



# Gasdinamica

T. Astarita

[astarita@unina.it](mailto:astarita@unina.it)

[www.docenti.unina.it](http://www.docenti.unina.it)

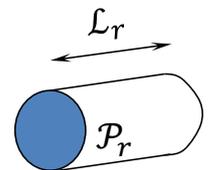
Versione del 6.3.2025

## Richiami

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{V} dV + \int_A \rho \underline{V} \underline{V} \cdot \underline{n} dA + \int_A p \underline{n} dA - \int_A \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dA = \int_V \rho \underline{g} dV$$

In un **condotto** di lunghezza  $\mathcal{L}_r$ , perimetro  $\mathcal{P}_r$  ed area di passaggio  $A_r$  il rapporto tra le **forze viscosse** (presenti essenzialmente sulla superficie **laterale** del condotto) e le **forze d'inerzia** (presenti solo sulla superficie **permeabile** del condotto) risulta pari a:

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r}{A_r} \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = 4 \mathcal{L}_r \frac{\mathcal{P}_r}{4 A_r} \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2}$$



dove:

$$D_r = \frac{4 A_r}{\mathcal{P}_r}$$

**Diametro idraulico** (o equivalente)

$$f = \frac{\tau_r}{\frac{1}{2} \rho_r V_r^2}$$

**Coefficiente d'attrito**

Per valori del coefficiente di attrito **molto bassi**, è possibile trascurare gli sforzi viscosi solo se il prodotto  $4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2}$  è piccolo.

## Richiami

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r \tau_r}{A_r \rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2}$$

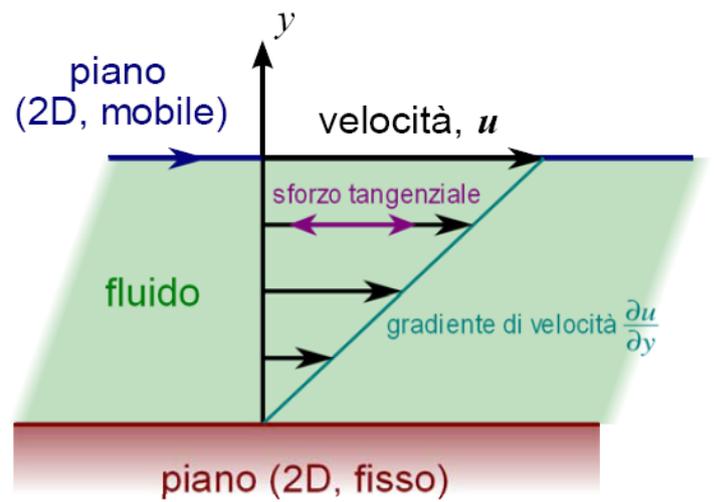
Ricordando che:  $\tau_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{f}{2} = \frac{\mu \frac{V_r}{D_r}}{\rho_r V_r^2} = \frac{\mu}{\rho_r D_r V_r} = \frac{1}{Re}$$

Quindi:

$$\frac{\mathcal{L}_r \mathcal{P}_r \tau_r}{A_r \rho_r V_r^2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r f}{D_r 2} = 4 \frac{\mathcal{L}_r 1}{D_r Re}$$

Per valori del numero di Reynolds **molto grandi** non è sempre possibile trascurare gli sforzi viscosi infatti è necessario che il prodotto  $4 \frac{\mathcal{L}_r 1}{D_r Re}$  sia piccolo.



## Richiami: conservazione della massa

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

La portata di massa

$$\dot{m} = \rho V A$$

è costante.

La relazione è applicabile ad una qualunque sezione retta del condotto e indicando con **G il flusso di massa** si può scrivere in ogni sezione:

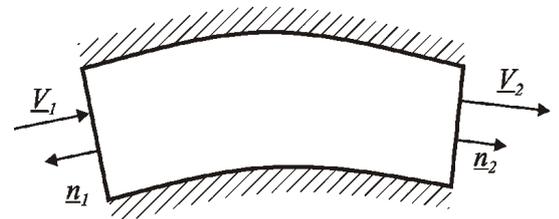
$$\dot{m} = \rho V A = G A = \text{cost}$$

Differenziando logicamente si ha:

$$\ln \rho V A = \ln \rho + \ln V + \ln A = \ln \text{cost}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

che rappresenta l'equazione della conservazione della **massa in forma differenziale** per un condotto nel quale un moto stazionario può essere considerato unidimensionale in qualunque sezione retta dello stesso,



## Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

Che può anche essere messa nella forma:

$$(p_1 + \rho_1 V_1^2) A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho_2 V_2^2) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

Dove la grandezza fra in parentesi è **l'impulso specifico**  $I$ :

$$I = p + \rho V^2$$



## Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g}$$

In forma differenziale proiettando sull'asse del condotto si ha:

$$-\dot{m}V + \dot{m}(V + dV) - pA + (p + dp)(A + dA) + dS_x = \rho A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

La spinta elementare è:  $dS_x = -pdA + \tau_p \mathcal{P} dx$

Il termine:  $dx \underline{g} \cdot \underline{i} = -gdz$

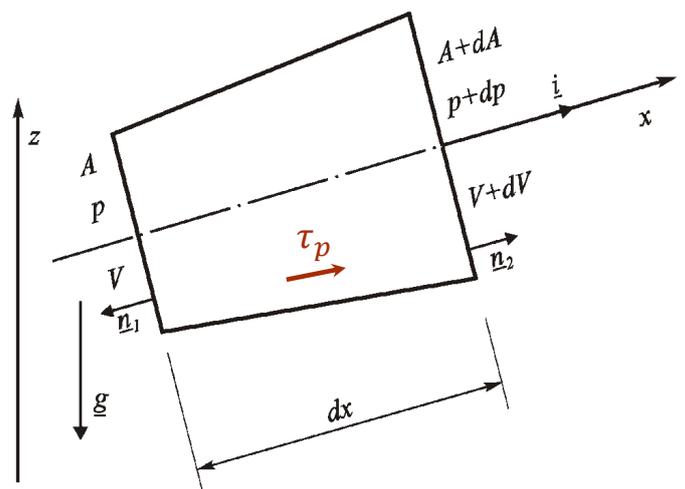
$$\dot{m}dV + p dA + dpA + dp dA - pdA + \tau_p \mathcal{P} dx = -\rho A g dz$$

dividendo per A:

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{\mathcal{P}}{4A} dx + \rho g dz = 0$$

Ricordando la definizione di  $D_e$ , il **bilancio di quantità di moto in forma differenziale** diventa:

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} + \rho g dz = 0$$



## Richiami: bilancio della quantità di moto

$$\rho V dV + dp + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} + \rho g dz = 0$$

Nell'ipotesi in cui lo sforzo tangenziale alla parete sia trascurabile (e.g.  $Re \rightarrow \infty$ ) si trova l'equazione di **Bernoulli** in forma **differenziale**:

$$\rho V dV + dp + \rho g dz = 0$$

Integrando questa equazione, nell'ipotesi in cui il moto sia incompressibile ( $\rho = cost$ ) si ritrova **l'equazione di Bernoulli**:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g z = cost$$



## Richiami: conservazione dell'energia

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

dove nell'ipotesi di trascurabilità degli effetti gravitazionali **l'entalpia specifica totale o di ristagno** è:

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

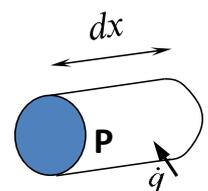
Per moto **anergodico** in forma **differenziale** si ha:  $\dot{m}dH = d\dot{Q}$

Supponendo che la condizione al contorno sia di flusso termico **costante**  $\dot{q}$  sulla superficie del condotto:

$$\dot{m}dH = \rho V A dH = d\dot{Q} = \dot{q} \mathcal{P} dx$$

Dividendo per  $A$  e ricordando la definizione di  $D_e$  :

$$\rho V dH = 4\dot{q} \frac{\mathcal{P}}{4A} dx = 4\dot{q} \frac{dx}{D_e}$$

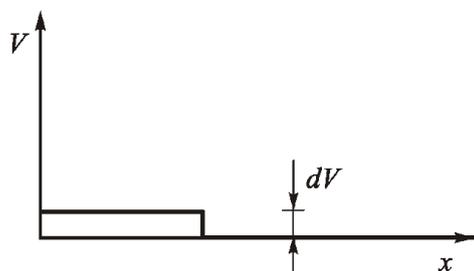
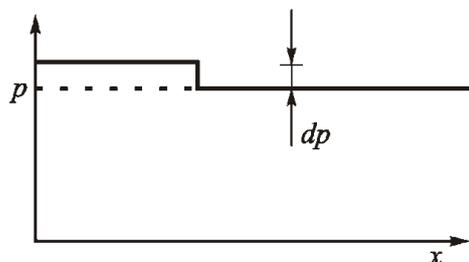
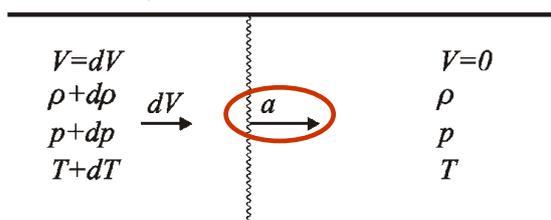


Che è l'equazione di **conservazione dell'energia** per moti **anergodici, stazionari ed unidimensionali**.



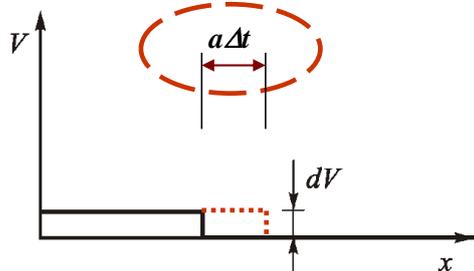
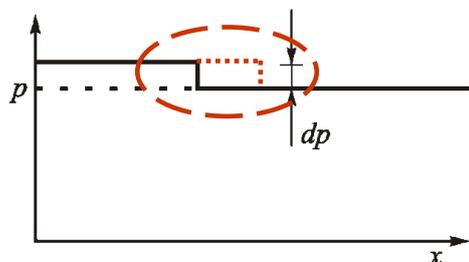
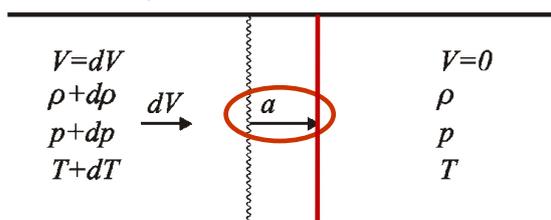
# Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un **piccolo disturbo di pressione** viaggia in un condotto alla velocità  $a$  (verso destra) attraverso un fluido in quiete.



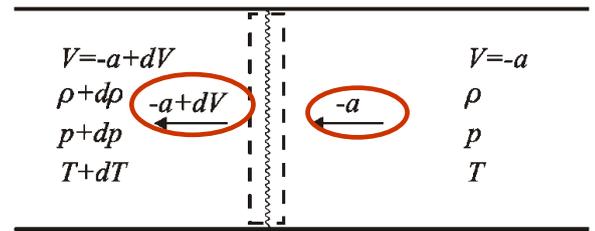
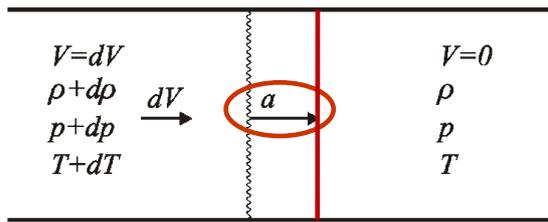
# Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un **piccolo disturbo di pressione** viaggia in un condotto alla velocità  $a$  (verso destra) attraverso un fluido in quiete. Dopo il tempo  $\Delta t$ :

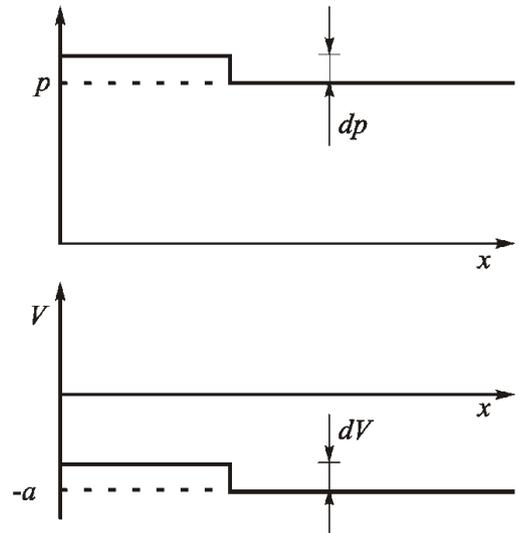


# Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Nel un **nuovo sistema di riferimento**, avente velocità  $a$  rispetto al primo, il disturbo di pressione si può fermare.



Per fermare l'onda, occorre dare a tutto il sistema una **velocità  $-a$**  e cioè muoversi con l'onda.



# Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

L'equazione di **conservazione della massa**, per moti stazionari, in forma differenziale ( $dA=0$ ):

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

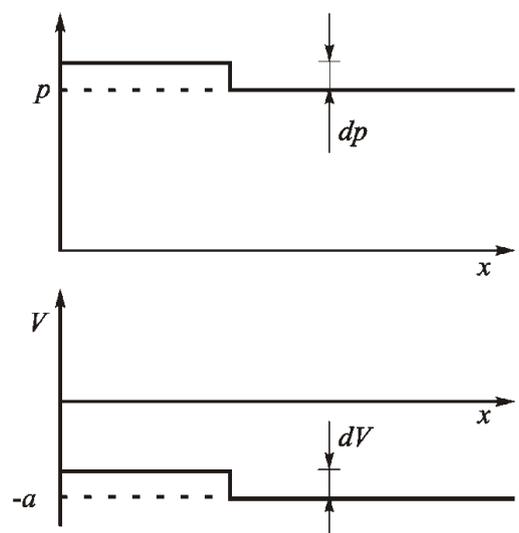
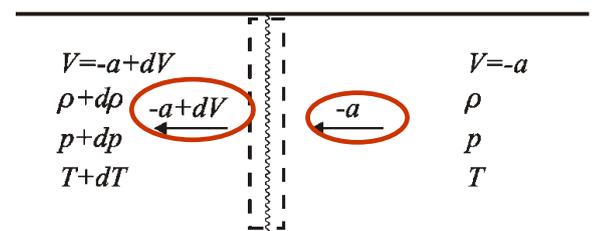
Tenuto conto che  $V = -a$ :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{-a} = 0 \quad \rightarrow \quad dV = a \frac{d\rho}{\rho}$$

Trascurando gli effetti gravitazionali il **bilancio della quantità di moto**:

$$dp + \rho V dV = 0 \quad \rightarrow \quad dp = \rho a dV$$

Per onde di **compressione** ( $dp > 0$  e  $d\rho > 0$ ) si ha  $dV > 0$ ; quindi il fluido viene **accelerato** nella stessa **direzione** di propagazione **dell'onda**.



## Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

$$dV = a \frac{d\rho}{\rho} \quad dp = \rho a dV$$

Sostituendo si trova:

$$dp = \rho a^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

La velocità di propagazione **dei piccoli disturbi** di pressione (del **suono**) **newtoniana (isoterma)** è :

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_T = [RT]_{gas\ perfetto}$$

La velocità di propagazione **dei piccoli disturbi** di pressione (del **suono**) **laplaciana (isoentropica)** è :

$$a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = [\gamma RT]_{gas\ perfetto}$$

**Non si è fatta alcuna ipotesi sul modello di gas.**



## Velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione

Un aneddoto riportato nella Enciclopedia Britannica dimostra quanto siano **piccoli i disturbi di pressione**.

Se in una notte di agosto si ha la ventura di passeggiare in aperta campagna, si può sentire a lungo un **grillo cantare**. In effetti è dimostrato che, in assenza di rumori di fondo, si può ascoltare il canto del grillo a **più di un chilometro di distanza**.

Ciò significa che il grillo mette in movimento almeno tutta l'aria racchiusa in una **semisfera di raggio un chilometro**.

Questa semisfera ha un **volume**  $2\pi R^3/3$  che risulta di circa  $2 \cdot 10^9 m^3$ .

Poiché la densità dell'aria alla temperatura di 20°C (siamo in **agosto**) ed alla pressione atmosferica è pari a circa  $1.2 kg/m^3$ , risulta che il grillo mette in movimento con il suo canto una massa pari a  $2.4 \cdot 10^9 kg$  di aria (due milioni quattrocentomila tonnellate).

I **disturbi di pressione** devono essere decisamente **piccoli** poiché la potenza sonora emessa dal violino del grillo è necessariamente limitata



## Condizioni di ristagno in un fluido

La condizione di **ristagno** (detta anche **totale**) di una particella di fluido in moto è definita come la **condizione termodinamica** che *la particella raggiungerebbe qualora venisse rallentata fino a velocità nulla con una trasformazione **adiabatica**, **anergodica** e **isoentropica** (omoenergetica e isoentropica).*

La condizione di ristagno non è associata né alla condizione di moto quasi **unidimensionale**, né a quella di moto quasi **stazionario**.

Le condizioni di ristagno non rappresentano condizioni che debbano essere necessariamente presenti nel campo di moto oggetto di studio.

**Ad ogni stato termofluidodinamico** del fluido è associato **uno stato di ristagno** e, ovviamente, non è vero il contrario.

Lo stato **termofluidodinamico** di un sistema semplice è caratterizzato da **tre** parametri (due **termodinamici** più uno **cinetico**).

Lo stato di **ristagno** invece è uno caratterizzato da **solo due** parametri indipendenti tra loro (manca il **cinetico**).



## Condizioni di ristagno in un fluido

Dalla definizione di **condizione di ristagno**, applicando l'equazione di conservazione dell'**energia**:

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

Considerando il moto **omoenergetico** e **anergodico**, quando si rallenta un fluido, avente velocità  $V$  e livello entalpico  $h$ , sino a velocità nulla si raggiunge **l'entalpia totale, o di ristagno**:

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2}$$

In generale, le **condizioni statiche** di una corrente sono quelle misurate con uno strumento che si **muove alla velocità del fluido**, cioè con uno strumento rispetto al quale il fluido è fermo.

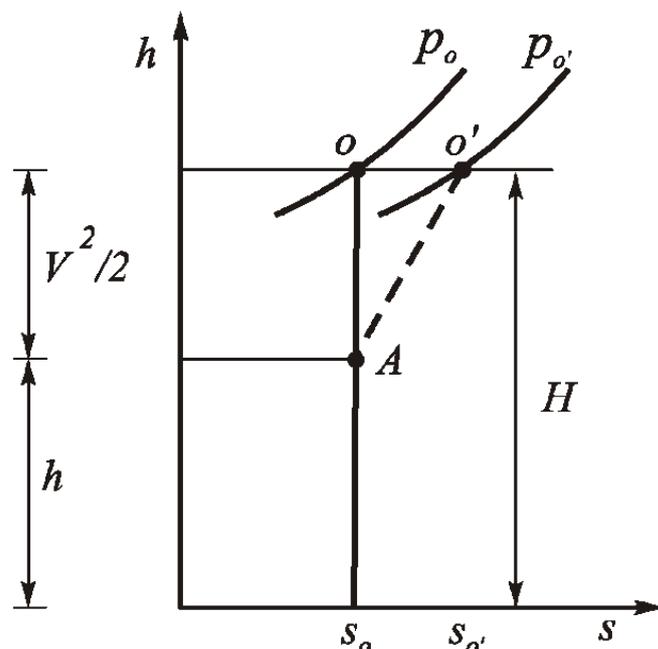


## Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2}$$

Rallentando il fluido, anche con una trasformazione **non isentropica** (punto  $o'$  dove  $h_o = h_{o'}$ ), si raggiunge comunque l'entalpia di ristagno.

