UNIVERSITY OF NAPLES ***FEDERICO II*** *1224 A.D.*

Gasdinamica

T. Astarita

astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

Versione del 6.5.2023

Moti compressibili con attrito

Per descrivere il moto in un **condotto** a **sezione costante** in presenza di **attrito** alle pareti esistono due modelli fondamentali:

- Moto alla **Fanno**
- Moto **isotermo**

L'unica differenza fra i due modelli di moto sono le condizioni al contorno per l'equazione di conservazione dell'energia, nel primo caso, il moto è considerato **omoenergetico** (in particolare, adiabatico), mentre nel secondo il moto è considerato isotermo.

Il moto alla **Fanno** è quello che **meglio descrive** il moto in un condotto a sezione costante in presenza di attrito alle pareti.

Moti compressibili con attrito

Le **ipotesi** alla base del moto con attrito alla **Fanno** sono le seguenti:

- il moto è quasi **unidimensionale** e quasi **stazionario**;
- l'**area** della sezione di passaggio del condotto è **costante**;
- il fluido **non scambia energia** né nel modo **lavoro**, né in quello **calore** con l'ambiente, cioè il moto è considerato **omoenergetico**;
  - in assenza di **lavoro** d'**elica** il moto deve essere **anergodico** (poiché sulla parete la **velocità** del fluido è **nulla** gli sforzi viscosi non lavorano);
  - per avere un moto **adiabatico** il condotto deve essere **termicamente isolato** dall'ambiente in modo che gli scambi di energia alla parete nel modo calore siano **trascurabili** rispetto all'energia **totale convetta**;
- gli effetti delle forze **gravitazionali** sono **trascurabili**;
  - ovvero il numero di Froude è grande;
- le condizioni termofluidodinamiche del fluido cambiano per effetto degli sforzi **viscosi** alla parete (che costituiscono la **forza spingente**).
  - Lf/D deve essere di ordine di unitario anche se $Re \gg 1$ per l'ipotesi di quasi unidimensionalità.

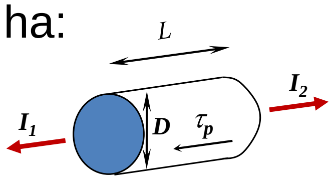
Moti compressibili con attrito

La conservazione della **massa**, con $A = cost$, implica la **costanza** del **flusso** di **massa**:

$$\dot{m} = \rho V A = G A = cost \qquad \rightarrow \qquad G = \rho V = cost$$

Dall'equazione di bilancio della **quantità** di **moto** proiettata sull'**asse** del **condotto**, trascurando il termine gravitazionale si ha:

$$I_1 A_1 \underline{n}_1 + I_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g} \qquad \rightarrow \qquad I_2 - I_1 = -\frac{S}{A}$$



La spinta è associata agli sforzi viscosi alla parete e supponendo che la **sezione** sia **circolare** si ha:

$$I_2 - I_1 = -\frac{S}{A} = -\frac{\mathcal{P} L \tau_p}{A} = -\frac{\pi D L}{\frac{\pi}{4} D^2} \tau_p = -4 \tau_p \frac{L}{D}$$

Ricordando la definizione del **coefficiente d'attrito** $f = 2\tau_P/\rho V^2$ si ha:

$$I_2 - I_1 = -\frac{S}{A} = -4\tau_p \frac{L}{D} = -4 f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{L}{D} = -\frac{1}{2} \rho V^2 \frac{4 f L}{D}$$

Moti compressibili con attrito

$$I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}\,\rho V^2 \frac{4fL}{D}$$

Lo **sforzo tangenziale** è stato supposto **costante** sulla parete del condotto ma potendo variare occorre valutarne sempre il **valor medio**.

Per moto **incompressibile** dall'equazione di **continuità** deriva che anche la **velocità** è **costante**, la variazione dell'impulso specifico risulta uguale alla variazione della sola **pressione**, ottenendosi quindi:

$$I = p + \rho V^2 \qquad \rightarrow \qquad I_2 - I_1 = p_2 - p_1 = -\Delta p = -\frac{1}{2}\,\rho V^2 \frac{4fL}{D}$$

dove Δp è intrinsecamente positivo. In **Idraulica** si definisce il coefficiente di **Darcy** come:

$$f_d = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2 \frac{L}{D}} = 4f$$

Coefficiente d'attrito

$$f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{I_1 - I_2}{\frac{1}{2}\rho V^2 \frac{4L}{D}}$$

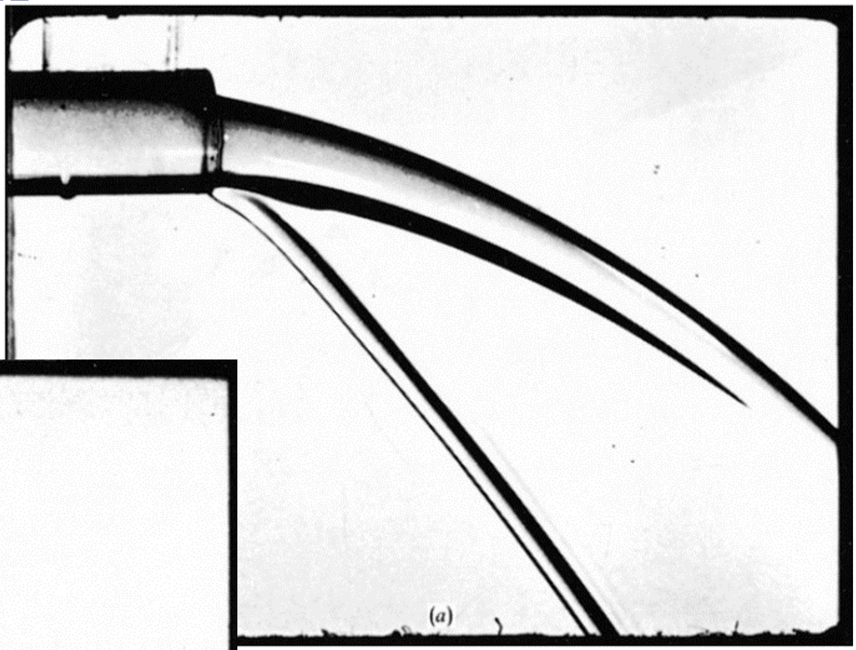
Il coefficiente d'attrito è funzione del numero di **Reynolds** Re, della **rugosità superficiale** del condotto ϵ e del numero di **Mach**.

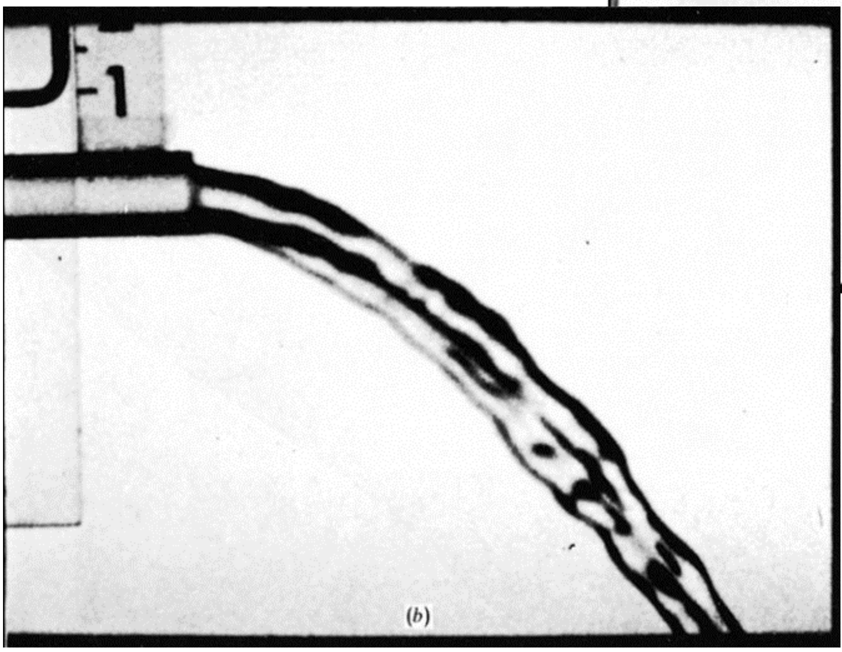
L'influenza del numero di **Mach** non è stata analizzata nella letteratura e quindi nel seguito sarà **trascurata**. Quindi si supporrà che:

$$f = f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

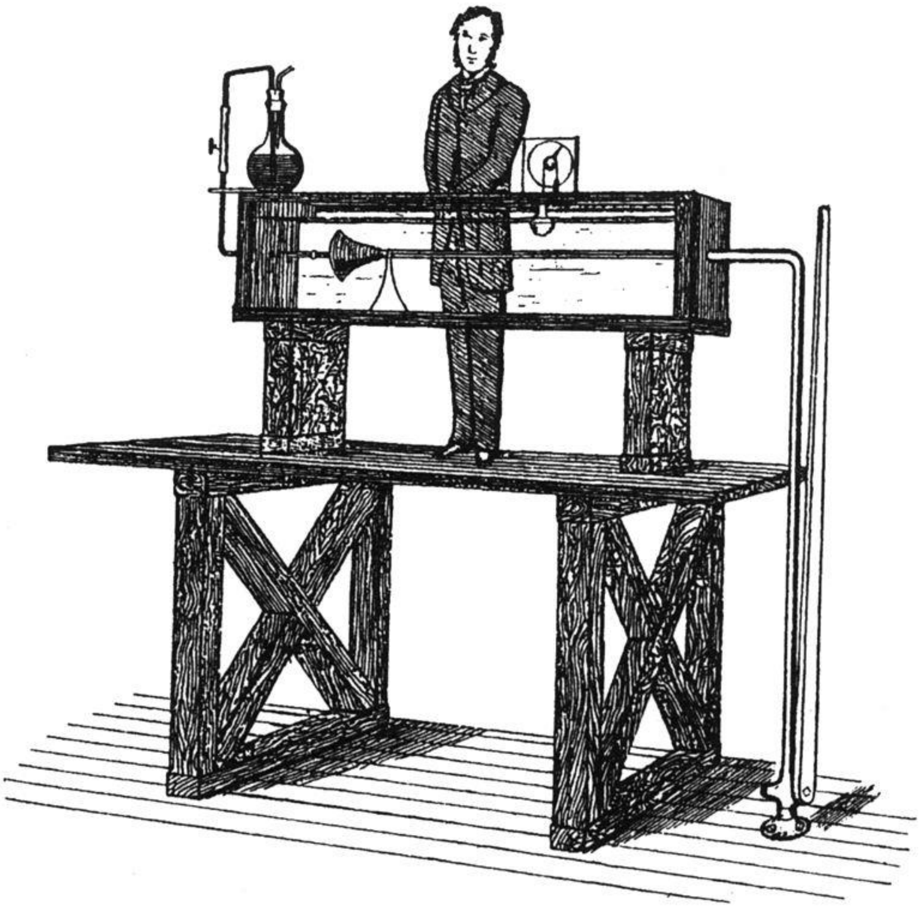
Evidentemente a seconda del regime di moto **laminare** o **turbolento** la funzione sarà diversa.

