



UNIVERSITY OF NAPLES **FEDERICO II** 1224 A.D.

Gasdinamica

T. Astarita

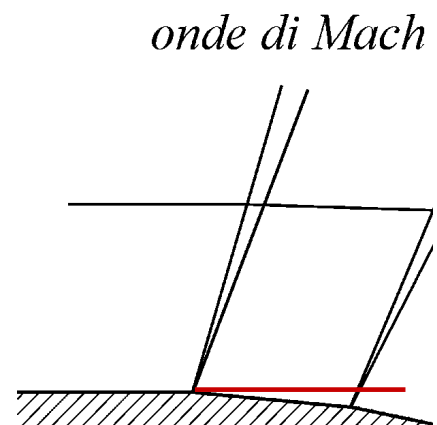
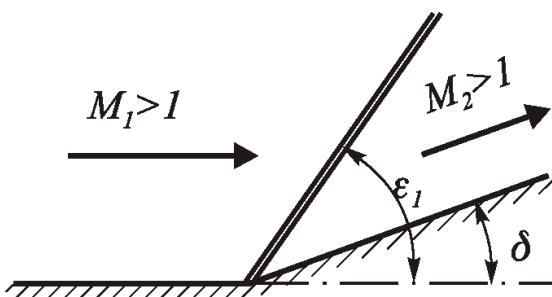
astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

Versione del 23.3.2022

Onde di espansione

La deviazione imposta da un angolo **concavo** della superficie è resa possibile dalla nascita di **un'onda d'urto obliqua**, viceversa, nel caso in cui l'angolo formato dalla parete sia **convesso** anziché concavo nasce un **ventaglio d'espansione**.



Onde di espansione

La deviazione imposta da un angolo **concavo** della superficie è resa possibile dalla nascita di **un'onda d'urto obliqua**, viceversa, nel caso in cui l'angolo formato dalla parete sia **convesso** anziché concavo nasce un **ventaglio d'espansione**.

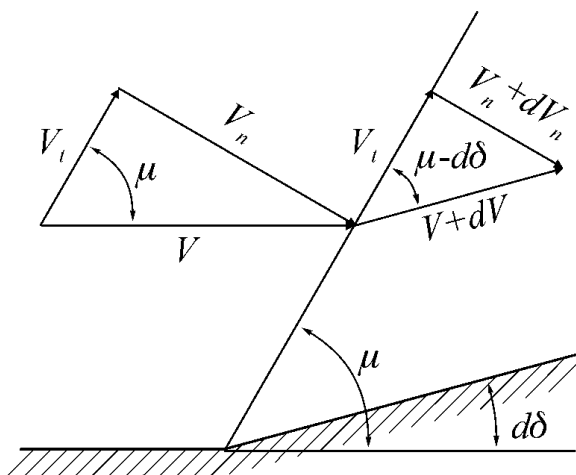
Si supponga, inizialmente, che la parete formi ancora un angolo concavo ma di valore **infinitesimo $d\delta$** .

Per $d\delta \rightarrow 0$, oltre all'onda d'urto normale è possibile anche avere **un'onda di Mach** ($\epsilon \rightarrow \mu = \arcsin 1/M_1$).

Per $d\delta \rightarrow 0$ la soluzione più realistica è quella **debole**, quindi la deviazione sarà prodotta da un'onda di Mach.

L'onda di Mach **non produce** alcuna **compressione finita** della corrente.

Si possono però avere variazioni **infinitesime** ed **isentropiche**.



Onde di espansione

Un **onda di Mach**, a differenza di un'onda d'urto obliqua, può produrre variazioni **infinitesime** dello stato termofluidodinamico del fluido sia di **compressione** che di **espansione**.

Si suppone che $d\delta$ sia **positivo** quando forma un angolo **concavo**. Gli angoli relativi a una **convessità** sono, invece, considerati **negativi**.

L'onda è inclinata dell'angolo $\mu = \arcsin 1/M$, rispetto al vettore velocità V , e produce una variazione dV . **L'angolo di Mach** è tale che:

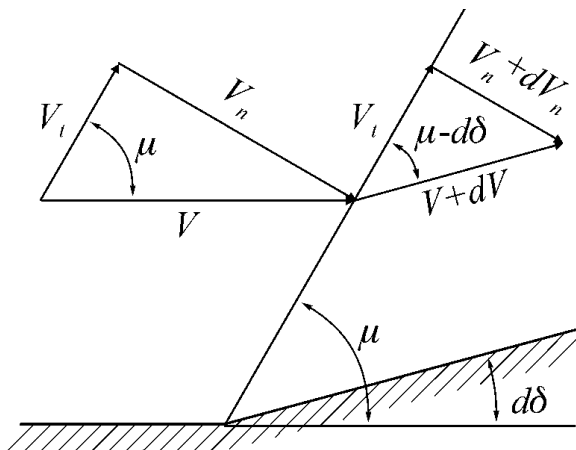
$$M_n = M \sin \mu = 1$$

Dalla figura si ha:

$$\tan \mu = \frac{V_n}{V_t} = \frac{M_n}{M_t} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

dalla costanza della componente tangenziale della velocità:

$$V_t = V \cos \mu = (V + dV) \cos(\mu - d\delta)$$



Onde di espansione

$$V_t = V \cos \mu = (V + dV) \cos(\mu - d\delta); \quad \tan \mu = \frac{V_n}{V_t} = \frac{M_n}{M_t} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Ricordando che $d\delta \rightarrow 0$ e quindi $\sin d\delta \rightarrow d\delta$ e $\cos d\delta \rightarrow 1$ si ha:

$$\cos(\mu - d\delta) = \cos \mu \cos d\delta + \sin \mu \sin d\delta = \cos \mu + d\delta \sin \mu$$

Sostituendo:

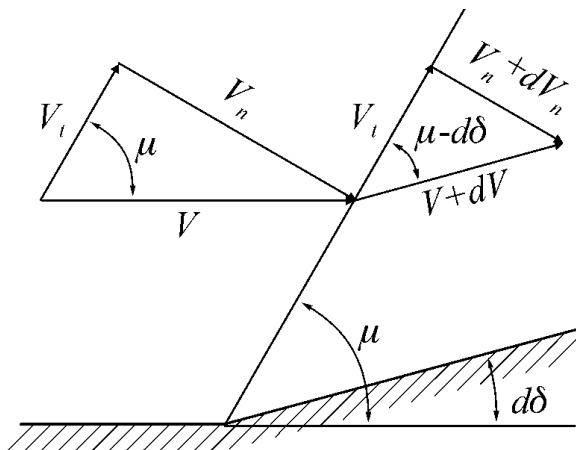
$$V \cos \mu = (V + dV)(\cos \mu + d\delta \sin \mu)$$
$$V \cancel{\cos} \mu = V \cancel{\cos} \mu + dV \cos \mu + V d\delta \sin \mu + dV \cancel{d\delta} \sin \mu \rightarrow 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\tan \mu d\delta = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} d\delta$$

ed infine:

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Che è l'equazione differenziale che governa il moto alla **Prandtl e Meyer**.



