

# Corso di Complementi di gasdinamica

Tommaso Astarita  
[astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)  
[www.docenti.unina.it](http://www.docenti.unina.it)



Complementi di Gasdinamica – T Astarita – Modulo 8 del 24.10.17

## Teoria delle caratteristiche

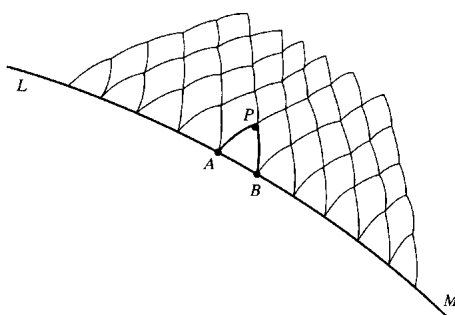
### Procedure di calcolo

Si è già visto che in coordinate polari si ha:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_I = \tan(\alpha - \mu) \quad \text{e} \quad C_I = v + \alpha = \text{cost}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{II} = \tan(\alpha + \mu) \quad \text{e} \quad C_{II} = v - \alpha = \text{cost}$$

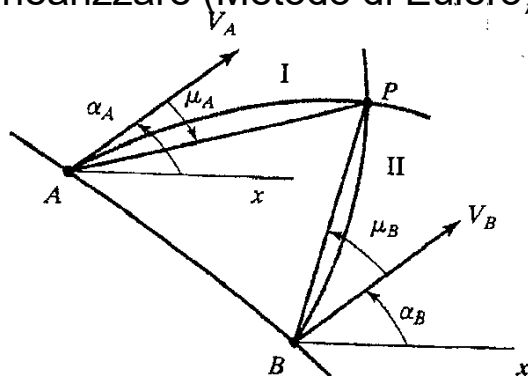
Si può pensare di procedere a partire da due punti noti e determinare così le condizioni in un terzo punto. Poi si procede nello stesso modo per i punti più lontani.



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

## Teoria delle caratteristiche

Supponiamo quindi di conoscere due punti A e B. Per determinare la posizione del punto P, intersezione delle due curve caratteristiche si può linearizzare (Metodo di Eulero):



$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_I = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \tan(\alpha - \mu)_A = m_I$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{II} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \tan(\alpha + \mu)_B = m_{II}$$

Oppure, nel caso che la curva caratteristica sia curva, utilizzando una formula più precisa:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_I = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\tan(\alpha - \mu)_A + \tan(\alpha - \mu)_P}{2} = m_I$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{II} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{\tan(\alpha + \mu)_B + \tan(\alpha + \mu)_P}{2} = m_{II}$$



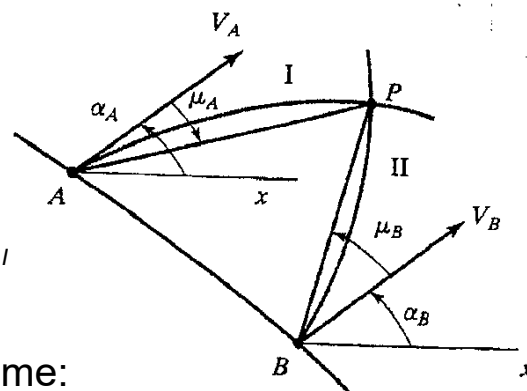
Complementi di Gasdinamica – T Astarita

3

## Teoria delle caratteristiche

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_I = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{\tan(\alpha - \mu)_A + \tan(\alpha - \mu)_P}{2} = m_I$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{II} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{\tan(\alpha + \mu)_B + \tan(\alpha + \mu)_P}{2} = m_{II}$$



Queste due relazioni possono essere riscritte come:

$$(1) \begin{cases} y_P = y_A + (x_P - x_A)m_I \\ y_P = y_B + (x_P - x_B)m_{II} \end{cases}$$

E possono essere risolte nell'incognita  $x_P$ . Sottraendo la seconda dalla prima si ha:

$$0 = y_A - y_B + (x_P - x_A)m_I - (x_P - x_B)m_{II} = y_A - y_B + x_P(m_I - m_{II}) - x_A m_I + x_B m_{II}$$

$$x_P = \frac{y_A - y_B - x_A m_I + x_B m_{II}}{m_{II} - m_I}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

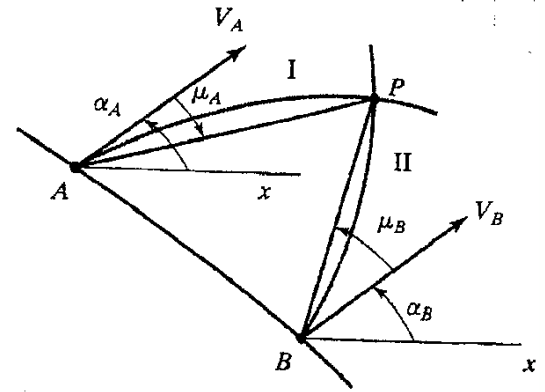
4

## Teoria delle caratteristiche

$$(2) \quad x_p = \frac{y_A - y_B - x_A m_I + x_B m_{II}}{m_{II} - m_I}$$

Che sostituita in una delle (1) fornisce anche  $y_p$ .  
Lungo le curve caratteristiche sono costanti gli invarianti di Riemann:

$$\left. \begin{aligned} C_I &= v_A + \alpha_A = v_P + \alpha_P \\ C_{II} &= v_B - \alpha_B = v_P - \alpha_P \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v_P &= \frac{C_I + C_{II}}{2} \\ \alpha_P &= \frac{C_I - C_{II}}{2} \end{aligned}$$



Poiché  $v = v(M)$  è una funzione nota si può ricavare il  $M$  e, da questo, con le relazioni isentropiche le altre grandezze termofluidodinamiche.



## Teoria delle caratteristiche

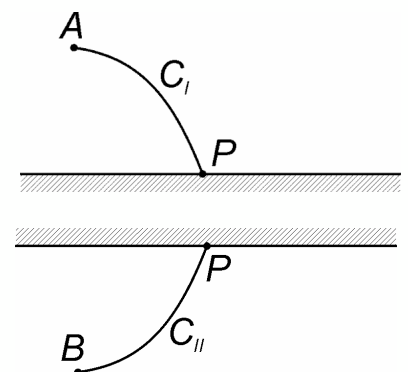
Se il punto  $P$  si trova su una superficie solida o un asse di simmetria allora  $\alpha_P$  è noto ma  $v_P$  è incognito.

