UNIVERSITY OF NAPLES **FEDERICO II** 1224 A.D.

Gasdinamica

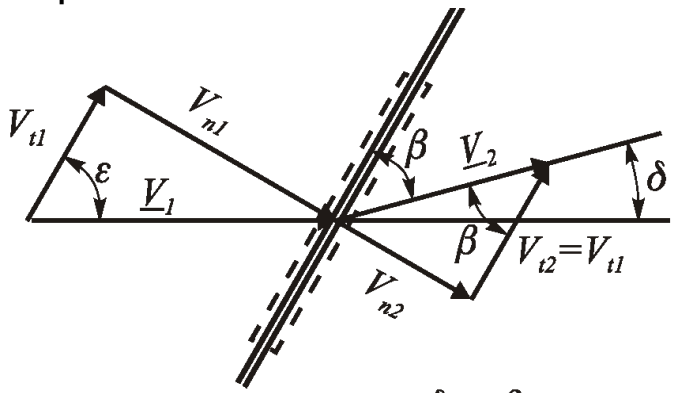
T. Astarita
astarita@unina.it
www.docenti.unina.it

Versione del 18.3.2024

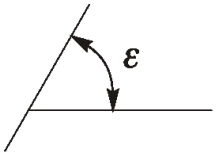
Onde d'urto oblique

Nella figura è mostrato il volume di controllo relativo al caso di un'**onda** d'urto **obliqua** stazionaria inclinata di un angolo $\epsilon \neq 90°$ (detto **angolo d'urto**) rispetto alla direzione della corrente a monte.

Questo caso si può **derivare** da quello dell'onda d'urto normale stazionaria, **cambiando** il **sistema di riferimento** inerziale rispetto al quale si scrivono le equazioni del bilancio.



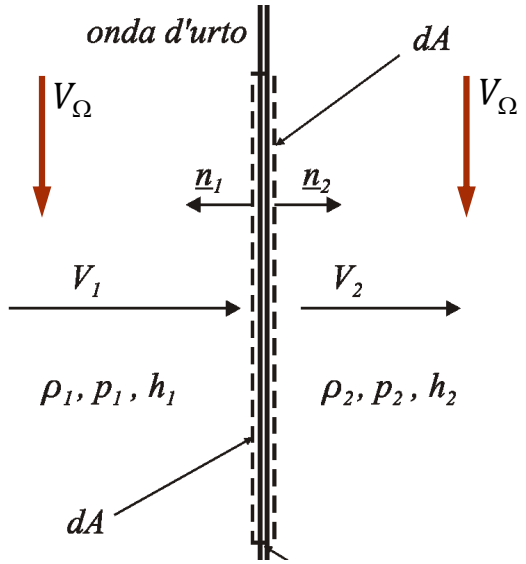
$$\varepsilon = \delta + \beta$$



Onde d'urto oblique

Si consideri nuovamente il volume di controllo dell'onda d'urto normale.

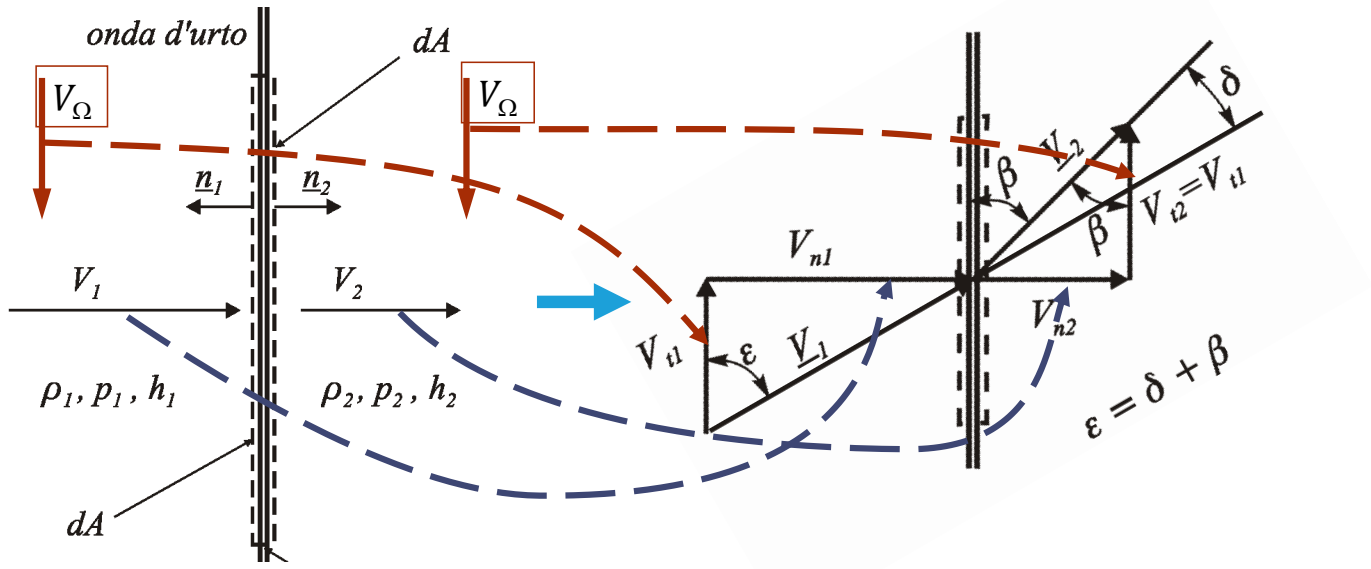
Il **nuovo** sistema di riferimento inerziale si muove dall'alto verso il basso (parallelamente all'onda d'urto) con **velocità V_Ω costante** rispetto al precedente.



Onde d'urto oblique

In questo **nuovo** sistema, sia il fluido a monte che quello a valle dell'onda appariranno dotati, oltre che delle preesistenti rispettive velocità V_1 e V_2, normali all'onda, anche di una **velocità parallela all'onda** che è la stessa per entrambi i fluidi ed è pari a:

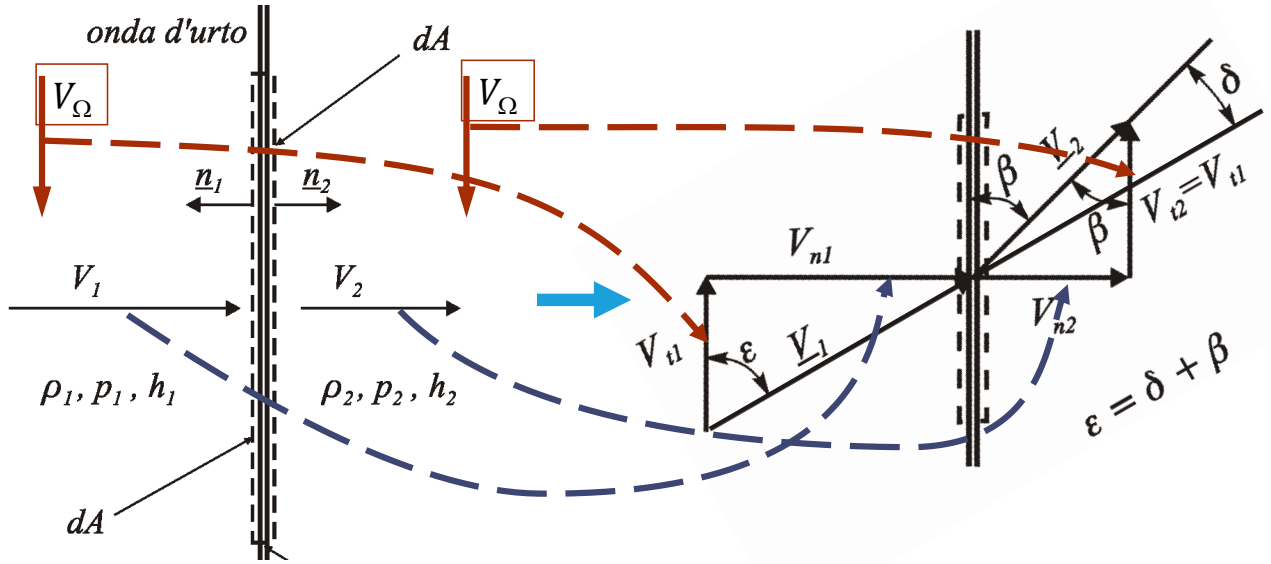
$$V_{t1} = V_{t2} = V_t = -V_\Omega$$



Onde d'urto oblique

Le grandezze statiche non cambiano nel nuovo sistema di riferimento, quindi, intuitivamente, **è possibile trattare l'onda** d'urto **obliqua** con le **stesse relazioni** dell'**onda** d'urto **normale** purché si considerino solamente le componenti normali delle velocità a monte e a valle.

Per comodità si ruota il sistema di riferimento.



Onde d'urto oblique

Sostituendo V_{n1} e V_{n2} rispettivamente al posto di V_1 e V_2 nell'equazione di conservazione della **massa** si ottiene:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

Dal bilancio della **quantità di moto**:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad \Rightarrow \quad p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

Che rappresenta la proiezione in **direzione normale** dell'equazione:

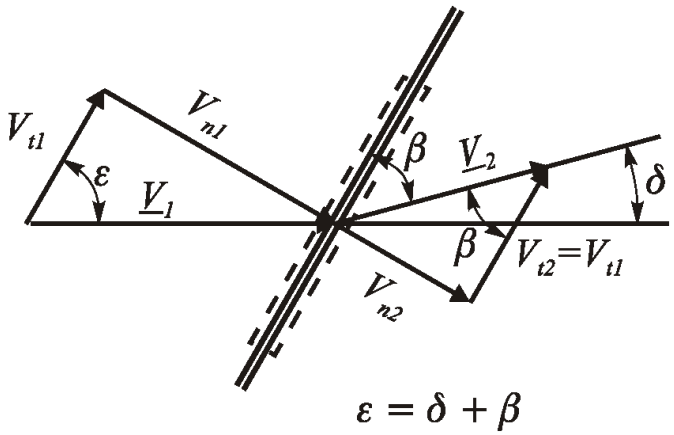
$$d\dot{m}\,(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1\underline{n}_1 + p_2\underline{n}_2) = 0$$

Dalla proiezione in direzione **tangenziale:**

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2}$$

Per la continuità si ritrova la **costanza** della velocita **tangenziale**:

$$V_{t1} = V_{t2}$$



Onde d'urto oblique

La **costanza** della componente **tangenziale** della **velocità**, associata alla **riduzione** della componente **normale**, genera la **deviazione** della corrente di un angolo δ (**detto angolo di deviazione della corrente**).

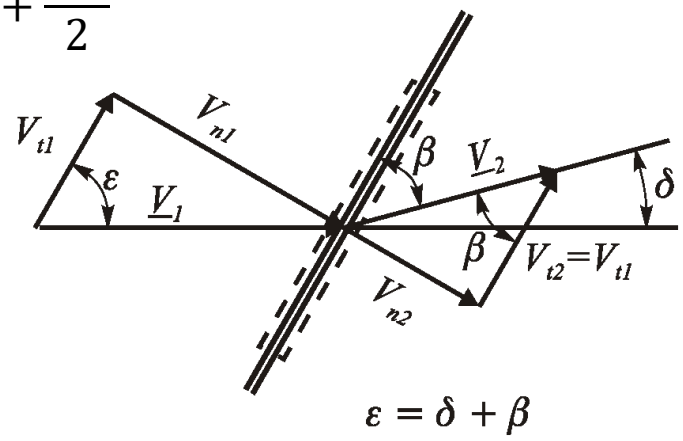
La corrente **ruota** verso **l'onda d'urto** stessa, cioè tende ad **adagiarsi** sull'onda.

Sostituendo V_{n1} e V_{n2} al posto di V_1 e V_2 nell'equazione di conservazione dell'**energia** si ottiene:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2}$$

Dalla costanza della componente **tangenziale** della velocità si può verificare che le due equazioni sono in realtà coincidenti:

$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2}\left[+\frac{V_{t1}^2}{2}\right] = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2}\left[+\frac{V_{t2}^2}{2}\right]$$



Onde d'urto oblique

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

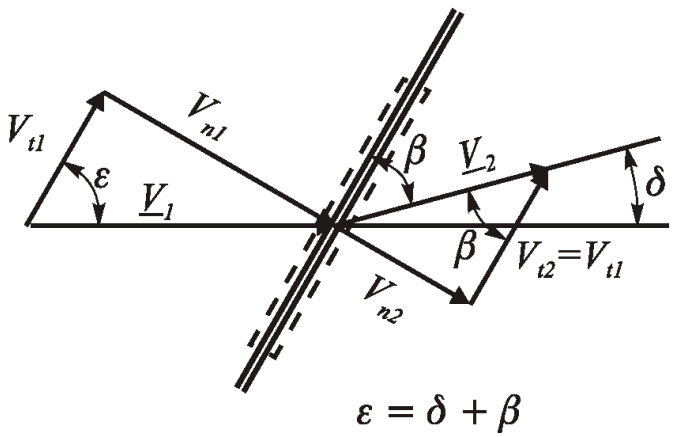
$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2}\left[+\frac{V_{t1}^2}{2}\right] = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2}\left[+\frac{V_{t2}^2}{2}\right]$$

Un'onda d'urto **obliqua** è quindi **riconducibile** ad un'onda d'urto **normale** purché si considerino le sole componenti normali della velocità.

Queste equazioni possono essere risolte in modo analogo al caso delle onde d'urto normali quindi si **possono riutilizzare le formule** già trovate.

Si deve però utilizzare la **componente normale** del numero di Mach a monte al posto di M_1.



Onde d'urto oblique

La **componente normale** (spesso detta semplicemente *Mach normale*) del numero di Mach a monte dell'onda d'urto è definita come:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin\epsilon}{a_1} = M_1 \sin\epsilon$$

Quella a valle è:

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \frac{V_2 \sin\beta}{a_2} = M_2 \sin\beta = M_2 \sin(\epsilon - \delta)$$

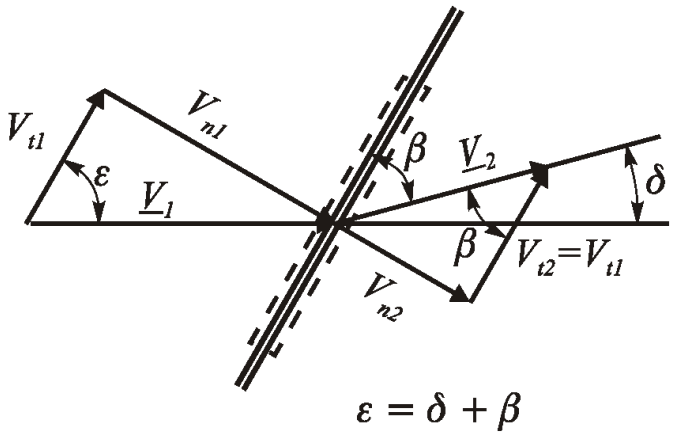
Evidentemente si ha:

$$M_{n1} > 1, \qquad M_{n2} < 1$$

E.g. con queste posizioni si ha:

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma-1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 - (\gamma-1)}$$

$$M_2^2 \sin^2\beta = \frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\epsilon + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2\epsilon - (\gamma-1)}$$



Onde d'urto oblique

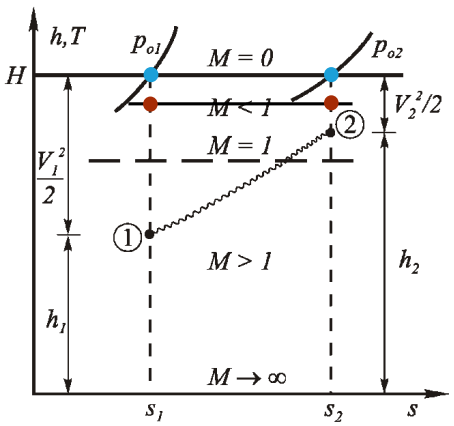
Non è formalmente corretto ricavare il rapporto delle **pressioni di ristagno**, dalla relazione relativa alle onde d'urto normali poiché questa non tiene conto della componente tangenziale della velocità.

Tuttavia, se sul piano *h-s* si individuano i due ***stati di ristagno normali***, essi risulteranno allineati in orizzontale, così come lo saranno i due stati totali i quali si ottengono aggiungendo ai primi lo stesso contributo entalpico relativo all'uguale componente tangenziale della velocità.

La differenza fra le entropie statiche non dipende dal sistema di riferimento e dalla:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1} = -R\ln\frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

si può verificare che anche il salto di pressione di ristagno è indipendente.



Onde d'urto oblique

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 \sin^2 \epsilon - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

Il **salto di pressione**, che è una misura della **forza** di un 'onda d'urto, aumenta con **l'angolo d'urto**.

Evidentemente l'onda d'urto **normale** ($\epsilon = 90° \rightarrow \sin \epsilon = 1$) è quella che provoca il **massimo salto di pressione** attraverso l'urto.

Viceversa l'onda diventa **evanescente** (salto di pressione unitario ovvero forza nulla) per il valore minimo dell'angolo d'urto che corrisponde all'**onda di Mach**. Cioè quando:

$$M_{n1} = M_1 \sin \epsilon = 1 \rightarrow \epsilon_{min} = \mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$$

Evidentemente valori di $\epsilon < \mu$ non **sono possibili** perché la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda **risulterebbe inferiore all'unità**.

μ è detto **angolo di Mach**.