Moto laminare - turbolento



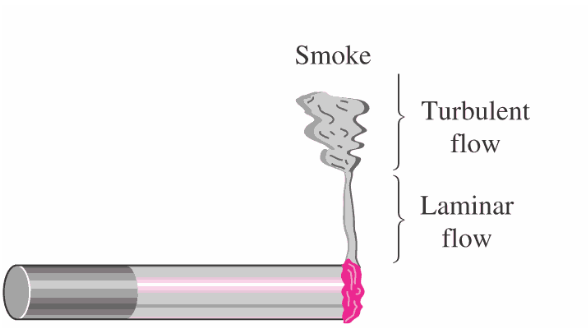


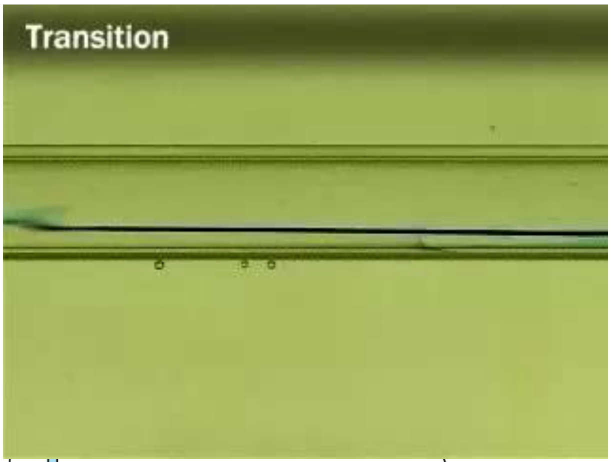
Moto laminare - turbolento

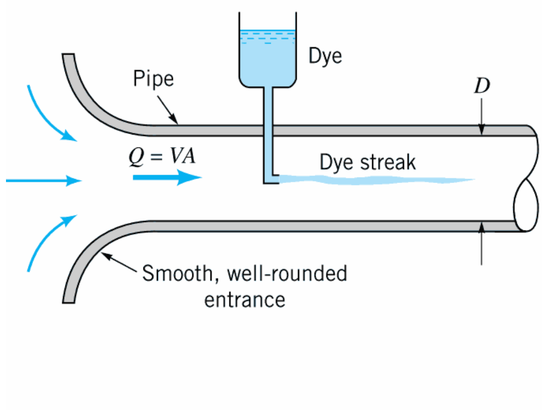


Esperimento di Reynolds

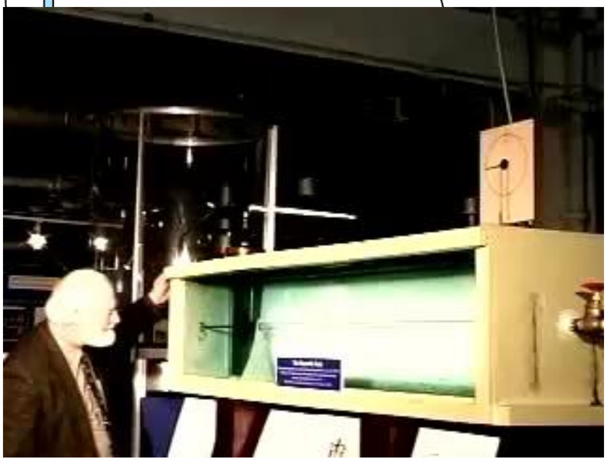
Moto laminare - turbolento



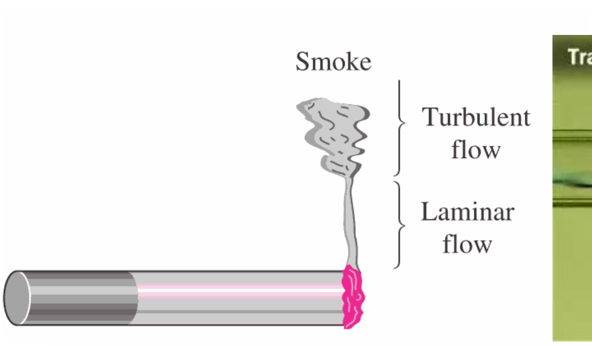


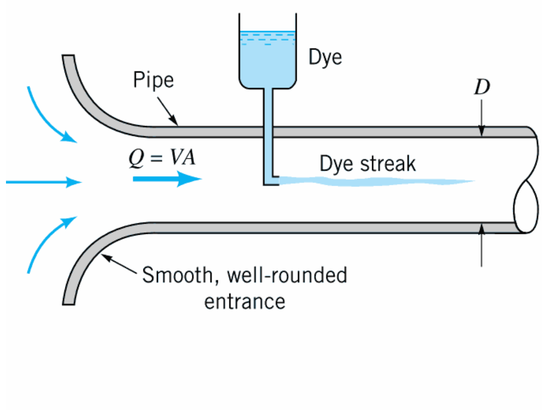


(*a*)

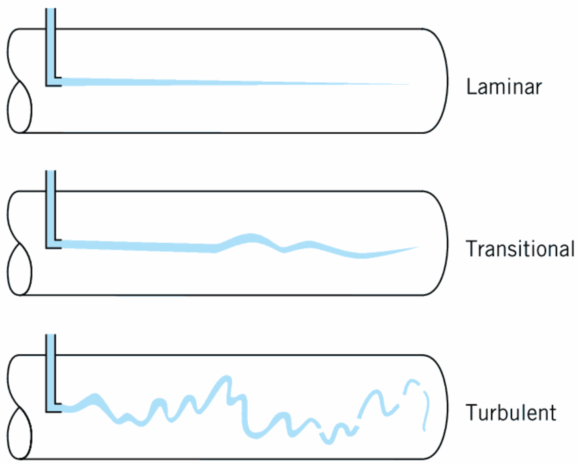


Moto laminare - turbolento



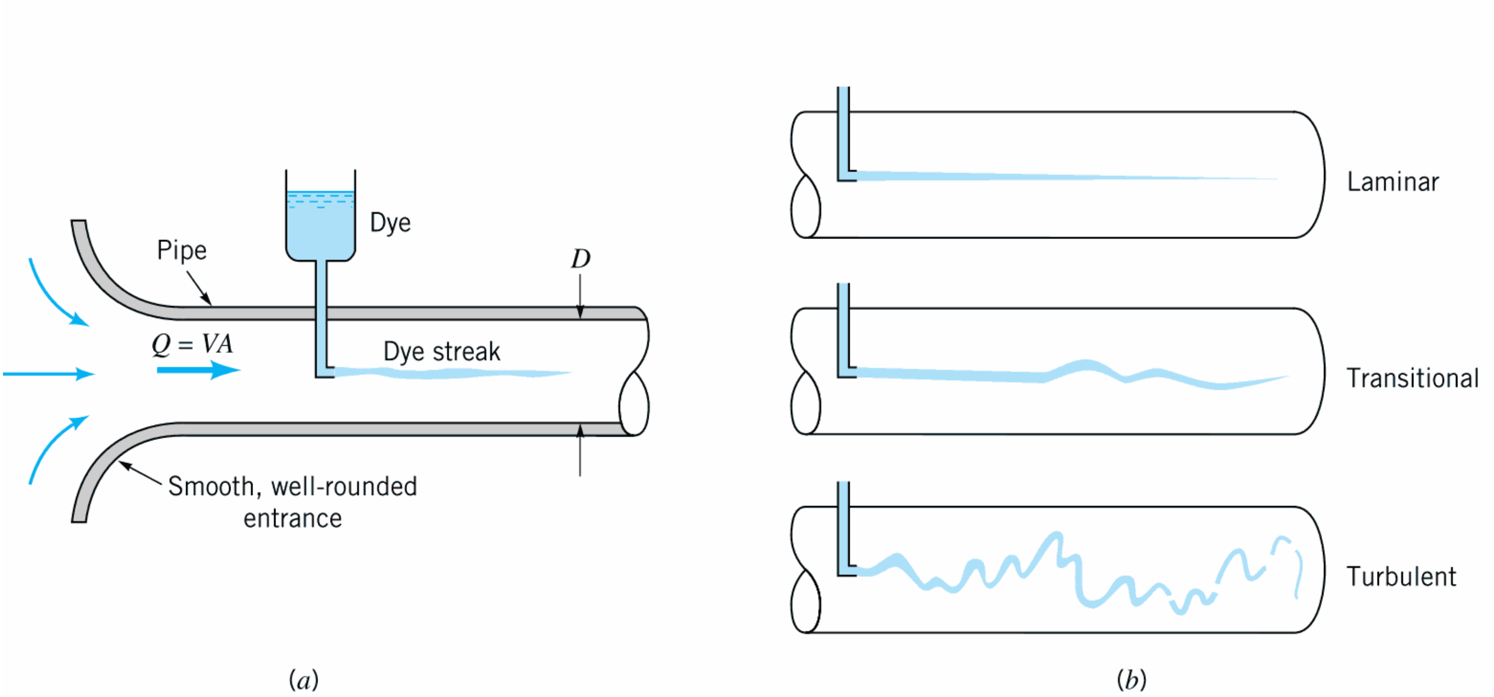


(*a*)



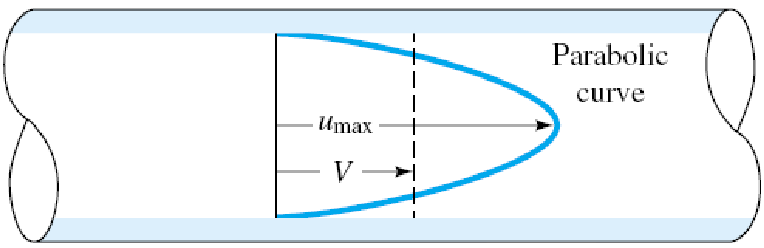
(*b*)

Moto laminare - turbolento

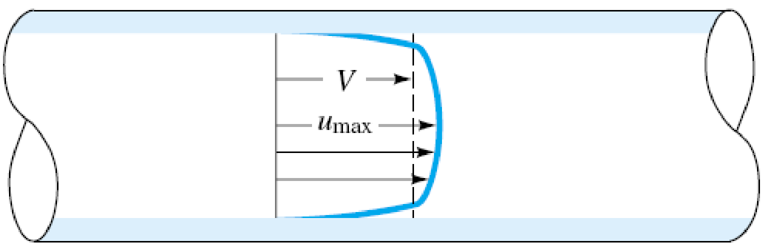


$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \qquad \begin{cases} Re \leq 2300 & \textit{Moto Laminare} \\ 2300 \leq Re \leq 4200 & \textit{Moto transizionale} \\ Re \geq 4200 & \textit{Moto Turbolento} \end{cases}$$