La condizione di **isentropicità**, imposta nella definizione di condizione di ristagno è **necessaria** per poter definire gli altri parametri termodinamici di ristagno (e.g.  $p_o \neq p_{o'}$ ).



## Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

Per un gas più che perfetto si ha:  $h = c_p T$ ;  $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$ ;  $a^2 = \gamma RT$ :

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT = \frac{a^2}{\gamma-1}$$

da cui:

$$H = h \left( 1 + \frac{V^2}{2h} \right) = h \left( 1 + \frac{V^2}{2 \frac{a^2}{\gamma-1}} \right) = h \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a^2} \right)$$

ed infine:

$$H = h \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

L'importanza **relativa** del termine **cinetico** rispetto a quello relativo all'**entalpia sensibile**, è misurata dal **quadrato del numero di Mach**.



## Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

In una corrente a basso **numero di Mach** ( $M \ll 1$ ) l'entalpia di **ristagno** praticamente **coincide** con quella **sensibile**.

Ad esempio in una corrente di aria ( $\gamma = 1.4$ ) a  **$M = 0.1$**  (che a temperatura ambiente corrisponde ad una velocità di circa  $120 \text{ km/h}$ ), l'entalpia di ristagno è superiore a quella sensibile di appena  $0.002$  (cioè il **2 per mille**). Correnti di questo tipo vengono dette **microsoniche**, o **iposoniche**

In una corrente ad elevato **numero di Mach**, l'entalpia di **ristagno** risulta di gran lunga **maggiore** di quella **sensibile**, il cui contributo potrebbe essere, al limite, trascurato.

Ad esempio in una corrente di aria a  $M = 10$  l'entalpia sensibile rappresenta appena il **4,8%** dell'entalpia totale ( $1/21$ ). Correnti di questo tipo vengono dette **ipersoniche**.



## Condizioni di ristagno in un fluido

$$H = h + \frac{V^2}{2}$$

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2}$$

Quindi:

$$M^2 = \frac{V^2/2}{h(\gamma - 1)/2}$$

Il **quadrato** del numero di **Mach** è **proporzionale** al rapporto tra l'**energia cinetica ordinata**  $V^2/2$  e quella **disordinata**  $h$ .



## Condizioni di ristagno in un fluido

Per gas più che perfetto la **temperatura di ristagno** o **totale** si ricava immediatamente dalla:

$$H = h_o = h + \frac{V^2}{2} = h \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

dividendo per il calore specifico:

$$T_o = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

La temperatura  $T$  è detta temperatura **statica**, o **sensibile**, della corrente. Ed è quella misurata da un termometro che **viaggia alla stessa velocità della corrente**.



## Condizioni di ristagno in un fluido

$$T_o = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Ricordando che (per moto **isentropico**):

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left( \frac{T}{T_o} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad \frac{p}{p_o} = \left( \frac{T}{T_o} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Si ottengono la **densità** e **pressione di ristagno**, o **totale**:

$$\rho_o = \rho \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Anche la pressione (e idealmente la densità) **statica** è quella misurata da un manometro che **viaggia alla stessa velocità della corrente**

Moto Isentropico ( $\gamma=1.4$ )							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ( $\gamma=1.4$ )					
$M$	$p/p_o$	$\rho/\rho_o$	$T/T_o$	$\rho V^2/2p_o$	$A/A^*$	$M^*$	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	$M_2$	$p_2/p_1$	$\rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{o2}/p_{o1}$	$p_1/p_{o2}$
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039



# Tabelle – GasTab - Gas dynamics Tables

$$\frac{T_o}{T} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

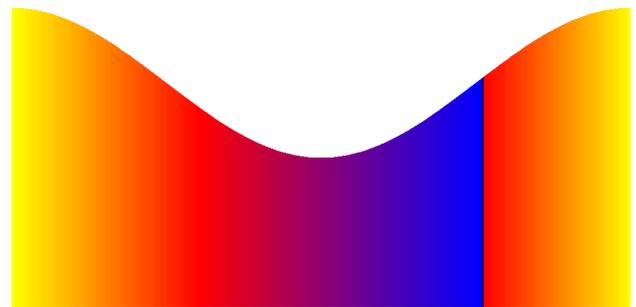
$$\rho_o = \rho \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} ; \quad p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Queste funzioni sono tabellate:

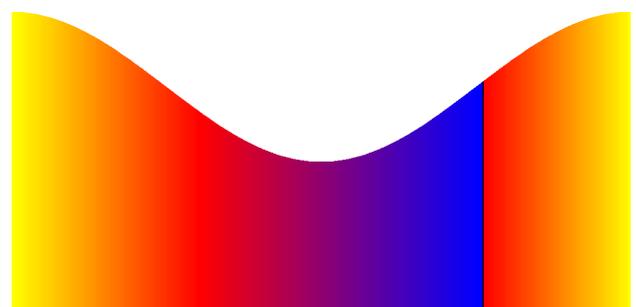
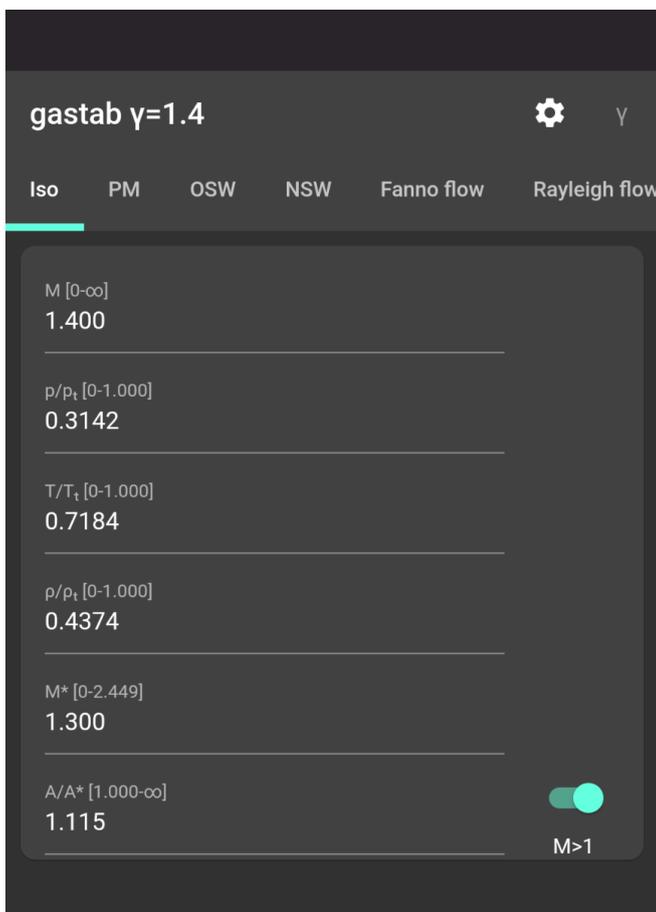
Moto Isentropico ( $\gamma=1.4$ )							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ( $\gamma=1.4$ )					
$M$	$p/p_o$	$\rho/\rho_o$	$T/T_o$	$\rho V^2/2p_o$	$A/A^*$	$M^*$	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	$M_2$	$p_2/p_1$	$\rho_2/\rho_1$	$T_2/T_1$	$p_{o2}/p_{o1}$	$p_1/p_{o2}$
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