Onde d'urto oblique

Partendo dalla costanza della componente tangenziale della velocità si può determinare il legame fra $M_1,\ \epsilon\ e\ \delta$:

$$\tan \delta = \frac{\cot \epsilon}{\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \epsilon - 1/M_1^2)} - 1} \qquad \left(\cot \epsilon = \frac{1}{\tan \epsilon} \right)$$

La **deviazione** della corrente è **nulla** quando:

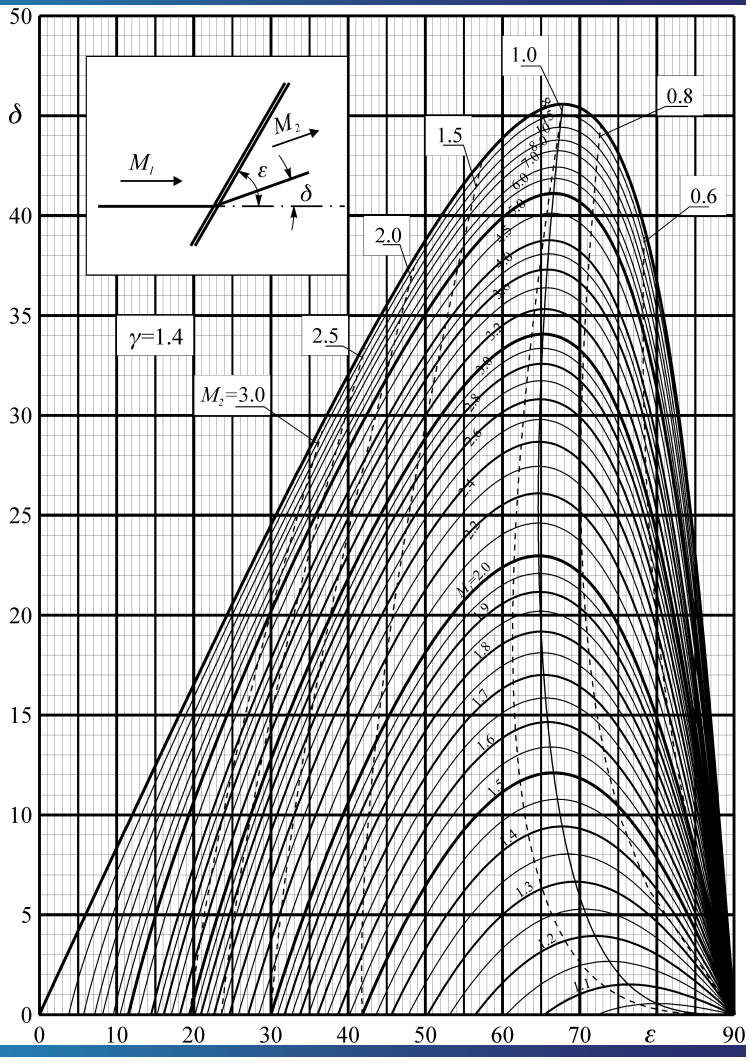
- $\cot \epsilon = 0 \rightarrow \epsilon = 90°$ che corrisponde al caso di **onda normale**;
- $\sin^2 \epsilon = 1/M_1^2 \rightarrow \epsilon = \epsilon_{min} = \mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$ che corrisponde al caso di **onda** di **Mach.**

Come già detto l'**onda di Mach** è quella per la quale il numero di Mach **normale** è **unitario** per cui essa **non comporta** alcuna **variazione** finita delle **proprietà termofluidodinamiche del fluido**.

Onde d'urto oblique

$$\tan\delta = \frac{\cot\epsilon}{\frac{\gamma+1}{2(\sin^2\epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

La **deviazione** è **nulla** per $\epsilon = \mu$ e per $\epsilon = 90°$; le curve hanno la forma di una **parabola** con la concavità rivolta verso il basso.



Onde d'urto oblique

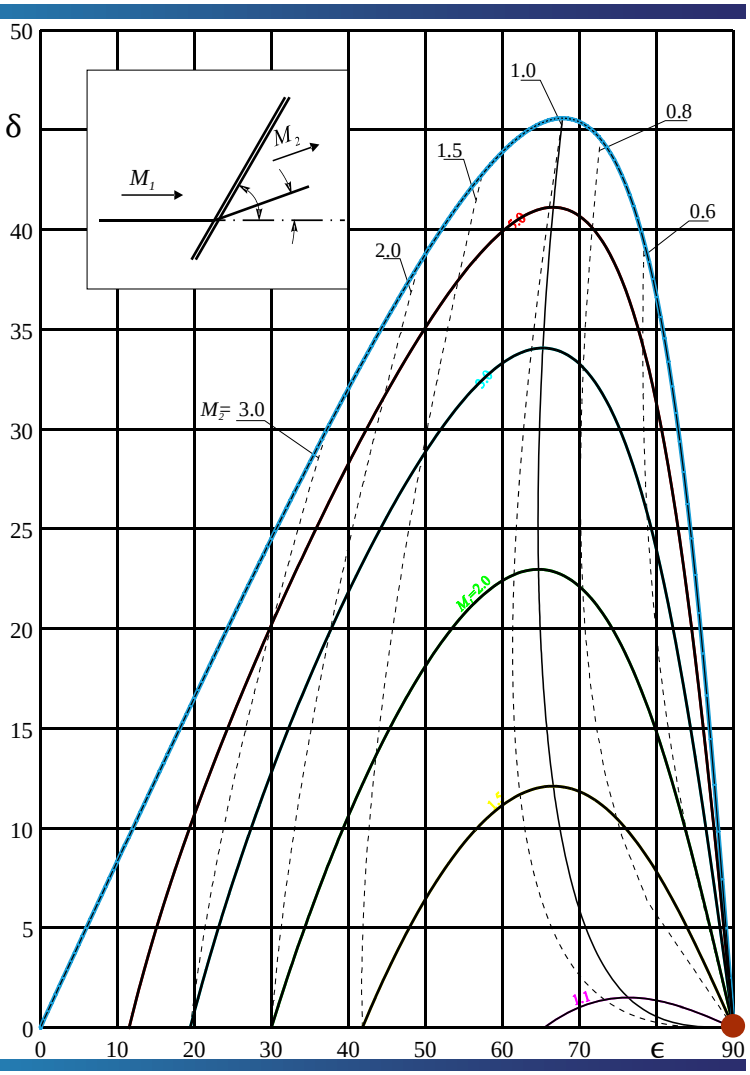
$$\tan\delta = \frac{\cot\epsilon}{\frac{\gamma+1}{2(\sin^2\epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

La **deviazione** è **nulla** per $\epsilon = \mu$ e per $\epsilon = 90°$; le curve hanno la forma di una **parabola** con la concavità rivolta verso il basso.

La *parabola* si **sposta** verso l'**alto ingrandendosi** all'**aumentare** del numero di **Mach**.

La *parabola* si **sposta** verso il **basso** rimpicciolendosi al **diminuire** del numero di **Mach**.

Nel limite di $M_1 \to 1$ la curva degenera nel punto $\delta = 0, \epsilon = 90$.



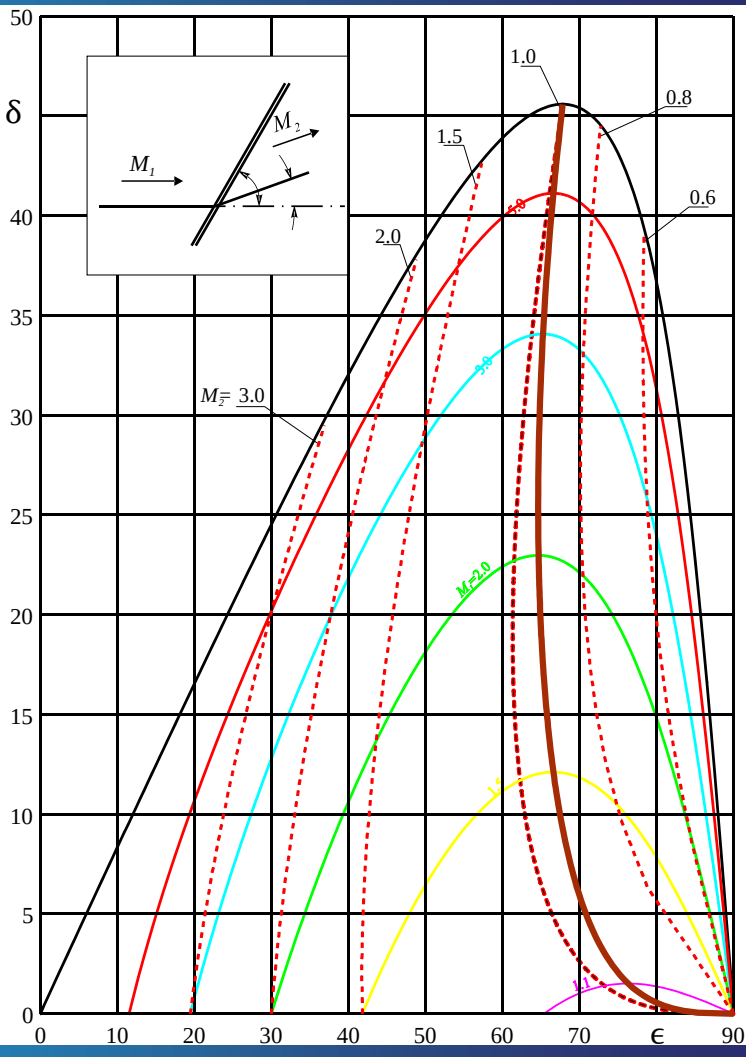
Onde d'urto oblique

$$\tan\delta = \frac{\cot\epsilon}{\frac{\gamma+1}{2(\sin^2\epsilon - 1/M_1^2)} - 1}$$

Le linee tratteggiate indicano le curve **isovalore** del numero di **Mach a valle**.

In particolare la curva relativa a $M_2 = 1$ separa le zone in cui il moto a valle è **supersonico** (a sinistra) da quelle in cui è **subsonico** (a destra).

La linea continua individua invece i luogo dei punti in cui l'**angolo di deviazione è massimo**.



Onde d'urto oblique

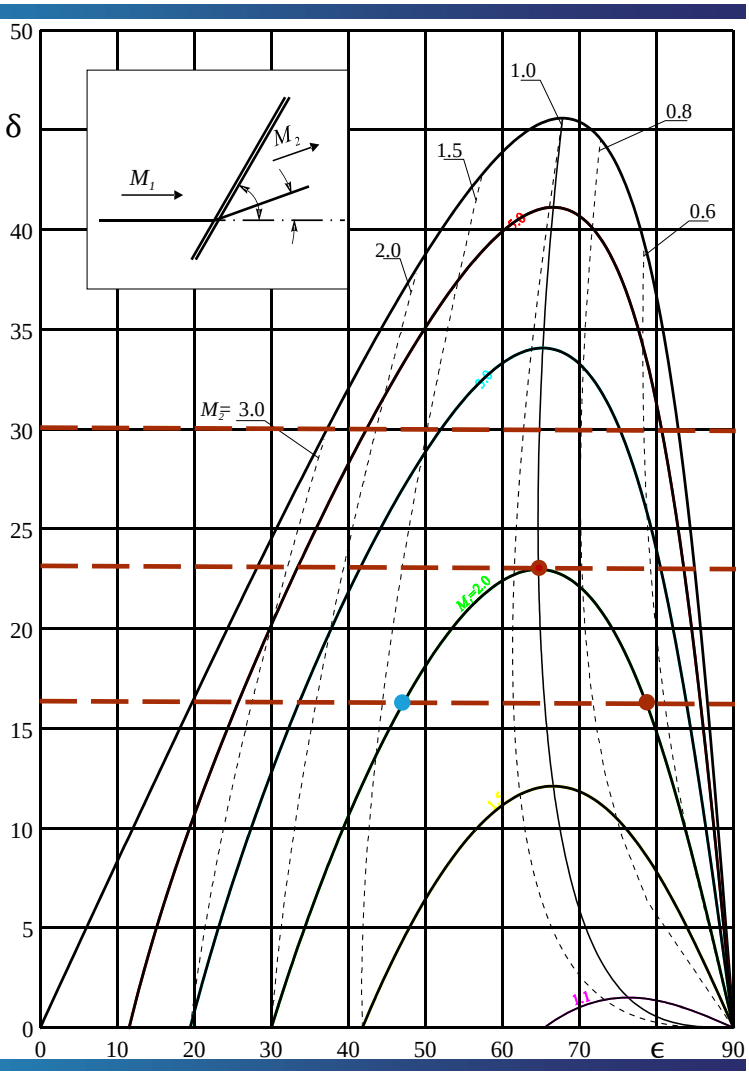
Per un **dato** numero di **Mach** (e.g. 2.0) e per δ **crescente** si hanno tre possibilità:

- **due soluzioni** con due valori distinti per l'angolo ϵ;
- **una sola soluzione**;
- **nessuna** soluzione.

La soluzione unica corrisponde alla **deviazione massima** δ_{max} per un dato numero di Mach.

Per $\delta > \delta_{max}$ non esistono soluzioni.

Se $\delta > \delta_{max}$ **non** è **possibile deviare** la corrente con una **semplice** onda d'urto obliqua.



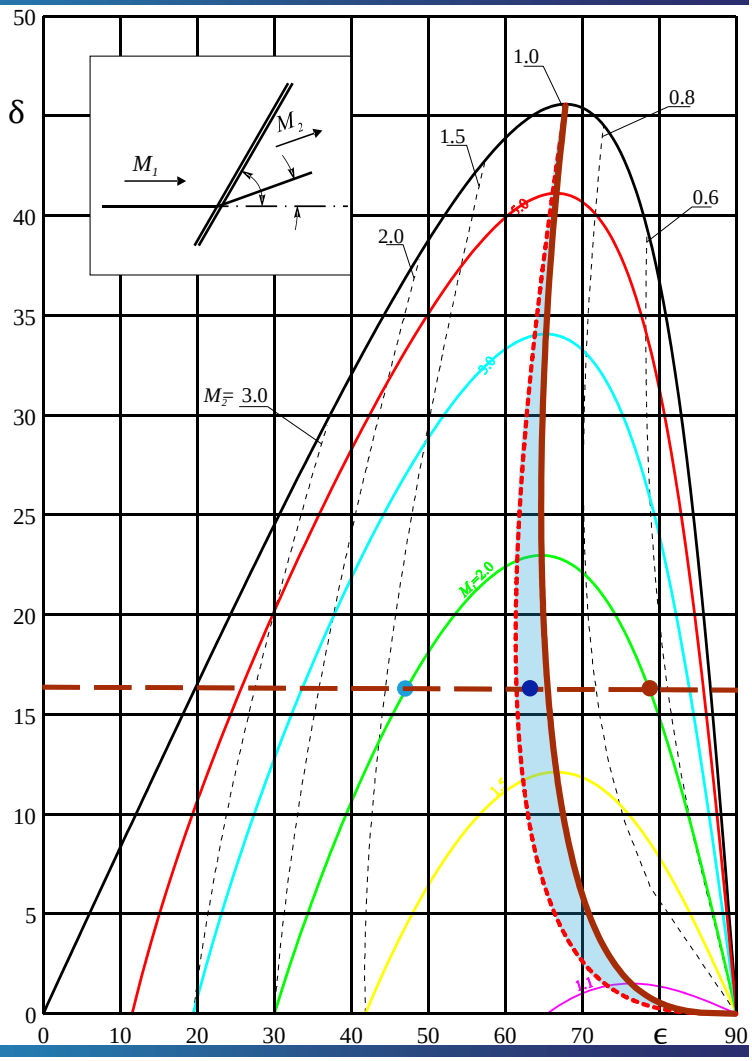
Onde d'urto oblique

Nel caso delle due soluzioni, la **prima** (valore di ϵ inferiore) è detta soluzione **debole** mentre l'altra è la soluzione **forte**.

Infatti, per un dato numero M_1, valori **maggiori** di ϵ corrispondono ad un più **elevato** numero di **Mach normale** e, di conseguenza, ad una maggiore **intensità** (**forza**) dell'urto.

La soluzione **forte** provoca sempre $M_2 < 1$;

La soluzione **debole** dà luogo quasi sempre a $M_2 > 1$, salvo che nella ***falce*** vicino all'angolo di deviazione massima della corrente per la quale $M_2 < 1$.

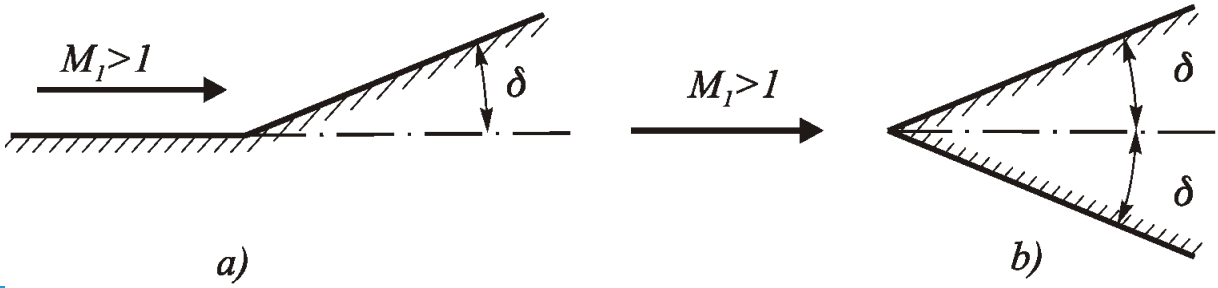


Moto supersonico su un diedro

Si consideri un flusso **supersonico** su una parete che devia bruscamente di un **angolo** δ per la presenza di una **concavità** o di un **diedro infinito** (la geometria è bidimensionale piano).

