\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right)$	$\ln\left(\frac{1}{\Theta} \left(\frac{1+\gamma M^2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$



Casi particolari

$$(15) \quad \frac{dV}{V} = \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right) \frac{dT_o}{T_o} + (1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1)$$



- se $M^2 = 1$ deve necessariamente essere $dA = 0$ cioè la sezione retta del condotto deve avere un punto di stazionarietà, in particolare un massimo od un minimo. È facile convincersi che, per raggiungere $M^2 = 1$, il condotto deve presentare una sezione di minimo. Infatti, se la sezione presentasse un massimo, una corrente subsonica che si muovesse verso detta sezione decelererebbe, mentre una corrente supersonica accelererebbe senza mai poter raggiungere;
- Quando $M^2 = 1$ si può avere sia $dV = 0$, che $dV \neq 0$ e cioè il passaggio da moto subsonico a supersonico o viceversa;



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

57

Casi particolari

$$(15) \quad \frac{dV}{V} = \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right) \frac{dT_o}{T_o} + (1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1 - M^2}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1)$$

- La condizione $dA = 0$ (*gola del condotto*) può comportare $dV \neq 0$ solo se $M^2 = 1$, potendosi comunque avere, anche per $M^2 = 1$, $dV = 0$. Il punto $M^2 = 1$ ($dA = 0$) è quindi un punto di biforcazione del comportamento del fluido in quanto lo stesso può passare da moto subsonico a supersonico o ritornare ancora subsonico, ovvero passare da moto supersonico a subsonico o ritornare ancora supersonico;
- In un condotto convergente ($dA < 0$), un moto subsonico (risp. supersonico) può solo accelerare (risp. decelerare) fino a $M = 1$.



Complementi di Gasdinamica – Tommaso Astarita

58

Casi particolari

La soluzione delle equazioni non è banale se non in alcuni casi particolari. Si possono però trarre delle interessanti considerazioni semplicemente osservando l'equazione:

$$(12) \quad \frac{1-M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \frac{dM^2}{M^2} = -2 \frac{dA}{A} + \gamma M^2 dN + (1+\gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o} + 2(1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

La condizione in cui il numero di Mach diventa unitario può essere ricavata semplicemente imponendo che il termine a destra si azzeri. Ad esempio considerando solo il caso di variazione d'area ed attrito alla parete si ha:

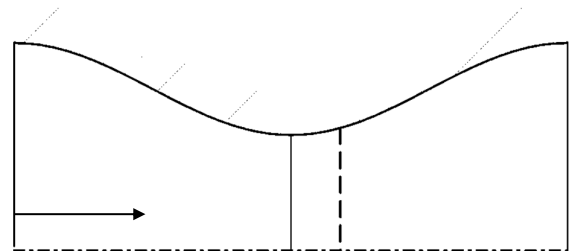
$$2 \frac{dA}{A} = \gamma M^2 4f \frac{dx}{D} \quad dN = \left(4f \frac{dx}{D} + \frac{2dF_D}{\gamma M^2 p A} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} \right)$$

Poiché il termine a destra è intrinsecamente positivo si vede subito che le condizioni soniche, in un ugello convergente divergente in presenza solo di attrito vengono raggiunte in una sezione divergente del condotto e non nella sezione di gola. In particolare la posizione della sezione sonica è funzione non solo della geometria ma anche del coefficiente d'attrito.



Casi particolari

$$2 \frac{dA}{A} = \gamma M^2 4f \frac{dx}{D}$$



Evidentemente se si volesse avere un condotto in cui il numero di Mach (non necessariamente unitario) rimane costante è necessario che il condotto sia divergente:

$$4 \frac{dD}{D} = \gamma M^2 4f \frac{dx}{D} \quad D = D_o + \gamma M^2 f x$$

Cioè il condotto deve essere conico. Questo risultato è valido sia in regime subsonico che supersonico. Tipicamente poiché il coefficiente d'attrito è piccolo l'angolo di divergenza è anch'esso piccolo.

La relazione seguente

$$(15) \quad \frac{dV}{V} = \frac{-\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} dN + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right) \frac{dT_o}{T_o} + (1+\gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}}{1-M^2}$$



Casi particolari

Che nelle ipotesi fatte diventa:

$$(1-M^2)\frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{2} 4f \frac{dx}{D} = 0$$

$$2\frac{dA}{A} = \gamma M^2 4f \frac{dx}{D}$$

Mostra che anche la velocità rimane costante. Analogamente per la pressione statica e di ristagno.

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2}{2} (1 + (\gamma - 1)M^2) 4f \frac{dx}{D}}{1 - M^2} = \frac{\gamma M^2 \frac{dA}{A} - (1 + (\gamma - 1)M^2) \frac{dA}{A}}{1 - M^2} = -\frac{dA}{A}$$

$$\frac{dp_o}{p_o} = -\frac{\gamma M^2}{2} 4f \frac{dx}{D} = -\frac{dA}{A}$$

$$p_1 A_1 = p_2 A_2$$

$$p_{o1} A_1 = p_{o2} A_2$$

Sia la pressione statica che quella di ristagno devono decrescere perché la sezione di passaggio aumenta costantemente.



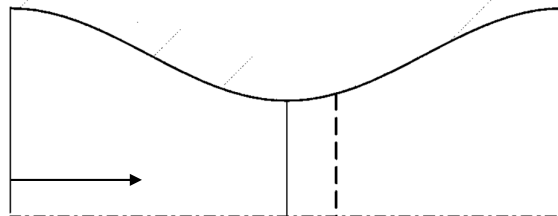
Casi particolari

Considerando invece il caso di variazione d'area e adduzione d'energia o massa si ha:

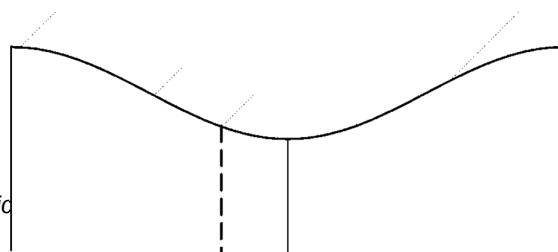
$$2\frac{dA}{A} = (1 + \gamma M^2) \frac{dT_o}{T_o}$$

$$2\frac{dA}{A} = 2(1 + \gamma M^2) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$$

Anche in questo caso se il flusso è positivo si vede che le condizioni soniche vengono raggiunte in una sezione divergente condotto e non nella sezione di gola.



Si ha una situazione opposta nel caso di flusso negativo.



Casi particolari

È interessante notare che nel caso di moto con adduzione d'energia la costanza del numero di Mach non comporta anche la costanza della velocità:

$$\frac{dV}{V} = \frac{-\frac{(1+\gamma M^2)}{2} + \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2\right)}{1-M^2} \frac{dT_o}{T_o} = \frac{\frac{1}{2}(1-M^2)}{1-M^2} \frac{dT_o}{T_o} = \frac{1}{2} \frac{dT_o}{T_o} = \frac{da_o}{a_o}$$

Infatti l'aumento della temperatura di ristagno si riflette direttamente in un aumento della velocità del suono di ristagno che, per M costante si riflette a sua volta in un aumento della velocità del suono e quindi della velocità.