Onde di espansione

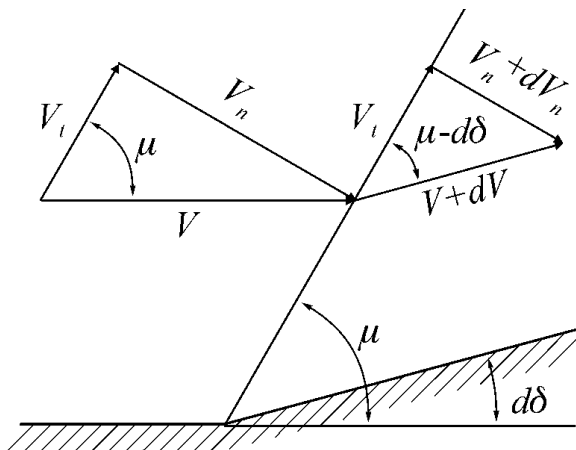
$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Per angoli $d\delta$ **positivi** (parete concava del tipo indicato in figura), la corrente subisce una **diminuzione** (infinitesima) della sua **velocità** ($dV < 0$).

Viceversa, per angoli $d\delta$ **negativi** (parete convessa), la corrente accelera ($dV > 0$).

Ricordando che $dp + \rho V dV = 0$, nel primo caso (**decelerazione**) la corrente è soggetta ad una **compressione** (infinitesima), mentre nel secondo caso (**accelerazione**) ad un'**espansione**.

Attraverso un'**onda di Mach** la trasformazione è **reversibile**.

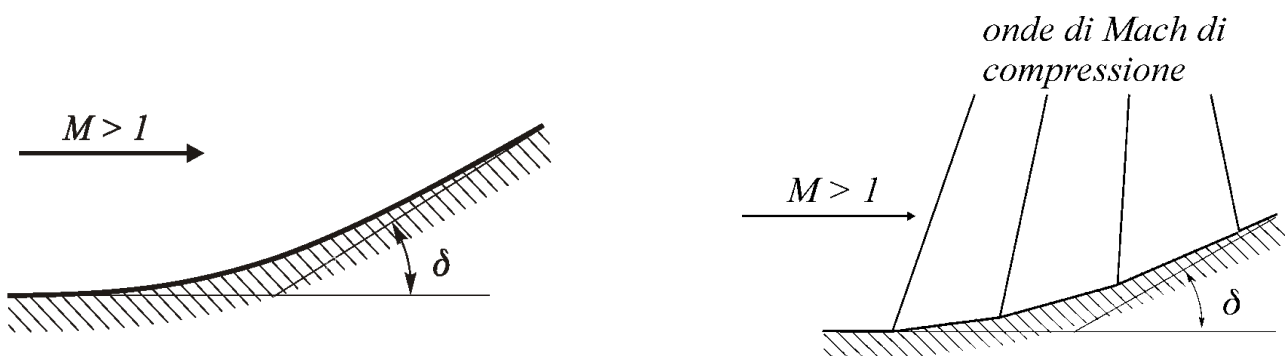


Onde di espansione

Il moto su una **parete concava** con curvatura **continua** che da luogo ad una deviazione finita δ si può approssimare con un numero n molto grande di tratti rettilinei, ciascuno inclinato rispetto al precedente di un **angolo** $\Delta\delta$ ($\delta = n\Delta\delta$), per cui l'effetto sulla corrente è quello che, da ciascun punto angoloso, partirà un'onda di Mach di **compressione**.

Le onde di Mach di compressione tendono a **coalescere** (a unirsi):

- perché la **parete ruota** verso il fluido;
- perché l'**angolo** di inclinazione delle onde μ **aumenta** perché le onde di compressione provocano una progressiva diminuzione del numero di Mach della corrente ($\mu = \arcsin 1/M$).

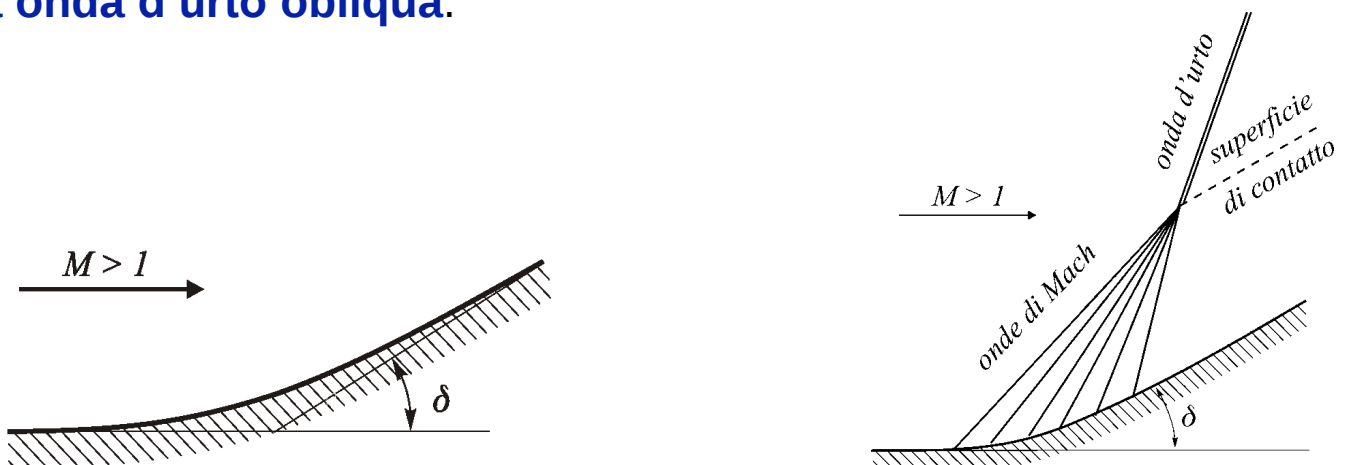


Onde di espansione

In realtà la **curvatura continua** provoca la nascita di **infinite onde** di Mach che creano altrettante **rotazioni infinitesime**

Ad una certa distanza dalla parete, la **coalescenza** delle onde di Mach **genera un'onda d'urto**.

Ovviamente nel caso in cui la parete risulti concava per **un solo punto angoloso**, le onde di Mach non saranno più presenti e la configurazione sarà piuttosto quella già descritta in precedenza, con la **sola onda d'urto obliqua**.

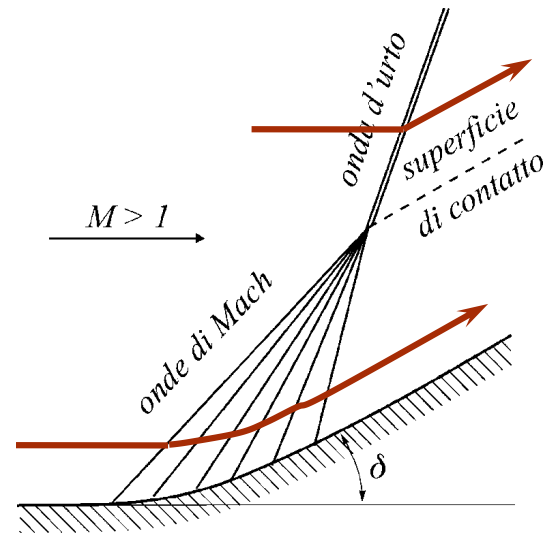
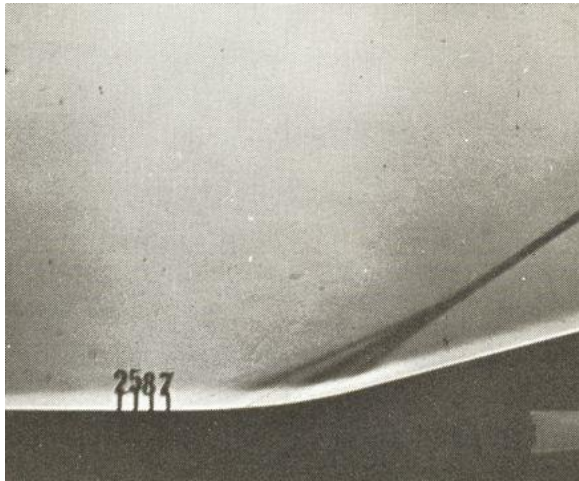


Onde di espansione

Il fluido, che attraversa le (infinite) onde di Mach, è soggetto ad una trasformazione **isoentropica** (perché ciascuna onda è isoentropica).

