

Un ugello convergente è collegato ad un condotto circolare ($D := 3.99 \cdot \text{mm}$) nel quale è imposto un flusso di energia nel modo calore Q_{12} . All'uscita del condotto vi è un ugello divergente ($D_3 := 6.18 \cdot \text{mm}$). L'ugello scarica alla pressione atmosferica e le condizioni di ristagno sono:

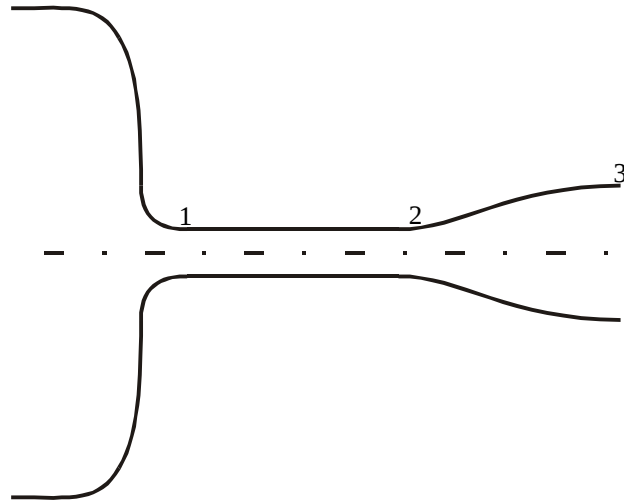
$$T_0 := 400 \cdot \text{K} \quad p_0 := 15.9 \cdot \text{atm} \text{ assolute}$$

Calcolare la portata e la configurazione delle eventuali onde all'uscita per:

$$Q_{12} := 0 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$Q_{12} := 109 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$Q_{12} := -109 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$



$$p_a := 1 \cdot \text{atm} \quad c_p := 1.004 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad R := 287 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad \psi := 0.810 \quad \gamma := 1.4$$

$$\frac{p_a}{p_0} = 0.063$$

Caso a.

Poichè il flusso imposto è nullo il sistema in figura si riduce ad un semplice ugello convergente-divergente. Supponendo che il moto sia strozzato nella sezione 1 (o 2), dal rapporto delle aree, si può calcolare il numero di Mach nella sezione d'uscita e da questo gli altri parametri caratteristici.

$$A_1 := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad A_1 = 1.25 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \quad A_3 := \frac{\pi}{4} \cdot D_3^2 \quad A_3 = 3 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\frac{A_3}{A_1} = 2.399$$

Dalle tabelle (ISO):

$$M_3 := 2.398 \quad \frac{p_3}{p_0} = 0.0686 \quad v_3 := 36.7 \cdot \text{deg}$$

$$\text{por} := \frac{p_0 \cdot A_1 \cdot \psi}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_0}} \quad \text{por} = 4.07 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Poichè la pressione nella sezione 3 è superiore a quella ambiente, all'uscita dell'ugello ci sarà un ventaglio d'espansione. La trasformazione è isoentropica, quindi noto p_a/p_0 , dalle tabelle si trova:

$$M_u := 2.454 \quad v_u := 38.0 \cdot \text{deg}$$

Da cui si può calcolare l'angolo di deviazione:

$$\delta := v_u - v_3 \quad \delta = 1.3 \text{ deg}$$

Caso b

Essendo Q positivo il moto può essere strozzato, solo nella sezione 2. Supponiamo quindi che sia verificata questa ipotesi. Dal bilancio di energia si può calcolare la temperatura di ristagno critica coincidente con quella nella sezione 2.

$$Q_{12} := 109 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad T_{o1} := T_o \quad T_{oc} := T_{o1} + \frac{Q_{12}}{c_p} \quad T_{oc} = 508.566 \text{ K}$$

$$\frac{T_{o1}}{T_{oc}} = 0.787$$

Dalle tabelle (RF):

$$M_1 := 0.572 \quad \frac{p_{o1}}{p_{oc}} = 1.086 \quad p_{oc} := \frac{p_o}{1.086} \quad p_{oc} = 14.641 \text{ atm}$$