## Moto Isentropico

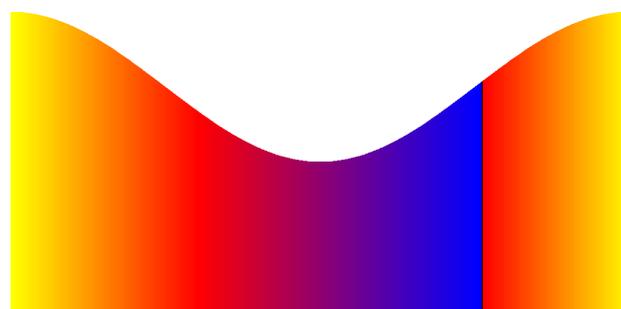
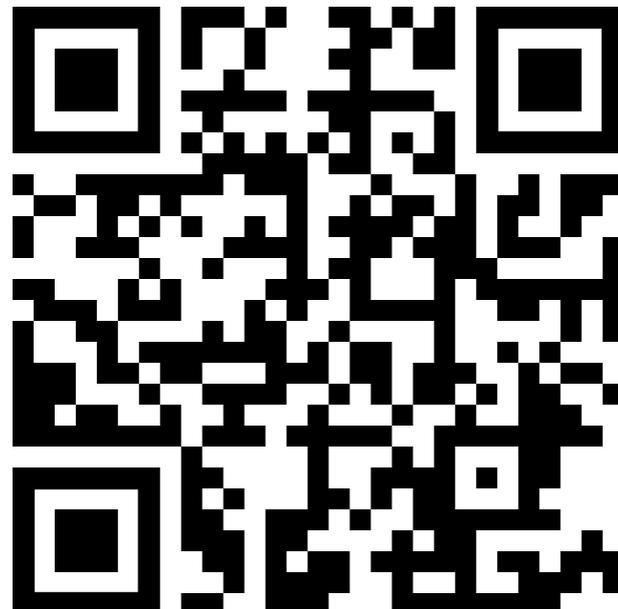
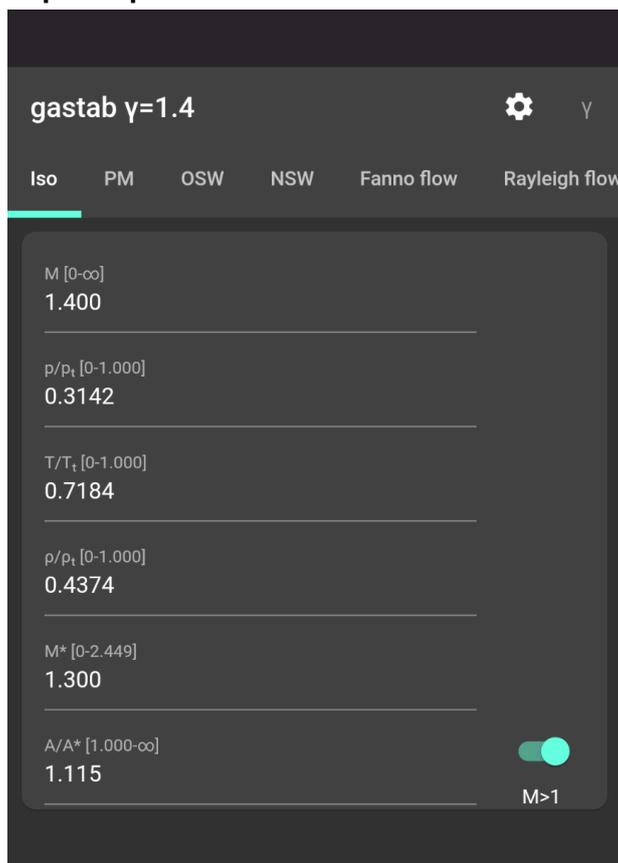
$M$	$p/p_o$	$\rho/\rho_o$	$T/T_o$
1.00	.5283	.6339	.8333
1.01	.5221	.6287	.8306
1.02	.5160	.6234	.8278
1.03	.5099	.6181	.8250
1.04	.5039	.6129	.8222



# GasTab (android) - Gas dynamics Tables



<https://pairs.unina.it/astarita/GasTab/>



## Ellisse delle velocità

In condizioni **omoenergetiche** e stazionarie, la massima velocità raggiungibile da un gas che possiede un'entalpia totale pari ad  $H$ , è detta **velocità limite** (o massima) ed si ricava semplicemente imponendo  $h = 0$  nella:

$$H = h + \frac{V^2}{2} \rightarrow V_l = \sqrt{2H}$$

Come già visto  $h = \frac{a^2}{\gamma-1}$  e la **velocità del suono** (in condizioni) di **ristagno** è:

$$a_o^2 = (\gamma - 1)h_o = (\gamma - 1)H$$

Quindi sostituendo le relazioni precedenti si ha:

$$H = h + \frac{V^2}{2} \rightarrow 1 = \frac{h}{H} + \frac{V^2}{2H} \rightarrow \frac{a^2}{a_o^2} + \frac{V^2}{V_l^2} = 1$$

Che è l'equazione di un'**ellisse** in forma canonica.