Se una caratteristica della prima famiglia interseca una superficie solida si ha:

$$C_I = v_A + \alpha_A = v_P + \alpha_P \rightarrow v_P = C_I - \alpha_P$$

Per la seconda famiglia:

$$C_{II} = v_B - \alpha_B = v_P - \alpha_P \rightarrow v_P = C_{II} + \alpha_P$$



## Teoria delle caratteristiche

La forma della superficie solida deve essere nota:

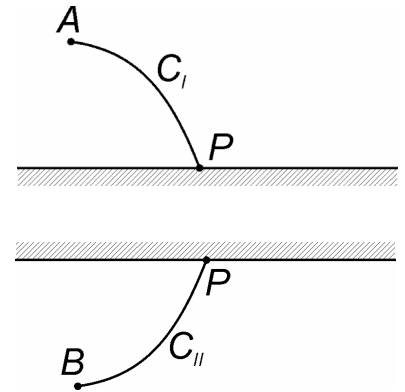
$$y_w = y_w(x)$$

Quindi per la prima famiglia si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y_p = y_A + (x_p - x_A)m_I \\ y_p = y_w(x_p) \end{cases}$$

Mentre per la seconda famiglia:

$$\begin{cases} y_p = y_B + (x_p - x_B)m_{II} \\ y_p = y_w(x_p) \end{cases}$$



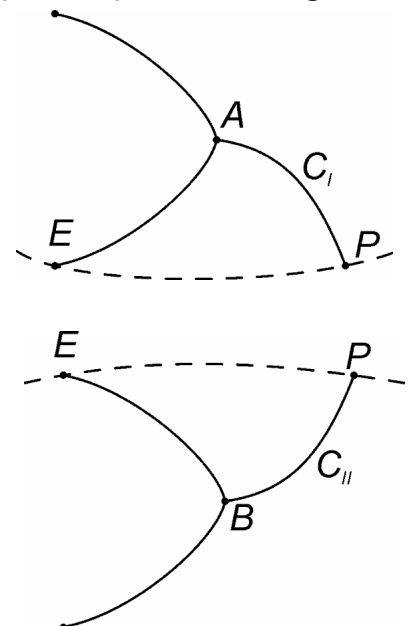
## Teoria delle caratteristiche

Se il punto  $P$  si trova su una superficie libera è nota la pressione e, quindi, il numero di Mach e  $v_P$ . Si può determinare l'angolo  $\alpha_P$  per la prima famiglia:

$$C_I = v_A + \alpha_A = v_P + \alpha_P \rightarrow \alpha_P = C_I - v_P$$

Mentre per la seconda famiglia:

$$C_{II} = v_B - \alpha_B = v_P - \alpha_P \rightarrow \alpha_P = v_P - C_{II}$$



## Teoria delle caratteristiche

La posizione del punto  $P$  è incognita ma può essere determinata con le formule precedenti. Infatti supponendo di conoscere le condizioni del punto  $E$ , a monte del punto  $A$ , si può stimare la pendenza media della superficie libera per la prima caratteristica con:

$$m_{II} = \frac{\tan \alpha_E + \tan \alpha_P}{2}$$

Mentre per la seconda caratteristica:

$$m_I = \frac{\tan \alpha_E + \tan \alpha_P}{2}$$

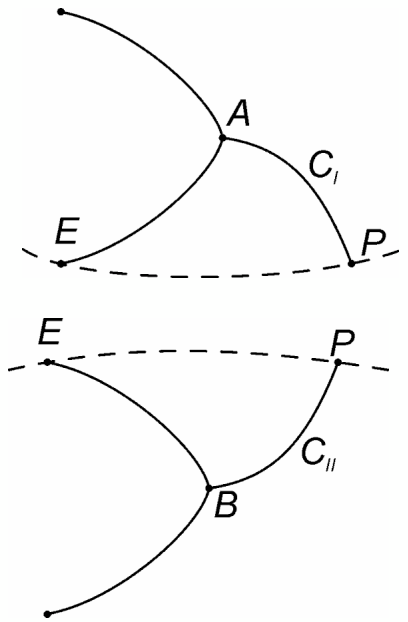
Utilizzando le (1), opportunamente adattate si può determinare la posizione del punto  $P$ .

$$(1) \begin{cases} y_P = y_A + (x_P - x_A)m_I \\ y_P = y_B + (x_P - x_B)m_{II} \end{cases}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

9



## Teoria delle caratteristiche

Per la prima caratteristica:

$$\begin{cases} y_P = y_A + (x_P - x_A)m_I \\ y_P = y_E + (x_P - x_E)m_{II} \end{cases}$$

$$m_{II} = \frac{\tan \alpha_E + \tan \alpha_P}{2}$$

Dalla (2):

$$x_P = \frac{y_A - y_E - x_A m_I + x_E m_{II}}{m_{II} - m_I}$$

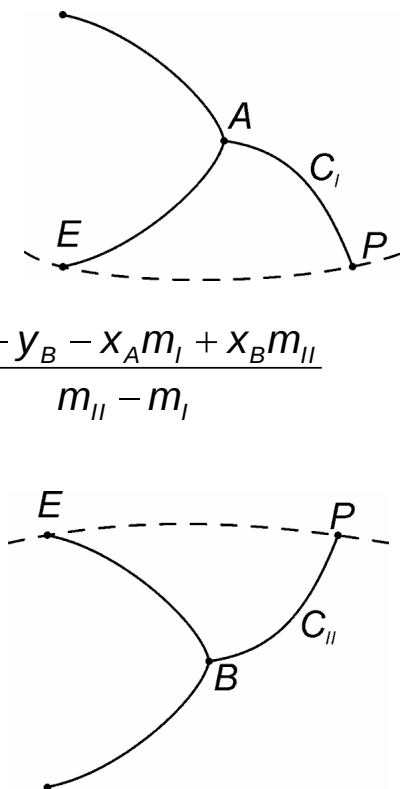
$$(2) \quad x_P = \frac{y_A - y_B - x_A m_I + x_B m_{II}}{m_{II} - m_I}$$

Mentre per la seconda caratteristica:

$$\begin{cases} y_P = y_E + (x_P - x_E)m_I \\ y_P = y_B + (x_P - x_B)m_{II} \end{cases}$$