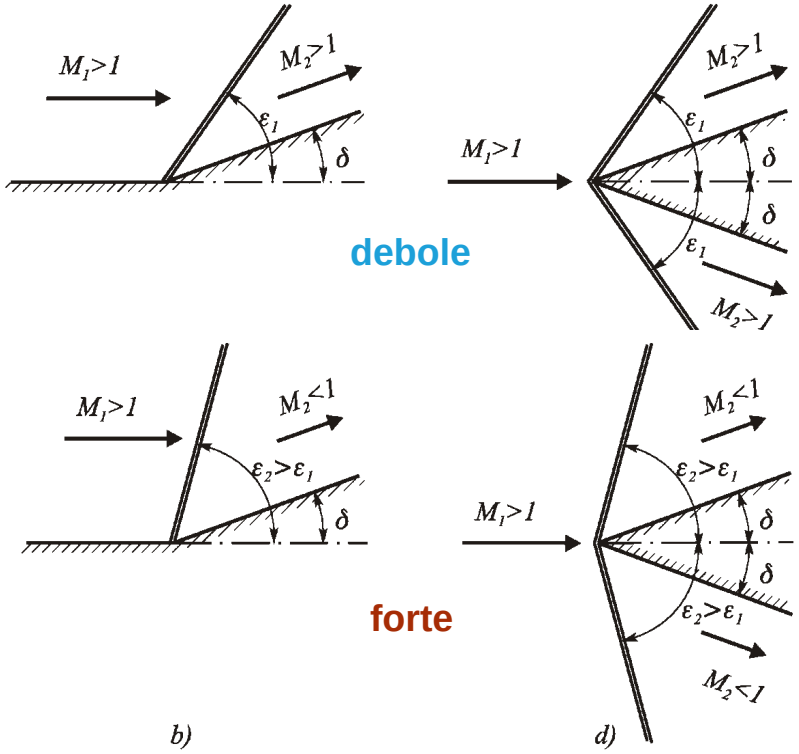
In dipendenza dai valori di $\boldsymbol{M_1}$ e di δ, sono possibili i tre comportamenti prima descritti.

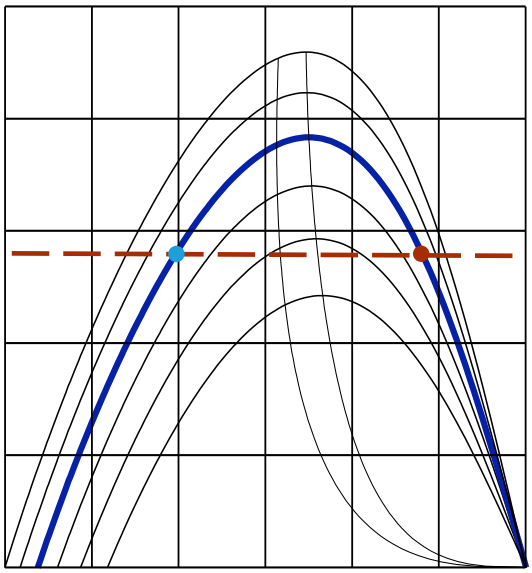
Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione $\boldsymbol{\delta}$ imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a $\boldsymbol{M_1}$; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.



Moto supersonico su un diedro

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione $\boldsymbol{\delta}$ imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a $\boldsymbol{M_1}$; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.

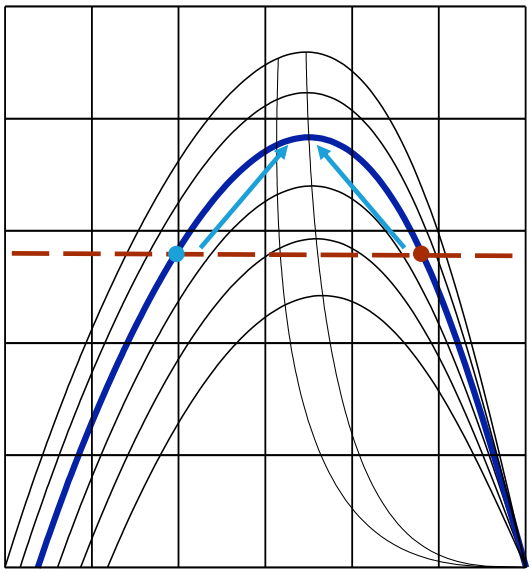


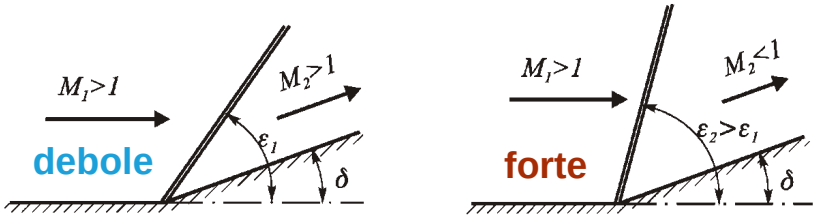


Moto supersonico su un diedro

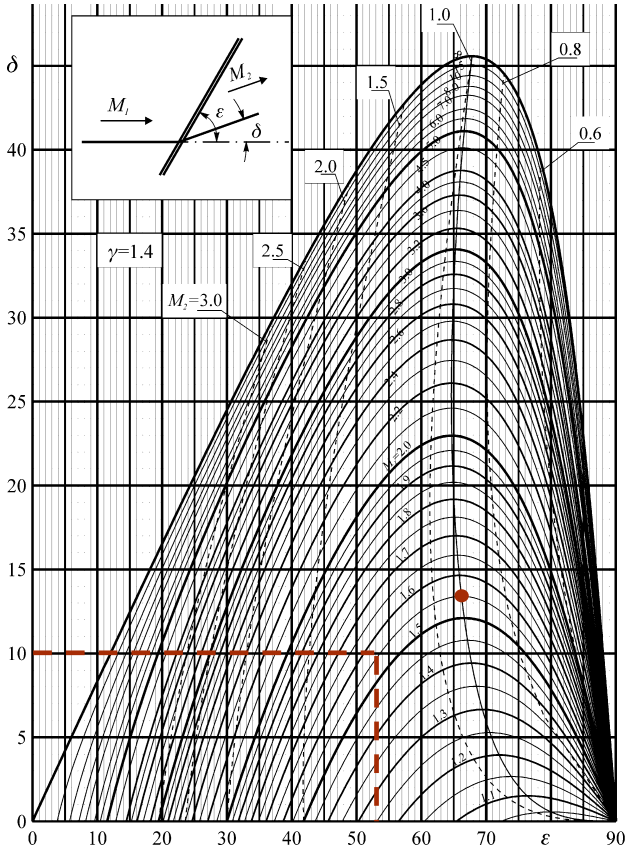
Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione $\boldsymbol{\delta}$ imposto sia **minore dell'angolo di deviazione massimo** relativo a $\boldsymbol{M_1}$; sono quindi possibili le due soluzioni **debole** e **forte**.

All'aumentare di δ, e/o al **diminuire** M_1, i due **angoli di inclinazione** ϵ relativi alla soluzione **debole** e a quella **forte**, tendono ad avvicinarsi sino a **coincidere** per $\delta = \delta_{max}$.





Moto supersonico su un diedro



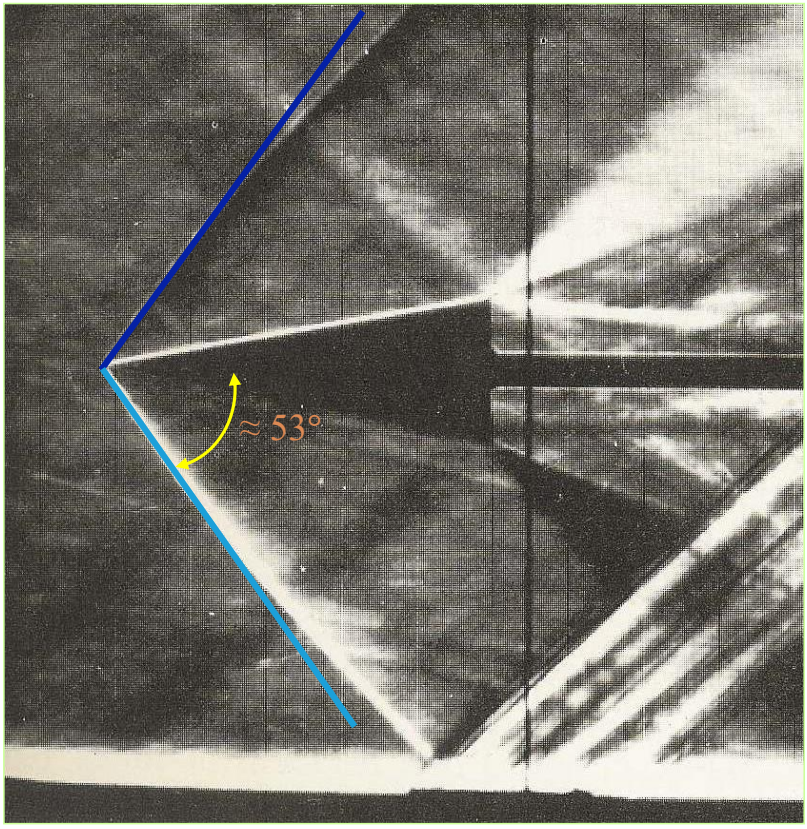


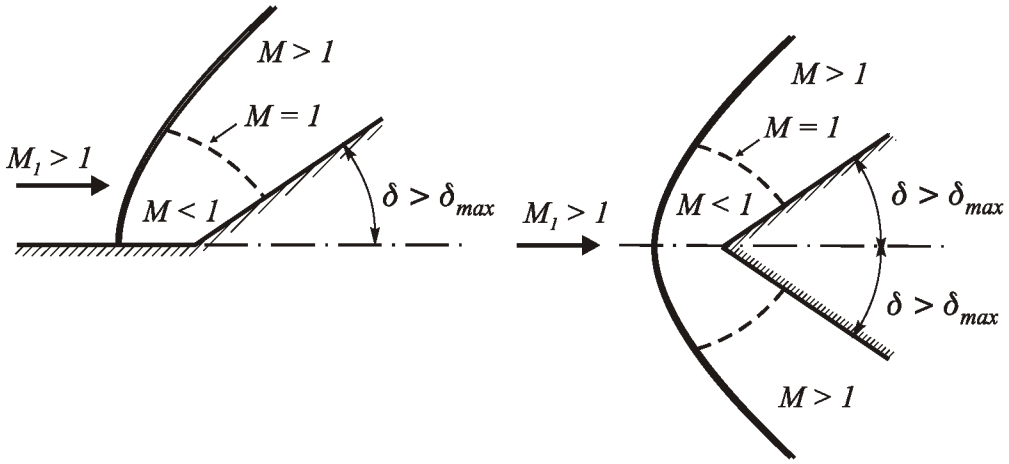
Immagine Schlieren di un flusso **supersonico** di aria su un **diedro** con $M_1 = 1.56$ *e* $\delta = 10°$ ($< \delta_{max}$). La soluzione in questo caso è **debole**.

Moto supersonico su un diedro

Per $\boldsymbol{\delta > \delta_{max}}$ **non esiste** un'onda **d'urto obliqua** in grado di deviare la corrente dell'angolo assegnato.

Per $\gamma = 1.4$, ciò accade sicuramente qualunque sia il numero di Mach a monte della corrente, se $\boldsymbol{\delta > 45.58°}$ che il limite per $\boldsymbol{M \to \infty}$.

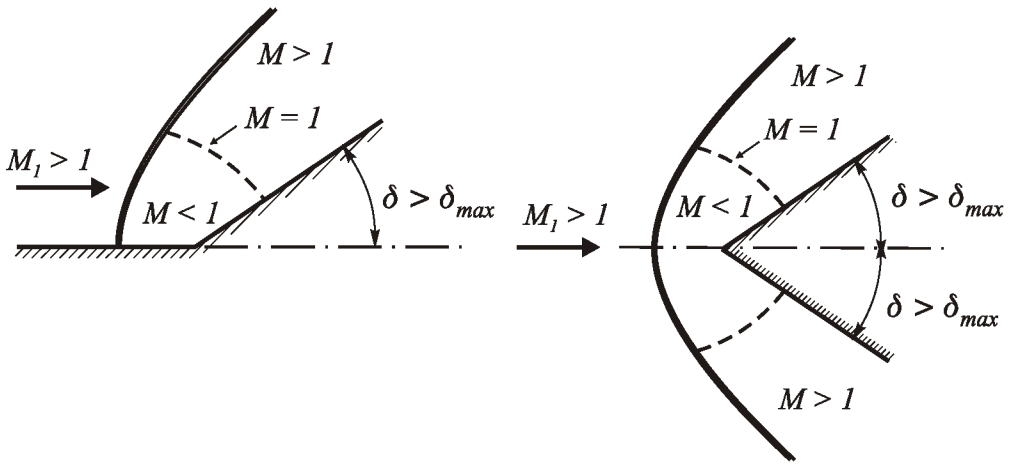
L'onda d'urto allora si stacca dal punto angoloso e si sposta a monte di quest'ultimo (**onda d'urto staccata**).



Moto supersonico su un diedro

Sulla **parete** (o sul **piano di mezzeria** nel caso del diedro) la **corrente** deve seguire la parete e **non** può essere **deviata**, pertanto l'onda d'urto sulla parete (o sul piano di mezzeria del diedro) deve essere necessariamente **normale** alla direzione della **corrente**.

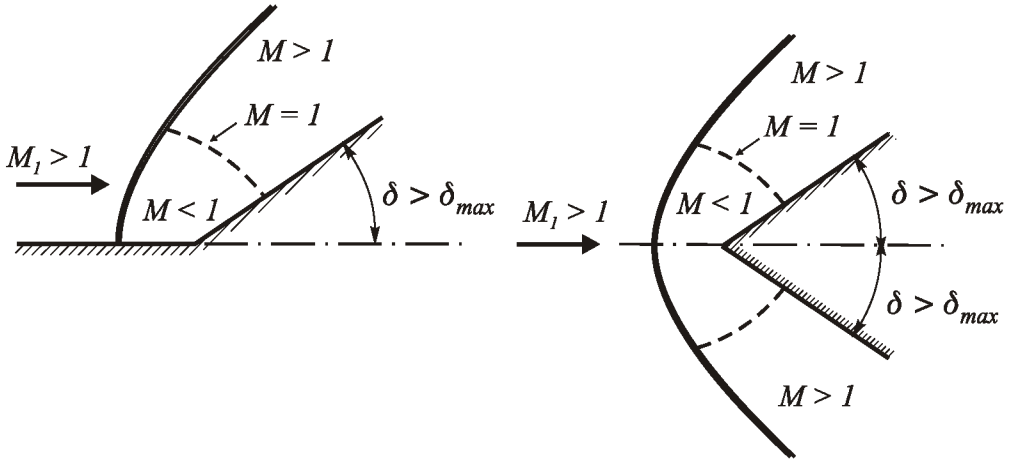
In prossimità dello **spigolo** il moto è subsonico permettendo, al flusso di deviare di un angolo maggiore di δ_{max}.



Moto supersonico su un diedro

L'onda d'urto diventa progressivamente **meno verticale** (ϵ diminuisce e l'onda diventa meno forte) **allontanandosi** dalla parete (o dal piano di mezzeria) ed il numero di Mach, a valle di essa, tende ad aumentare sino a poter diventare anche supersonico.

Le linee tratteggiate rappresentano le linee soniche (sulle quali M=1).



Moto supersonico su un diedro

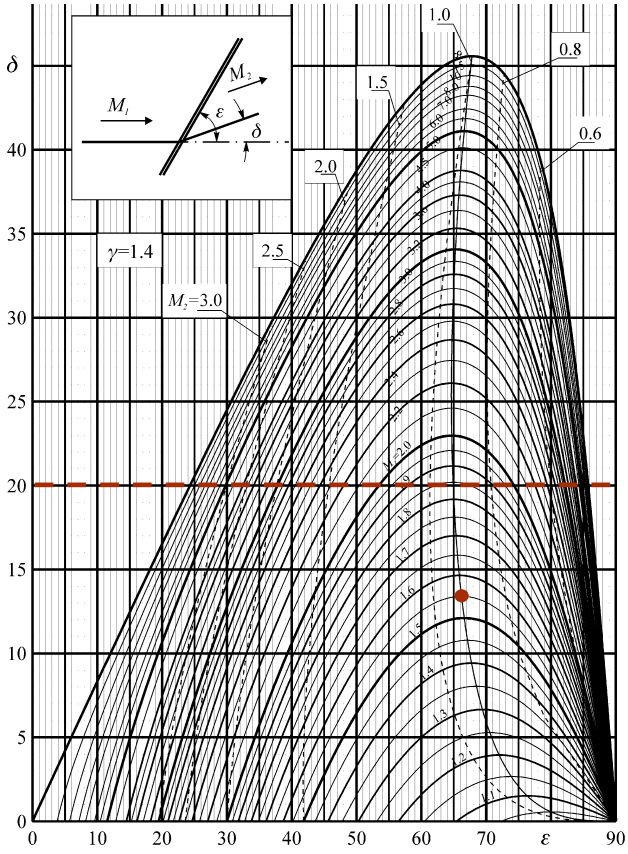
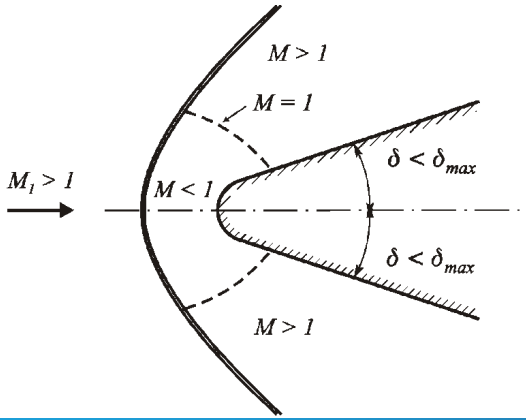


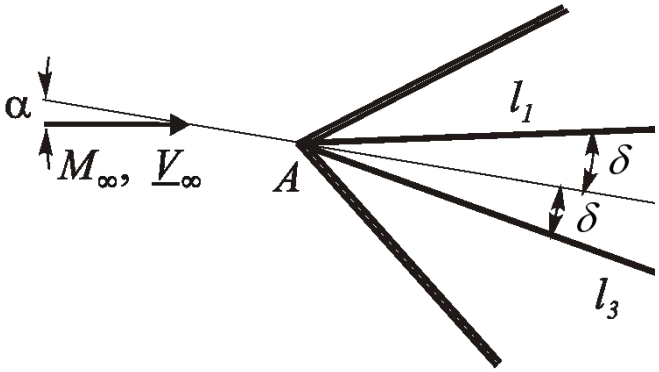
Immagine Schlieren di un flusso **supersonico** di aria su un **diedro** con $M_1 = 1.56$ *e* $\delta = 20°$ ($> \delta_{max}$). Onda d'urto è **staccata** dal corpo.