## Ellisse delle velocità

$$\frac{a^2}{a_o^2} + \frac{V^2}{V_l^2} = 1$$

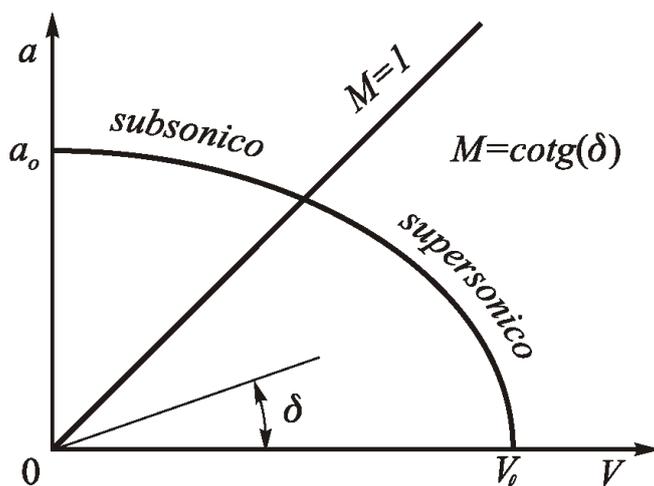
Questa equazione rappresenta la cosiddetta **ellisse delle velocità**.

Si ritrova ovviamente che:

- per  $V = 0 \rightarrow a = a_o$
- per  $a = h = 0 \rightarrow V = V_l$

È interessante notare come **all'aumentare della velocità**  $V$ , la velocità del **suono** **a diminuisca** e viceversa.

Nella figura è anche indicata la bisettrice del quadrante, di equazione  $V = a$ , corrispondente alle **condizioni soniche** per le quali si ha  $M = 1$ .



## Ellisse delle velocità

$$H = h + \frac{V^2}{2}; \quad h = \frac{a^2}{\gamma - 1}$$

Per  $M = 1$ , la velocità del fluido  $V^*$ , coincide con quella del suono  $a^*$  e si ha:

$$H = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{V^{*2}}{2} = a^{*2} \left( \frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) = a^{*2} \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \rightarrow a^{*2} = \frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

da cui ricordando che  $V_l = \sqrt{2H}$ ;  $a_o^2 = H(\gamma - 1)$ :

$$a^* = V^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_l \sqrt{\frac{(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Le condizioni termofluidodinamiche corrispondenti a  **$M = 1$**  sono generalmente indicate con **l'apice (\*)** e sono dette **condizioni critiche**.



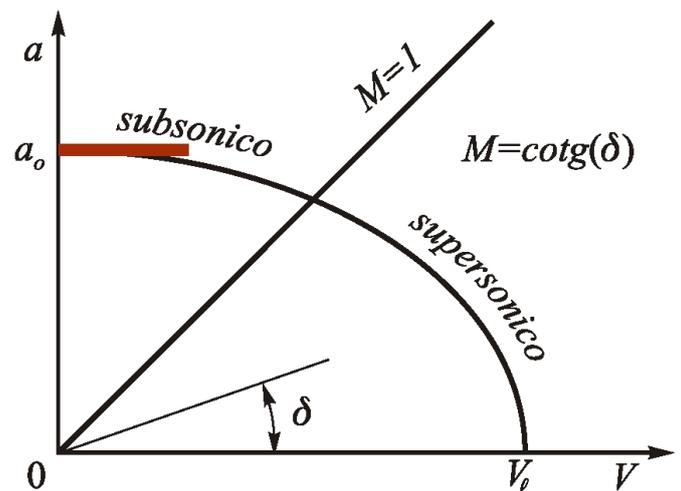
## Ellisse delle velocità

Poiché  $M = \frac{V}{a} = \cot \delta = 1/\tan \delta$ , la zona dell'ellisse a sinistra della retta  $M = 1$  corrisponde a condizioni di moto **subsonico** ( $M < 1$ ) mentre quella a destra a moto **supersonico** ( $M > 1$ ).

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscere altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle  $a$ .

Questa zona è caratterizzata da variazioni di **densità molto piccole** ed il **moto** si può considerare effettivamente **incompressibile**.



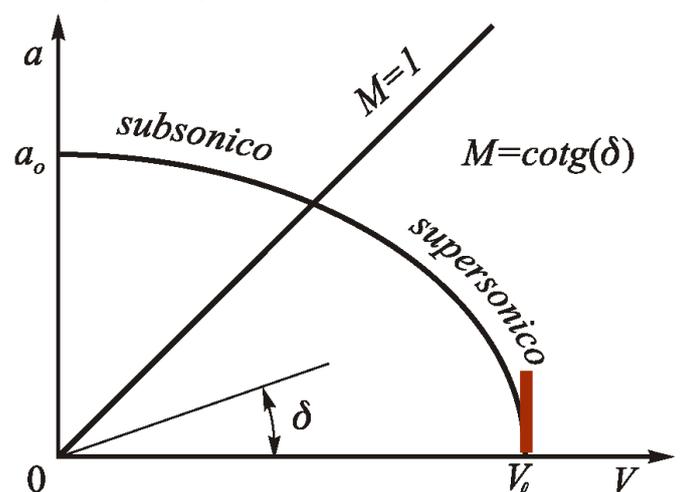
## Ellisse delle velocità

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscere altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle  $a$ .
- Valori del numero di **Mach** molto **alti**, moto **ipersonico**, relativi al tratto di curva a destra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (verticale) nel punto di intersezione con l'asse delle  $V$ .

Questa zona è caratterizzata da valori dell'energia cinetica **ordinata** molto maggiori di quella **disordinata**  $h$ .

Nel caso di moto **ipersonico**, gli effetti di gas **reale** possono diventare rilevanti per cui l'ipotesi di modello di gas **più che perfetto** non sono verificate.

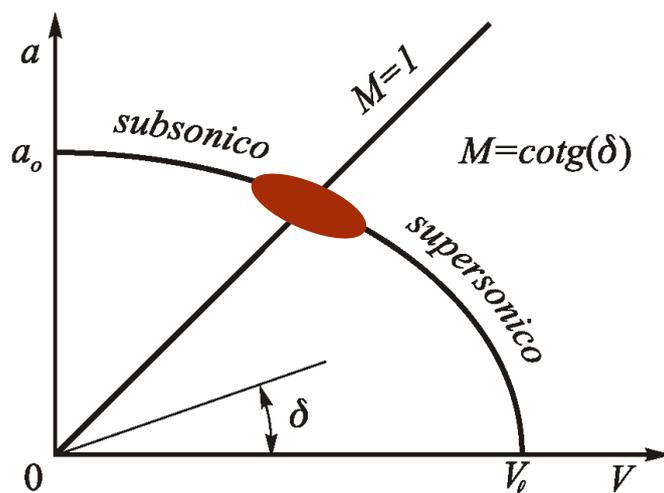


## Ellisse delle velocità

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscere altre due:

- Valori del numero di **Mach** molto **bassi**, moto **iposonico**, relativi al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle  $a$ .
- Valori del numero di **Mach** molto **alti**, moto **ipersonico**, relativi al tratto di curva a destra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (verticale) nel punto di intersezione con l'asse delle  $V$ .