$$m_I = \frac{\tan \alpha_E + \tan \alpha_P}{2}$$

$$x_P = \frac{y_E - y_B - x_E m_I + x_B m_{II}}{m_{II} - m_I}$$



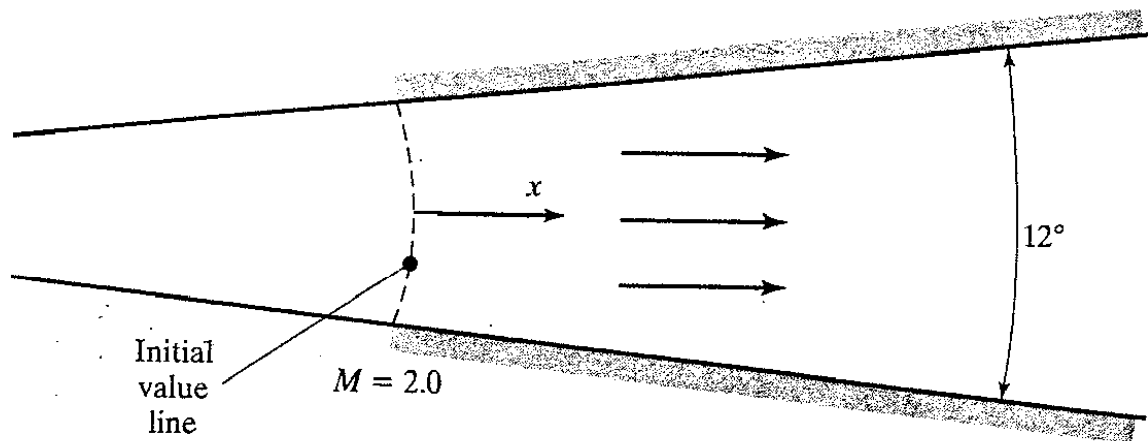
Complementi di Gasdinamica – T Astarita

10

# Teoria delle caratteristiche

## Example 14.3. Point-to-point MOC applied to radial supersonic flow in a diverging channel

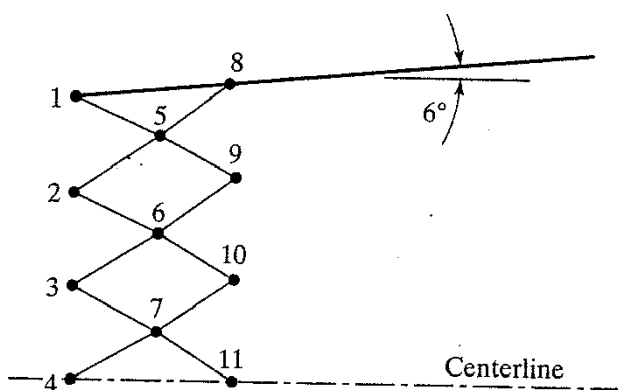
Uniform radial flow at Mach 2.0 enters a two-dimensional diverging channel with straight walls. Compute the variation of Mach number in this radial flow field, assuming isentropic, steady flow. The walls are inclined at a total angle of  $12^\circ$ , as shown in Figure 14.9, and  $\gamma = 1.4$ .



**Figure 14.9** Radial Supersonic Flow in a Diverging Two-Dimensional Channel



# Teoria delle caratteristiche



**Figure 14.10** Grid Network Downstream of the Initial Value Line



## Teoria delle caratteristiche

Si utilizzeranno le seguenti convenzioni:

- $C_I$  e  $C_{II}$  a monte
- $m_I$  e  $m_{II}$  a valle

Da Tipo a verso Tipo b:

$$C_{II} = v_{a,i} + \alpha_{a,i}$$

$$C_{III} = v_{a,i} - \alpha_{a,i}$$

$$m_{II} = \frac{\overbrace{\tan(\alpha_a - \mu_a)}^{\text{Precedente}}_{i+1} + \overbrace{\tan(\alpha_b - \mu_b)}^{\text{Attuale}}_i}{2}$$

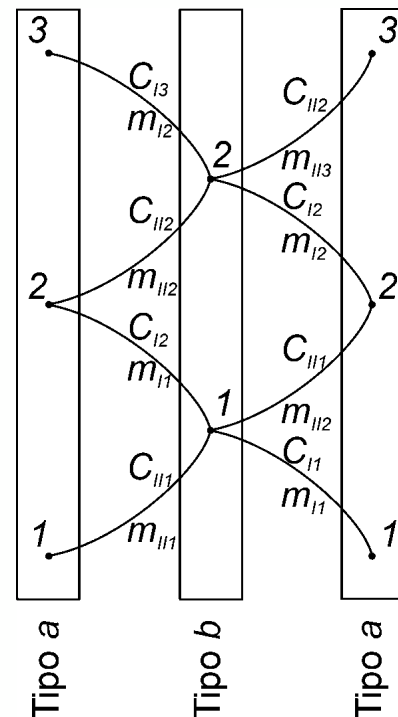
$$m_{III} = \frac{\overbrace{\tan(\alpha_a + \mu_a)}^{\text{Precedente}}_i + \overbrace{\tan(\alpha_b + \mu_b)}^{\text{Attuale}}_i}{2}$$

$$(1) \begin{cases} y_p = y_A + (x_p - x_A)m_I \\ y_p = y_B + (x_p - x_B)m_{II} \end{cases}$$

$$y_{b,i} = y_{a,i} + (x_{b,i} - x_{a,i})m_{III}$$

$$v_{b,i} = \frac{C_{I(i+1)} + C_{II(i)}}{2}$$

$$\alpha_{b,i} = \frac{C_{I(i+1)} - C_{II(i)}}{2}$$



$$(2) \quad x_p = \frac{y_A - y_B - x_A m_I + x_B m_{II}}{m_{II} - m_I}$$

$$x_{b,i} = \frac{y_{a,i+1} - y_{a,i} - x_{a,i+1} m_{II} + x_{a,i} m_{III}}{m_{III} - m_{II}}$$



## Teoria delle caratteristiche

Da Tipo b verso Tipo a:

$$C_{II} = v_{b,i} + \alpha_{b,i}$$

$$C_{III} = v_{b,i} - \alpha_{b,i}$$

$$\alpha_{a,1} = 0$$

$$v_{a,1} = C_{I(1)} - \alpha_{a,1}$$

$$m_{II} = \frac{\overbrace{\tan(\alpha_b - \mu_b)}^{\text{Precedente}}_i + \overbrace{\tan(\alpha_a - \mu_a)}^{\text{Attuale}}_{i+1}}{2}$$

$$m_{III+1} = \frac{\overbrace{\tan(\alpha_b + \mu_b)}^{\text{Precedente}}_i + \overbrace{\tan(\alpha_a + \mu_a)}^{\text{Attuale}}_{i+1}}{2}$$

$$(1) \begin{cases} y_p = y_A + (x_p - x_A)m_I \\ y_p = y_B + (x_p - x_B)m_{II} \end{cases}$$