Moto laminare - turbolento

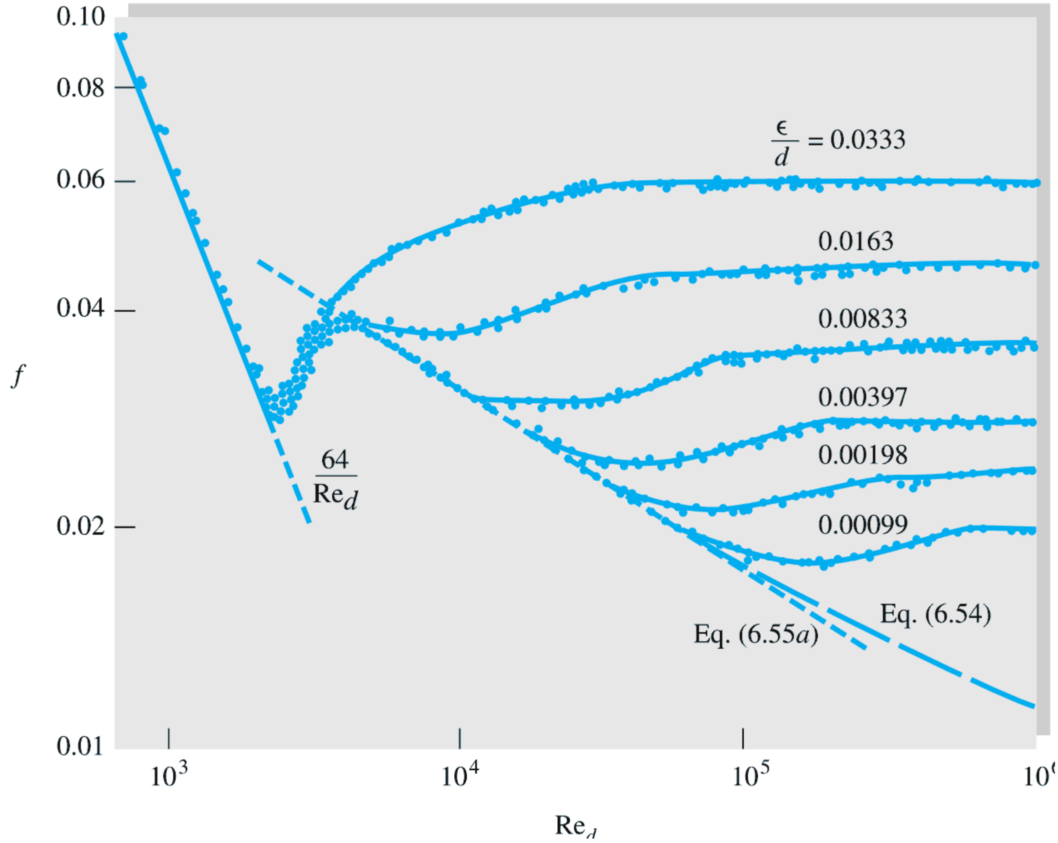


In moto **laminare** ($Re < 2300$) il profilo di velocità è **parabolico**.



In moto **turbolento** ($Re > 4200$) il profilo di velocità è quasi "top hat" ed il moto può essere considerato **unidimensionale**.

Abaco di Moody



Gli esperimenti di Nikuradse (1933) confermano che $f = f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$.

Abaco di Moody

Per il regime **laminare** esiste una **soluzione esatta** che fornisce:

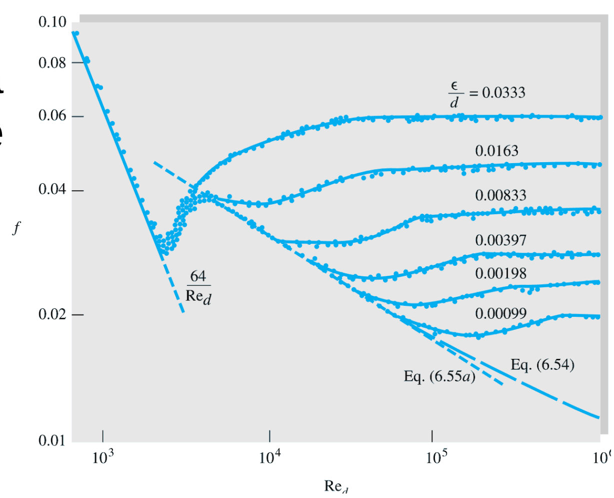
$$f_d = 4f = \frac{64}{Re}$$

Invece per il regime **turbolento** i dati sperimentali sono riassunti dalla formula teorico sperimentale di **Colebrook** e **White** (1939):

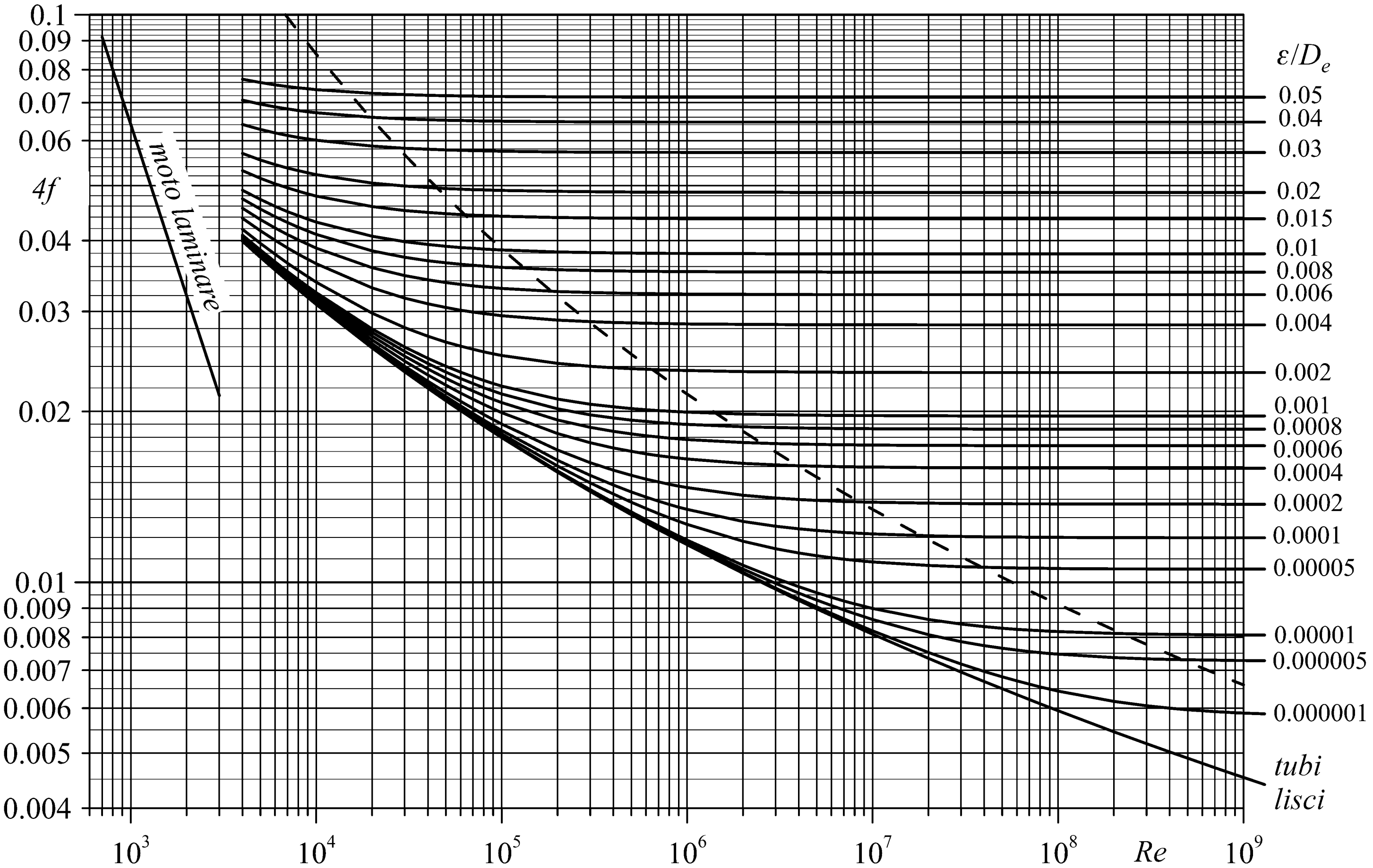
$$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2\log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f_d}}\right)$$

Che è una formula **implicita**; una formula esplicita, che differisce meno del 2%, è quella di **Haaland** (1983):

$$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -1.8\log_{10}\left[\left(\frac{\epsilon/D}{3.7}\right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re}\right]$$



Abaco di Moody



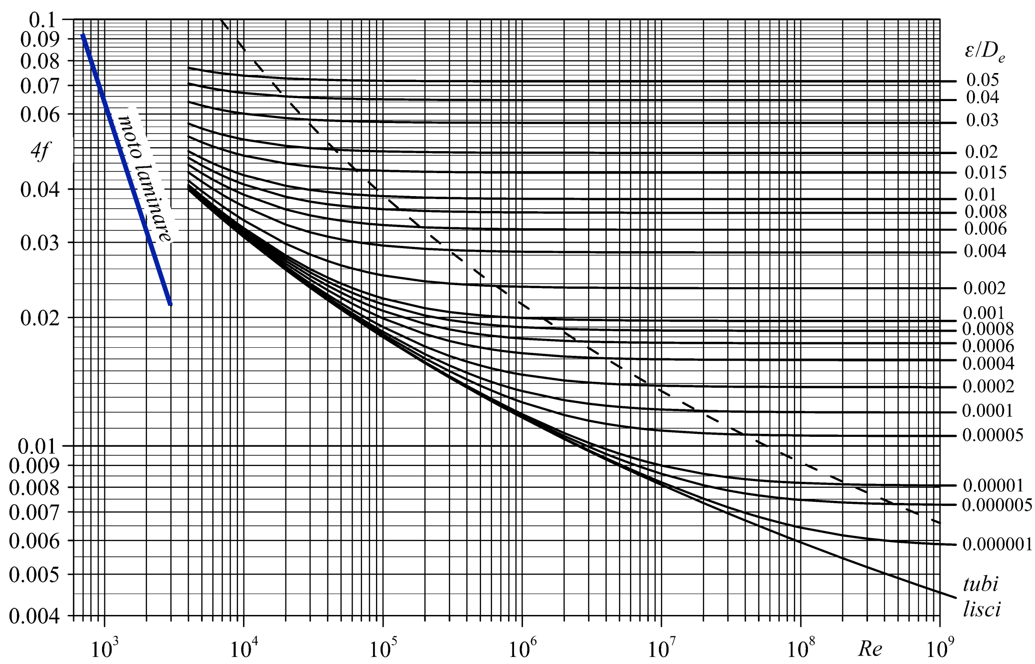
Spesso si utilizza l'abaco di **Moody**:

Abaco di Moody

Si notano i tre diversi comportamenti:

- moto **laminare** *f* è solo funzione del numero di Reynolds:

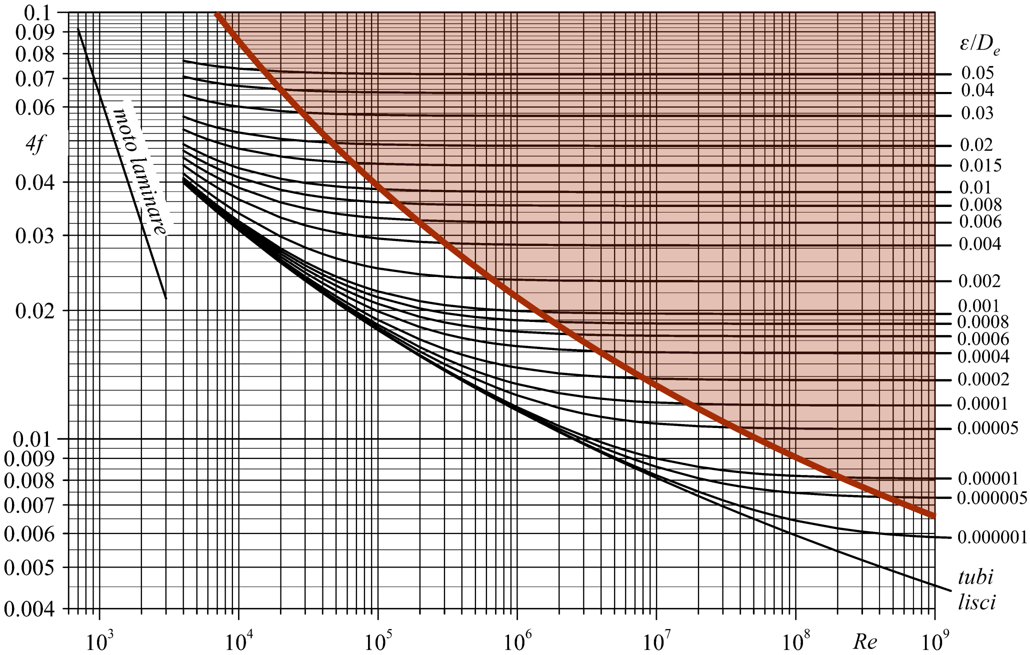
  $4f = \frac{64}{Re}$;



Abaco di Moody

Si notano i tre diversi comportamenti:

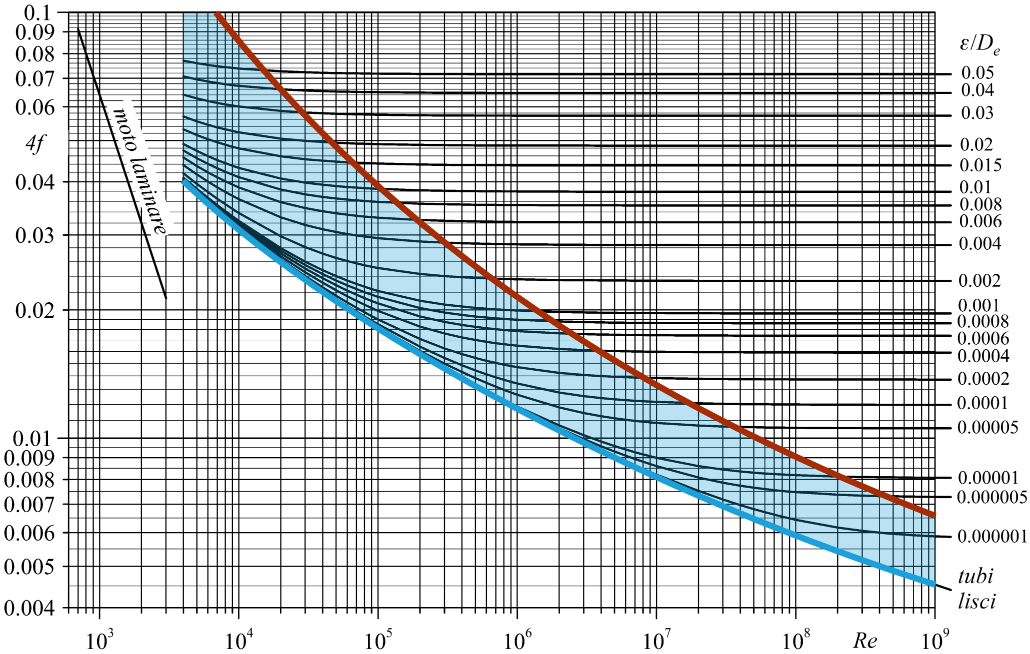
- moto **completamente turbolento** (moto dominato dalla **rugosità**) per alti Re e ϵ/D si perde la dipendenza dal numero di Reynolds:
  $\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2\log_{10}\left(\frac{\epsilon/D}{3.7}\right)$;



Abaco di Moody

Si notano i tre diversi comportamenti:

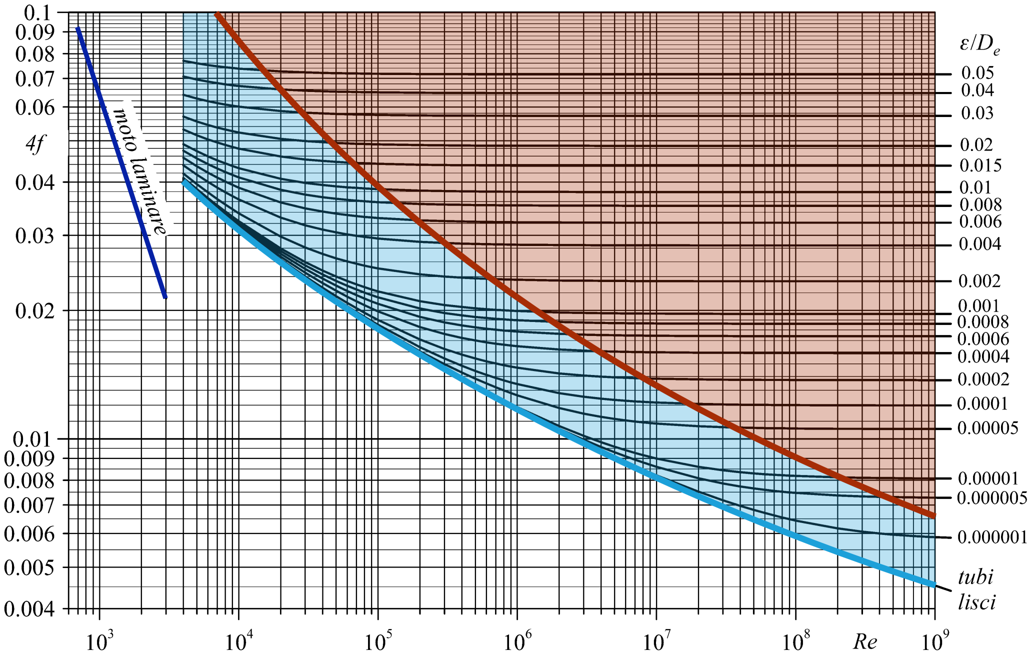
- moto **turbolento** f dipende sia Re che da ϵ/D:
  $\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2\log_{10}\left(\frac{2.51}{Re\sqrt{f_d}}\right)$;
  nel limite in cui $\epsilon/D \rightarrow 0$ si ricade nel caso dei **tubi lisci**:



Abaco di Moody

Dunque i tre diversi comportamenti:

- moto **laminare** *f* è solo funzione del numero di Reynolds;
- moto **turbolento** f dipende sia Re che da ϵ/D;
- moto **completamente turbolento** (moto dominato dalla **rugosità**).



Moti compressibili con attrito

La conservazione dell'**energia**, con $\dot{Q} = \dot{L} = 0$, implica la **costanza** dell'entalpia totale:

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} - \dot{L} \qquad \rightarrow \qquad H = h + \frac{V^2}{2} = cost$$

A cui si aggiungono:

$$G = \rho V = cost$$

$$I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}\,\rho V^2 \frac{4fL}{D}$$

Ed in termini **differenziali**:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$dI = dp + \rho V\,dV = -\frac{1}{2}\,\rho V^2 \frac{4f\,dx}{D}$$

$$dH = dh + V\,dV = 0$$

Dove x è la coordinata lungo l'asse del condotto.

Moti compressibili con attrito

Le equazioni che governano il moto alla **Fanno** sono state trovate senza fare **ipotesi** sul **modello di gas**:

$$G = \rho V = cost \qquad \frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}\rho V^2 \frac{4fL}{D} \qquad dI = dp + \rho V\,dV = -\frac{1}{2}\rho V^2 \frac{4f\,dx}{D}$$

$$H = h + \frac{V^2}{2} = cost \qquad dH = dh + V\,dV = 0$$

La prima e la terza equazione mostrano che le **variazioni** di **velocità** sono di segno **opposto** a quelle di **densità** e di **entalpia**.

Per la **positività** del **coefficiente** di **attrito** le variazioni dell'**impulso specifico** sono sempre **negative**.

Moti compressibili con attrito

In moto **compressibile** il numero di **Reynolds**, non è costante infatti la viscosità dinamica è, in generale, funzione della temperatura e della pressione:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{GD}{\mu(T,p)}$$

Di conseguenza anche il **coefficiente** d'**attrito** potrebbe **variare** lungo il condotto e, nel seguito si supporrà sempre che f sia il **valore medio**.

La curva del moto alla Fanno

Le due equazioni:

$$G = \rho V = cost \qquad\qquad H = h + \frac{V^2}{2} = cost$$

unite alle **equazioni** di **stato** del **gas**:

$$p = \rho R T \qquad\qquad h = c_p T = \gamma c_v T$$

forniscono un sistema di quattro equazioni in cinque incognite e definiscono una **curva** che può essere **rappresentata** nel piano ***T-s***.