La zona a cavallo della retta  $M = 1$  viene detta di moto **transonico**.



## Condotti ad area variabile

Si consideri, ora, un moto quasi **unidimensionale**, quasi **stazionario**, **omoenergetico** e **isoentropico** attraverso un condotto ad **area variabile**, cioè il moto di un fluido attraverso un condotto che presenta variazioni della sua area trasversale.

L'equazione di conservazione della **massa**, e del bilancio della **quantità di moto** per moti stazionari, in forma differenziale:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \quad dp + \rho V dV = 0$$

Tenuto conto che per moto **isentropico** si ha  $a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ :

$$\frac{dp}{\rho} \frac{d\rho}{dp} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho a^2} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0; \quad \frac{dp}{\rho} = -V dV$$

Sostituendo si trova:

$$\frac{-V dV}{a^2} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = \frac{-V^2 dV}{a^2 V} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} \rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$



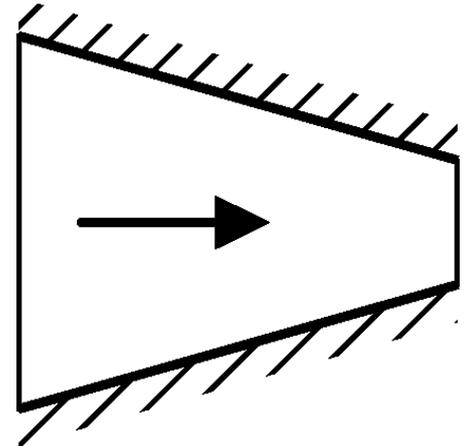
## Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Nel ricavare questa relazione, che lega la **variazione di velocità a quella di area**, non è stata fatta **alcuna ipotesi** sul **modello di gas** per cui essa è valida qualunque sia il modello utilizzato.

In un ugello **convergente**  $dA < 0$  il fluido **tende** a  $M = 1$  infatti:

- in moto **subsonico** ( $M^2 - 1 < 0$ ) il fluido **accelera** ( $dV > 0$ ) come nei moti incompressibili;
- in un moto **supersonico** ( $M^2 - 1 > 0$ ) il fluido **decelera** ( $dV < 0$ ).



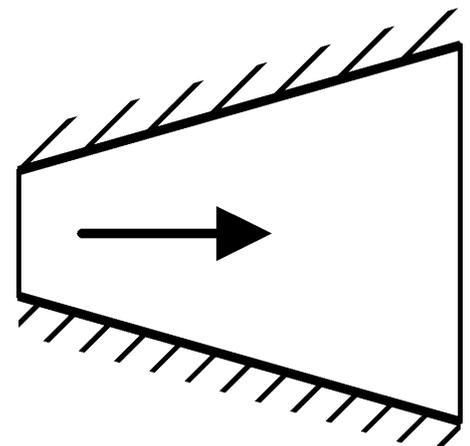
## Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Nel ricavare questa relazione, che lega la **variazione di velocità a quella di area**, non è stata fatta **alcuna ipotesi** sul **modello di gas** per cui essa è valida qualunque sia il modello utilizzato.

In un ugello **divergente**  $dA > 0$  il fluido si **allontana** da  $M = 1$  infatti:

- in moto **subsonico** ( $M^2 - 1 < 0$ ) il fluido **decelera** ( $dV < 0$ ) come nei moti incompressibili;
- in un moto **supersonico** ( $M^2 - 1 > 0$ ) il fluido **accelera** ( $dV > 0$ ).

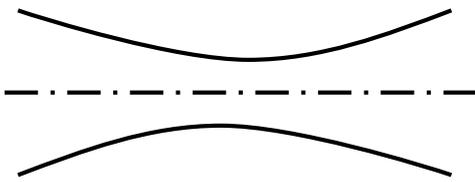


## Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Se  $M = 1$  allora  $dA = 0$  e si può avere sia  $dV = 0$ , che  $dV \neq 0$ . La sezione retta del condotto **deve avere** un **punto di stazionarietà** (minimo o massimo).

Evidentemente il moto **sonico** è una condizione molto particolare del flusso (pertanto è anche detto **critico**) che permette di passare da moto subsonico a supersonico e viceversa. La condizione **sonica** si raggiunge solo se la sezione retta del condotto ha un punto di **minimo** ( $dA = 0$ ), quindi in un ugello **convergente-divergente**.



Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se  $dA = 0$  **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico.

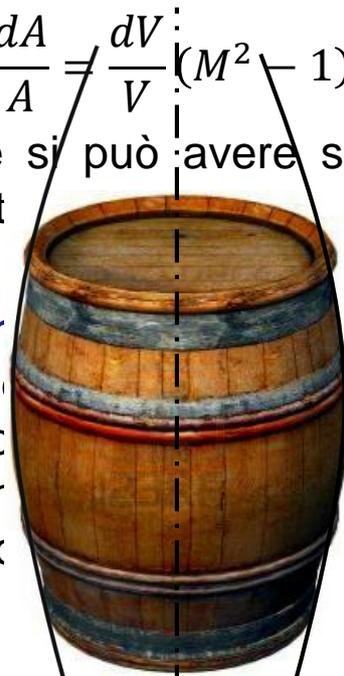
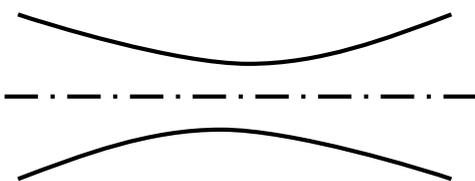


## Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$

Se  $M = 1$  allora  $dA = 0$  e si può avere sia  $dV = 0$ , che  $dV \neq 0$ . La sezione retta del condotto **deve avere** un **punto di stazionarietà** (minimo o massimo).

Evidentemente il moto **sonico** è una condizione molto particolare del flusso (pertanto è anche detto **critico**) che permette di passare da moto subsonico a supersonico e viceversa. La condizione **sonica** si raggiunge solo se la sezione retta del condotto ha un punto di **minimo** ( $dA = 0$ ), quindi in un ugello **convergente-divergente**.

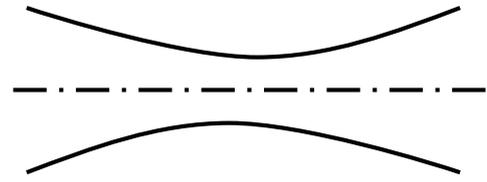


Se l'ugello è **divergente-convergente** (barilotto) anche se  $dA = 0$  **non è possibile** passare da moto subsonico a supersonico.