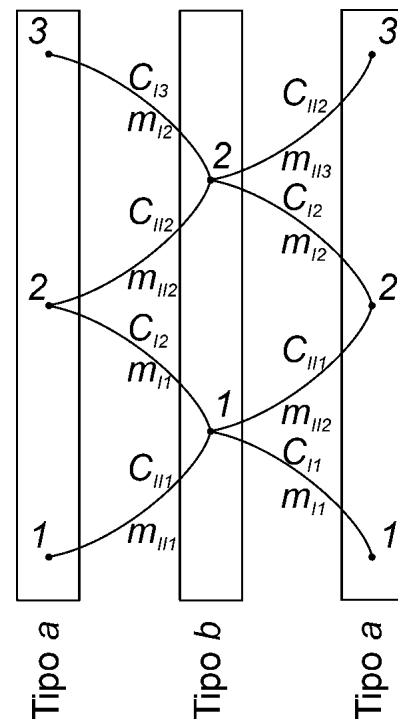
$$y_{a,i} = y_{b,i} + (x_{a,i} - x_{b,i})m_{II}$$

$$v_{a,i} = \frac{C_{I(i)} + C_{II(i-1)}}{2}$$

$$\alpha_{a,i} = \frac{C_{I(i)} - C_{II(i-1)}}{2}$$

$$\alpha_{a,N} = \alpha_{\max}$$

$$v_{a,N} = C_{II(N-1)} + \alpha_{a,N}$$



$$(2) \quad x_p = \frac{y_A - y_B - x_A m_I + x_B m_{II}}{m_{II} - m_I}$$

$$x_{a,i} = \frac{y_{b,i} - y_{b,i-1} - x_{b,i} m_{II} + x_{b,i-1} m_{III}}{m_{III} - m_{II}}$$



## Teoria delle caratteristiche

```
function ni=Ni_M(M, gamma)
Appo=(gamma+1)/(gamma-1);
Appo1=M.*M-1;
ni=sqrt(Appo)*atand(sqrt(Appo1/Appo))-atand(sqrt(Appo1));
return
```



## Teoria delle caratteristiche

```
function M=M_Ni(Ni, gamma)
options = optimset('TolFun',1e-8); %'Display','iter',
function ni=NIMZero(M)
    Appo=(gamma+1)/(gamma-1);
    Appo1=M.*M-1;
    ni=sqrt(Appo)*atand(sqrt(Appo1/Appo))-atand(sqrt(Appo1))-
NiZero;
end
M=zeros(size(Ni));
i=0;
for NiZero1=Ni % cosi' va bene per le matrici
    for NiZero=NiZero1 % cosi' va bene per le matrici
        i=i+1;
        M(i)=fzero(@NIMZero,[1 1000],options );
    end
end
end
end
```



## Teoria delle caratteristiche

clear

Rln=9.56677; Mln=2; gamma=1.4; alphaMax=6;

NPassi=10;alphaMin=-6;

Teta=linspace (alphaMin,alphaMax,10);

N=length(Teta);%Numero di punti

X=zeros(1,N+(N+N-1)\*NPassi); Y=X;M=X;%Variabili di output

%Inizializzazione variabili

Xa=Rln\*cosd(Teta);Ya=Rln\*sind(Teta);alpha\_a=Teta;

Ma=Mln\*ones(size(Teta));nia=Ni\_M(Ma,gamma);mua=asind(1./Ma);

Xb=0\*Xa; Yb=0\*Xa; Mb=0\*Xa; nib=0\*Xa; mub=0\*Xa;

alpha\_b=0\*Xa; Cl=Xb;Cll=Xb;ml=Xb;mll=Xb;

Na=N; Nb=Na-1;

% a e b sono vettori temporanei i risultati vengono salvati in:

ib=1:Nb; ia=2:Nb;iaa=1:Na;

X(iaa)=Xa; Y(iaa)=Ya; M(iaa)=Ma;



## Teoria delle caratteristiche

for i=1:NPassi

%Tipo a -> b

Cl=nia+alpha\_a; Cll=nia-alpha\_a;

nib(ib)=(Cl(ib+1)+Cll(ib))/2;

Mb=M\_Ni(nib,gamma);

mub=asind(1./Mb);

alpha\_b(ib)=(Cl(ib+1)-Cll(ib))/2;

ml(ib)=(tand(alpha\_a(ib+1)-mua(ib+1))+tand(alpha\_b(ib)-mub(ib)))/2;

mll(ib)=(tand(alpha\_a(ib)+mua(ib))+tand(alpha\_b(ib)+mub(ib)))/2;

Xb(ib)=(Ya(ib+1)-Ya(ib)-Xa(ib+1).\*ml(ib)+Xa(ib).\*mll(ib))./(mll(ib)-ml(ib));

Yb(ib)=Ya(ib)+mll(ib).\*(Xb(ib)-Xa(ib));

ii=N+(i-1)\*(2\*N-1)+ib;

X(ii)=Xb(ib); Y(ii)=Yb(ib); M(ii)=Mb(ib);



## Teoria delle caratteristiche

%Tipo b -> a

Cl=nib+alpha\_b; CII=nib-alpha\_b;

nia(ia)=(Cl(ia)+CII(ia-1))/2;

%Condizione al contorno sotto (Asse)

alpha\_a(1)=alphaMin;

nia(1)=Cl(1)-alpha\_a(1);

%Condizione al contorno sopra

alpha\_a(Na)=alphaMax;

nia(Na)=CII(Na-1)+alpha\_a(Na);

Ma=M\_Ni(nia,gamma);

mua=asind(1./Ma);

alpha\_a(ia)=(Cl(ia)-CII(ia-1))/2;

ml(ib)=(tand(alpha\_a(ib)-mua(ib))+tand(alpha\_b(ib)-mub(ib)))/2;

mll(ib+1)=(tand(alpha\_a(ib+1)+mua(ib+1))+tand(alpha\_b(ib)+mub(ib)))/2;

end



## Teoria delle caratteristiche

Xa(ia)=(Yb(ia)-Yb(ia-1)-Xb(ia).\*ml(ia)+Xb(ia-1).\*mll(ia))./(mll(ia)-ml(ia));

Ya(ia)=Yb(ia)+ml(ia).\*(Xa(ia)-Xb(ia));

Xa(Na)=(Yb(Na-1)-Xb(Na-1)\*mll(Na))./(tand(alphaMax)-mll(Na));

Ya(Na)=Xa(Na)\*tand(alphaMax);

Xa(1)=(Yb(1)-Xb(1)\*ml(1))./(tand(alphaMin)-ml(1));

Ya(1)=Xa(1)\*tand(alphaMin);

ii=i\*(2\*N-1)+ia;

X(ii)=Xa(ia); Y(ii)=Ya(ia); M(ii)=Ma(ia);

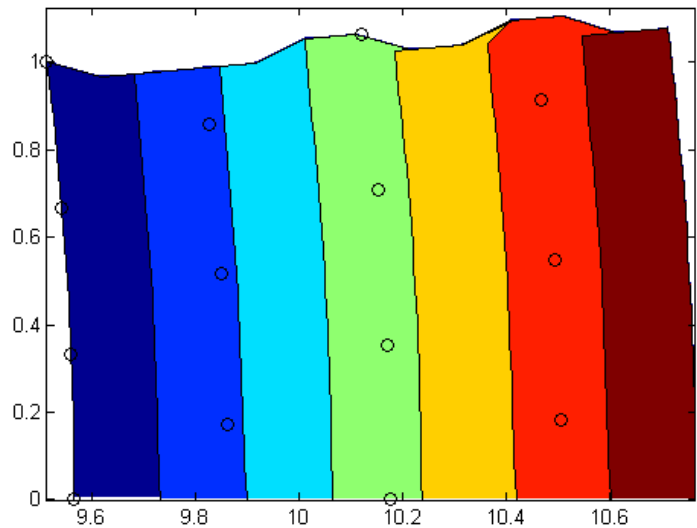
end



## Teoria delle caratteristiche

```
%r=Rln:.1:max(X);
r=linspace(Rln,max(sqrt(X.^2+Y.^2))-.01,10);
%Teta=(0:0.25:alphaMax);
Teta=linspace(alphaMin,alphaMax,10);
[r1 t1]=meshgrid(r,Teta);
xi=r1.*cosd(t1);
yi=r1.*sind(t1);
Mi = griddata(X,Y,M,xi,yi,'linear');
contourf(xi,yi,Mi)
hold on
%plot(xi,yi,'.')
plot(X,Y,'ok')
```