Il numero di Mach nella sezione 3 sarà uguale a quello calcolato per il caso a. E' possibile, quindi, calcolare il rapporto fra la pressione nella sezione 3 e quella di ristagno.

$$\frac{p_3}{p_o} = \frac{p_3}{p_{o3}} \cdot \frac{p_{o3}}{p_{o1}} \quad 0.0686 \cdot \frac{1}{1.086} = 0.063$$

La pressione nella sezione 3 è uguale a quella ambiente quindi non ci saranno onde all'uscita dell'ugello. Per il calcolo della portata si possono considerare le condizioni di ristagno nella sezione 2:

$$\text{por} := \frac{p_{oc} \cdot A_1 \cdot \Psi}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_{oc}}} \quad \text{por} = 3.324 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Caso c

Q è negativo quindi il moto può essere strozzato solo nella sezione 1. Nel condotto (1-2) il moto sarà tutto supersonico e continuerà ad accelerare anche nell'ugello.

$$Q_{12} := -109 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad T_{o2} := T_{o1} + \frac{Q_{12}}{c_p} \quad T_{o2} = 291.434 \text{ K}$$

$$T_{oc} := T_{o1} \quad \frac{T_{o2}}{T_{oc}} = 0.729$$

Dalle tabelle (RF e ISO):

$$M_2 := 2.371 \quad \frac{p_{o2}}{p_{oc}} = 1.997 \quad \frac{A_2}{A_c} = 2.339$$

Per calcolare le condizioni all'uscita è necessario calcolare il rapporto A_3/A_c :

$$\frac{A_3}{A_c} = \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_2}{A_c} \quad 2.399 \cdot 2.339 = 5.611$$

Dalle tabelle (ISO):

$$M_3 := 3.297 \quad \frac{P_3}{P_{03}} = 0.0176$$

E' possibile ora calcolare il rapporto tra la pressione nella sezione 3 e quella di ristagno:

$$\frac{P_3}{P_0} = \frac{P_3}{P_{03}} \cdot \frac{P_{03}}{P_{0c}} \cdot \frac{P_{0c}}{P_{01}} \quad 0.0176 \cdot 1.997 \cdot 1 = 3.515 \cdot 10^{-2}$$

All'uscita dell'ugello ci sarà un'onda d'urto obliqua e la portata sarà uguale a quella calcolata nel caso a. Il M normale, dell'onda d'urto obliqua, si calcola a partire dal salto di pressione imposto:

$$\frac{P_a}{P_3} = \frac{P_a}{P_{01}} \cdot \frac{P_{01}}{P_3} \quad 0.063 \cdot \frac{1}{3.515 \cdot 10^{-2}} = 1.792$$

Dalle tabelle (NSW) si ricava il M normale e, successivamente, noto M_3 quello tangenziale:

$$M_{n3} := 1.296 \quad \frac{T_u}{T_3} = 1.189 \quad M_{nu} := 0.788$$

$$M_{t3} := \sqrt{M_3^2 - M_{n3}^2} \quad M_{t3} = 3.032$$

L'inclinazione dell'onda è facilmente calcolabile utilizzando:

$$\varepsilon := \arcsin\left(\frac{M_{n3}}{M_3}\right) \quad \varepsilon = 23.147 \text{ deg}$$

L'angolo di deviazione della corrente può essere valutato direttamente dal diagramma ε, δ, M oppure calcolando il M tangenziale a valle

$$M_{tu} = M_{t3} \cdot \sqrt{\frac{T_3}{T_u}} \quad M_{tu} := 3.032 \cdot \frac{1}{\sqrt{1.189}} \quad M_{tu} = 2.781$$

$$\delta := \varepsilon - \arctan\left(\frac{M_{nu}}{M_{tu}}\right) \quad \delta = 7.324 \text{ deg}$$

Si dimensiona una pompa per inviare acqua ($\mu=1.00 \cdot 10^{-3} \text{kg/(ms)}$) in un tubo lungo 1km e con un diametro interno di 2". La scabrezza superficiale del tubo è 0.02mm e la portata volumetrica di fluido è pari a 243 l/min.