La **curva** di **Fanno** può essere diagrammata sul piano di ***T-s*** a partire dall'espressione della sua **tangente** locale $\partial T / \partial s$:

$$dh + V\,dV = 0 \quad \rightarrow \quad dh = \gamma c_v\,dT = -V\,dV$$

$$-\gamma c_v\,dT = V^2 \frac{dV}{V} = a^2 \frac{V^2}{a^2}\frac{dV}{V} = \gamma R T M^2 \frac{dV}{V} \quad \rightarrow \quad c_v \frac{dT}{T} = -R M^2 \frac{dV}{V}$$

La curva del moto alla Fanno

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \qquad\qquad c_v \frac{dT}{T} = -R M^2 \frac{dV}{V}$$

Sostituendo si ha:

$$c_v \frac{dT}{T} = -R M^2 \frac{dV}{V} = R M^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

L'equazione di ***T-s*** per un gas **più che perfetto** si può scrivere nella forma:

$$c_v dT = du = Tds - pdv = Tds - pd\frac{1}{\rho} = Tds + \frac{\rho R T}{\rho^2} d\rho = Tds + RT\frac{d\rho}{\rho}$$

$$Tds = c_v dT - RT\frac{d\rho}{\rho} \quad \rightarrow \quad ds = c_v \frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho}$$

da cui sostituendo si ha:

$$ds = R(M^2 - 1)\frac{d\rho}{\rho} = -R(M^2 - 1)\frac{dV}{V} = \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) c_v \frac{dT}{T} = \frac{M^2 - 1}{M^2} c_v \frac{dT}{T}$$

La curva del moto alla Fanno

$$ds = R(M^2-1)\frac{d\rho}{\rho} = -R(M^2-1)\frac{dV}{V} = \frac{M^2-1}{M^2}c_v\frac{dT}{T}$$

Per il **secondo principio** della **termodinamica**, in assenza di flussi di energia, $ds \geq 0$ e si ha ($p = \rho RT$) che per:

- $M < 1 \quad \rightarrow \quad dV > 0,\ d\rho < 0, dT < 0$ e $dp < 0$
- $M > 1 \quad \rightarrow \quad dV < 0,\ d\rho > 0, dT > 0$ e $dp > 0$

In regime **subsonico** l'aumento della velocità unito ad una diminuzione della temperatura provoca anche un **aumento** del numero di **Mach** (viceversa in regime supersonico).

Nel moto alla **Fanno** il comportamento del flusso è simile a quello di un ugello convergente infatti il **flusso** tende alle condizioni **soniche**.

Dall'equazione precedente si ricava la **pendenza** della **curva** di **Fanno** nel piano ***T-s***:

$$\frac{c_v}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,H} = \frac{M^2}{M^2-1}$$

La curva del moto alla Fanno

$$\frac{c_v}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,H} = \frac{M^2}{M^2-1}$$

Al **variare** del numero di **Mach** si ha:

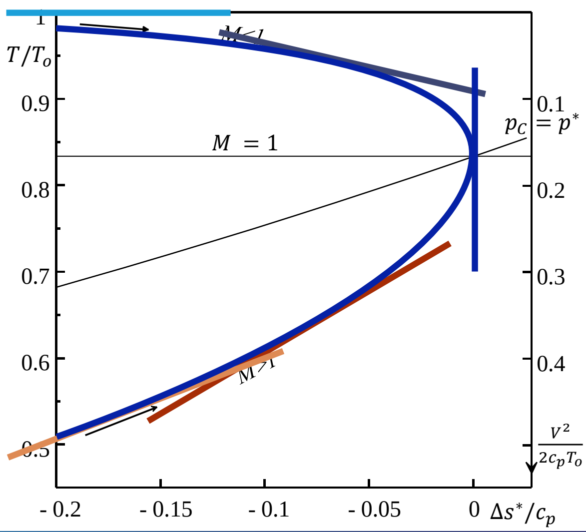
- per $M \rightarrow 0$, moto **iposonico**, la **tangente** è **orizzontale** e la curva tende, quindi, all'**isoterma** che rappresenta la temperatura di ristagno;
- per $M < 1$, moto **subsonico**, la pendenza della curva è sempre negativa;
- per $M = 1$, condizione **critica**, la curva ha tangente **verticale** e **l'entropia** raggiunge un **massimo**;
- per $M > 1$, moto **supersonico**, la pendenza della curva è sempre positiva;
- per $M \rightarrow \infty$, moto **ipersonico**, si ha:

  $$\frac{c_v}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,H} \rightarrow 1$$

  che, ricordando la definizione di:

  $$c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$$

  fa sì che la curva di **Fanno** tenda ad una isocora ($\rho = cost$) e cioè abbia come **asintoto** l'asse dell'**entropia**.



La curva del moto alla Fanno

$$\frac{c_v}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,H} = \frac{M^2}{M^2-1}$$

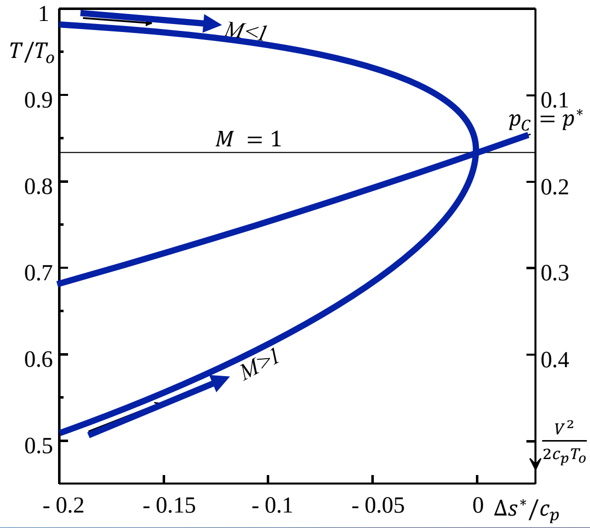
Per un fissato valore di γ, utilizzando la **temperatura normalizzata** con quella di **ristagno** T/T_o e $\Delta s^* = 0$, la **curva** di **Fanno** è **unica**.

In coordinate **dimensionali**, invece, ad ogni coppia di valori G e H corrisponde una **particolare** curva di Fanno.

Ad esempio, è chiaro che, fissare l'**entalpia totale** H, implica un determinato valore di T_o e, cioè, il livello dell'**asintoto** $T = T_o$.

Il moto alla Fanno è **adiabatico** quindi le variazioni d'**entropia** sono causate da **produzioni** positive quelle associate alla presenza degli **sforzi viscosi** alla parete.

Come già detto sono possibili solo **spostamenti** sulla la curva di Fanno verso **entropie crescenti** e il fluido tende alle condizioni **soniche**.



La curva del moto alla Fanno

La **tendenza** a raggiungere $M = 1$ è forse più chiara esaminando l'andamento del numero di **Mach** in funzione dell'**entropia**.

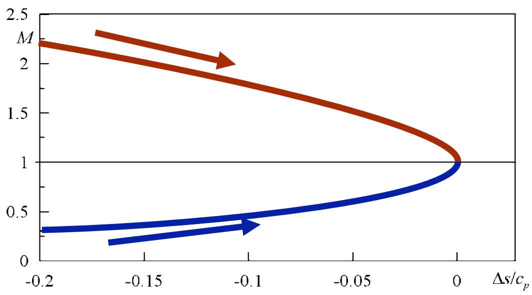
Chiaramente in questo caso la curva superiore è quella **supersonica**.

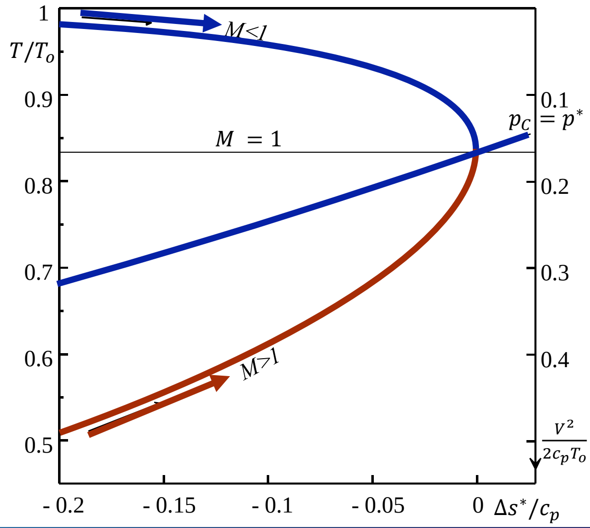
Per condizioni d'ingresso **subsoniche**, lungo il condotto si sia ha un **aumento** del numero di **Mach** e della **velocità** ed una **diminuzione** della **temperatura**, **densità** e **pressione**.

L'azione degli sforzi **viscosi** provoca un'**accelerazione** del fluido che, a prima vista, può sembrare **anomala** però:

$$dI = dp + d(\rho V^2)$$

$$dI = dp + GdV = -\frac{\rho V^2}{2}\frac{4f\,dx}{D}$$



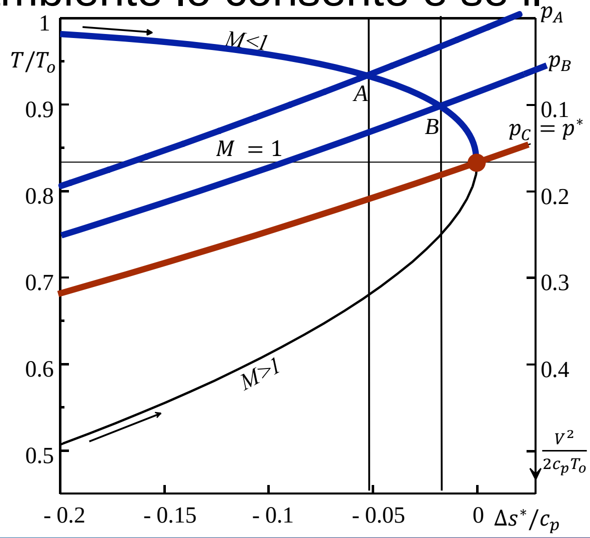


La curva del moto alla Fanno

$$dI = dp + d(\rho V^2) = dp + GdV = -\frac{\rho V^2}{2}\frac{4f\,dx}{D}$$

In questa equazione dp e dV hanno **segni opposti** e in regime **subsonico** il fenomeno è governato dalla **forte diminuzione** della **pressione** e il conseguente **abbassamento** della **densità** del fluido, **provoca** un **aumento** della **velocità**.

Come in un convergente, se la pressione ambiente lo consente e se il condotto è **sufficientemente lungo**, si può raggiungere il punto di **massima entropia** cioè la condizione **sonica**, in questo caso il moto **strozza** perché non si può più produrre entropia e, quindi, percorrere ulteriori tratti di condotto.

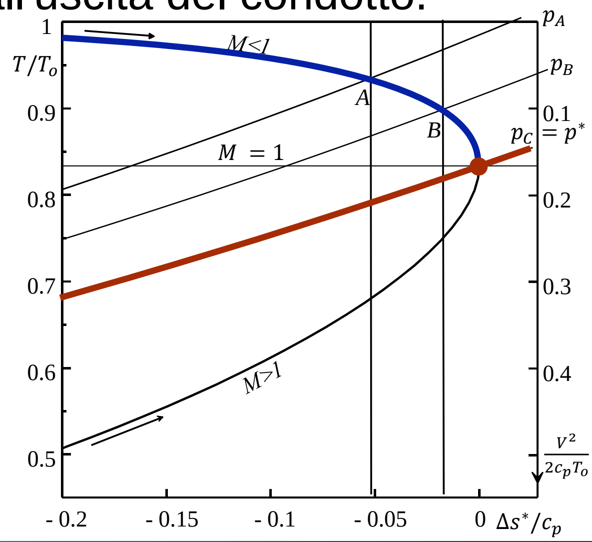


La curva del moto alla Fanno

Come si vedrà in seguito, un **ulteriore allungamento** del condotto dà luogo ad una **diminuzione** di G, cioè della portata di massa.