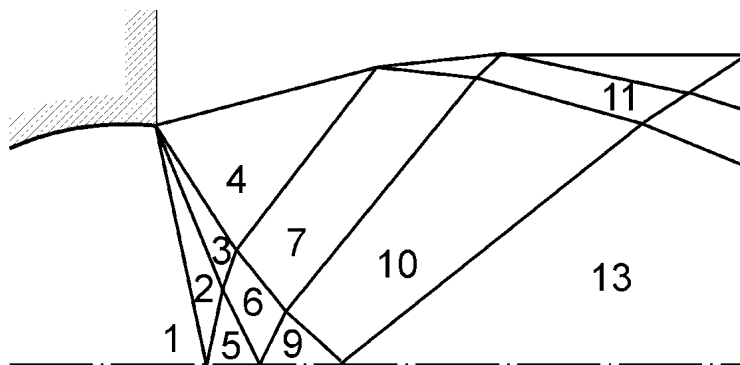
hold off



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

## Teoria delle caratteristiche

Per un ugello sottoespanso sarebbe meglio procedere con un metodo basato su regioni e non su punti. Ma una procedura del genere è di difficile codifica.



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

## Teoria delle caratteristiche

Per un ugello sottoespanso cambiano solo le condizioni all'esterno del getto dove è noto il valore di  $v_{est}$ . È necessario salvare i valori (tipo a) all'estremità del getto.

$$\alpha_E = \alpha_{a,N} \quad \alpha_{a,N} = v_{est} - C_{II(N-1)}$$

$$X_E = X_{a,N} \quad v_{a,N} = v_{est}$$

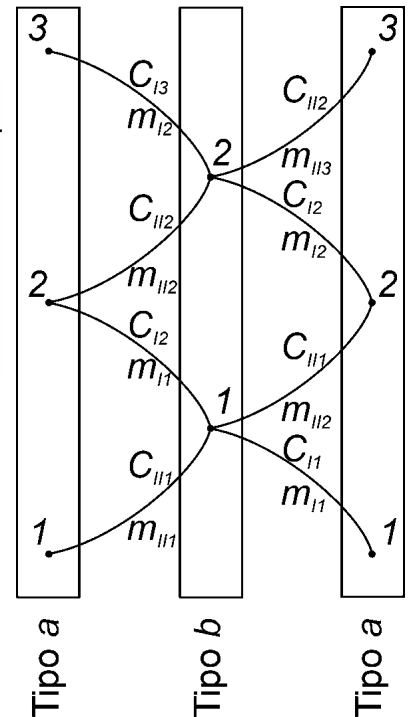
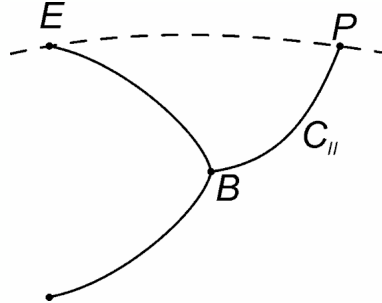
$$m_{IN} = \frac{\overbrace{\tan(\alpha_E)}^{\text{Precedente}} + \overbrace{\tan(\alpha_a)}^{\text{Attuale}}}{2}$$

$$x_p = \frac{y_E - y_B - x_E m_I + x_B m_{II}}{m_{II} - m_I}$$

$$x_{a,N} = \frac{y_E - y_{b,N-1} - x_E m_{IN} + x_{b,N-1} m_{IIN}}{m_{IIN} - m_{IN}}$$

$$y_p = y_E + (x_p - x_E) m_I$$

$$y_{a,N} = y_E + (x_{a,N} - x_E) m_{IN}$$



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

23

## Teoria delle caratteristiche

clear % ugello sotto espanso

gamma=1.4; MOut=1.3; YMax=3;

NPassi=20;N=10;

Ya=linspace (0,YMax,N);% il MOut di default era 1.25

Ma=linspace(1.2,1.2,N);

X=zeros(1,N+(N+N-1)\*NPassi); Y=X;M=X;%Variabili di output

%Inizializzazione variabili

Xa=zeros(size(Ya));

nia=Ni\_M(Ma,gamma);mua=asind(1./Ma);niOut=Ni\_M(MOut,gamma);

alpha\_a=Xa; Xb=Xa; Yb=Xa; Mb=Xa; nib=Xa;alpha\_b=Xa;

CI=Xa;CII=Xa;mI=Xa;mII=Xa;

Na=N; Nb=Na-1;

% a e b sono vettori temporanei i risultati vengono salvati in:

ib=1:Nb;ia=2:Nb; iia=1:Na;

X(iia)=Xa(iia); Y(iia)=Ya(iia); M(iia)=Ma(iia);



Complementi di Gasdinamica – T Astarita

24

## Teoria delle caratteristiche

for i=1:NPassi

%Tipo a -> b

Cl=nia+alpha\_a; CII=nia-alpha\_a;

nib(ib)=(Cl(ib+1)+CII(ib))/2;

Mb=M\_Ni(nib,gamma);

mub=asind(1./Mb);

alpha\_b(ib)=(Cl(ib+1)-CII(ib))/2;

ml(ib)=(tand(alpha\_a(ib+1)-mua(ib+1))+tand(alpha\_b(ib)-mub(ib)))/2;

mll(ib)=(tand(alpha\_a(ib)+mua(ib))+tand(alpha\_b(ib)+mub(ib)))/2;

Xb(ib)=(Ya(ib+1)-Ya(ib)-Xa(ib+1).\*ml(ib)+Xa(ib).\*mll(ib))./(mll(ib)-ml(ib));

Yb(ib)=Ya(ib)+mll(ib).\*(Xb(ib)-Xa(ib));

ii=N +(i-1)\*(2\*N-1) +ib;

X(ii)=Xb(ib);Y(ii)=Yb(ib);M(ii)=Mb(ib);



## Teoria delle caratteristiche

%Tipo b -> a

Cl=nib+alpha\_b; CII=nib-alpha\_b;

nia(ia)=(Cl(ia)+CII(ia-1))/2;