Moto supersonico su un diedro

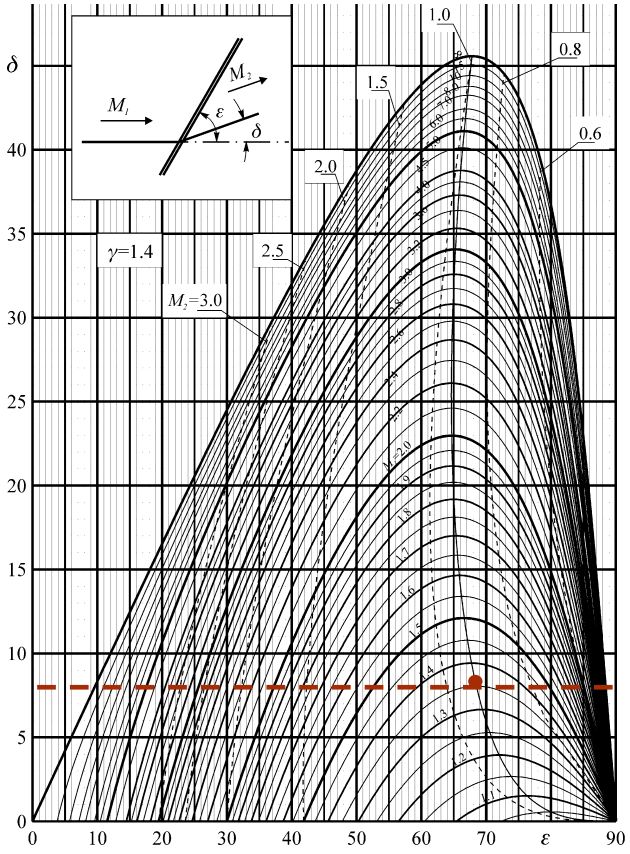
Un corpo **tozzo** (non affilato), in una corrente **supersonica**, anche nel caso in cui l'angolo di inclinazione delle sue pareti a valle del bordo di attacco risulti **minore** dell'angolo di **deviazione massimo**, comporterà senz'altro la presenza di un'onda **d'urto staccata** dal corpo in quanto l'angolo di deviazione sull'asse risulta maggiore di δ_{max}.

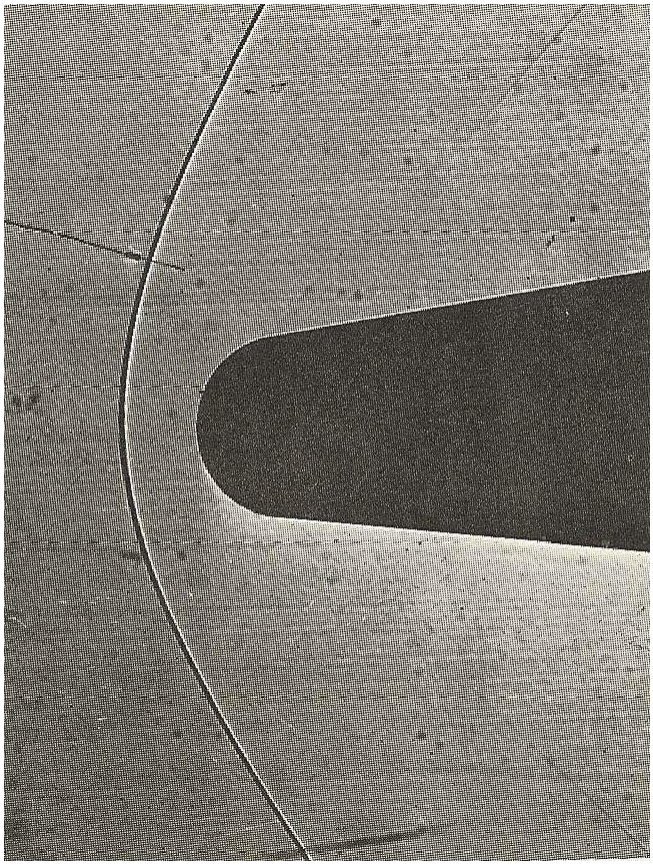
In ogni caso, se un corpo in regime supersonico deve avere un **basso coefficiente di resistenza** (e.g. un profilo alare) è preferibile che il suo **bordo di attacco** sia quanto più possibile **affilato** in modo generare **piccole** deviazioni della corrente e onde d'urto relativamente **deboli**.





Moto supersonico su un diedro



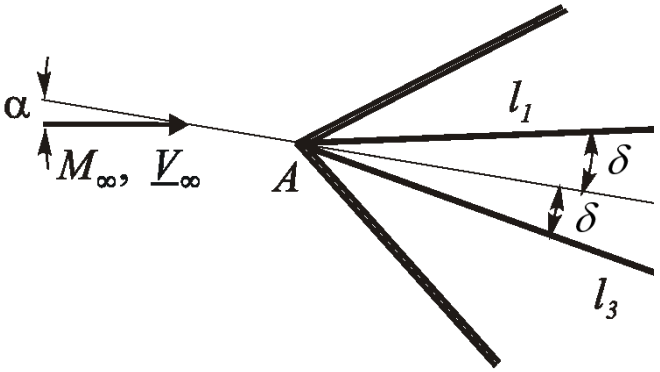


Shadowgraph di un'onda d'urto su un diedro smussato $M_1 = 1.36$ e $\delta = 8°$ ($< \delta_{max}$). Onda d'urto è **staccata** dal corpo.

Moto supersonico su un diedro

Nel caso di un **diedro** con angolo di semiapertura δ posto ad un angolo di attacco α rispetto alla direzione della corrente **supersonica**, se i due angoli di deviazione della corrente (rispettivamente $\delta - \alpha$ per la zona superiore e $\delta + \alpha$ per la zona inferiore) sono **entrambi inferiori** a δ_{max}, le **due soluzioni** per i campi di moto **superiore** ed **inferiore** sono **indipendenti** una dall'altra, cioè, a differenza di quanto accade in moto subsonico, i due moti **non si influenzano**.

Se, invece, la deviazione fosse più **elevata** (e.g. se $\delta + \alpha > \delta_{max}$), l'onda d'urto si **staccherebbe** dal diedro ed i due campi di moto **non** sarebbero più **indipendenti**; il campo di moto inferiore influenzerebbe il superiore e viceversa.



La relazione di Prandtl e la polare d'urto

Anche per le onde d'urto **oblique** esiste la relazione di **Prandtl**:

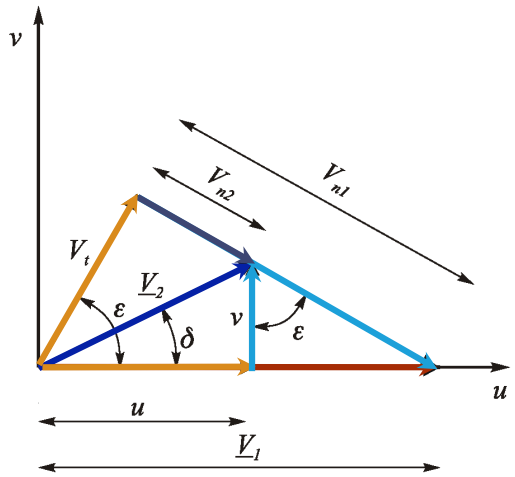
$$V_{n1}V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}V_t^2$$

Evidentemente questa relazione, per $V_t = 0$, coincide con quella già trovata per l'onda d'urto normale.

Nella figura sono indicate le due velocità a **monte** ed a **valle** di un'onda d'urto **obliqua** e le loro **componenti** **normali** e **tangenziale**.

Per la V_2 sono indicate anche le due componenti u, in **direzione** della V_1, e v **normale** ad essa.

Il piano (u-v) si chiama piano **odografo**.



La relazione di Prandtl e la polare d'urto

Sostituendo le seguenti:

$u_1 = V_1$

$V_{t1} = V_{t2} = V_t = V_1 \cos\epsilon$

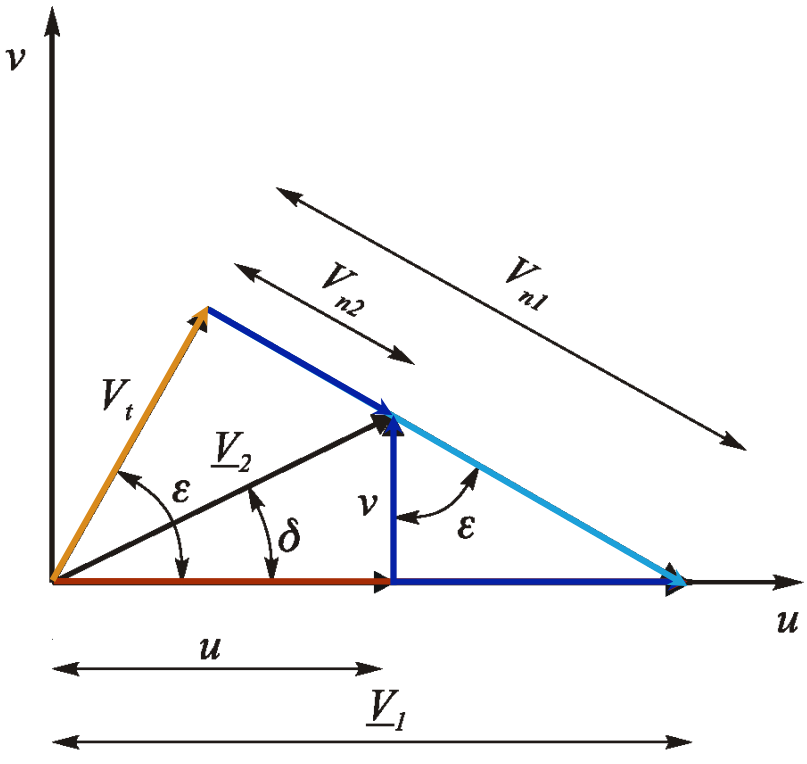
$V_{n1} = V_1 \sin\epsilon$

$V_{n2} = V_1 \sin\epsilon - \dfrac{v}{\cos\epsilon}$

$\tan\epsilon = \dfrac{V_1 - u}{v}$

nella relazione di Prandtl si trova:

$$v^2 = (V_1-u)^2 \frac{V_1 u - a^{*2}}{\frac{2V_1^2}{\gamma+1} - V_1 u + a^{*2}}$$



Per ogni valore di a^* e di $V_1 > a^*$ questa espressione rappresenta, sul piano odografo (u-v), il luogo dei punti a valle dell'onda d'urto obliqua.

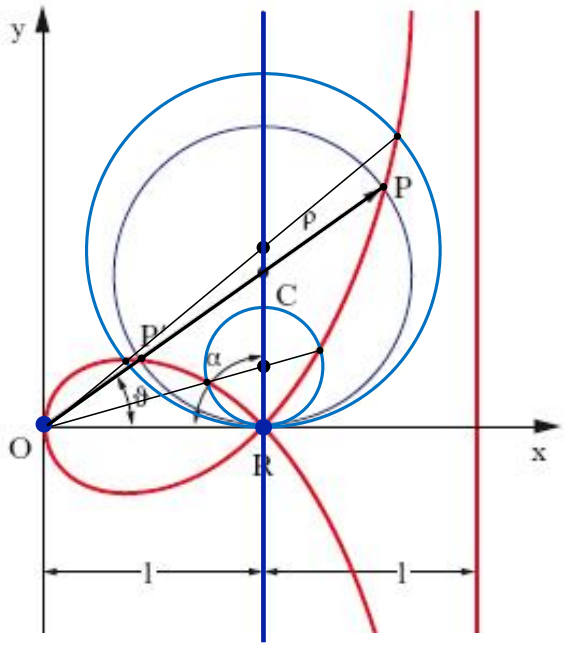
La relazione di Prandtl e la polare d'urto

$$v^2 = (V_1 - u)^2 \frac{V_1 u - a^{*2}}{\frac{2V_1^2}{\gamma+1} - V_1 u + a^{*2}}$$

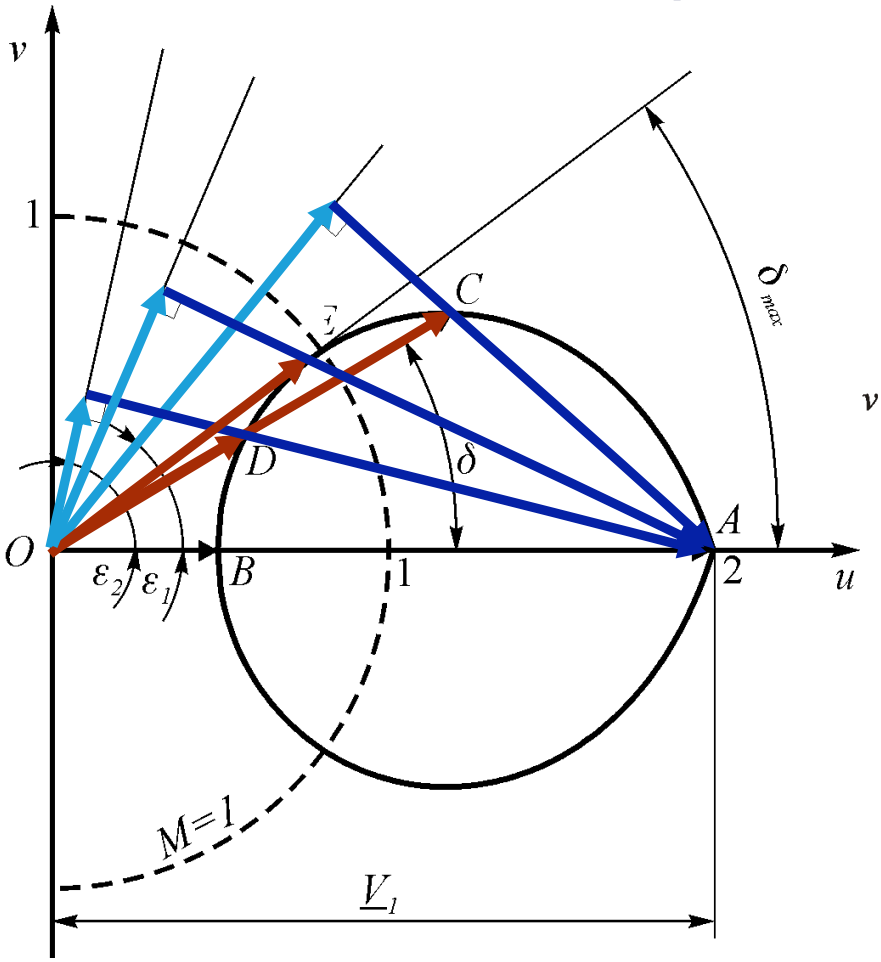
La formula precedente, che restituisce due valori di v uno positivo l'altro negativo corrispondenti alla deviazione verso l'alto o verso il basso è l'equazione di una curva **strofoide**, o **polare d'urto**.