Ciò non è vero per il fluido che attraversa l'**onda d'urto** nella quale vi è **produzione** di **entropia**.

La **superficie di contatto**, curva tratteggiata in figura, indica la **superficie** di separazione tra questi due flussi, che, ovviamente, avranno diverse caratteristiche tra loro.



Onde di espansione



Moto su una parete concava a curvatura continua ($M = 2.75$).



Onde di espansione

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Su una parete **convessa** ($d\delta < 0$) avente una curvatura continua, le onde di Mach sono onde di **espansione** che tendono a **divergere**:

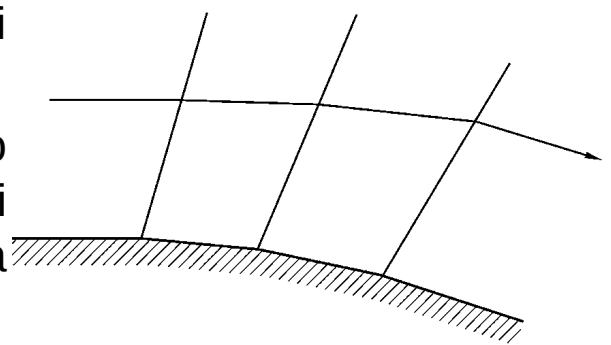
- perché la **parete ruota** allontanandosi dal fluido;
- perché l'**angolo** di inclinazione delle onde μ **diminuisce** perché le onde di espansione provocano un progressivo aumento del numero di Mach della corrente ($\mu = \arcsin 1/M$).

La corrente, oltre ad accelerare diminuisce la sua pressione.

L'insieme delle onde di espansione, che per una deviazione finita $-\delta$ è infinito, si chiama **ventaglio di espansione**.

La relativa trasformazione del fluido (**isoentropica** perché ciascuna onda di Mach è isoentropica) viene denominata **espansione alla Prandtl e Meyer**.

onde di Mach di espansione



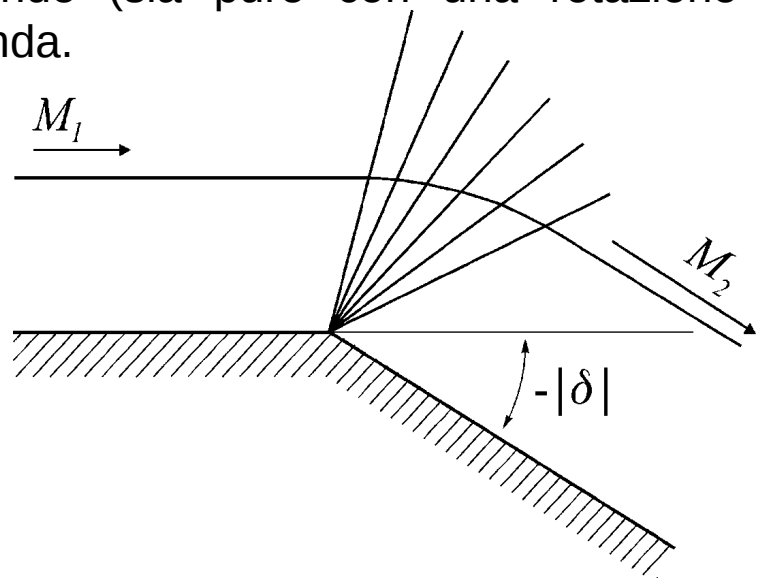
Onde di espansione

Nel caso di una **singola deviazione finita** le infinite onde di espansione hanno tutte **origine** nel **punto angoloso**.

Inoltre, nel caso in cui sia $M_1 = 1$, la **prima onda di Mach** che incontra la corrente è **ortogonale** alla corrente stessa ($\mu = \arcsin 1/M$).

Si ribadisce che un'onda di Mach di **espansione** dà luogo ad un $d\delta$ **negativo** per cui la corrente tende (sia pure con una rotazione infinitesima) ad **allontanarsi** dall'onda.

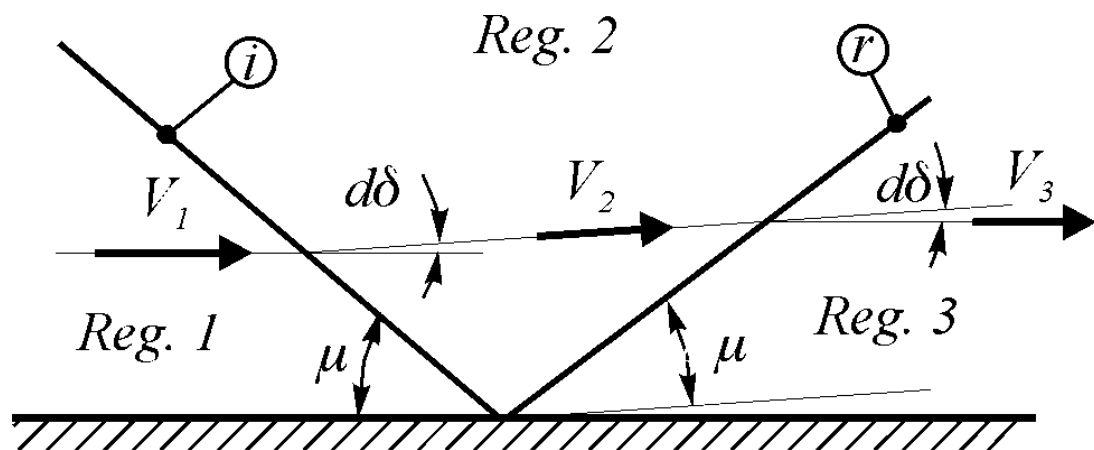
Viceversa, per un'onda di Mach di **compressione**, il $d\delta$ è positivo e la corrente tende ad **adagiarsi** sull'onda così come avviene nel caso di un'onda d'urto obliqua.



Onde di espansione

Una **onda** di Mach di **espansione incidente**, su una superficie solida o su un piano di simmetria, si deve **riflettere** come **onda** di **espansione** della famiglia opposta.

Infatti, la corrente che si **allontana** dalla parete in seguito alla prima onda, deve allontanarsi dalla seconda onda per ritornare **parallela** alla **parete** e, quindi, anche la seconda onda deve essere di espansione.



Onde di espansione nei gas più che perfetti

Per un gas più che perfetto e moto omoenergetico differenziando logaritmicamente le:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right), \quad V^2 = M^2 a^2 = M^2 \gamma R T$$

$$\log T_o = \log T + \log \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \rightarrow \frac{dT_o}{T_o} = \frac{dT}{T} + \frac{(\gamma - 1) M dM}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} = 0$$

$$2 \log V = 2 \log M + \log \gamma R T \rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$$

da cui:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} - \frac{1}{2} \frac{(\gamma - 1) M dM}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) - \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$



Onde di espansione nei gas più che perfetti

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

Per un moto **omoenergetico** dM e dV hanno lo stesso segno per cui ad un **aumento** del numero di **Mach** corrisponde un aumento della **velocità** e viceversa.

Per $M \neq 0$, dM/M è sempre **maggiore** di dV/V .