## Condotti ad area variabile

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1);$$



La condizione  $dA = 0$  (**gola del condotto**, per la quale l'area è minima) può comportare  $dV \neq 0$  solo se  $M = 1$ , potendosi comunque avere, anche per  $M = 1$ ,  $dV = 0$ .

Il punto  $M = 1$  (che comporta) è un **punto di biforcazione** della soluzione e cioè del comportamento del fluido poiché questo può:

- passare da moto **subsonico a supersonico**, ovvero ritornare ancora subsonico;
- passare da moto **supersonico a subsonico**, ovvero ritornare ancora supersonico.

In un condotto **convergente** ( $dA < 0$ ), un moto subsonico (risp. supersonico) può solo accelerare (risp. decelerare) **fino a  $M = 1$** .



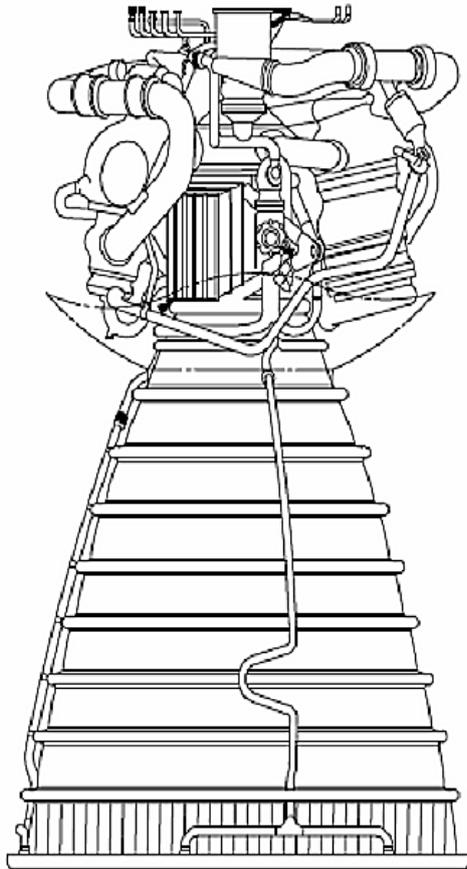
## Condotti ad area variabile



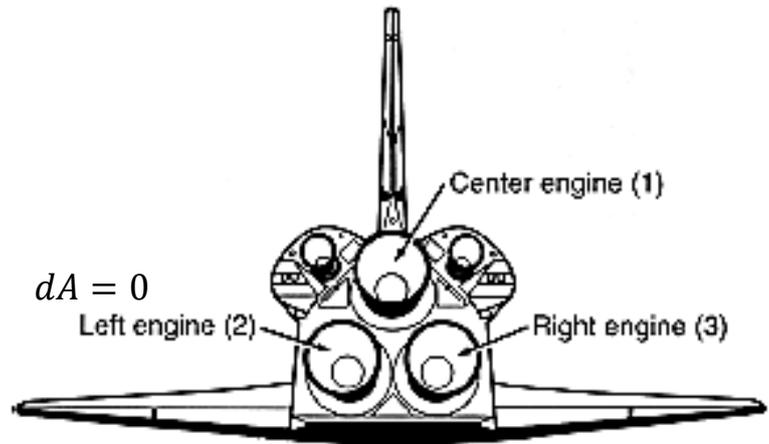
Space Shuttle as seen from its back with fired engines



# Condotti ad area variabile



Space Shuttle Main Engine



Main Engine Numbering System

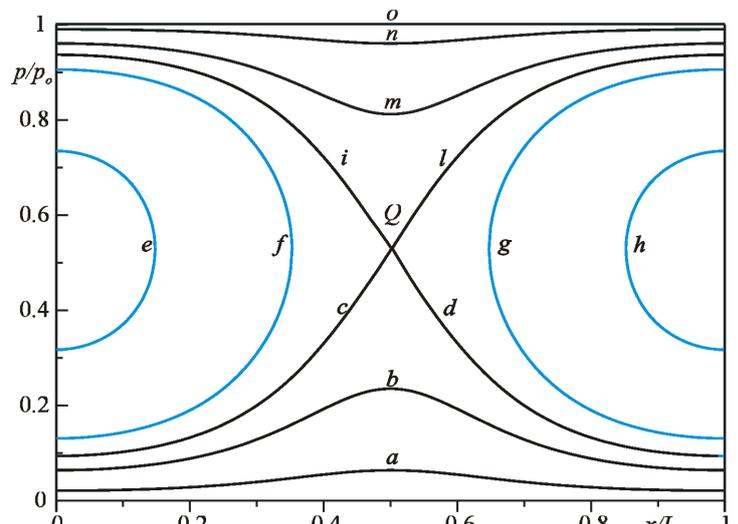
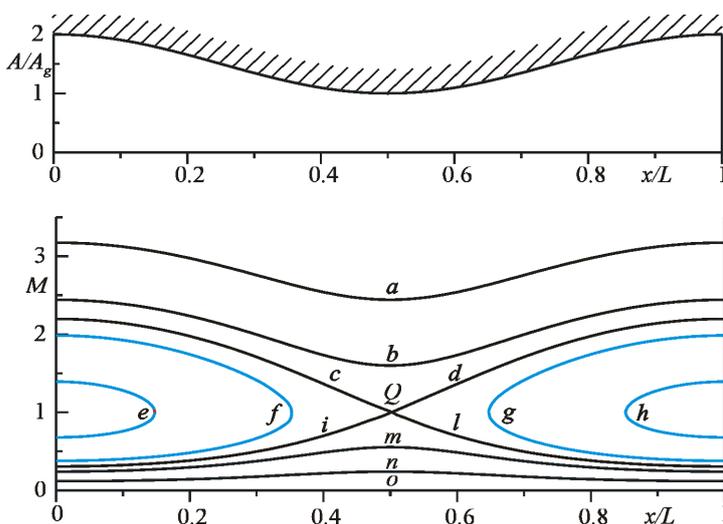


## Condotti ad area variabile gas più che perfetti

Per gas più che perfetto si possono trovare le seguenti relazioni:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} ; \quad p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Fissata una distribuzione delle aree si possono diagrammare **pressione** e numero di **Mach in funzione** della coordinata spaziale.



## Condotti ad area variabile gas più che perfetti

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} ; \quad p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Le curve colorate e, f, g e h **non** rappresentano **soluzioni** del problema perché non connettono gli stati a monte con quelli a valle e **prevedono**  $M = 1$  in una sezione diversa dalla sezione di **gola**.