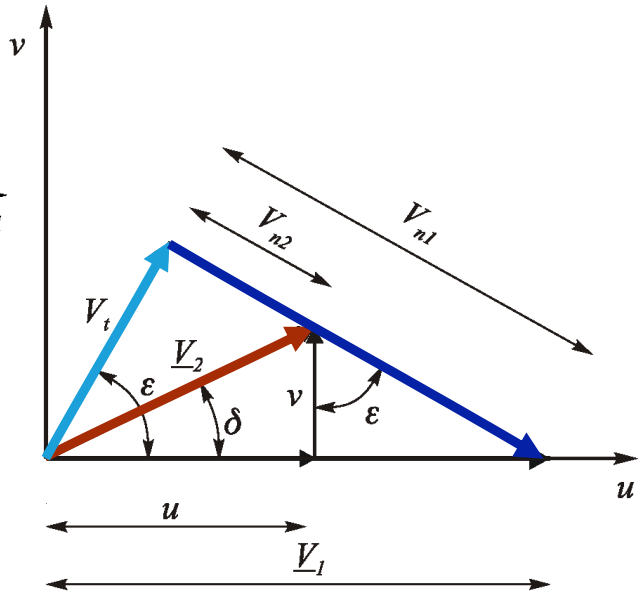
- *O*: polo;
- *R*: punto fisso;
- Asse *RC*: curva generatrice;

Ruotando la retta *OP* si trovano i punti P e P' tali che: $\overline{P'C} = \overline{CP} = \overline{CR}$



La relazione di Prandtl e la polare d'urto





La relazione di Prandtl e la polare d'urto

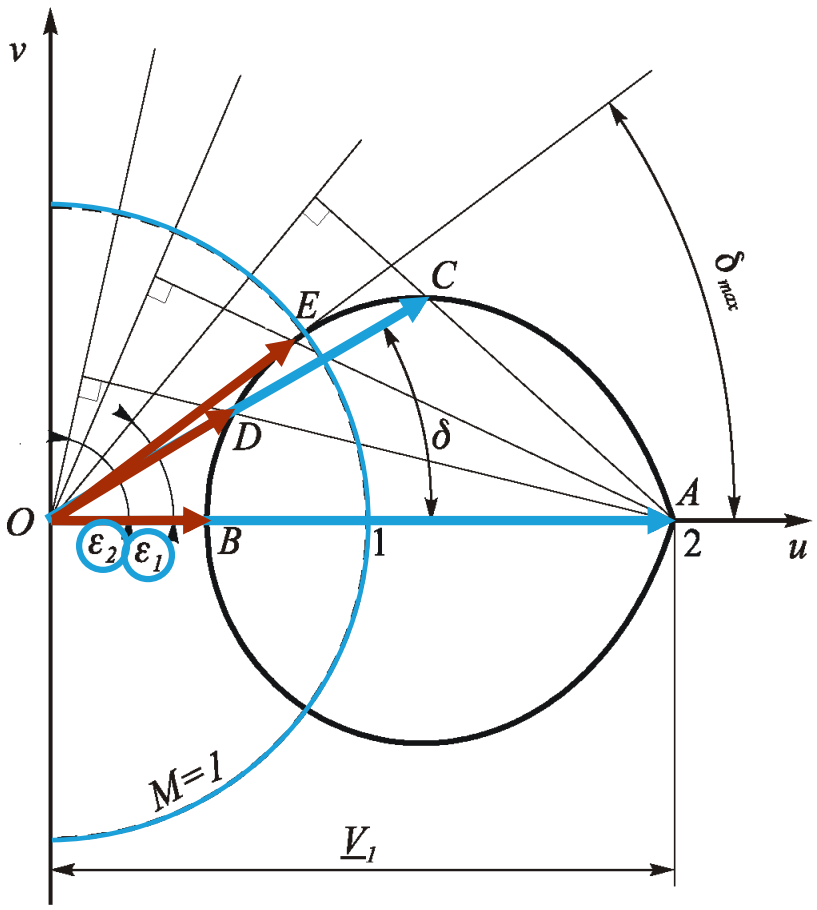
Per ogni $\delta < \delta_{max}$ esistono due soluzioni:

- la soluzione debole OC che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo ϵ_1;
- la soluzione forte OD che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo $\epsilon_2 > \epsilon_1$.

per $\delta = 0$ le due soluzioni si riducono:

- all'onda di Mach OA
- all'onda d'urto normale OB.

Nella figura è stata anche indicata l'unica soluzione OE esistente per $\delta = \delta_{max}$.

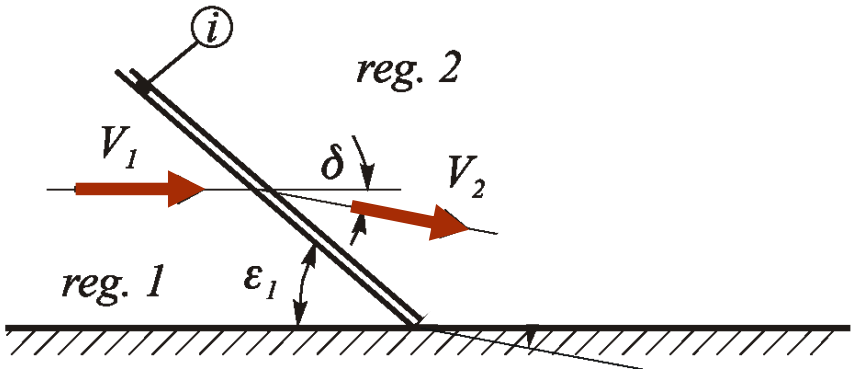


Riflessione di onde d'urto

In figura è mostrata un'onda obliqua **incidente** su una superficie piana. **Prima** dell'onda d'urto (reg. 1) la **corrente** è **parallela** alla **superficie** e l'onda devia la corrente di un angolo δ **verso la parete**.

La direzione della corrente a valle dell'onda (reg. 2) è **incompatibile** con la presenza della parete, è deve necessariamente esistere un evento che **raddrizza** la corrente (deviandola verso l'alto di un angolo pari a $-\delta$), riportandola quindi parallela alla parete.

Questo evento è un'altra onda d'urto obliqua, che parte dal punto di incidenza dell'onda i sulla parete e che viene detta **onda riflessa**.



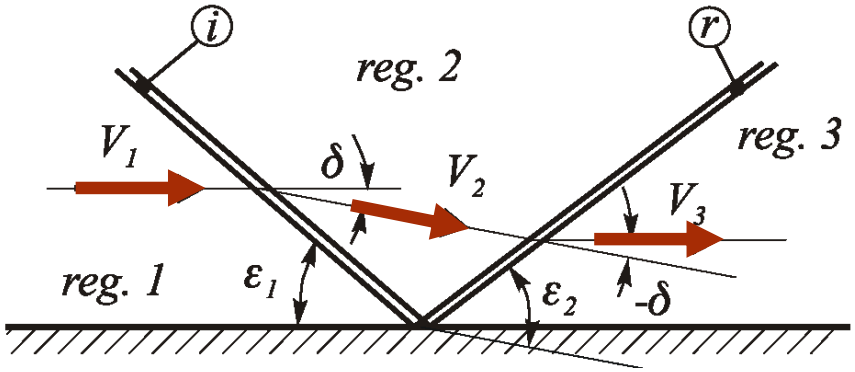
Riflessione di onde d'urto

Ovviamente sarà $M_1 > M_2 > M_3$ (e anche $V_1 > V_2 > V_3$ e $p_3 > p_2 > p_1$).

Una riflessione del tipo indicato in figura si chiama **riflessione regolare**.

La fenomenologia è analoga anche se l'onda incidesse su un piano di simmetria

Non si tratta di una riflessione **speculare** in quanto, in generale, $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 - \delta$; ϵ_2 è tale che l'onda consenta alla corrente di raddrizzarsi.

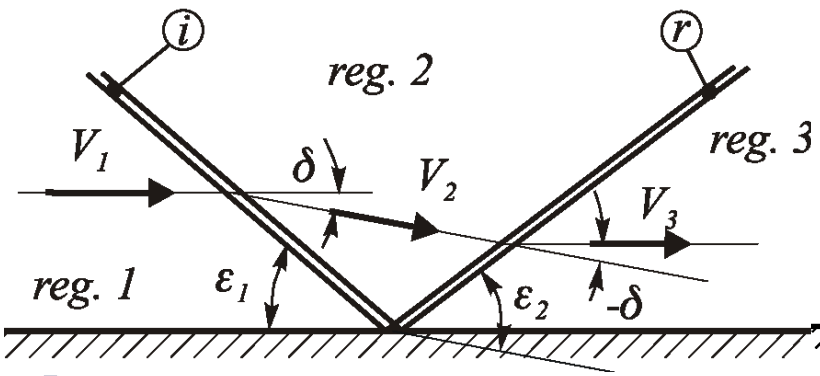


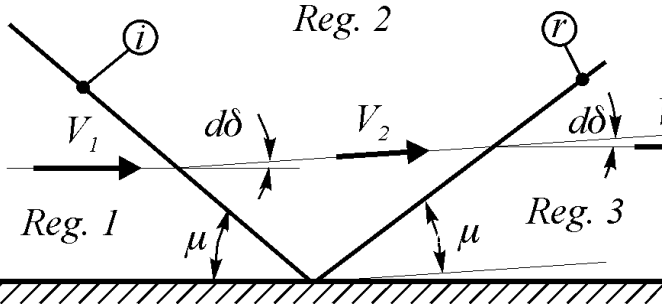
Riflessione di onde d'urto

I due angoli ϵ_1 e ϵ_2 sono uguali (riflessione **speculare**) solo se l'onda d'urto è un'**onda di Mach**. Infatti, in questo caso l'angolo di deviazione δ è infinitesimo e quindi: $\epsilon_1 = \mu_1 = \epsilon_2 = \mu_2$.

Un'onda di Mach di **compressione** (deviazione **infinitesima** verso il basso; Fig. di sinistra) si **riflette** come onda di Mach di **compressione** (deviazione infinitesima verso l'alto) con intensità dell'urto infinitesima.

Un'onda di Mach di **espansione**, che ha una prima deviazione **infinitesima** verso l'alto, si **riflette** come onda di Mach di **espansione**, con una deviazione **infinitesima** verso il basso.

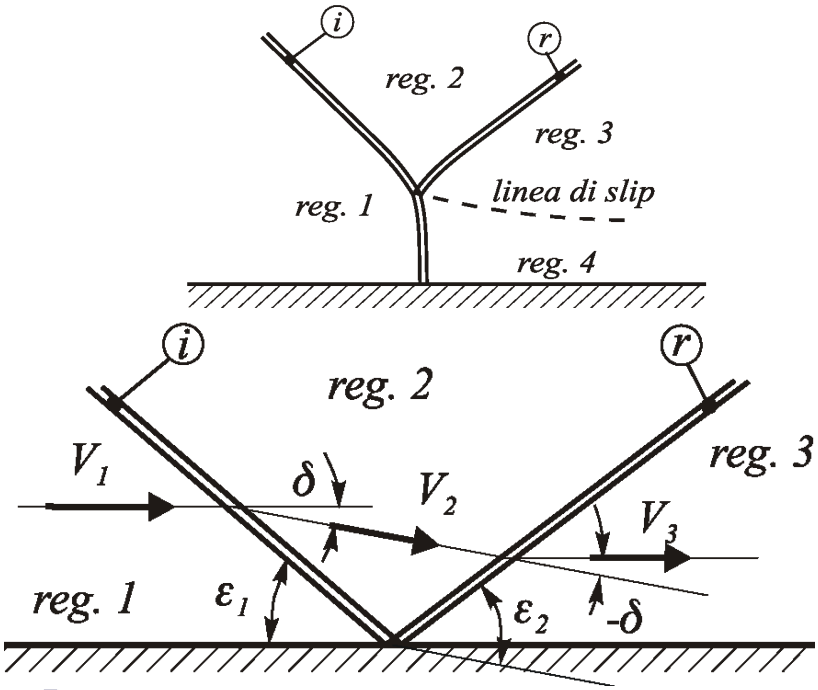


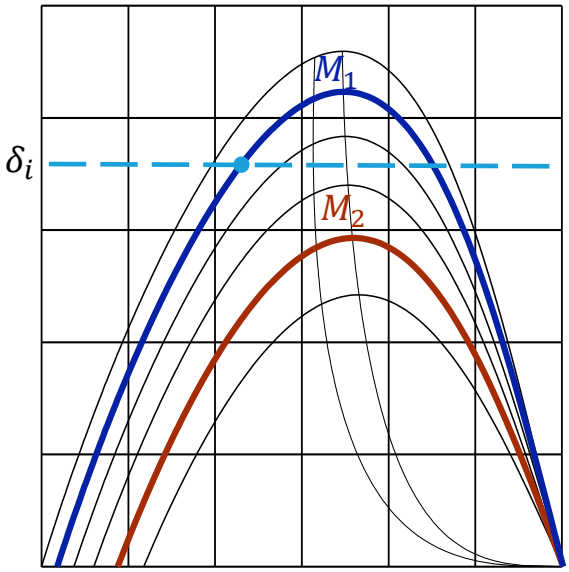


Riflessione di onde d'urto

Visto che $\delta_{max}(M)$ è una funzione strettamente **crescente** di M e $M_2 < M_1$, si può verificare che, pur essendo $M_2 > 1$, $\delta_i > \delta_{max}(M_2)$.

In questi casi, una riflessione **regolare non** è **possibile** e si ha una **riflessione** a **λ** (rovesciata) anche detta **riflessione alla Mach**.

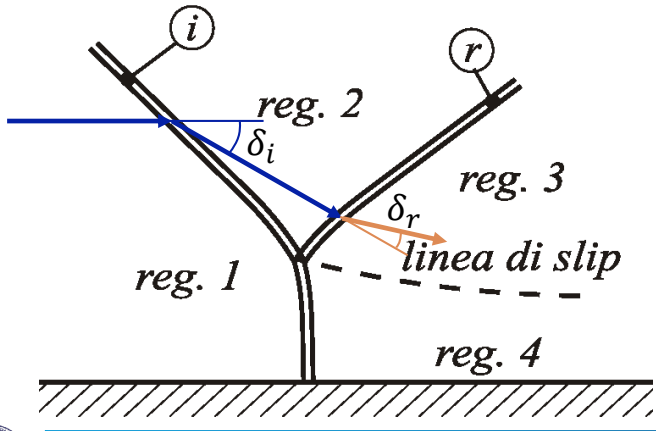


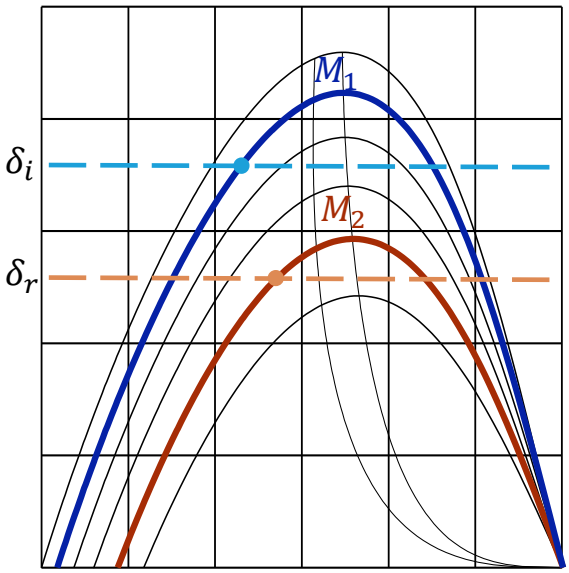


Riflessione di onde d'urto

A causa della **diversa** inclinazione delle varie onde d'urto (in alcuni casi anche curve) il vettore **velocità** varierà da punto a punto e con esso anche l'entropia (dal teorema di Crocco il moto è rotazionale).

Come si vede dalla figura la **rotazione** imposta dall'onda **riflessa** (passando dalla zona 2 alla 3) è **minore** di quella imposta dall'onda **incidente** ($\delta_r < \delta_i$).





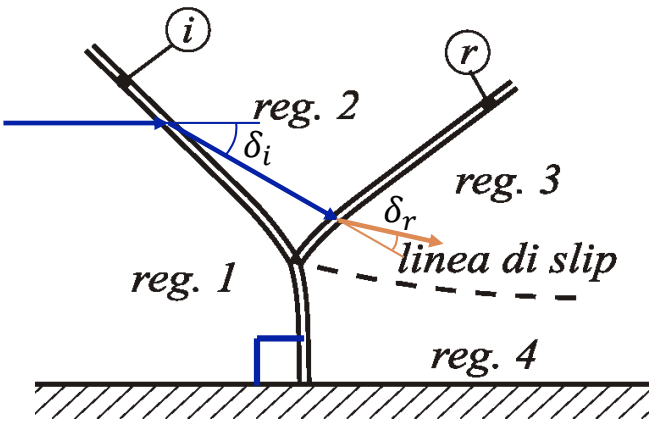
Riflessione di onde d'urto

L'onda **incidente** deve diventare **normale** in prossimità della parete perché non è possibile una riflessione regolare.

Attraverso la **linea di slip** (anche detta superficie **libera** o di linea di **contatto**) la **direzione** della **velocità** e la **pressione** rimangono **costanti** mentre le altre grandezze possono avere dei salti.

La linea di slip, che è coincidente con una linea di corrente, deve essere **curva** per bilanciare il **gradiente di pressione** provocato dalla maggiore **forza** dell'onda **normale** rispetto alle **due oblique**.

Nella regione 4 il moto è **subsonico** e tende ad **accelerare** per la convergenza dell'area di passaggio.

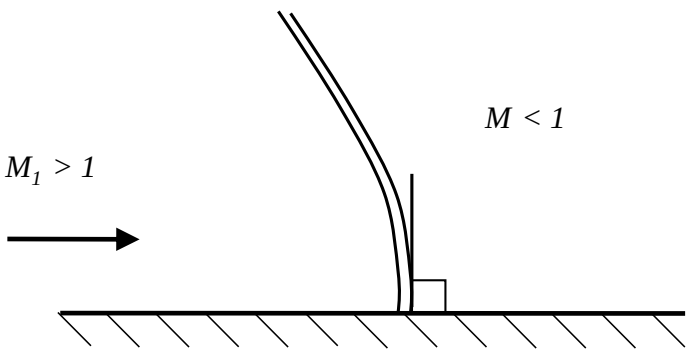


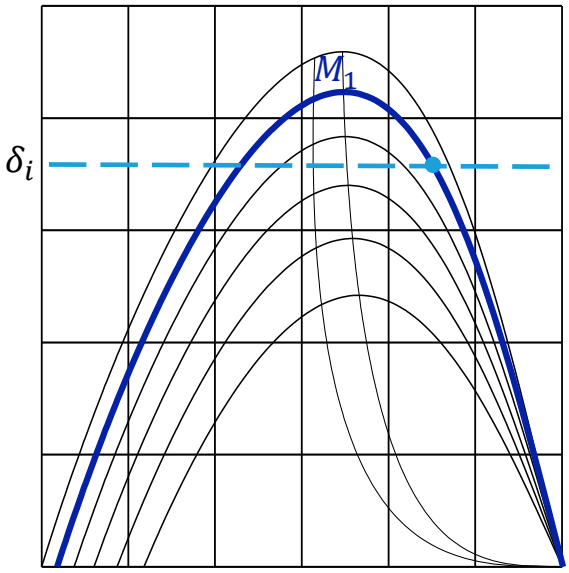
Riflessione di onde d'urto

Se l'onda incidente provoca un moto **subsonico** a **valle** (all'interno della *falce o* soluzione forte) **non** può avere luogo alcuna **riflessione**.

Poiché la corrente non può essere deviata in prossimità della parete l'onda d'urto deve incurvarsi e, anche in questo, caso sarà localmente **normale** alla parete.