Sostituendo la relazione precedente nella:

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Si trova l'equazione differenziale del **moto alla Prandtl e Meyer** per un **gas più che perfetto** nelle due sole variabili δ e M (scompare la V):

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM}{M}$$



Onde di espansione nei gas più che perfetti

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

Ponendo $k = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ (maggiore di uno per gas PcP) **l'integrale** indefinito è:

$$\delta = -\sqrt{k} \arctan \sqrt{\frac{M^2 - 1}{k}} + \arctan \sqrt{M^2 - 1} + cost$$

in cui la **costante di integrazione** può essere ricavata assegnando un valore di δ per un determinato valore di M .

Le **onde di Mach** sono presenti solo in condizioni di **moto supersonico**. Infatti, solo in tal caso, la componente del numero di Mach, normale all'onda, è pari ad 1.

Risulta allora **conveniente** porre $\delta = 0$ per $M=1$ da cui si ottiene che la $cost = 0$.



Onde di espansione nei gas più che perfetti

$$\delta = -\sqrt{k} \arctan \sqrt{\frac{M^2 - 1}{k}} + \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$

Si può dimostrare che questa funzione è non positiva e **strettamente decrescente**.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \delta = \delta_{lim} = -\frac{\pi}{2}(\sqrt{k} - 1)$$

Che per $\gamma = 1.4$ vale $\delta_{lim} = -130.45^\circ$.

Poiché le situazioni di interesse sono quelle con **valori negativi** di δ (parete **convessa** e non concava), è conveniente porre $\nu = -\delta$ trattando, quindi, solo valori non negativi:

$$\nu(M) = \sqrt{k} \arctan \sqrt{\frac{M^2 - 1}{k}} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$



Onde di espansione nei gas più che perfetti

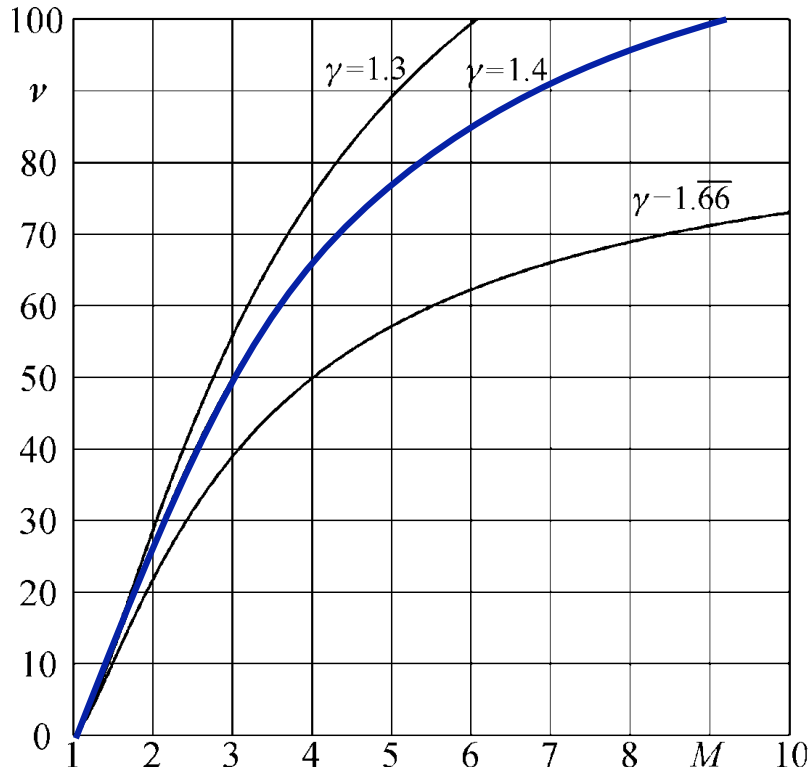
$$\nu(M) = \sqrt{k} \arctan \sqrt{\frac{M^2 - 1}{k}} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$

L'angolo ν è chiamato angolo di **Prandtl e Meyer**.

Come già detto:

$$\nu_{lim} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{k} - 1)$$

$$\gamma = 1.4 \rightarrow \nu_{lim} = 130.45^\circ$$



Onde di espansione nei gas più che perfetti

Queste funzioni sono tabellate:

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)						Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)						
M	p/p_o	ρ/ρ_o	T/T_o	$\rho V^2/2p_o$	A/A^*	M^*	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	.5283	.6339	.8333	.3698	1.000	1.000	.0000	9.000 +1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472 -1	8.193 +1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257	7.864 +1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.3787	1.001	1.025	.2294	7.614 +1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.3815	1.001	1.033	.3510	7.406 +1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

M

1.00

1.01

1.02

1.03

1.04

Prandtl e Meyer

$\nu(^{\circ})$

$\mu(^{\circ})$

.0000

.4472 -1

.1257

.2294

.3510

9.000 +1

8.193 +1

7.864 +1

7.614 +1

7.406 +1



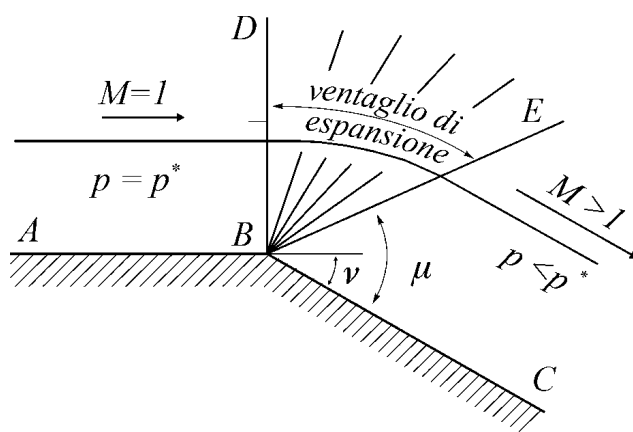
Onde di espansione nei gas più che perfetti

L'angolo di **Prandtl e Meyer** ν è quello di cui bisogna **ruotare** la parete (formando una convessità) perché la corrente passi dal numero di Mach **sonico** ($M = 1$), che ha sulla parete AB, al numero di **Mach supersonico** ($M > 1$) sulla parete BC.

Alternativamente, se una corrente sonica fluisce su una parete e questa parete ruota di un angolo ν (formando una convessità), la corrente **raggiunge il numero di Mach** M ricavabile invertendo la funzione $\nu(M)$.

Tutto ciò accade solo se nella zona a valle del ventaglio di espansione esistono le **condizioni di pressione adatte**.

Le **onde** sono tutte **inclinate**, rispetto alla direzione locale della corrente, dell'angolo $\mu = \arcsin 1/M_1$.



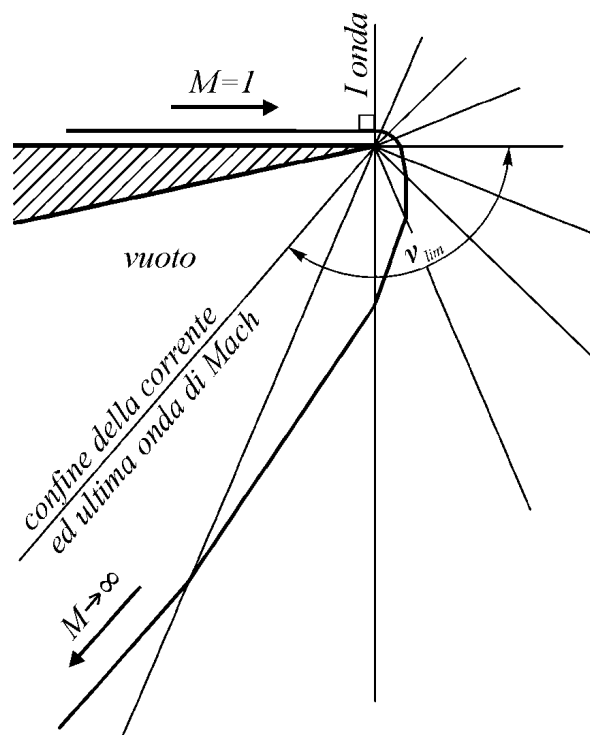
Onde di espansione nei gas più che perfetti

Se l'angolo di convessità della parete è maggiore di ν_{lim} la **corrente** si **separa** dalla **parete** a valle dello spigolo e l'ultima onda di Mach ha la stessa direzione della corrente. Infatti, per $M \rightarrow \infty$, si ha $\mu = \arcsin 1/M \rightarrow 0$:

Come già detto, la corrente continua deviare **solo** fino al raggiungimento della **pressione ambiente** p_a .