Anche per il moto alla Fanno, il punto **sonico** è una condizione **limite** del moto ed è anche detta **condizione critica**.

Poiché le condizioni soniche corrispondono alla massima produzione di entropia possibile, se il moto all'ingresso del condotto è **subsonico**, esso potrà al **massimo** diventare **sonico** all'uscita del condotto.

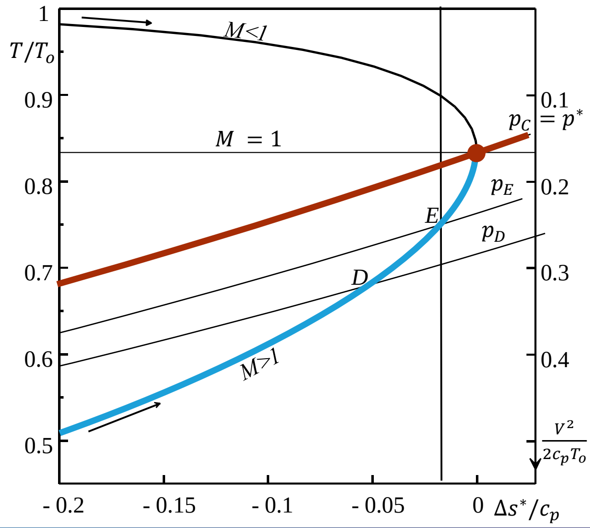


La curva del moto alla Fanno

Per moto **supersonico**, il comportamento del fluido è esattamente opposto a quello in moto subsonico, lungo il condotto si ha sia **diminuzione** del numero di **Mach** e della **velocità** e un **aumento** della **temperatura**, **densità** e **pressione**.

Nel moto **supersonico**, l'effetto dovuto alla **diminuzione** di **velocità** prevale, quindi, su quello dovuto all'**aumento** di **pressione**.

Anche in questo caso (in assenza di onde d'urto) si possono raggiungere le condizioni **soniche** solo all'**uscita** del **condotto**, in altre parole il moto rimane **supersonico** lungo tutto il condotto diventando, al meno, sonico nella sezione di uscita.



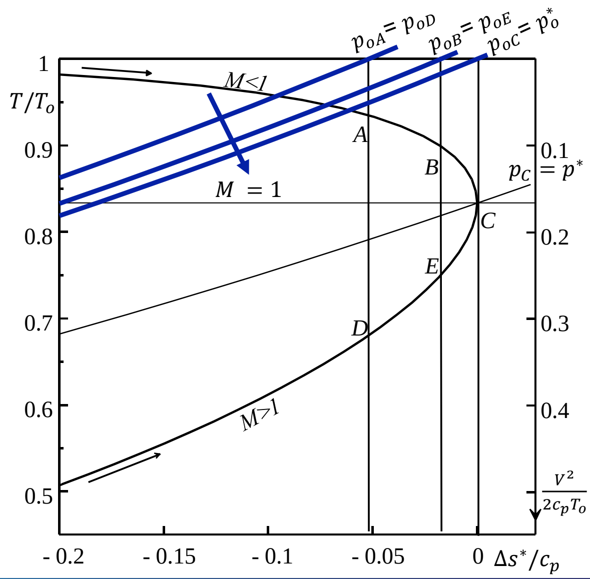
La curva del moto alla Fanno

Come si vede dalla figura, la **pressione** di **ristagno** è una funzione strettamente **decrescente** dell'entropia.

Dall'equazione di ***T-s*** scritta in condizioni di **ristagno** e dalla costanza dell'entalpia totale si ha:

$$dH = dh_o = T_o\, ds + v_o\, dp_o = 0$$

Appare evidente che per $ds > 0$ si deve avere $dp_o < 0$.



La curva del moto alla Fanno

Mantenendo costante l'entalpia totale e **variando** il **flusso** di **massa**, si ottiene un'**infinità** di **curve** di **Fanno**.

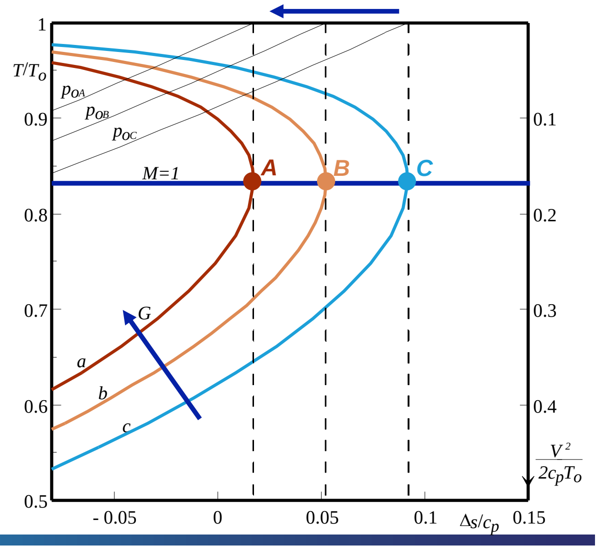
Esistono molti modi per **dimostrare** che la curva più **interna** è relativa ad un **maggiore G**.

La **portata** nei tre punti sonici è:

$$\dot{m} = GA = \frac{p_o A^* \Psi^*}{a_o}$$

Poiché la temperatura di ristagno, l'area critica ($A^* = A$) e il fattore d'efflusso sono uguali per i tre punti, il **flusso di massa** risulta **proporzionale** alla **pressione** di **ristagno** e si ha:

$$p_{0A} > p_{oB} > p_{oC} \qquad \rightarrow \qquad G_a > G_b > G_c$$



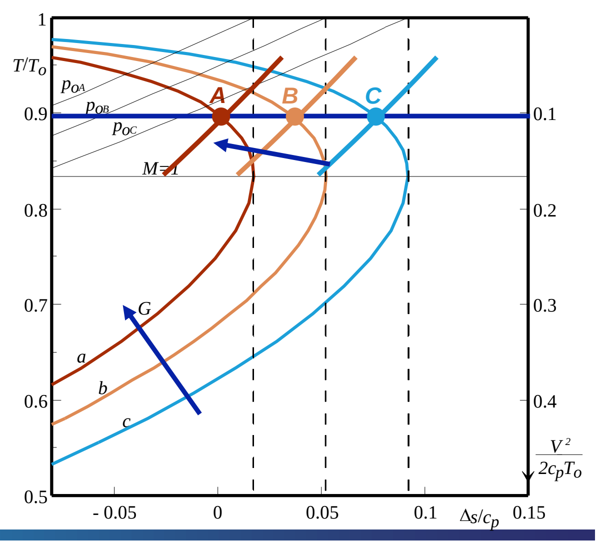
La curva del moto alla Fanno

Lo stesso ragionamento si può fare anche fissando un **qualsiasi** numero di **Mach** (si ricorda che dalla costanza dell'entalpia totale $H = c_p T + V^2/2$ si ha che le **isoterme** sono anche linee a ***V*** e ***M* costanti**).

Per numero di Mach costante il fattore d'efflusso è costante e la **portata** $\dot{m} = GA = \frac{p_o A \Psi}{a_o}$ è ancora proporzionale alla pressione di ristagno.

I tre punti appena considerati hanno anche la stessa **velocità** e ricordando che muovendosi verso **sinistra** le **isocore** sono relative a valori **crescenti** di **densità** si vede immediatamente che il flusso di massa è **maggiore** per le curve più **interne**.

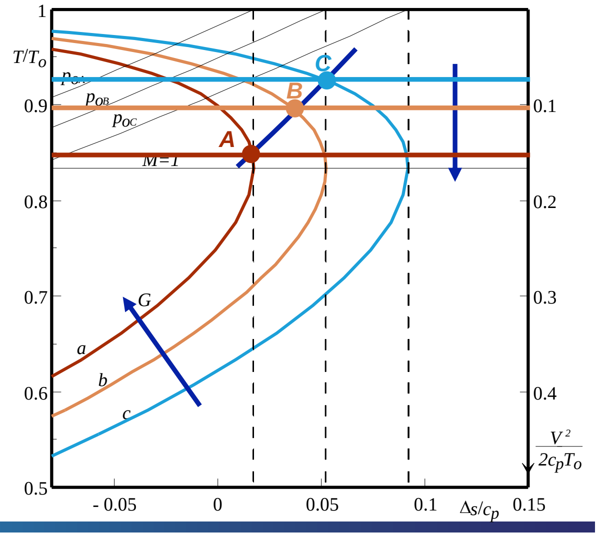
$$\rho_A > \rho_B > \rho_C \qquad \rightarrow \qquad G_a > G_b > G_c$$



La curva del moto alla Fanno

Evidentemente si possono confrontare punti alla stessa **densità** e ricordando che a maggiori temperature corrispondono **minori velocità** si ritrova che la curva più interna è relativa ad un flusso di massa maggiore.

$$V_A > V_B > V_c \qquad \rightarrow \qquad G_a > G_b > G_c$$

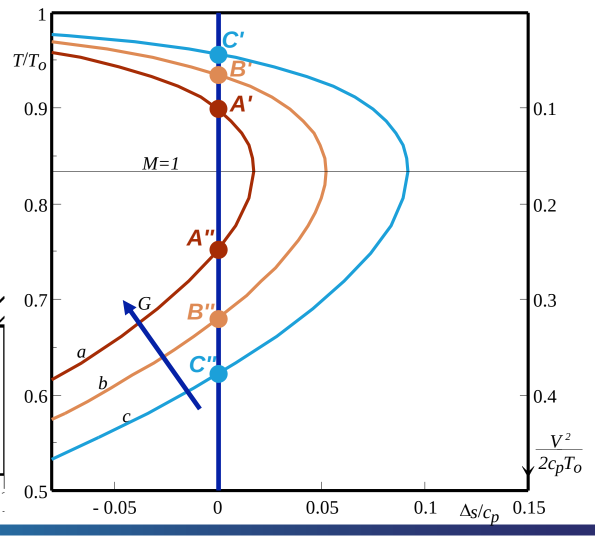


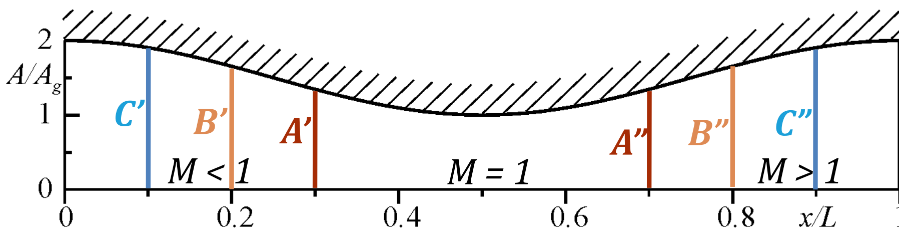
La curva del moto alla Fanno

In alternativa si possono considerare **sei** punti alla **stessa entropia** e, quindi, relativi alla stessa **pressione** di **ristagno** ma **diverso** numero di **Mach**.