%Condizione al contorno sotto (Asse)

alpha\_a(1)=0;

nia(1)=Cl(1)-alpha\_a(1);

%Condizione al contorno sopra

alphaE=alpha\_a(Na); % si salva il valore precedente di alpha

xE=Xa(Na); % si salva il valore precedente di X

yE=Ya(Na); % si salva il valore precedente di Y

alpha\_a(Na)=niOut-CII(Nb); nia(Na)=niOut;

Ma=M\_Ni(nia,gamma);

mua=asind(1./Ma);

alpha\_a(ia)=(Cl(ia)-CII(ia-1))/2;



## Teoria delle caratteristiche

```

ml(ib)=(tand(alpha_a(ib)-mua(ib))+tand(alpha_b(ib)-mub(ib)))/2;
mll(ib+1)=(tand(alpha_a(ib+1)+mua(ib+1))+tand(alpha_b(ib)+mub(ib)))/2;

Xa(ia)=(Yb(ia)-Yb(ia-1)-Xb(ia).*ml(ia)+Xb(ia-1).*mll(ia))./(mll(ia)-ml(ia));
Ya(ia)=Yb(ia)+(Xa(ia)-Xb(ia)).*ml(ia);
Xa(1)=Xb(1)-Yb(1)/ml(1);
ml(Na)=(tand(alphaE)+tand(alpha_a(Na)))/2;

Xa(Na)=(yE-Yb(Na-1)+mll(Na).*Xb(Na-1)-ml(Na).*xE)./(mll(Na)-ml(Na));
Ya(Na)=yE+(Xa(Na)-xE).*ml(Na);
ii=(i)*(2*N-1)+ia;
X(ii)=Xa(ia); Y(ii)=Ya(ia); M(ii)=Ma(ia);
end

```



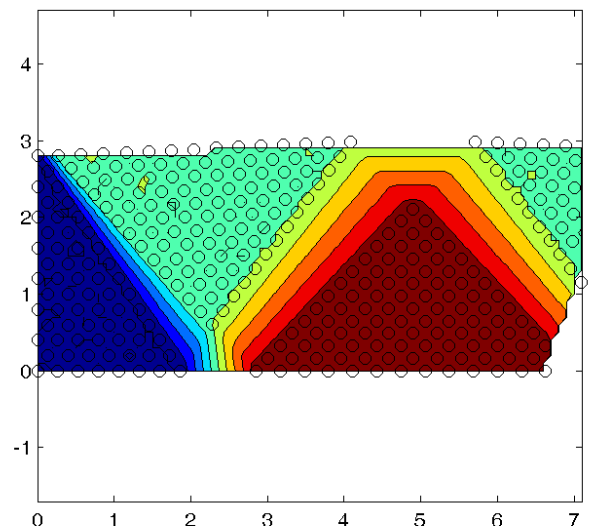
## Teoria delle caratteristiche

```

x=linspace(0,max(X)-.01,20);
y=linspace(0,max(Y)-.01,20);

[xi yi]=meshgrid(x,y);
Mi = griddata(X,Y,M,xi,yi,'linear');
clf
contourf(xi,yi,Mi)
hold on
%plot(xi,yi, '.')
plot(X,Y,'ok')
hold off
axis equal

```



## Teoria delle caratteristiche

Moti assialsimmetrici:

$$\nabla \cdot (\rho \underline{V}) = 0 \rightarrow \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial (h_2 h_3 \rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (h_1 h_3 \rho v)}{\partial r} \right) = 0$$

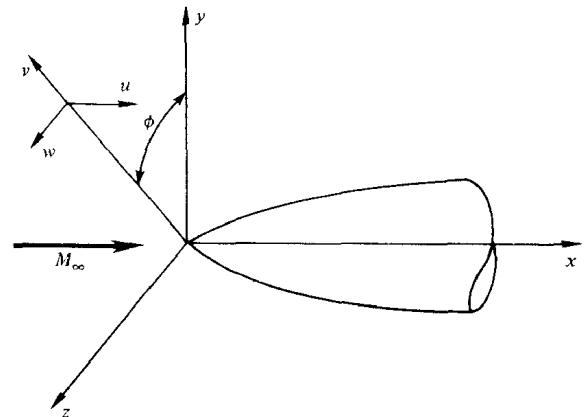
$$h_1 = 1 \quad h_2 = 1 \quad h_3 = r$$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{r \partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v r)}{\partial r} \right) = 0$$

$$(\rho u)_x + (\rho v)_r + \frac{\rho v}{r} = 0$$

$$\rho_x u + \rho u_x + \rho_r v + \rho v_r + \frac{\rho v}{r} = 0$$

$$\rho(u_x + v_r) + \frac{\rho v}{r} = -(\rho_x u + \rho_r v)$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\rho(u_x + v_r) + \frac{\rho v}{r} = -(\rho_x u + \rho_r v)$$

Si è già visto che:

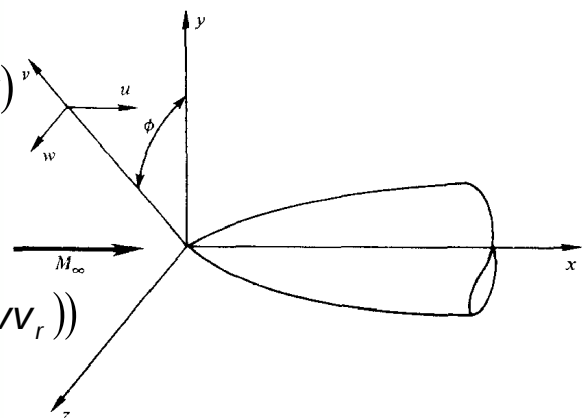
$$\rho_x = -\frac{\rho}{a^2} (uu_x + vv_x) \quad dp = -\rho(udu + vdv)$$

$$\rho_r = -\frac{\rho}{a^2} (uu_r + vv_r)$$

$$\rho(u_x + v_r) + \frac{\rho v}{r} = \frac{\rho}{a^2} (u(uu_x + vv_x) + v(uu_r + vv_r))$$

$$u_x \left( 1 - \frac{u^2}{a^2} \right) - \frac{uv}{a^2} (v_x + u_r) + v_r \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) = -\frac{v}{r}$$

$$\nabla \wedge \underline{V} = 0 \rightarrow v_x = u_r$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\underline{L} \cdot \frac{\partial \underline{W}}{\partial \underline{x}} + \underline{\Lambda} \cdot \underline{L} \cdot \frac{\partial \underline{W}}{\partial y} = \underline{L} \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{d}$$

clear all

syms rho u v p U V P R W a A B x r s d

syms U(s) V(s) P(s) R(s);

d=[-a\*a\*v/r ;0];

W=[ U ; V];

A=[a\*a-u\*u -u\*v  
0 1];