$$\mu := 1.00 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad L := 1 \cdot \text{km} \quad D := 2 \text{in} \quad \varepsilon := 0.02 \cdot \text{mm}$$

$$Q := 243 \cdot \frac{\text{liter}}{\text{min}} \quad Q = 4.05 \times 10^{-3} \text{m}^3 \text{s}^{-1} \quad D = 0.051 \text{m} \quad \rho := 1000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$A := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad A = 2.027 \times 10^{-3} \text{m}^2$$

Per prima cosa si calcola la velocità dell'acqua all'interno del tubo, poi il numero di Reynolds e successivamente il rapporto ε/D :

$$V := \frac{Q}{A} \quad V = 1.998 \text{m s}^{-1}$$

$$R_e := \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} \quad R_e = 1.015 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 3.937 \times 10^{-4}$$

Dall'abaco di Moody, oppure utilizzando un'opportuna formula si trova il coefficiente di attrito:

$$f := \frac{\frac{0.25}{4}}{\log\left(\frac{5.74}{R_e^{0.9}} + \frac{\varepsilon}{D} \cdot \frac{1}{3.7}\right)^2} \quad f = 4.975 \times 10^{-3}$$

E' ora possibile calcolare la caduta di pressione e da questa la potenza della pompa:

$$\Delta p := 4 \cdot \frac{f}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot \frac{L}{D} \quad \Delta p = 782.05 \cdot 10^3 \cdot \text{Pa}$$

$$P := \Delta p \cdot Q \quad P = 3.167 \times 10^3 \text{W}$$

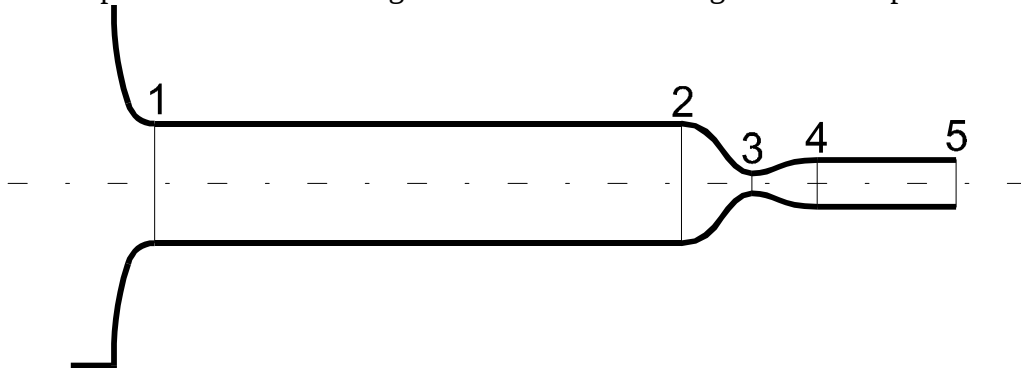
1) Un serbatoio ($p_0 := 3.28 \cdot \text{atm}$, $T_0 := 600 \cdot \text{K}$) è collegato ad un condotto circolare 1-2 ($\varepsilon := 0.55 \cdot \text{mm}$) seguito da un ugello convergente-divergente 2-3-4 e successivamente da un altro condotto circolare 4-5 ($f_{45} := 0.005$). Supponendo che:

$$\cdot A_1 := 0.785 \cdot \text{m}^2, A_3 := 0.135 \cdot \text{m}^2, A_4 := 0.228 \cdot \text{m}^2;$$

$$\cdot L_{12} := 225 \cdot \text{m}, L_{45} := 5.39 \cdot \text{m};$$

$$\cdot \text{Il fluido sia aria e } \mu := 29.3 \cdot 10^{-6} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Calcolare la portata effluente e disegnare uno schizzo del diagramma della pressione.