Per la costanza di s e H i sei punti rappresentano anche le condizioni termofluidodinamiche del fluido in un **ugello convergente-divergente** con espansione corretta.

Nell'ugello la **portata** è **costante** e il flusso di massa è **inversamente** proporzionale all'**area** della sezione. Ai punti A' e A'' corrisponde un'area minore e, quindi, un flusso di massa maggiore.





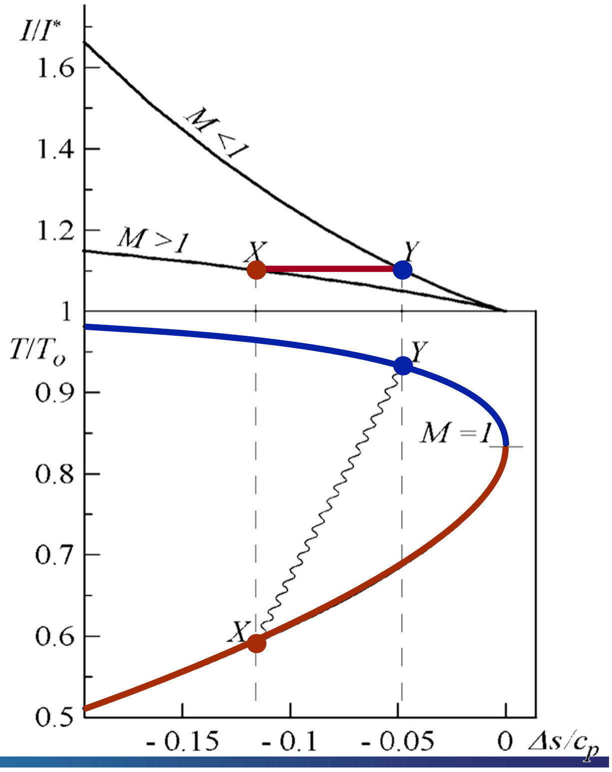
La curva del moto alla Fanno

In una curva di Fanno G e H sono costanti ed è interessante diagrammare l'**impulso specifico** in funzione dell'**entropia**. Gli sforzi viscosi provocano una diminuzione dell'impulso specifico che quindi, ha minimo in condizioni critiche.

Per capire quale ramo è quello supersonico, si possono rappresentare i punti a monte X ed a valle Y di un'**onda** d'**urto** normale.

Attraverso un'onda d'urto oltre a G e H anche l'**impulso** specifico è **costante** quindi questi punti si trovano sulla stessa curva di Fanno.

Il punto a **monte** si deve trovare sul ramo **supersonico** ad un valore di entropia **minore** di quello **subsonico** a **valle**.



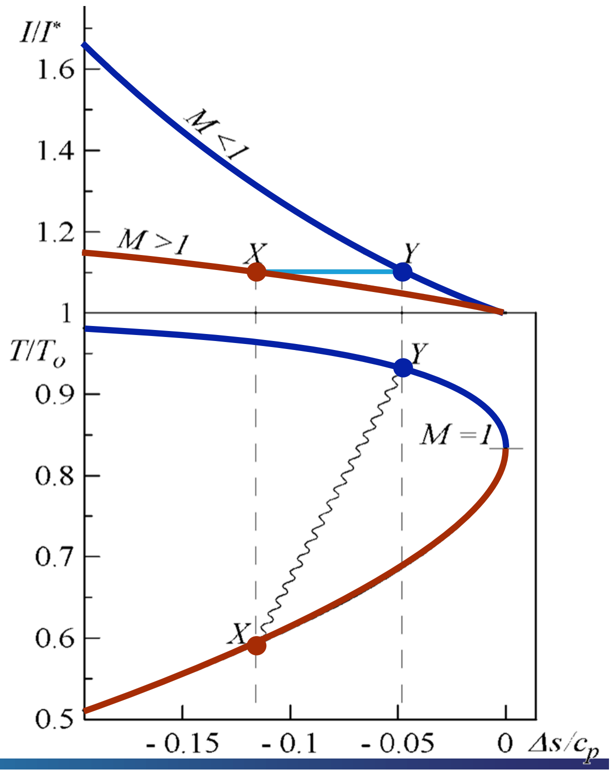
La curva del moto alla Fanno

Come già detto i punti X e Y hanno lo stesso I quindi la curva **supersonica** del grafico dell'impulso si trova a **sinistra** di quella **subsonica**.

La **distanza** fra i punti X e Y essendo proporzionale al salto d'entropia diminuisce al diminuire del numero di Mach a monte.

Mentre la curva **subsonica diverge** quella **supersonica** ha un **asintoto** orizzontale che può essere spiegato ricordando che per Mach a monte che tende ad infinito il numero di Mach a valle tende a M_{2l}.

La curva **supersonica** tende quindi al valore finito dell'impulso relativo a M_{2l}.



Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

Partendo dalla bilancio della **quantità** di **moto** in forma differenziale:

$$dI = dp + \rho V\, dV = -\frac{1}{2}\,\rho V^2 \frac{4f\, dx}{D}$$

è possibile trovare la seguente relazione che lega i differenziali del numero di Mach e della **coordinata assiale** x:

$$\frac{1-M^2}{\gamma M^2 \psi}\frac{dM^2}{M^2} = 4f\frac{dx}{D} \qquad \text{con} \qquad \psi(M) = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$$

Integrando questa relazione fra due sezioni generiche del condotto (1 e 2) si ottiene la **lunghezza adimensionale** $4fL_{12}/D$ che il fluido deve percorrere per portarsi da M_1 a M_2.

In realtà come già fatto per l'espansione di Prandtl e Meyer è più conveniente far coincidere lo stato 2 con le condizioni **critiche**, **integrando** si ha:

$$\frac{4fL^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^2}{\psi}\right)$$

Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

$$\frac{4fL^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^2}{\psi}\right)$$

Questa quantità, che a volte è indicata come numero di Fanno, riveste una particolare importanza perché rappresenta la **forza spingente**.

Per semplificare la **simbologia** in alcuni casi si utilizzerà:

$$F_1^* = \frac{4fL_1^*}{D} \qquad\qquad F_{12} = \frac{4fL_{12}}{D}$$

per indicare la **lunghezza adimensionale** fra la **generica sezione** 1 e rispettivamente quella **critica** o la sezione 2.

La quantità $F^* = 4fL^*/D$ è la **lunghezza** del condotto necessaria a **raggiungere** le condizioni **soniche** (**lunghezza critica**) a partire da un particolare numero di **Mach** M, subsonico o supersonico.

Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

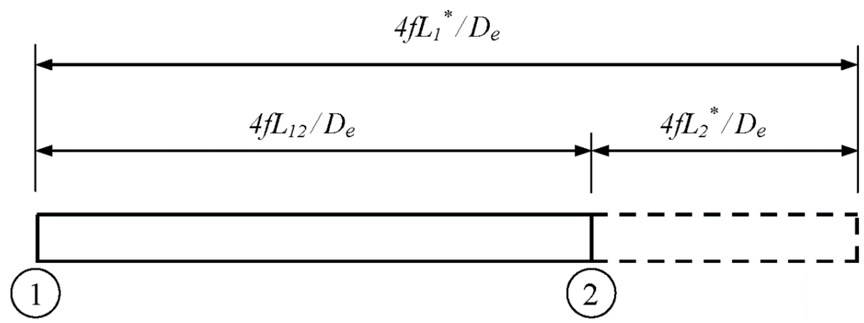
$$F^* = \frac{4fL^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^2}{\psi}\right)$$

Come mostrato in figura, nel caso più **generale**, per il quale il punto 2 **non** è **critico** si ha:

$$F_1^* = F_{12} + F_2^*$$

da cui è facile ricavare $F_{12} = F_1^* - F_2^*$ conoscendo i relativi numeri di **Mach**.

In generale, è conveniente esprimere tutti **rapporti caratteristici** normalizzandoli rispetto ai valori **critici**.



Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

$$F^* = \frac{4fL^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^2}{\psi}\right)$$

Si possono trovare i seguenti **rapporti caratteristici** per il **moto alla Fanno**; essi sono funzione del solo numero di Mach e di γ.

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2\psi} \qquad \frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{T}{T^*}} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\psi}}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{2\psi}{\gamma+1}} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{T^*}{T}}$$

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\psi\right]^K \left(= \frac{A}{A^*}\right) \qquad \frac{\Delta s}{c_p} = k\ln M\left[\frac{2}{\gamma+1}\psi\right]^{-K}$$

$$\frac{I}{I^*} = \frac{1+\gamma M^2}{M}\sqrt{\frac{1}{2(\gamma+1)\psi}}$$

Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2\psi}$$

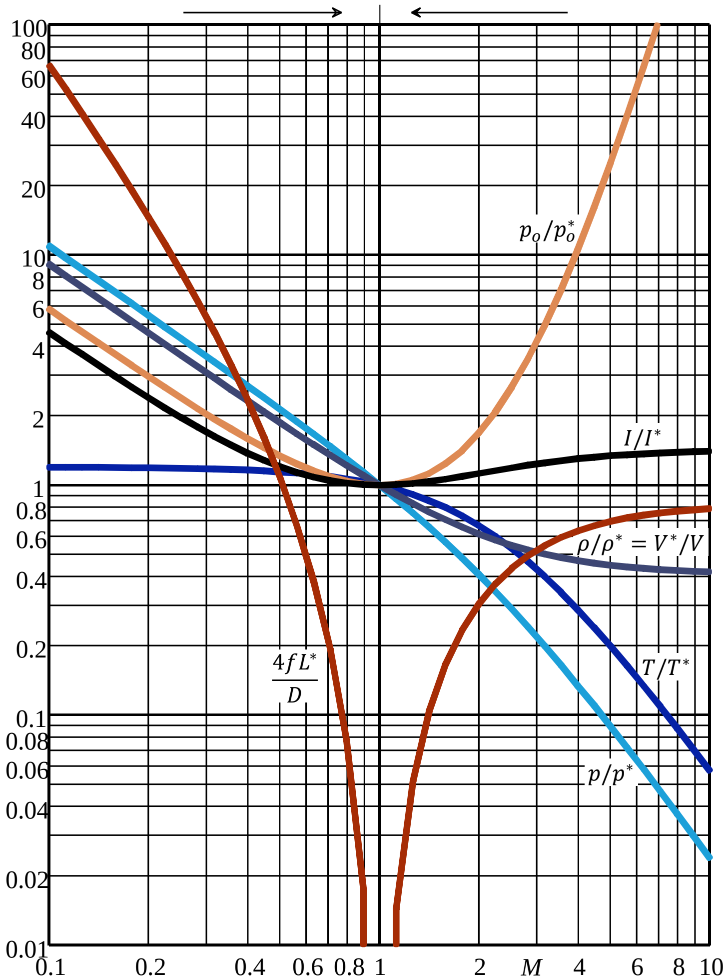
$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{2\psi}{\gamma+1}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\psi}}$$