In ogni caso, se non è possibile una **riflessione regolare** l'onda deve essere **normale** alla **parete**.



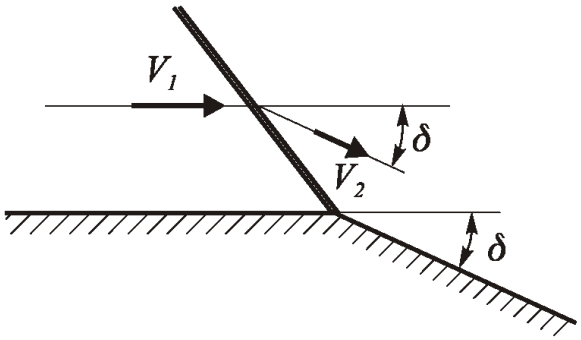


Riflessione di onde d'urto

Esistono solo due casi in cui un'onda incidente **non si riflette**:

- Onda **normale** parete;
- L'onda d'urto incide su una parete esattamente dove questa devia di un **angolo** δ_p **uguale** all'angolo di deviazione della corrente provocato dall'onda δ_i.

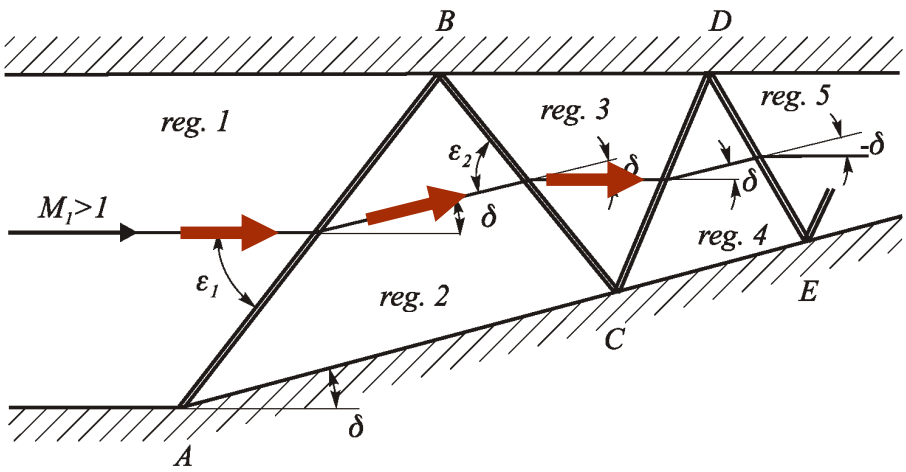
In quest'ultimo caso se la deviazione della parete fosse minore (i.e. $\delta_p < \delta_i$) nasce un'onda riflessa che, però, sarebbe meno forte di quella relativa ad una parete piana.



Riflessione di onde d'urto

Se una corrente supersonica fluisce in un canale in cui la parete inferiore curva verso l'**alto** di δ (piccolo così per avere riflessioni regolari) nasce una **prima** onda che fa ruotare la corrente e la rende **parallela** alla parete inferiore.

Quest'onda va a impingere sulla parete **superiore** e si **riflette** in un'altra onda che devia la corrente di $-\delta$, riportandola **orizzontale**.

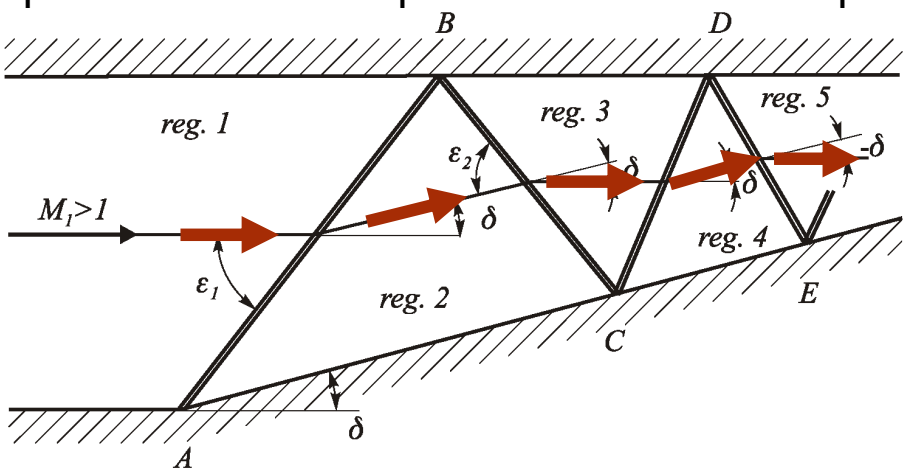


Riflessione di onde d'urto

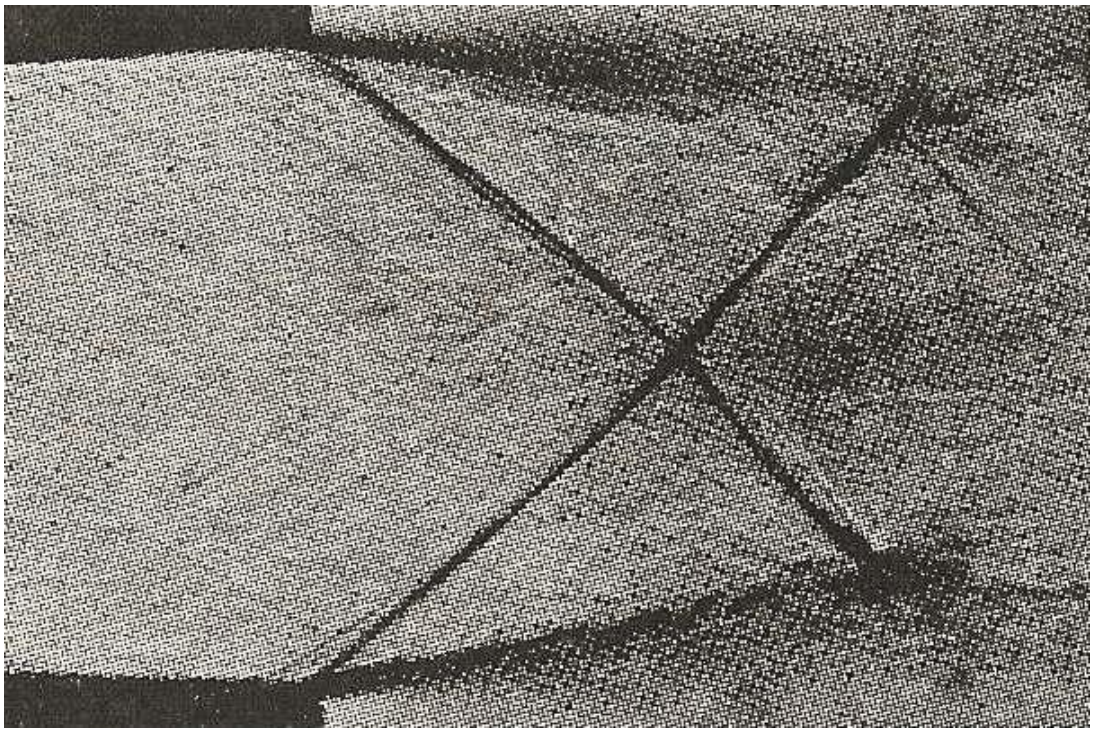
Questo comportamento **continua** fino a che il numero di Mach (che per i successivi urti, sia pure obliqui, va progressivamente diminuendo) è **tale che** $\delta_{max} > \delta$.

Per la continua diminuzione del numero di Mach, l'onda **CD** (rispettivamente l'onda DE) risulterà **più inclinata** verso l'alto (cioè più verticale) dell'onda **AB** (rispettivamente dell'onda BC).

Per **piccoli** angoli δ, le onde tendono a diventare **onde di Mach** e la compressione può considerarsi praticamente isoentropica.



Intersezione di onde d'urto oblique



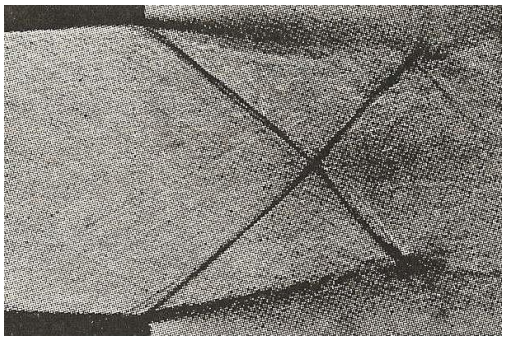
Visualizzazione Schlieren che mostra **l'intersezione** di onde d'urto **oblique** all'uscita di un ugello supersonico

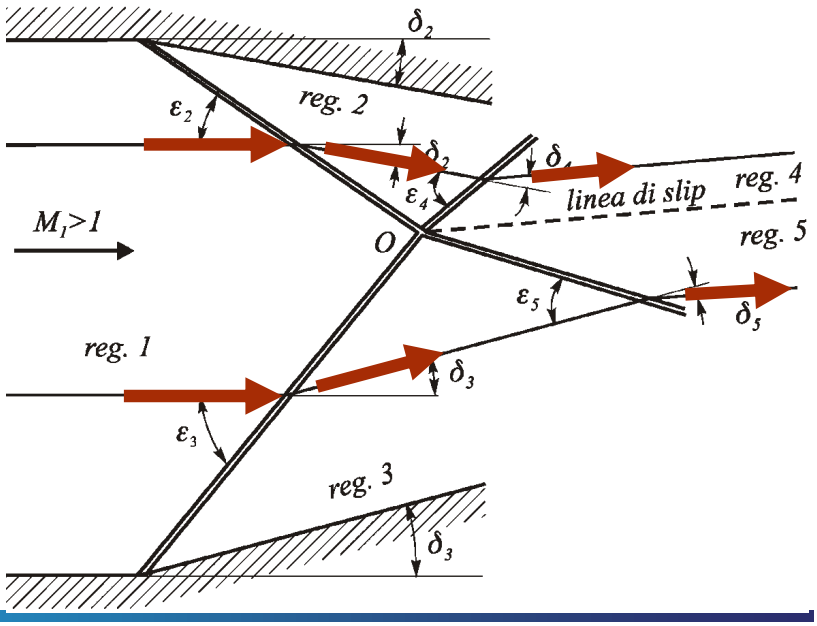
Intersezione di onde d'urto oblique

Ad **esempio** una corrente, che fluisce in un condotto con $M_1 > 1$, subisce due deviazioni δ_2 e δ_3 (in generale, diverse tra loro) provocate da due onde d'urto oblique.

A **valle** degli **urti**, nelle due regioni 2 e 3 le correnti avranno in generale proprietà **diverse** e, soprattutto, due direzioni diverse.

Le due nuove correnti devono a loro volta essere **deviate** in modo che alla fine esse abbiano la **stessa direzione e pressione**.





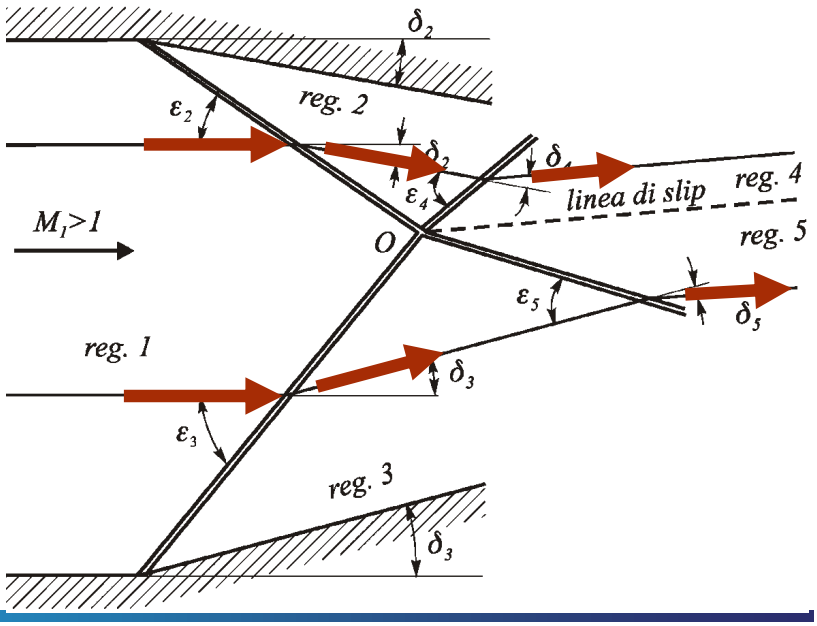
Intersezione di onde d'urto oblique

Queste ulteriori deviazioni sono possibili solo mediante **riflessione** con altre due onde d'urto oblique, come indicato in figura nel caso **d'intersezione regolare**.

Per la soluzione del problema occorre procedere per **tentativi** trovando la direzione **comune** delle due correnti nelle regioni 4 e 5 che permette di avere **pressioni uguali**.

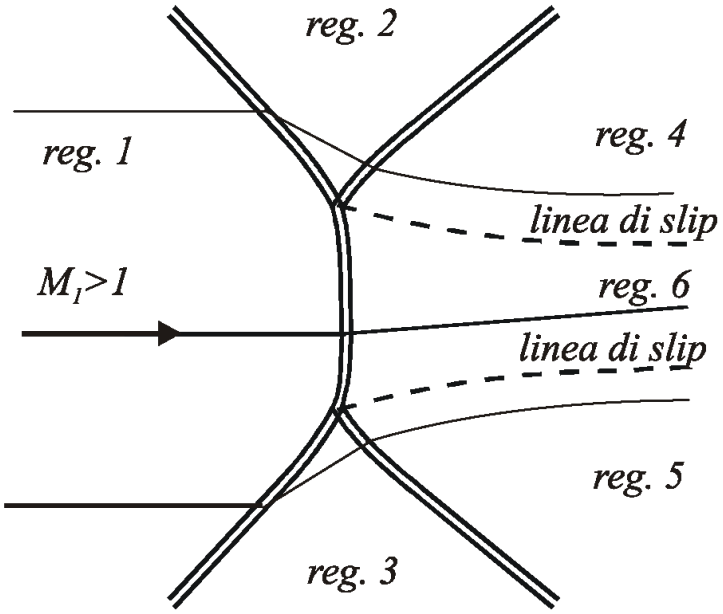
La linea che separa le regioni 4 e 5 è una **linea di slip**.

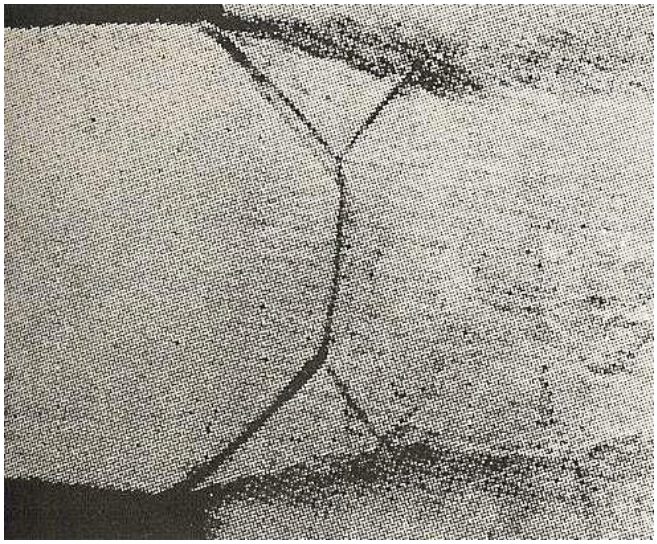
Non è sempre **possibile** avere una **intersezione regolare**, e.g. se i numeri di Mach a valle non sono tali da consentire una deviazione pari δ_4 o δ_5.



Intersezione di onde d'urto oblique

Non è sempre **possibile** avere una **intersezione regolare**, e.g. se i numeri di Mach a valle non sono tali da consentire una deviazione pari δ_4 o δ_5. In questo caso, si ha una **intersezione** alla **Mach**, o a **doppio** λ.

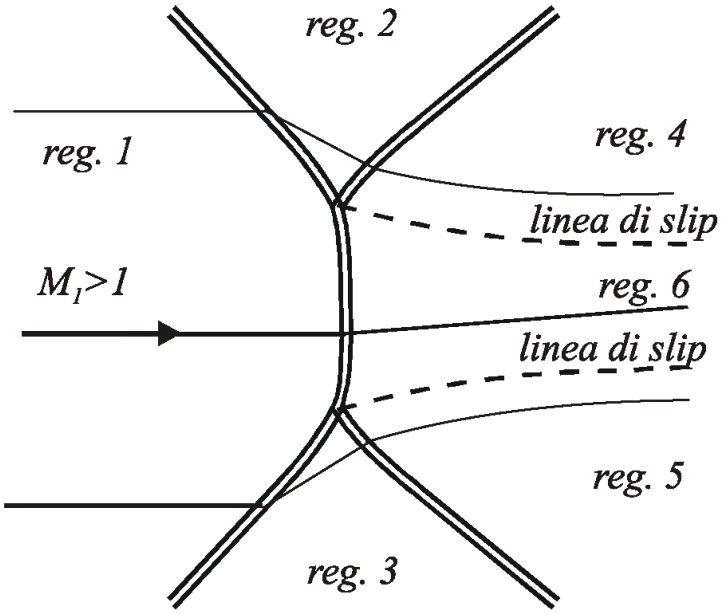


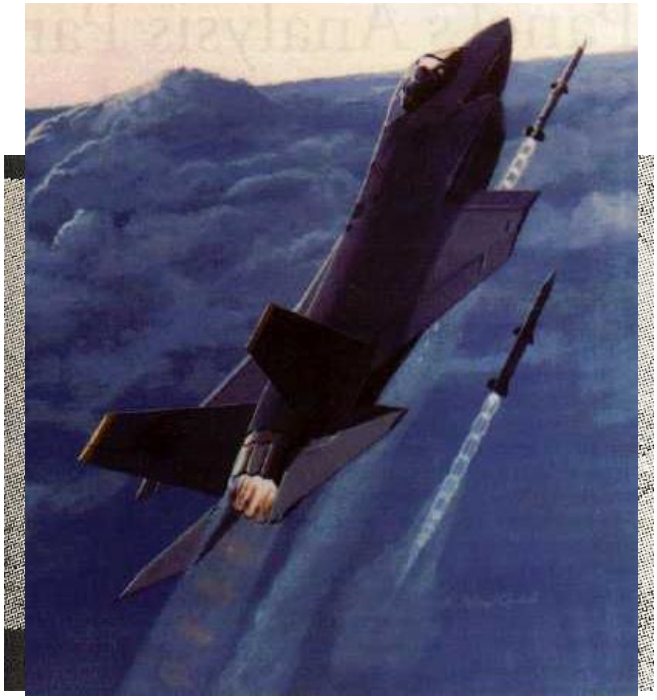


Intersezione di onde d'urto oblique

L'intersezione alla Mach è una **doppia riflessione** a λ con la presenza di due linee (superfici) di slip.