B=[-u\*v a\*a-v\*v  
-1 0];

%A^-1;

C=simplify(A^-1\*B);



## Teoria delle caratteristiche

[R,E] = eig(C);

lambda =simplify(diag(E ));

L=simplify(R^-1);% auto vettori sinistri

Testo=['\$' latex(lambda) latex(simplify(L\*A^-1\*d)) '\$'];

Testo1=['\$' latex(simplify((1)\*L\*diff(W,s))) '\$'];

clf;text(.05,.2,Testo,'Interpreter','latex','FontSize',18);

text(.05,.6,Testo1,'Interpreter','latex','FontSize',18);

$$\begin{bmatrix} \frac{uv+a\sqrt{-a^2+v^2+u^2}}{-a^2+u^2} \\ \frac{uv-a\sqrt{-a^2+v^2+u^2}}{-a^2+u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \frac{av}{\sqrt{-a^2+v^2+u^2}r} \\ 1/2 \frac{av}{\sqrt{-a^2+v^2+u^2}r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 \frac{(-a^2+u^2) \frac{d}{ds} U(s)}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}} + \left( -1/2 \frac{uv}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}} + 1/2 \right) \frac{d}{ds} V(s) \\ 1/2 \frac{(-a^2+u^2) \frac{d}{ds} U(s)}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}} + \left( 1/2 \frac{uv}{\sqrt{-a^4+a^2v^2+u^2a^2}} + 1/2 \right) \frac{d}{ds} V(s) \end{bmatrix}$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\begin{bmatrix} \lambda_{II} \\ \lambda_I \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L \cdot A^{-1} \cdot d}}$$

$$\underline{\underline{L}} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A^{-1}}} \cdot \underline{\underline{d}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{uv + a\sqrt{-a^2 + v^2 + u^2}}{-a^2 + u^2} \\ \frac{uv - a\sqrt{-a^2 + v^2 + u^2}}{-a^2 + u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \frac{av}{\sqrt{-a^2 + v^2 + u^2}r} \\ 1/2 \frac{av}{\sqrt{-a^2 + v^2 + u^2}r} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-uv \pm a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}}{a^2 - u^2} = \tan(\alpha \mp \mu) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{M^2 - 1}}{1 - \frac{u^2}{a^2}}$$

Che è formalmente identica a quella trovata nel caso bidimensionale piano.

$$\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A^{-1}}} \cdot \underline{\underline{d}} = \pm \frac{av}{r} \frac{1}{2\sqrt{-a^2 + v^2 + u^2}} = \pm \frac{a^2v}{r} \frac{1}{2a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}}$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\underline{\underline{L}} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A^{-1}}} \cdot \underline{\underline{d}}$$

$$\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A^{-1}}} \cdot \underline{\underline{d}} = \pm \frac{av}{r} \frac{1}{2\sqrt{-a^2 + v^2 + u^2}} = \pm \frac{a^2v}{r} \frac{1}{2a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}}$$

$$\begin{bmatrix} -1/2 \frac{(-a^2 + u^2) \frac{d}{ds} U(s)}{\sqrt{-a^4 + a^2 v^2 + u^2 a^2}} + \left( -1/2 \frac{uv}{\sqrt{-a^4 + a^2 v^2 + u^2 a^2}} + 1/2 \right) \frac{d}{ds} V(s) \\ 1/2 \frac{(-a^2 + u^2) \frac{d}{ds} U(s)}{\sqrt{-a^4 + a^2 v^2 + u^2 a^2}} + \left( 1/2 \frac{uv}{\sqrt{-a^4 + a^2 v^2 + u^2 a^2}} + 1/2 \right) \frac{d}{ds} V(s) \end{bmatrix}$$

Dalla relazione precedente (la prima riga si riferisce alla seconda curva caratteristica) si può ricavare l'equazione di compatibilità:

$$\frac{[\pm(u^2 - a^2)du + (a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2} \pm uv)dv]}{2a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}} = \pm \frac{a^2v}{r} \frac{dx}{2a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}}$$

$$\pm(u^2 - a^2)du + (a^2\sqrt{M^2 - 1} \pm uv)dv = \pm \frac{a^2v}{r} dx$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\pm(u^2 - a^2)du + (a^2\sqrt{M^2 - 1} \pm uv)dv = \pm \frac{a^2 v}{r} dx \quad \underline{\underline{L}} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{d}}$$

Lungo la curva caratteristica si ha:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} &= \frac{\mp(u^2 - a^2) \pm \frac{v}{r} a^2 \frac{dx}{du} \Big|_C}{a^2\sqrt{M^2 - 1} \pm uv} = \frac{\mp(u^2 - a^2)}{a^2\sqrt{M^2 - 1} \pm uv} \left( 1 - \frac{v}{r} \frac{a^2}{u^2 - a^2} \frac{dx}{du} \Big|_C \right) \\ &= \frac{\mp(u^2 - a^2)}{a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2} \pm uv} = \frac{\mp(u^2 - a^2) \left( a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2} \mp uv \right)}{\left( a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2} \pm uv \right) \left( a\sqrt{u^2 + v^2 - a^2} \mp uv \right)} = \\ &= \frac{\mp(u^2 - a^2) \left( a^2\sqrt{M^2 - 1} \mp uv \right)}{a^2(u^2 + v^2 - a^2) - u^2v^2} = \frac{\mp(u^2 - a^2) \left( a^2\sqrt{M^2 - 1} \mp uv \right)}{a^2(u^2 - a^2) - v^2(u^2 - a^2)} = \\ &= \frac{\mp(a^2\sqrt{M^2 - 1} \mp uv)}{a^2 - v^2} = \frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} \end{aligned}$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} = \frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} \left( 1 - \frac{v}{r} \frac{a^2}{u^2 - a^2} \frac{dx}{du} \Big|_C \right)$$

Ricordando che:

$$\lambda = \left. \frac{dr}{dx} \right|_C = \frac{-uv \pm a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}}{a^2 - u^2} = \frac{-uv \pm a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - u^2}$$

Si ha:

$$\frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} = \frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \frac{u^2 - a^2}{a^2 - v^2} = \left. \frac{dr}{dx} \right|_C \frac{u^2 - a^2}{a^2 - v^2}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} &= \frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} \left( 1 - \frac{v}{r} \frac{a^2}{u^2 - a^2} \frac{dx}{du} \Big|_C \right) = \\ &= \frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} - \frac{v}{r} \frac{a^2}{u^2 - a^2} \frac{dx}{du} \Big|_C \left. \frac{dr}{dx} \right|_C \frac{u^2 - a^2}{a^2 - v^2} = \\ &= \frac{uv \mp a^2\sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} - \frac{v}{r} \frac{a^2}{a^2 - v^2} \frac{dr}{du} \Big|_C \end{aligned}$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} = \frac{uv \mp a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} - \frac{v}{r} \frac{a^2}{a^2 - v^2} \left. \frac{dr}{du} \right|_C$$