Supponiamo che la sezione 3 sia critica. Se il numero di Mach nella sezione 2 è relativamente basso si può considerare il flusso, fra il serbatoio e questa sezione, come incompressibile.

$$\frac{A_1}{A_3} = 5.815 \quad D_1 := \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A_1} \quad D_1 = 1 \text{ m}$$

Dalle tabelle (ISO):

$$M_2 := 0.100 \quad \frac{p_2}{p_{02}} = 0.99$$

Supponiamo che il moto sia incompressibile e valutiamo la caduta di pressione di ristagno:

$$\rho := \frac{p_0}{R \cdot T_0} \quad \rho = 1.93 \text{ kg m}^{-3}$$

$$V := M_2 \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_0} \quad V = 49.1 \text{ m s}^{-1}$$

$$\frac{\varepsilon}{D_1} = 5.501 \times 10^{-4} \quad Re := \frac{\rho \cdot V \cdot D_1}{\mu} \quad Re = 3.233 \times 10^6$$

Dall'abaco di Moody, oppure utilizzando un'opportuna formula si trova il coefficiente di attrito:

$$f := \frac{\frac{0.25}{4}}{\log\left(\frac{5.74}{Re^{0.9}} + \frac{\varepsilon}{D_1} \cdot \frac{1}{3.7}\right)^2} \quad f = 4.317 \times 10^{-3}$$

E' ora possibile calcolare la caduta di pressione di ristagno:

$$\Delta p_o := 4 \cdot \frac{f}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot \frac{L_{12}}{D_1} \quad \Delta p_o = 9.04 \cdot 10^3 \cdot \text{Pa} \quad \Delta p_o = 0.089 \text{ atm}$$

Da cui:

$$p_{o2} := p_o - \Delta p_o \quad p_{o2} = 3.191 \text{ atm}$$

Per valutare l'errore commesso nel considerare la densità costante basta, supponendo che la temperatura rimanga costante, ricordarsi che:

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{\Delta p_o}{p_{o1}} \cdot \frac{0.089}{3.191} = 2.789 \%$$

Si commette quindi un errore massimo del 2.8 %, che in prima approssimazione può essere accettato. Esaminiamo ora il tratto 4-5 e supponiamo che il moto sia tutto supersonico. Dal rapporto delle aree e dalle tabelle (ISO e FF) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{A_4}{A_3} &= 1.689 & D_4 &:= \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A_4} & D_4 &= 0.539 \text{ m} \\ M_4 &:= 2.001 & \frac{p_4}{p_{o4}} &= 0.128 & \frac{p_4}{p_c} &= 0.408 & RF_{4c} &:= 0.305 \\ RF_{45} &:= 4 \cdot f_{45} \cdot \frac{L_{45}}{D_4} & RF_{45} &= 0.2 & L_{45} &= 5.39 \text{ m} \end{aligned}$$

$$RF_{5c} := RF_{4c} - RF_{45} \quad RF_{5c} = 0.105$$

Con questo rapporto caratteristico dalle tabelle si ha:

$$\begin{aligned} M_5 &:= 1.415 & \frac{p_5}{p_c} &= 0.654 & p_5 &= \frac{p_5}{p_c} \cdot \frac{p_c}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p_{o4}} \cdot p_{o2} \\ p_5 &:= 0.654 \cdot \frac{1}{0.408} \cdot 0.128 \cdot p_{o2} & p_5 &= 0.655 \text{ atm} \end{aligned}$$

Dove si è implicitamente considerato che le pressioni di ristagno in 2 ed in 4 sono uguali. Se la pressione ambiente può essere raggiunta con un'onda d'urto, allora l'ipotesi iniziale di moto supersonico nel condotto è corretta. Dal rapporto fra la pressione ambiente e quella nella sezione all'uscita si può, sempre se l'ipotesi iniziale è giusta, ricavare utilizzando le tabelle (NSW) il M normale:

$$\frac{p_a}{p_5} = 1.527 \quad M_{n5} := 1.207 \quad \frac{T_u}{T_5} = 1.132 \quad M_{nu} := 0.838$$

$$M_{t5} := \sqrt{M_5^2 - M_{n5}^2} \quad M_{t5} = 0.738$$

L'inclinazione dell'onda è facilmente calcolabile utilizzando:

$$\varepsilon := \arcsin\left(\frac{M_{n5}}{M_5}\right) \quad \varepsilon = 58.54 \text{ deg}$$