L'onda d'urto quasi normale che separa le regioni 1 e 6 è anche detta onda d'urto di Mach e, nel caso di moto **assialsimmetrico**, **disco di Mach**.





Onde d'urto coniche

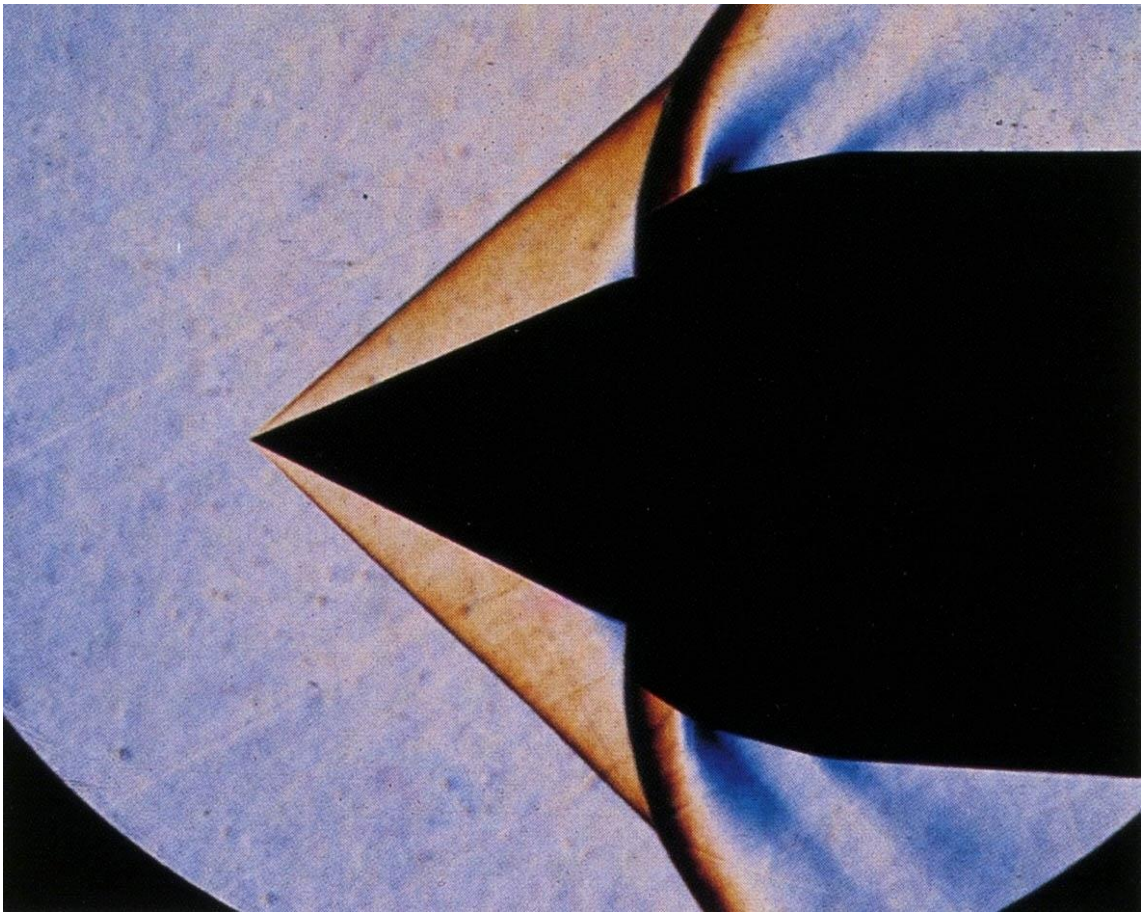
L'ipotesi di fenomenologia **bidimensionale piana** non è applicabile in varie applicazioni come nella parte prodiera di un aereo, o di un missile, dove il moto è **assialsimmetrico.**

È interessante analizzare il moto stazionario di una corrente supersonica che investe un **cono** ad angolo **d'attacco nullo**.

Questa ipotesi è necessaria poiché la presenza di un **angolo** d'**incidenza non nullo** provoca la perdita della simmetria assiale ed una notevole complicazione della trattazione.

In questa trattazione, si ignoreranno le sottigliezze analitiche discutendo in dettaglio solo le ipotesi ed i risultati dell'analisi.

Onde d'urto coniche

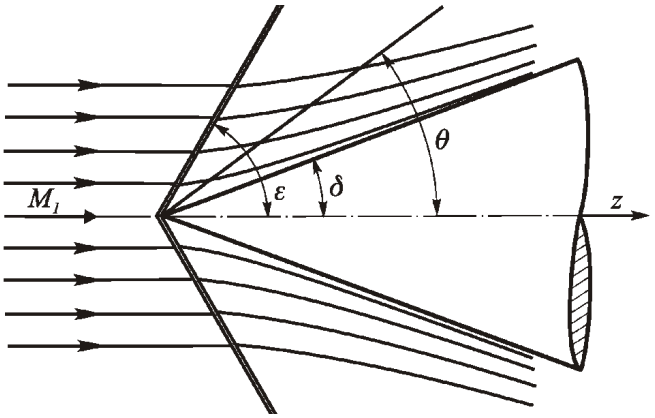


Schlieren a colori di una presa d'aria supersonica ($M = 2, \delta = 24°$).

Onde d'urto coniche

Le ipotesi che si formulano per le onde coniche sono le seguenti:

- Il campo di moto è **simmetrico** rispetto all'**asse del cono**. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
  - la **proiezione** del campo di moto su un piano che comprende l'asse del cono non è influenzata dalla scelta del piano e cioè, in un sistema di riferimento di tipo cilindrico, è **indipendente** dalla **coordinata azimutale**;
  - dal bilancio del **momento** della **quantità di moto** prima e dopo l'onda d'urto, la **componente normale** a questo piano del vettore velocità risulterebbe identicamente **nulla**.



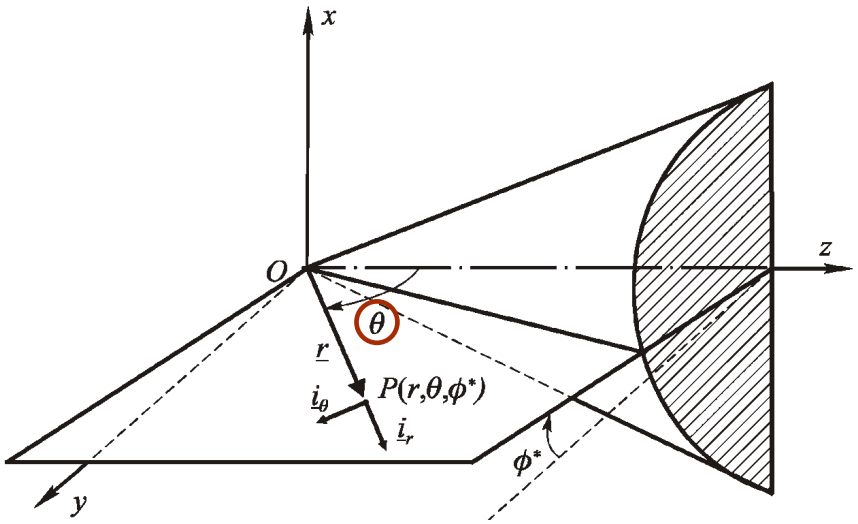
Onde d'urto coniche

Le ipotesi che si formulano per le onde coniche sono le seguenti:

- Il campo di moto è **simmetrico** rispetto all'**asse del cono**. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
- Oltre ad essere **omoenergetico**, il moto è **omoentropico** sia prima che dopo l'onda d'urto pur essendo diversa l'entropia prima e dopo l'urto. Ovviamente, affinché sia verificata quest'ipotesi, è necessario che l'**onda** d'urto sia conica e **attaccata** al vertice del cono, altrimenti l'angolo ϵ varierebbe lungo il cono.
- Il **cono è indefinito** e poiché **non** esiste alcuna **lunghezza caratteristica** rispetto alla quale adimensionalizzare, le due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come **rapporto fra le stesse**.

Onde d'urto coniche

- Il **cono è indefinito** e poiché **non** esiste alcuna **lunghezza caratteristica** rispetto alla quale adimensionalizzare, le due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come **rapporto fra le stesse**
  - Quindi se si considera un sistema di riferimento sferico tutte le grandezze termofluidodinamiche devono essere funzione della sola variabile θ.



Onde d'urto coniche

Le ipotesi che si formulano per le onde coniche sono le seguenti:

- Il campo di moto è **simmetrico** rispetto all'**asse del cono**. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
- Oltre ad essere **omoenergetico**, il moto è **omoentropico** sia prima che dopo l'onda d'urto pur essendo diversa l'entropia prima e dopo l'urto. Ovviamente, affinché sia verificata quest'ipotesi, è necessario che l'**onda** d'urto sia conica e **attaccata** al vertice del cono, altrimenti l'angolo ϵ varierebbe lungo il cono.
- Il **cono è indefinito** e poiché **non** esiste alcuna **lunghezza caratteristica** rispetto alla quale adimensionalizzare, le due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come **rapporto fra le stesse**

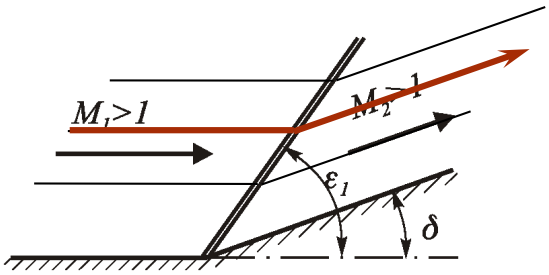
Per onde d'urto attaccate al vertice di un cono a angolo d'attacco nullo e alti numeri di Reynolds locali, queste **tre ipotesi sono verificate sperimentalmente**.

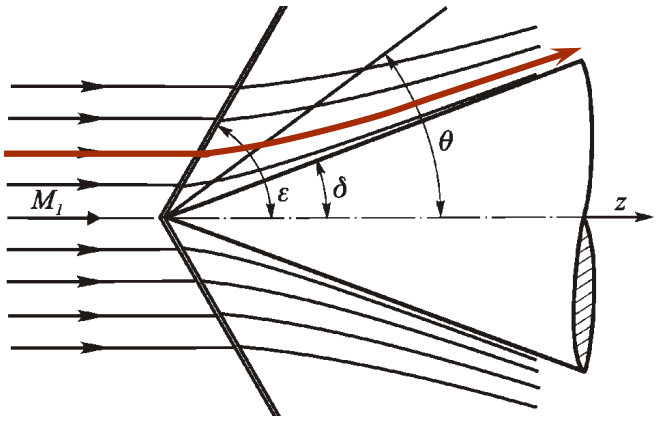
Onde d'urto coniche

Nel caso di un **diedro**, dopo l'onda d'urto, le linee di corrente sono **dritte** e parallele alla superficie del diedro.

Per il **cono** le linee di corrente, dopo l'onda d'urto Invece, sono curve e **convergenti** tra loro.

La convergenza delle linee di corrente può essere spiegata dimostrando che esse **non** possono né essere **parallele** tra loro, né **divergere**.



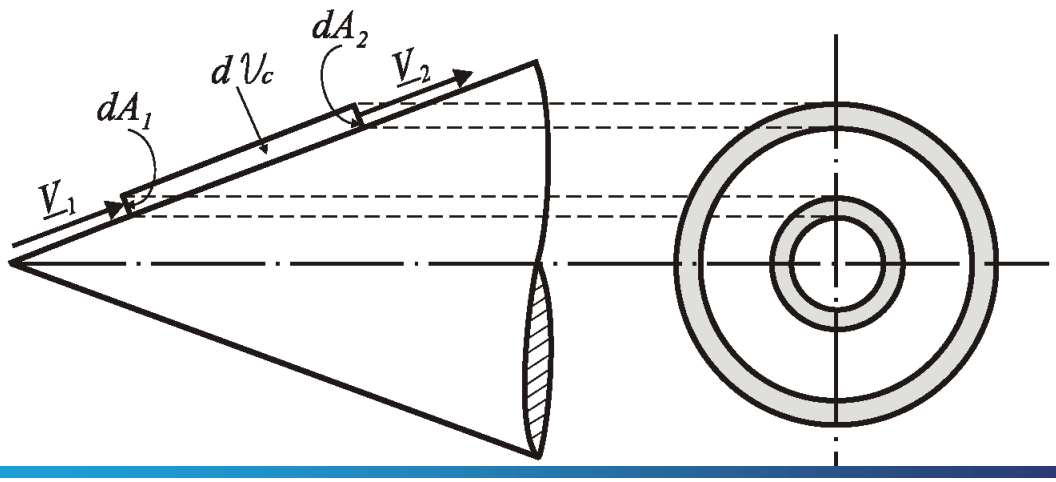


Onde d'urto coniche

Il fluido entra dalla sezione di area dA_1 esce da quella di area dA_2 (avente la **stessa altezza**).

Si supponga, per assurdo, che il fluido si muova **parallelamente** alla generatrice del **cono**.

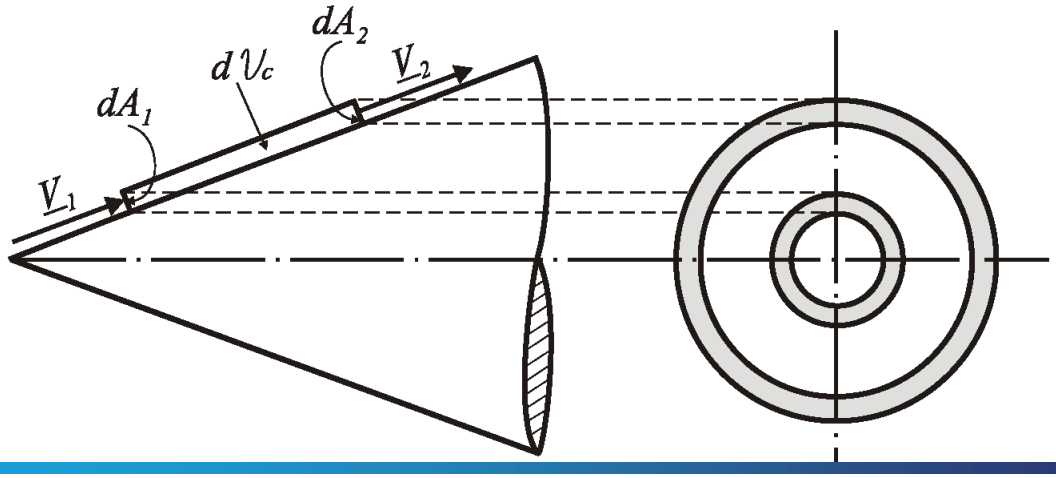
Come si vede chiaramente nella vista laterale si ha $dA_1 < dA_2$. Si è quindi in presenza di un moto con **aumento** dell'area di passaggio.



Onde d'urto coniche

In regime **supersonico** la corrente dovrebbe accelerare provocando un continuo aumento del numero di Mach ed una diminuzione della portata. Questo è in contrasto con l'ipotesi che il **cono è indefinito** perché il numero di Mach dovrebbe tendere all'infinito e la pressione a zero. Un ragionamento analogo vale anche per il regime subsonico.

Chiaramente le linee di corrente **non possono divergere**, altrimenti anche l'altezza del tubo di flusso aumenterebbe comportando un conseguente **maggior aumento di area**.



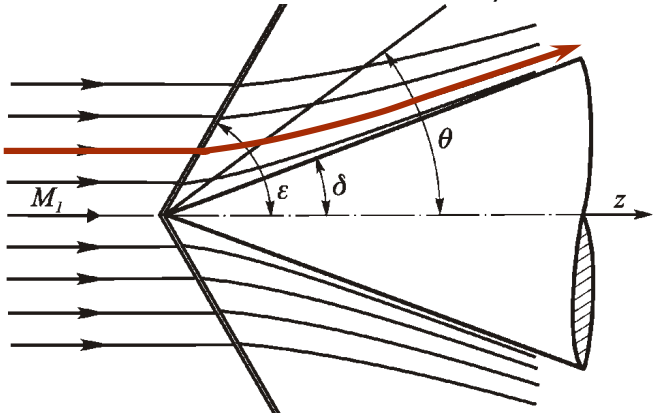
Onde d'urto coniche

La **convergenza** delle linee di corrente a valle dell'onda d'urto provoca una **variazione** delle variabili **termofluidodinamiche** che, per le ipotesi fatte, devono seguire una trasformazione **isoentropica**.

Dopo l'onda d'urto la **pendenza** delle linee di corrente **cresce** finché queste non diventano, molto a valle, **parallele** alla superficie del **cono**. Simultaneamente, il numero di Mach diminuisce e la pressione aumenta.