Se $p_a \neq 0$, **l'espansione** si **arresta** prima ed, essendo il moto isentropico, il numero di Mach a valle dell'ultima onda si ricava dalla:

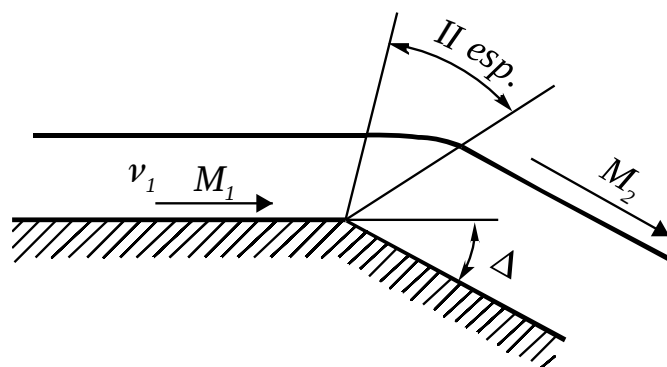
$$p_a = p_o \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$$



Onde di espansione nei gas più che perfetti

Si consideri una corrente a $M_1 > 1$ soggetta a una **deviazione** pari a Δ che la porta ad un numero di Mach incognito pari a M_2 .

La funzione $\nu(M)$ fornisce la deviazione della corrente a partire da $M=1$ e sembra che **non** possa essere **utilizzata** direttamente per la soluzione di questo problema.



Onde di espansione nei gas più che perfetti

Si consideri una corrente a $M_1 > 1$ soggetta a una **deviazione** pari a Δ che la porta ad un numero di Mach incognito pari a M_2 .

La funzione $v(M)$ fornisce la deviazione della corrente a partire da $M=1$ e sembra che **non** possa essere **utilizzata** direttamente per la soluzione di questo problema.

In realtà dalla definizione:

$$d\delta = -\sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$
$$v(M) = \int_1^M -d\delta = \int_1^M \sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

L'espansione si dovrebbe calcolare come:

$$\Delta = \text{PM}(M_1, M_2) = \int_{M_1}^{M_2} -d\delta = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$



Onde di espansione nei gas più che perfetti

In realtà dalla definizione:

$$v(M) = \int_1^M -d\delta = \int_1^M \sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

L'espansione si dovrebbe calcolare come:

$$\Delta = \text{PM}(M_1, M_2) = \int_{M_1}^{M_2} -d\delta = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{M^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

Chiaramente:

$$\Delta = \text{PM}(M_1, M_2) = \text{PM}(1, M_2) - \text{PM}(1, M_1)$$

e avendo posto:

$$v(M) = \text{PM}(1, M)$$

si ha:

$$\Delta = \text{PM}(M_1, M_2) = v(M_2) - v(M_1) = v_2 - v_1$$



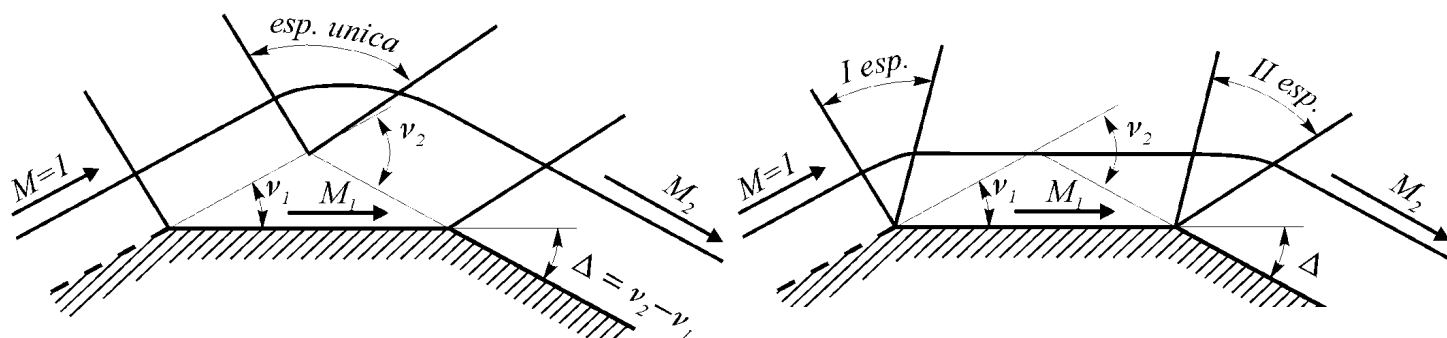
Onde di espansione nei gas più che perfetti

$$\Delta = PM(M_1, M_2) = v(M_2) - v(M_1) = v_2 - v_1$$

È chiaro che, partendo da $M=1$ si può arrivare a M_2 anche con un'unica deviazione pari a v_2 . Quindi da un diverso punto di vista è come se si scomponesse la rotazione in due rotazioni successive:

- a partire da **condizioni fittizie** in cui $M=1$ la corrente devia, con un ventaglio, di un angolo v_1 raggiungendo un numero di Mach uguale a M_1 ;
- la seconda rotazione permette di deviare dell'angolo $\Delta = v_2 - v_1$ sino a M_2 ;

Questo ragionamento è possibile poiché, essendo l'espansione di **Prandtl e Meyer isoentropica**, si può applicare alle diverse espansioni il principio di **sovrapposizione** degli **effetti**.



Onde di espansione nei gas più che perfetti

Per **trovare** il numero di Mach M_2 di una corrente a $M_1 > 1$ soggetta a una **deviazione** pari a Δ si procede in questo modo:

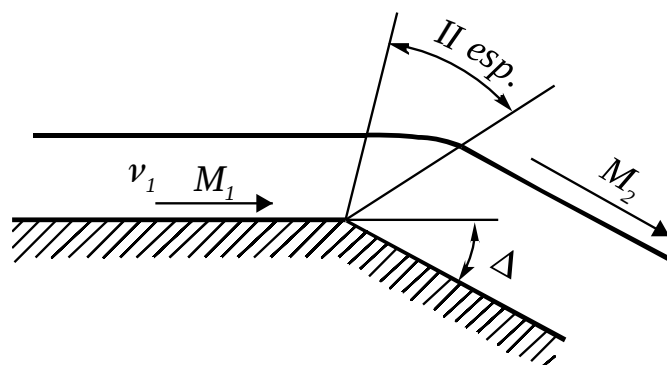
- a partire da M_1 , si calcola il valore dell'angolo di Prandtl e Meyer v_1 ;
- si somma l'angolo Δ a v_1 ottenendo così il valore di $v_2 = v_1 + \Delta$;
- dalle tabelle si legge il M_2 .