Ricordando che:

$$\frac{uv \mp a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} = -\cot(\alpha \pm \mu)$$

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} = -\cot(\alpha \pm \mu) - \frac{v}{r} \frac{a^2}{a^2 - v^2} \left. \frac{dr}{du} \right|_C$$

$$u = V \cos \alpha \quad v = V \sin \alpha \quad \frac{v}{u} = \tan \alpha$$

$$\sin \mu = \frac{1}{M} \quad \cos \mu = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}$$

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

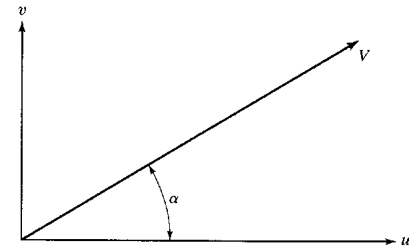


Figure 14.3 Polar Coordinates  $V$  and  $\alpha$  in the Hodograph Plane

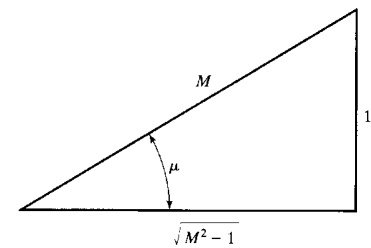


Figure 14.4 Mach Triangle

37



## Teoria delle caratteristiche

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} = -\cot(\alpha \pm \mu) - \frac{v}{r} \frac{a^2}{a^2 - v^2} \left. \frac{dr}{du} \right|_C \quad \frac{v}{u} = \tan \alpha$$

Considerando che:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 - v^2} &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{a^2}} = \frac{1}{1 - \frac{v^2 V^2}{V^2 a^2}} = \frac{1}{1 - M^2 \frac{1}{\frac{V^2}{v^2}}} = \frac{1}{1 - M^2 \frac{1}{\frac{u^2 + v^2}{v^2}}} = \frac{1}{1 - M^2 \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}}} = \\ &= \frac{1 + \frac{u^2}{v^2}}{1 + \frac{u^2}{v^2} - M^2} = \frac{1 + \frac{u^2}{v^2}}{\frac{u^2}{v^2} - (M^2 - 1)} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} = -\cot(\alpha \pm \mu) - \frac{v}{r} \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \left. \frac{dr}{du} \right|_C$$



38

## Teoria delle caratteristiche

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{\text{lungo } C} = -\cot(\alpha \pm \mu) - \frac{v}{r} \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \frac{dr}{du} \Big|_C$$

$$dv = -\cot(\alpha \pm \mu) du - \frac{v}{r} \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} dr$$

$$dv = d(V \sin \alpha) = dV \sin \alpha + V \cos \alpha d\alpha$$

$$du = d(V \cos \alpha) = dV \cos \alpha - V \sin \alpha d\alpha$$

$$dV \sin \alpha + V \cos \alpha d\alpha = -\cot(\alpha \pm \mu)(dV \cos \alpha - V \sin \alpha d\alpha) + \\ -V \sin \alpha \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \frac{dr}{r}$$

$$\frac{dV}{V} + \cot \alpha d\alpha = -\cot(\alpha \pm \mu) \left( \frac{dV}{V} \cot \alpha - d\alpha \right) - \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \frac{dr}{r}$$

$$d\alpha(\cot \alpha - \cot(\alpha \pm \mu)) = -\frac{dV}{V} (1 + \cot \alpha \cot(\alpha \pm \mu)) - \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \frac{dr}{r}$$



## Teoria delle caratteristiche

$$\cot(\alpha \pm \mu) = \frac{\cot \alpha \cot \mu \mp 1}{\cot \mu \pm \cot \alpha}$$

$$d\alpha(\cot \alpha - \cot(\alpha \pm \mu)) = -\frac{dV}{V} (1 + \cot \alpha \cot(\alpha \pm \mu)) - \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \frac{dr}{r}$$

$$d\alpha = \frac{dV}{V} \frac{1 + \cot \alpha \cot(\alpha \pm \mu)}{\cot(\alpha \pm \mu) - \cot \alpha} - \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \left( \frac{1}{\cot \alpha - \cot(\alpha \pm \mu)} \right) \frac{dr}{r}$$

$$d\alpha = \frac{dV}{V} \cot(\alpha - (\alpha \pm \mu)) + \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \left( \frac{1}{\cot \alpha - \frac{\cot \alpha \cot \mu \mp 1}{\cot \mu \pm \cot \alpha}} \right) \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{dV}{V} \cot(\mp \mu) - \frac{1 + \cot^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \mu} \left( \frac{\cot \mu \pm \cot \alpha}{\cot \alpha \cot \mu \pm \cot^2 \alpha - \cot \alpha \cot \mu \pm 1} \right) \frac{dr}{r} =$$

$$= \mp \frac{dV}{V} \cot \mu - \frac{1 + \cot^2 \alpha}{(\cot \alpha \pm \cot \mu)(\cot \alpha \mp \cot \mu)} \left( \frac{\cot \mu \pm \cot \alpha}{\pm (\cot^2 \alpha + 1)} \right) \frac{dr}{r} =$$

$$= \mp \frac{dV}{V} \cot \mu - \frac{\pm \cot \mu + \cot \alpha}{(\cot \alpha \pm \cot \mu)(\cot \alpha \mp \cot \mu)} \frac{dr}{r} = \mp \frac{dV}{V} \cot \mu - \frac{1}{\cot \alpha \mp \cot \mu} \frac{dr}{r}$$



## Teoria delle caratteristiche

$$d\alpha = \mp \frac{dV}{V} \cot \mu - \frac{1}{\cot \alpha \mp \cot \mu} \frac{dr}{r}$$

Ricordando che:

$$d\nu = \frac{dV}{V} \cot \mu$$

$$d\alpha \pm d\nu = \frac{1}{\pm \sqrt{M^2 - 1} - \cot \alpha} \frac{dr}{r}$$

$$d(\alpha \pm \nu) = \frac{1}{\pm \sqrt{M^2 - 1} - \cot \alpha} \frac{dr}{r}$$

$$d(\nu \pm \alpha) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \mp \cot \alpha} \frac{dr}{r}$$

Che sono le due equazioni di compatibilità.



## Teoria delle caratteristiche

$$d(\alpha \pm \nu) = \frac{1}{\pm \sqrt{M^2 - 1} - \cot \alpha} \frac{dr}{r} \quad \lambda = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-uv \pm a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}}{a^2 - u^2} = \tan(\alpha \mp \mu)$$

Per flusso assialsimmetrico si può notare che le equazioni di compatibilità sono equazioni differenziali e non algebriche. Quindi la quantità  $(\alpha \pm \nu)$  non è costante ma varia con  $r$ .