L'ulteriore deviazione della corrente a valle dell'onda fa sì che, a parità di angolo di deviazione e di Mach della corrente a monte, l'**onda** d'urto sia **meno intensa**.

Ovvero, a **parità di angolo d'urto** e numero di **Mach**, che la **deviazione** finale della corrente dell'onda **conica** sia **maggiore** di quella relativa all'onda d'urto piana.



Onde d'urto coniche

Essendo l'angolo d'urto costante, per il teorema di **Crocco**, l'ipotesi di **omoentropicità** implica **l'irrotazionalità** del campo di moto a valle dell'onda.

Dall'irrotazionalità e dal bilancio di massa locale in coordinate sferiche, si giunge all'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che prende il nome di equazione di **Taylor-Maccoll**.

I **risultati** dell'integrazione numerica dell'equazione di Taylor-Maccoll sono **presentati** di seguito sotto forma di diagrammi, per il caso particolare di $\gamma = 1.4$

Onde d'urto coniche

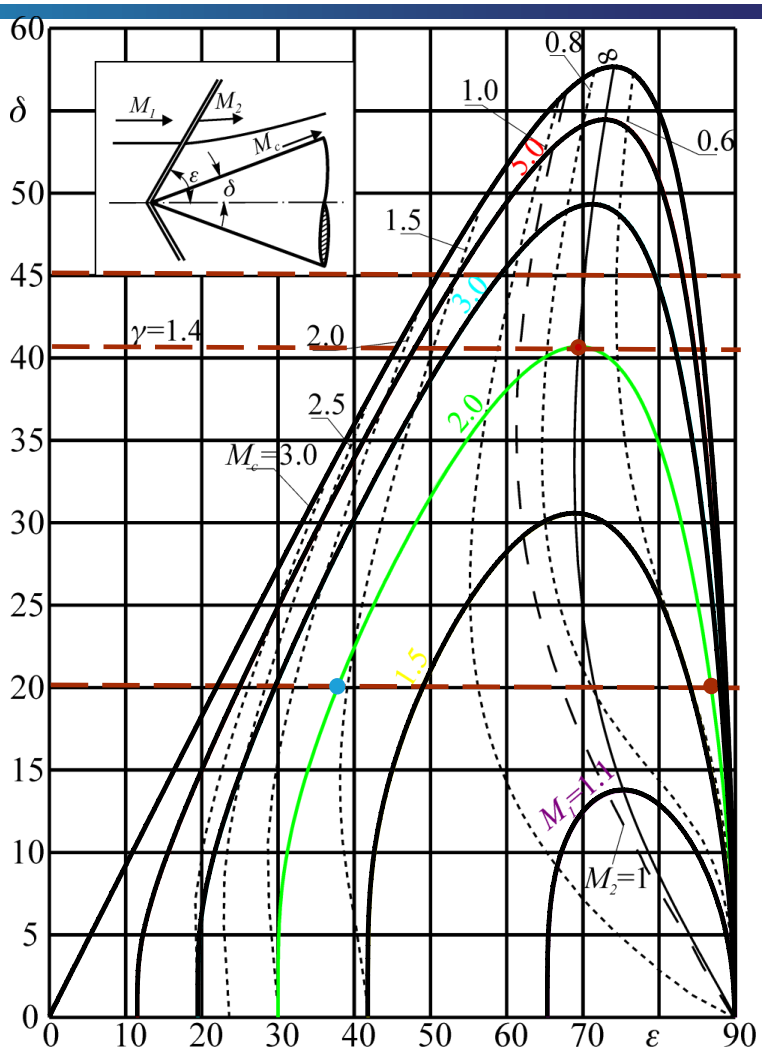
Anche in questo caso il valore di ϵ varia tra l'angolo di Mach μ e 90°.

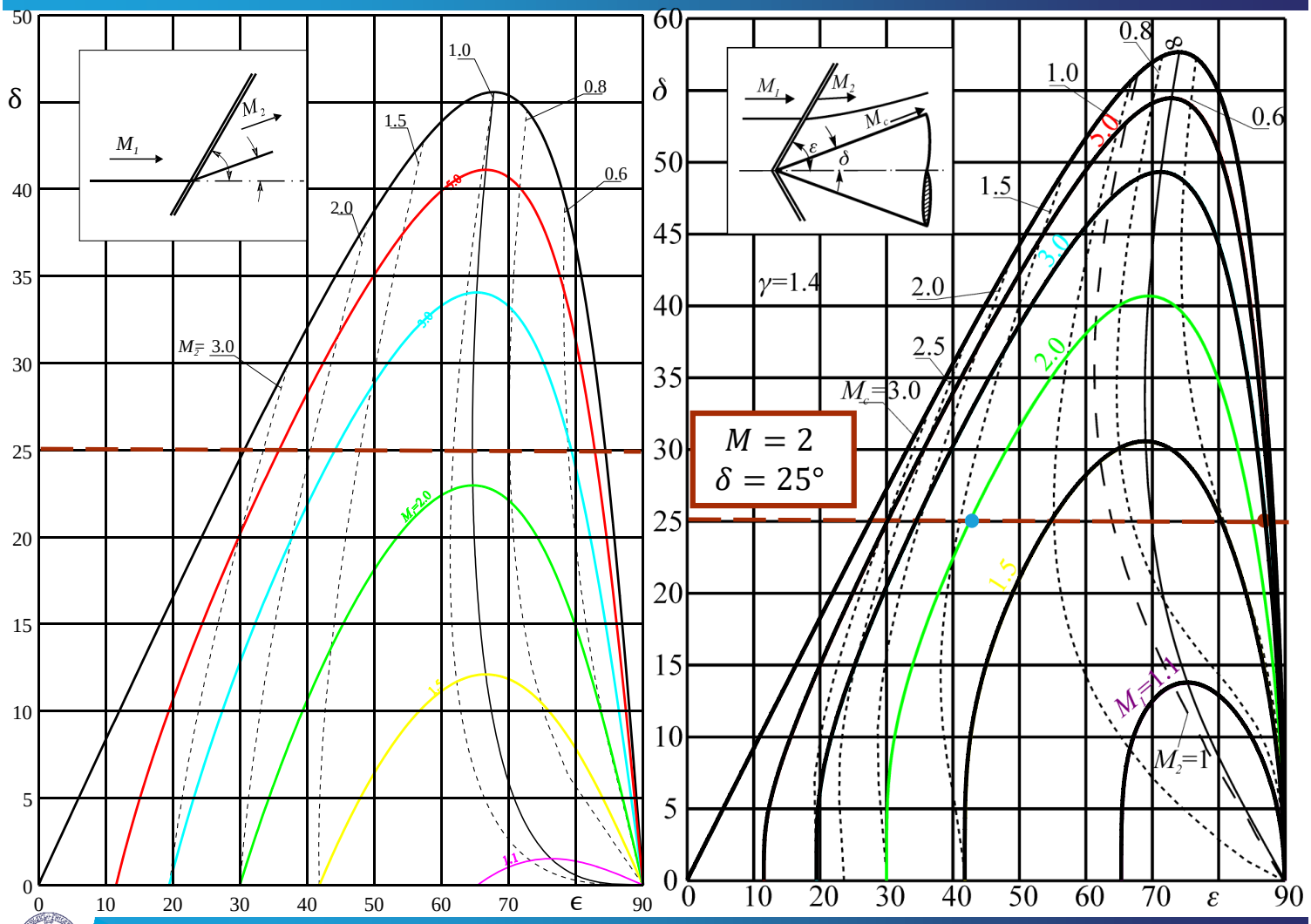
Per un dato numero di **Mach**, al crescere del valore di δ, si hanno tre possibilità:

- **due soluzioni** con due valori distinti per l'angolo ϵ;
- **una sola soluzione**;
- **nessuna soluzione**.

La soluzione unica corrisponde alla **deviazione massima** $\boldsymbol{\delta_{max}}$ per un dato numero di Mach.

Per $\boldsymbol{\delta > \delta_{max}}$ non esistono soluzioni.

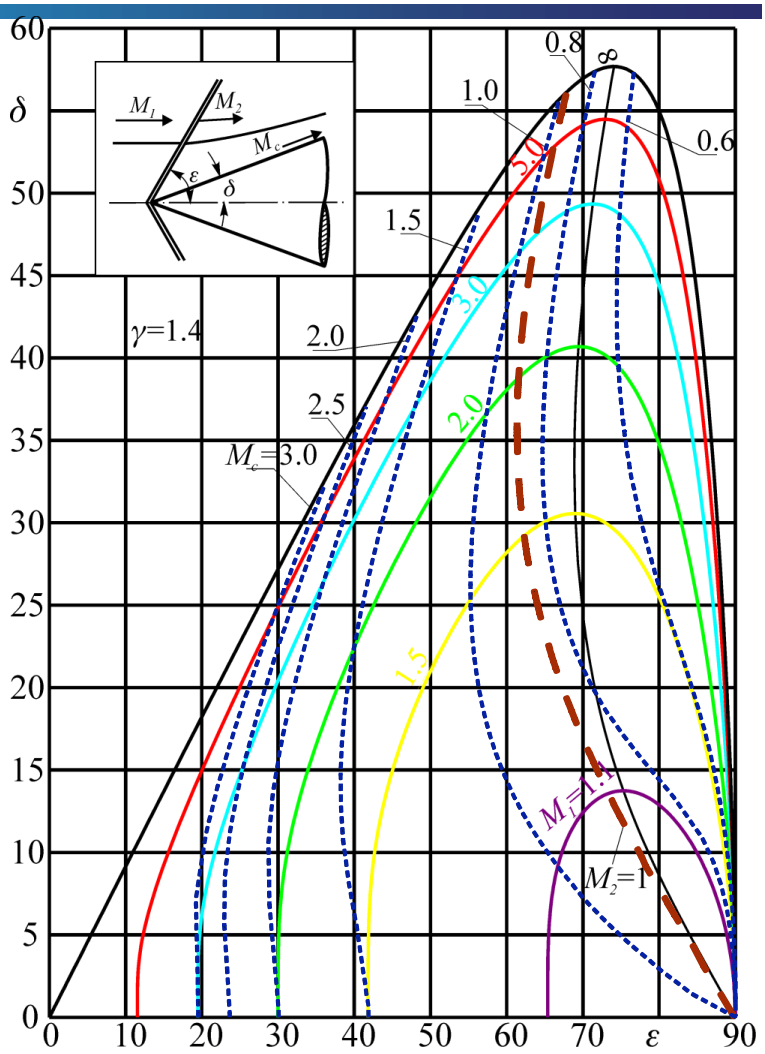




Onde d'urto coniche

Con l'eccezione di $M_2 = 1$ sono diagrammate le curve a $M_c = cost$ (numero di Mach sulla superficie del cono).

Il moto a valle dell'onda d'urto è **isoentropico** e noto M_c e le condizioni a valle dell'onda d'urto, dalle tabelle (ISO), si possono determinare tutte le grandezze **termofluidodinamche** sulla superficie del cono.

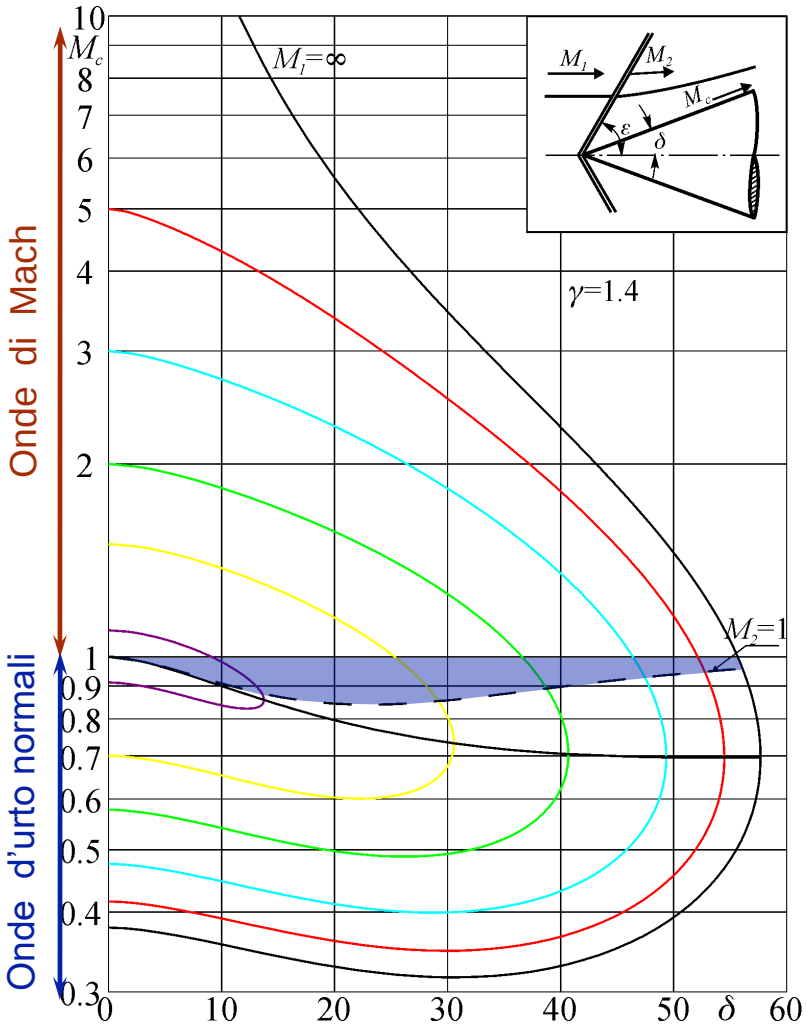


Onde d'urto coniche

I numeri di **Mach a monte** dell'onda d'urto M_1 sono identificabili con le **intercette** delle relative curve per $\delta = 0, M_c \geq 1$.

Per $\delta = 0, M_c \leq 1$ si ricade invece nelle onde d'urto **normali**.

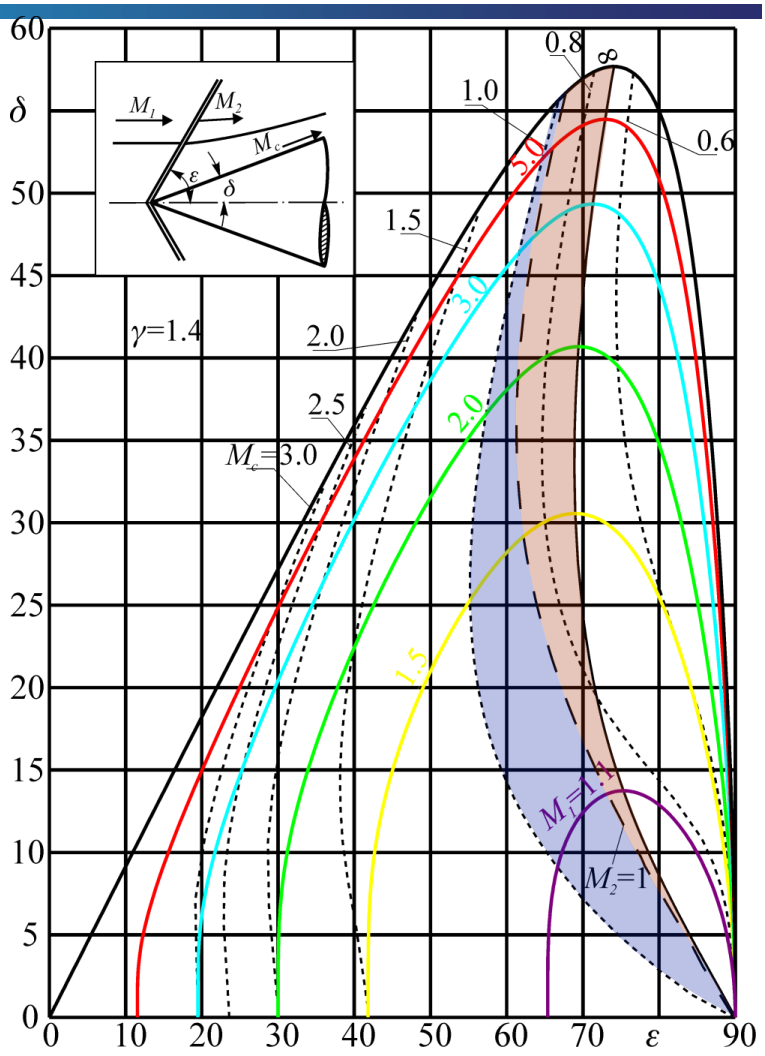
Qualunque sia M_1 , esistono sempre coppie di valori δ e ϵ per cui il moto a valle dell'onda passa da regime **supersonico** a **subsonico** senza ulteriori onde d'urto (punti nella **falce**).



Onde d'urto coniche

Qualunque sia M_1 , esistono sempre coppie di valori δ e ϵ per cui il moto a valle dell'onda passa da regime **supersonico** a **subsonico** senza ulteriori onde d'urto (punti nella ***falce***).

Chiaramente la ***falce*** che individua le onde deboli con $M_2 < 1$, che era già **presente** nel caso bidimensionale **piano,** è presente anche per le onde **coniche**.



Onde d'urto coniche

Per onde coniche la **deviazione** è associata a due contributi:

- **onda d'urto**;
- **convergenza delle linee di corrente**;

Quindi, a parità di δ l'onda d'urto conica è **meno intensa** ed il disturbo prodotto dal corpo sulla corrente a monte è più piccolo.

Inoltre l'angolo di **deviazione massimo** è **maggiore** nel caso del cono (57.68°) rispetto al caso piano (45.58°).

Chiaramente, in modo del tutto analogo a quanto accade nel caso del diedro piano, se l'**angolo** di semiapertura del cono è **maggiore** di δ_{max} l'onda d'urto si **stacca dal vertice**.