Ad esempio per $M_1 = 3$ e $\Delta = 20^\circ$:

$$M_1 = 3 \xrightarrow{PM} v_1 = 50^\circ$$

$$\Delta = 20^\circ \rightarrow v_2 = v_1 + 20^\circ = 70^\circ$$

$$v_2 = 70^\circ \xrightarrow{PM} M_2 = 4.3$$



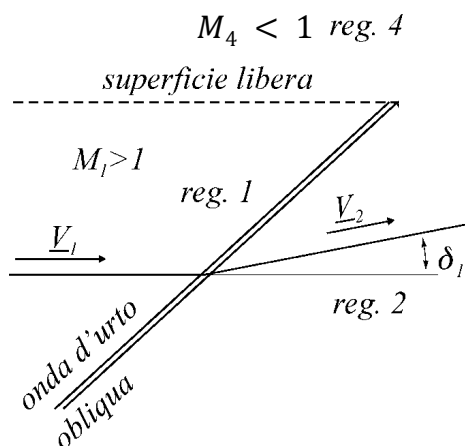
Riflessione di onde su superfici libere

Una **superficie libera** (anche riferita in precedenza come **linea di slip** o di linea di **contatto**) è una superficie che **separa** due **correnti** aventi modulo della velocità diverso ma stessa **direzione** e **pressione** (anche la temperatura è in generale discontinua).

Per **semplicità** si supporrà che una delle due correnti sia **supersonica** e che l'altra sia **subsonica** (o al limite a velocità nulla).

Un'onda d'urto **obliqua** provoca una **deviazione** δ_1 che porta la corrente nella regione 2 ad un numero di Mach $M_2 > 1$.

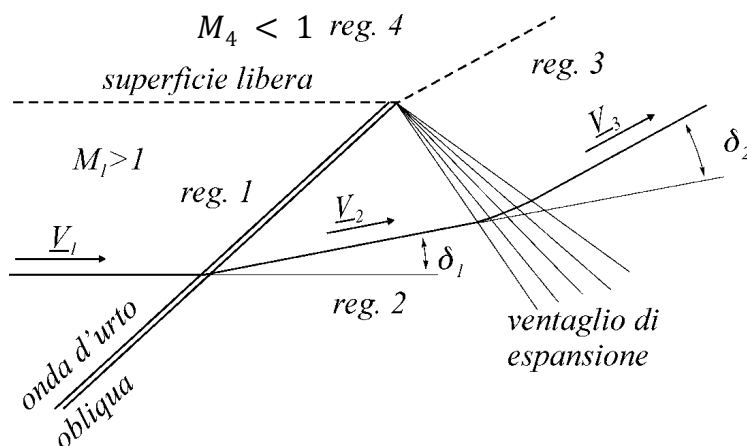
L'onda d'urto darà luogo ad una **compressione** $p_2 > p_1$, ma sulla superficie libera i valori della pressione nelle due regioni 2-4 devono necessariamente essere **uguali** tra loro.



Riflessione di onde su superfici libere

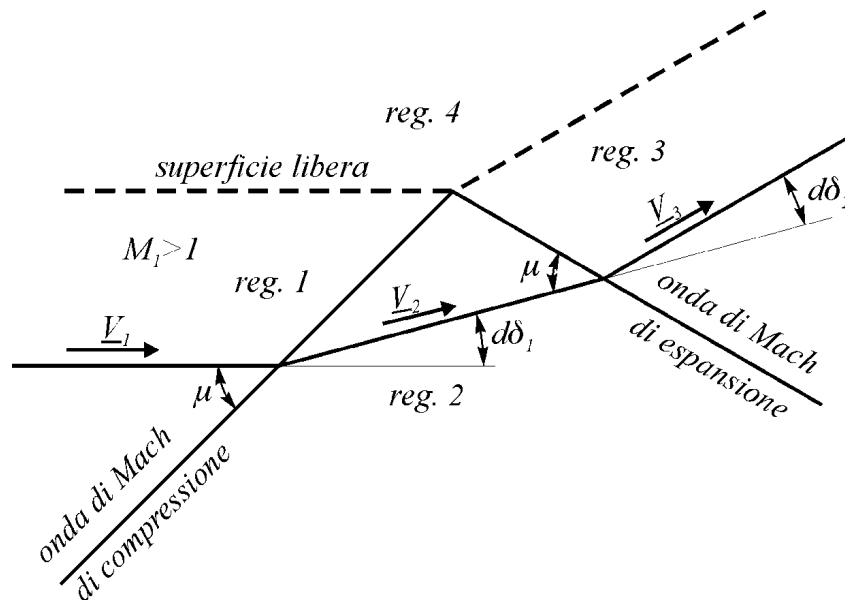
Ne consegue che dal punto di **intersezione** tra l'onda d'urto e la superficie libera deve formarsi un ventaglio di espansione che **riporti** la **pressione** al valore $p_3 = p_1 = p_4$.

Questo ventaglio di espansione ovviamente darà luogo ad una **ulteriore deviazione** della corrente δ_2 nello stesso verso della deviazione δ_1 .



Riflessione di onde su superfici libere

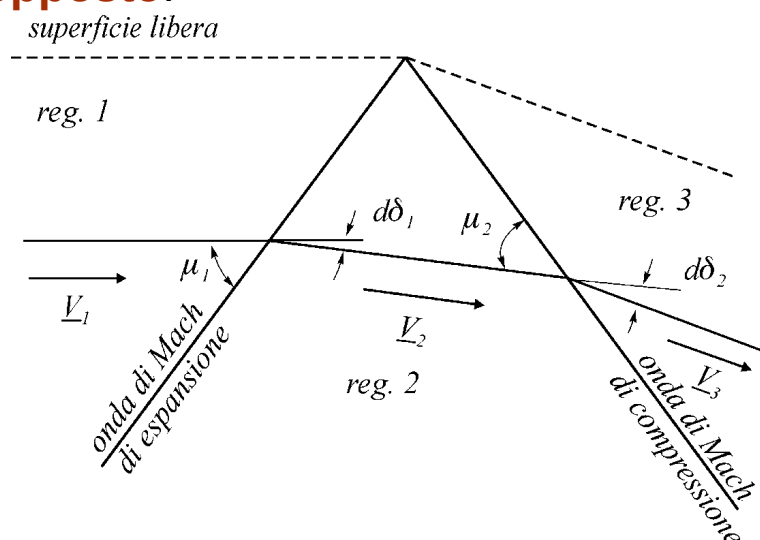
Se l'onda che incide sulla superficie libera fosse un'onda di Mach di **compressione**, è chiaro che essa si rifletterebbe come una **singola onda** di Mach di **espansione**. Le due deviazioni $d\delta_1$ e $d\delta_2$ sono **infinitesime**.



Riflessione di onde su superfici libere

Qualora, invece, l'onda incidente sulla superficie libera sia un'onda di Mach di **espansione**, essa si rifletterebbe come un'onda di Mach di **compressione**. Anche in questo caso le due deviazioni $d\delta_1$ e $d\delta_2$ sono infinitesime, ma entrambe nel verso opposto a quello dei casi precedenti.

Le onde di Mach si **riflettono** su **una superficie libera** come onde di famiglia e tipo **opposto**.