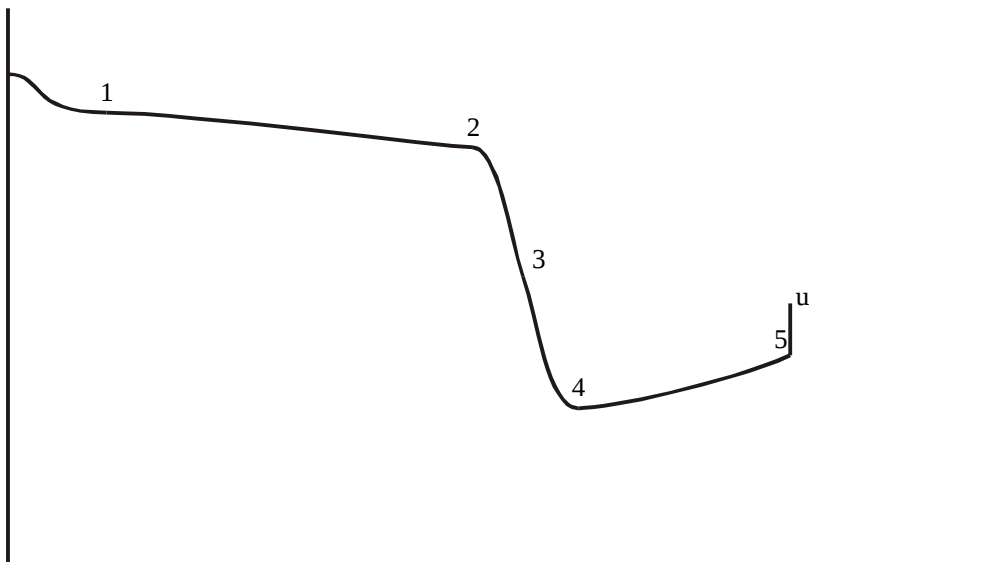
L'angolo di deviazione della corrente può essere valutato direttamente dal diagramma ε , δ , M oppure calcolando il M tangenziale a valle

$$M_{tu} = M_{t5} \cdot \sqrt{\frac{T_5}{T_u}} \quad M_{tu} := 0.738 \cdot \frac{1}{\sqrt{1.132}} \quad M_{tu} = 0.694$$

$$\delta := \varepsilon - \arctan\left(\frac{M_{nu}}{M_{tu}}\right) \quad \delta = 8.155 \text{ deg}$$

La portata può essere calcolata considerando che la sezione 2 è critica:

$$\text{por} := \frac{A_3 \cdot p_{02} \cdot \Psi}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_0}} \quad \text{por} = 72.003 \text{ kg s}^{-1}$$



2) Si deve progettare una presa d'aria convergente-divergente supersonica. I dati di progetto sono:

· $M := 1.7$, $T := 270 \cdot K$, $p := 0.8 \cdot atm$;

· La portata deve essere $5.81 kg/s$.

Determinare i parametri caratteristici dell'ugello ed il minimo valore di M necessario per portare l'ugello ad un funzionamento corretto.

Dal numero di M utilizzando le tabelle si possono ricavare:

$$\frac{A}{A_c} = 1.338$$

$$\frac{p}{p_0} = 0.203$$

$$\frac{T}{T_0} = 0.634$$

$$p_0 := \frac{p}{0.203}$$

$$p_0 = 3.941 atm$$

$$T_0 := \frac{T}{0.634}$$

$$T_0 = 425.868 K$$

L'area critica può essere calcolata dalla portata imposta, infatti:

$$por := 5.81 \cdot \frac{kg}{s} \quad por = \frac{p_0 \cdot A_c \cdot \psi}{\sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_0}} \quad \text{da cui} \quad A_c := \frac{por}{p_0 \cdot \psi} \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_0}$$

$$A_c = 7.431 \times 10^{-3} m^2$$

$$D := \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot A_c}$$

$$D = 0.097 m$$

Il minimo valore di M necessario ad avviare la presa d'aria può essere facilmente calcolato considerando il punto caratteristico subsonico corrispondente al rapporto delle aree trovato e, noto questo, dalle tabelle (NSW) si ricava il numero di Mach di overspeeding:

$$\text{Da } \frac{A}{A_c} = 1.338 \quad \text{si ricava} \quad M_{sub} := 0.501 \quad \text{da cui} \quad M_0 := 2.632$$