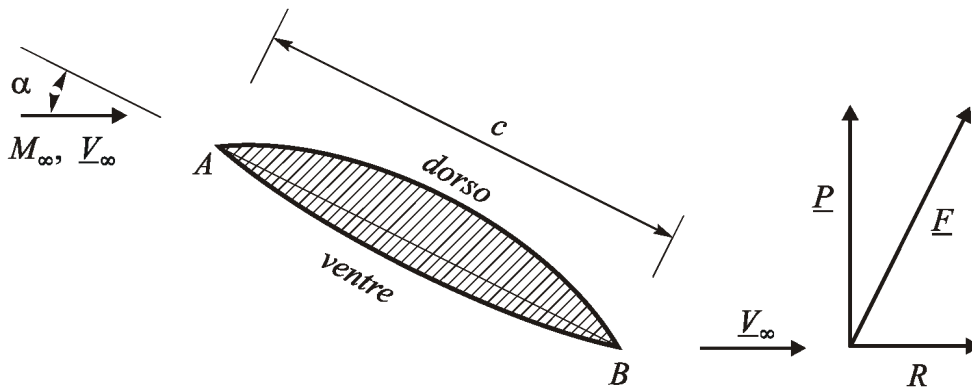


Il metodo urto-espansione

Una applicazione delle teorie dell'onda d'urto obliqua e dell'espansione alla Prandtl e Meyer è la determinazione della portanza e della resistenza (trascurando gli effetti viscosi) di profili alari bidimensionali supersonici con il cosiddetto metodo **urto-espansione**.

Le definizioni dei **coefficienti** di **portanza** e di **resistenza** sono:

$$P = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_P; \quad R = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_R;$$



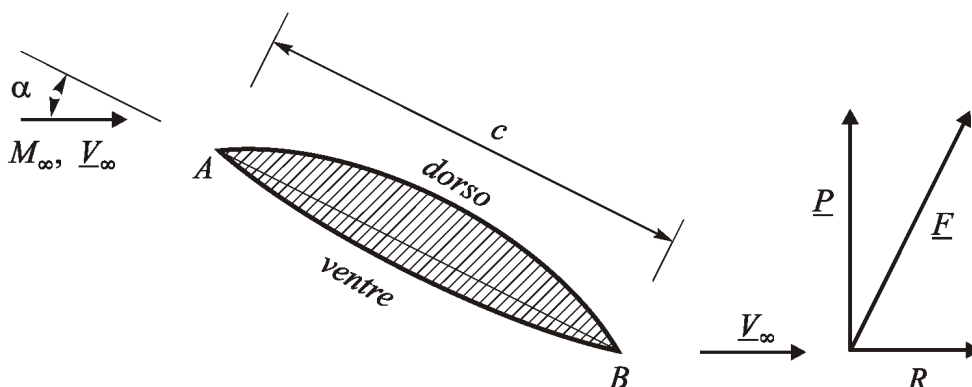
Il metodo urto-espansione

Le definizioni dei **coefficienti** di **portanza** e di **resistenza** sono:

$$P = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_P; \quad R = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c C_R;$$

Per un gas più che perfetto:

$$\rho_{\infty} V_{\infty}^2 = \rho_{\infty} a_{\infty}^2 M_{\infty}^2 = \rho_{\infty} \gamma R T_{\infty} M_{\infty}^2 = \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2$$
$$C_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} = \frac{2P}{\gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 c}; \quad C_R = \frac{R}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 c} = \frac{2R}{\gamma p_{\infty} M_{\infty}^2 c};$$

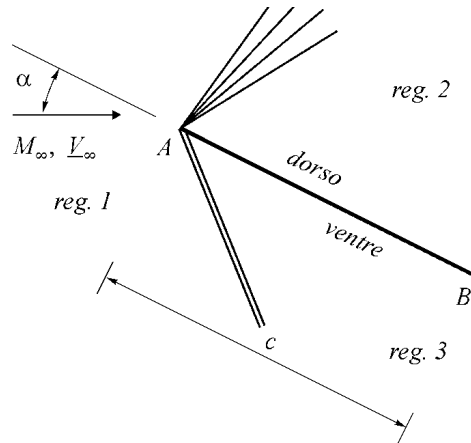


Il metodo urto-espansione

Si consideri una **lastra piana**, di spessore infinitamente sottile, posta ad un angolo di attacco positivo α rispetto ad una corrente **supersonica** avente numero di Mach pari a M_∞ . Si supponga inoltre che $\alpha < \delta_{max}$ corrispondente a M_∞ e si trascurino gli effetti viscosi.

La corrente supersonica sul bordo di attacco del profilo trova:

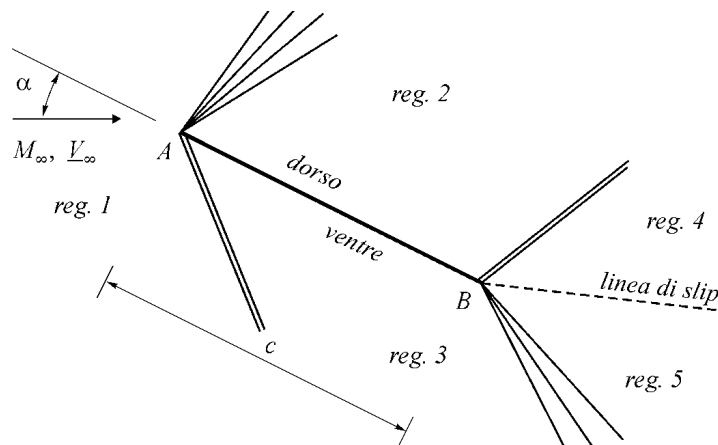
- una **convessità** nella parte **superiore** con la formazione di una **espansione** di Prandtl e Meyer;
- una **concavità** nella parte **inferiore** con la formazione un'**onda d'urto** obliqua debole.



Il metodo urto-espansione

La diminuzione della pressione sul dorso del profilo (regione 2) ed l'aumento sul ventre (regione 3) generano una **portanza** ed una **resistenza positive**.

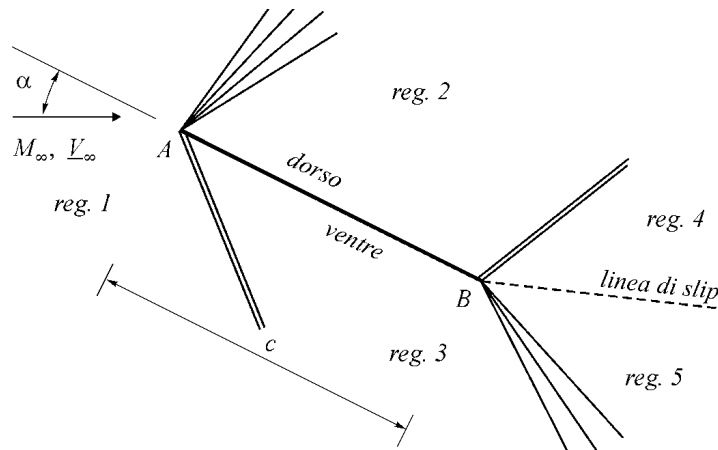
Le due correnti supersoniche nelle regioni 2 e 3 hanno, pertanto, la **stessa direzione** ma due diverse **pressioni**. Per equilibrarle nasceranno **dal bordo di uscita** del profilo un'**onda d'urto** verso l'alto ed un **ventaglio di espansione** verso il basso.



Il metodo urto-espansione

Le regioni 4 e 5 sono separate da una **linea di slip** e, anche se i moduli delle velocità sono diversi, le **direzioni** e la **pressioni** devono **essere le stesse**.

Per **risolvere** il problema (determinazione dell'inclinazione dell'onda d'urto obliqua tra le regioni 2 e 4, dell'ampiezza del ventaglio di espansione tra le regioni 3 e 5 e quindi dell'inclinazione della linea di slip) si deve **procedere per tentativi**.

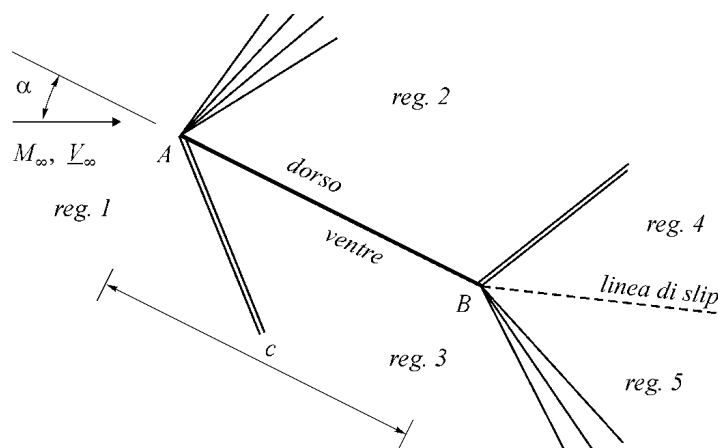


Il metodo urto-espansione

Per determinare **portanza** e **resistenza** sul profilo non è necessario risolvere anche **le zone 4 e 5** perché in moto supersonico **non influenzano** la distribuzione di pressione sul profilo.

Evidentemente si ha: $P = (p_3 - p_2)c \cos \alpha$, $R = (p_3 - p_2)c \sin \alpha$

Le quantità $(c \cos \alpha)$ e $(c \sin \alpha)$ possono essere viste come le due **proiezioni** della superficie alare in **direzione normale** alla **portanza** e normale alla **resistenza**, rispettivamente.



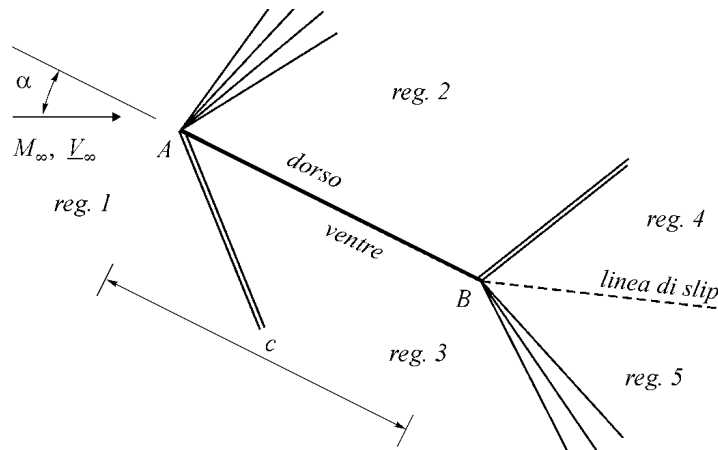
Il metodo urto-espansione

$$P = (p_3 - p_2)c \cos \alpha, \quad R = (p_3 - p_2)c \sin \alpha$$

Da cui:

$$C_P = \frac{2P}{\gamma p_\infty M_\infty^2 c} = \frac{2(p_3 - p_2) \cos \alpha}{\gamma p_\infty M_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \cos \alpha;$$

$$C_R = \frac{R}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} = \frac{2(p_3 - p_2) \sin \alpha}{\gamma p_\infty M_\infty^2} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \sin \alpha;$$



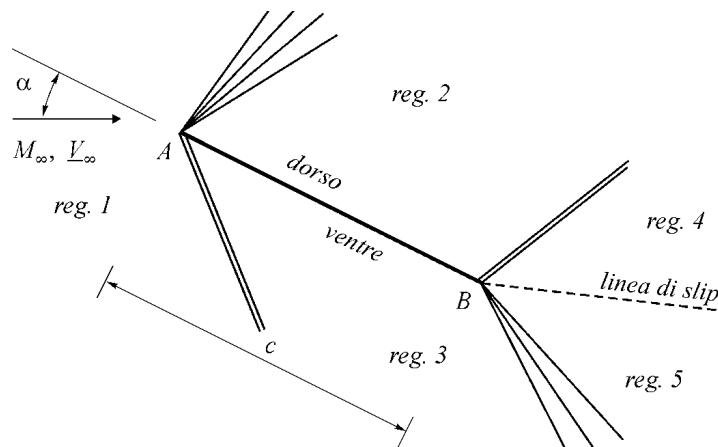
Il metodo urto-espansione

$$C_P = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \cos \alpha; \quad C_R = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p_3}{p_\infty} - \frac{p_2}{p_\infty} \right) \sin \alpha;$$

Per $\alpha = 0 \rightarrow p_2 = p_3 = p_\infty$. ed i coefficienti di portanza e resistenza si annullano.

In generale, i **rapporti di pressione** dipendono solo da α , γ e M_∞ .

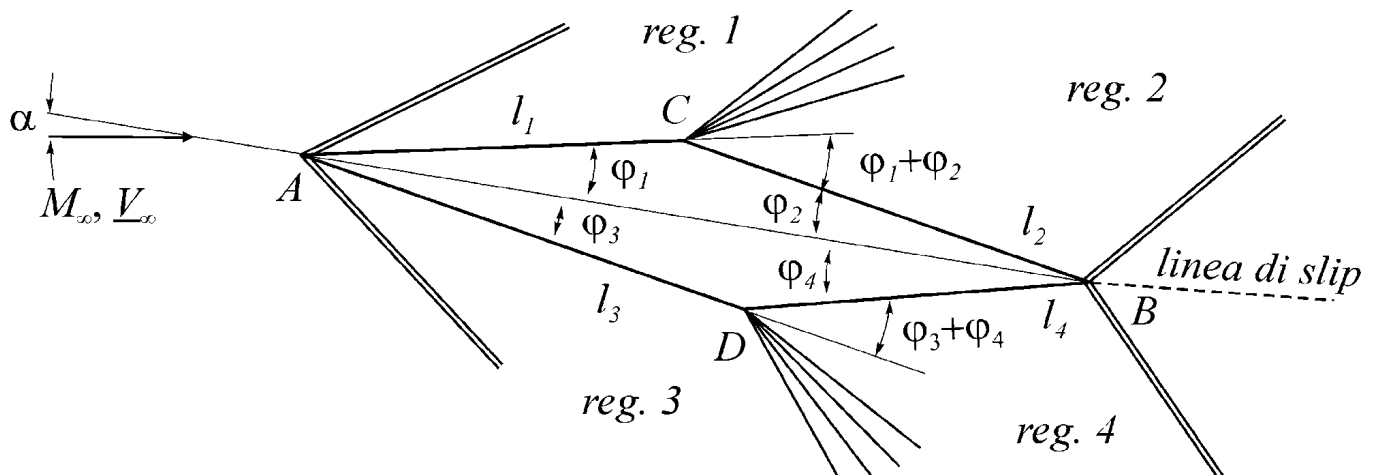
In generale anche avendo trascurato gli effetti viscosi la resistenza è non nulla e si chiama **resistenza d'onda**.



Il metodo urto-espansione

Il caso di un profilo alare (con un bordo d'attacco affilato per ridurre la resistenza d'onda) a sezione a diamante posto ad un angolo di attacco α in corrente **supersonica** avente numero di Mach pari a M_∞ si risolve in modo analogo alla lastra piana.

Si calcolano prima le pressioni nelle varie regioni e poi si proiettano i singoli contributi sugli assi portanza e resistenza.



Il metodo urto-espansione

Spesso è risulta più **semplice** proiettare i singoli contributi sugli **assi** intrinseci del **profilo** e solo successivamente con una **rotazione** calcolare portanza e resistenza. Dalla figura si ha:

$$L = N \cos \alpha - T \sin \alpha; \quad D = N \sin \alpha + T \cos \alpha$$

Durante le esercitazioni saranno analizzati i dettagli analitici.