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\psi\right]^K$$

$$F^* = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M^2}{\psi}\right)$$

$$\frac{I}{I^*} = \frac{1+\gamma M^2}{M}\sqrt{\frac{1}{2(\gamma+1)\psi}}$$



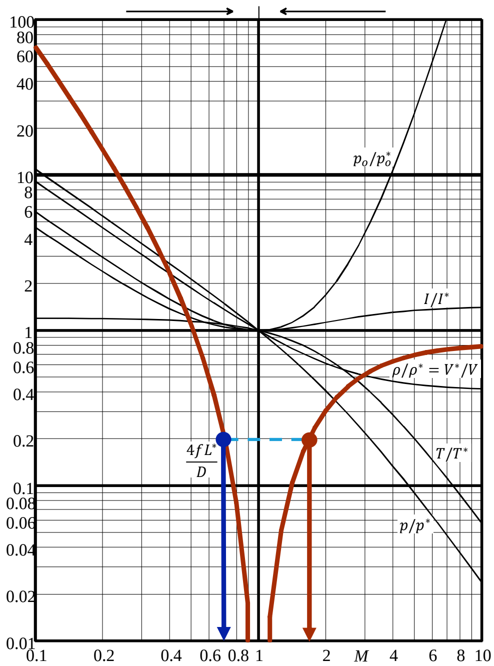
Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

$4fL^*/D$ tende ad **infinito** al tendere del numero Mach a **zero**, mentre, per $M \to \infty$, raggiunge il valore limite:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{4fL^*}{D} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\ln\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) - \frac{1}{\gamma} = (0.8215)$$

Le **perdite** d'impulso, essendo proporzionali al quadrato della velocità, sono molto **elevate** in regime **supersonico** e la lunghezza critica è molto **limitata**.

Per ogni $4fL^*/D$ minore del valore limite esistono **due** valori del numero di **Mach**, uno in regime **subsonico** e l'altro in **supersonico**.



Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

All'aumentare di **Mach**, i rapporti $\frac{T}{T^*}$, $\frac{\rho}{\rho^*}$ e $\frac{p}{p^*}$ sono monotonicamente **decrescenti**.

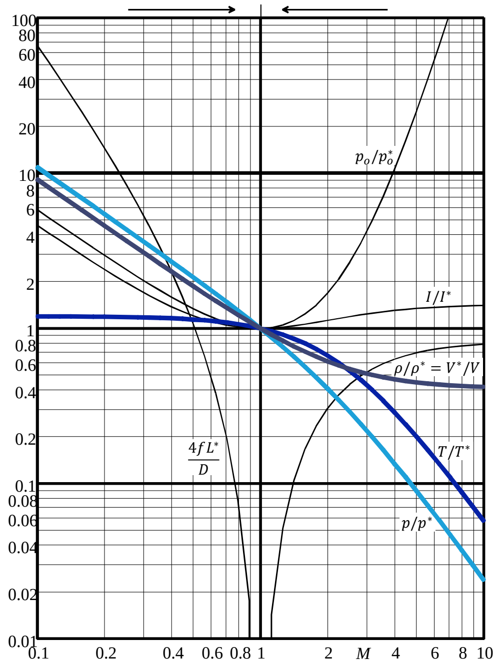
Per $M \rightarrow 0$:

- $\frac{\rho}{\rho^*}$ e $\frac{p}{p^*}$ sono illimitati;
- $\lim\limits_{M\rightarrow 0} \frac{T}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2} = (1.200)$;

Per $M \rightarrow \infty$:

- $\frac{T}{T^*}$ e $\frac{p}{p^*}$ tendono a zero;
- $\lim\limits_{M\rightarrow\infty} \frac{\rho}{\rho^*}\left(= \frac{V^*}{V}\right) = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = (0.4028)$;

In queste condizioni la curva di **Fanno** tende ad un **isocora** e $V \rightarrow V_{lim}$ e $\rho/\rho^* = V^*/V$ è il reciproco di: $\lim\limits_{M\rightarrow\infty} M^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = (2.45)$



Rapporti caratteristici per il moto alla fanno

Il rapporto tra le **pressioni** di **ristagno** e l'**impulso specifico** presentano un **minimo** assoluto (gli effetti viscosi provocano una continua diminuzione di p_o ed I) per $M = 1$.

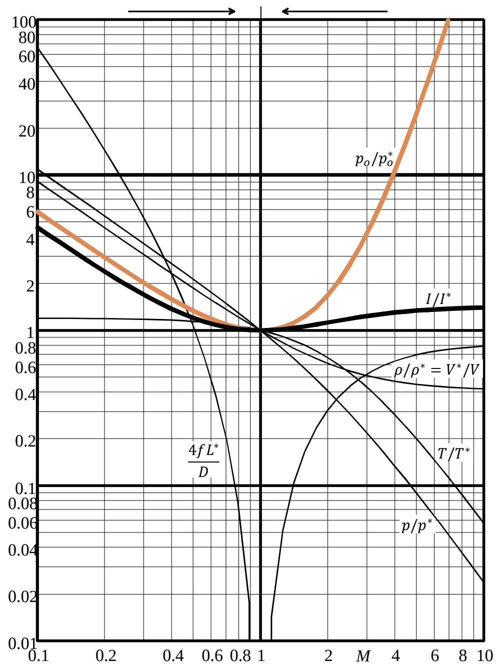
p_o/p_o^* tende all'**infinito** sia per $M = 0$ che per $M \rightarrow \infty$.

La **portata** valutata nella generica sezione e in quella **critica** è pari a:

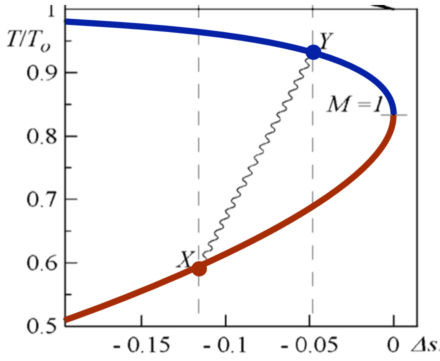
$$\dot{m} = \frac{p_o A^* \Psi^*}{a_o} = \frac{p_o^* A \Psi^*}{a_o}$$

Come già detto, si ha:

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{A}{A^*}$$



Rapporti caratteristici per il moto alla fanno



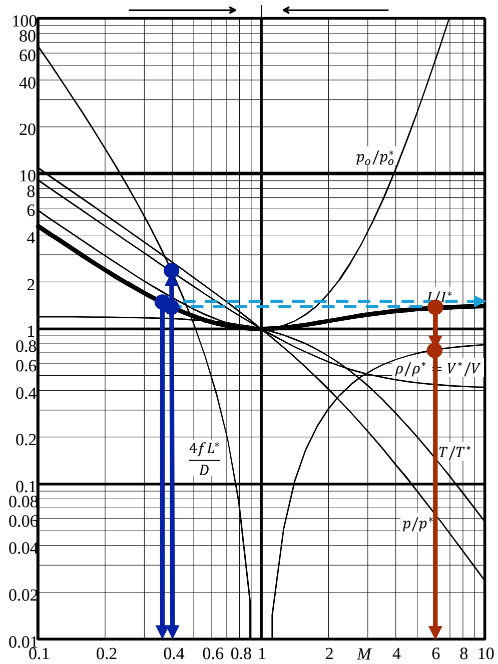
I/I^* è **illimitato** per $M = 0$, mentre per $M \to \infty$:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{I}{I^*} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma+1)(\gamma-1)}} = (1.429)$$

Due punti del diagramma di I/I^* allineati in **orizzontale** rappresentano i punti a **monte** ed a **valle** di un 'onda d'urto ed i relativi M rappresentano il **numero** di **Mach** a monte ed a valle dell'onda.

Di due punti aventi lo **stesso** valore di I/I^*, quello **subsonico** ha un valore di $4fL^*/D$ sempre maggiore di quello **supersonico**.

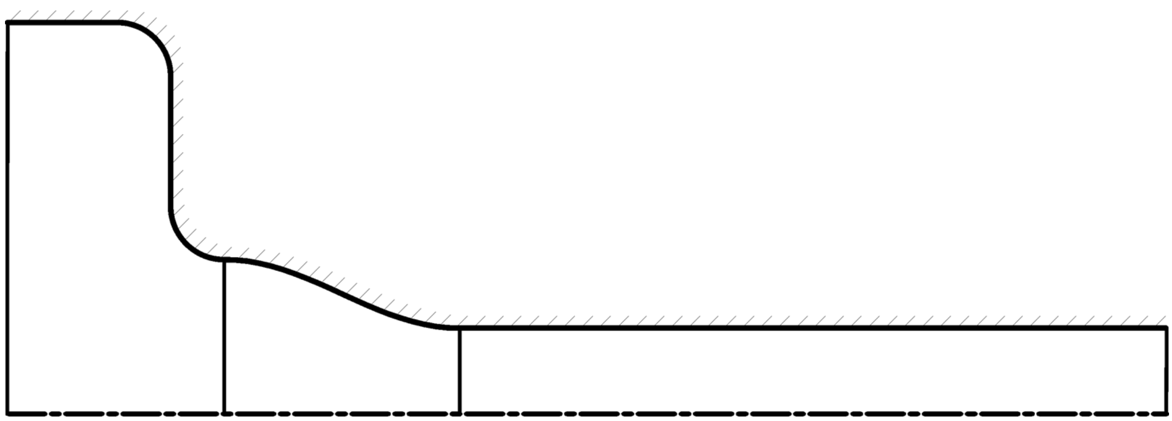
Dal diagramma si può notare anche che, per $M \to \infty$, il numero di Mach a **valle** dell'onda d'urto tende al **valore** limite M_{2l}.



Ugello convergente e condotto con attrito

Il funzionamento della parte finale del sistema composto da un serbatoio, un ugello **convergente** e da un condotto a sezione **costante adiabatico** ma con **attrito** alla parete può essere studiato con il modello di moto alla **Fanno**.

Dato che l'**ugello** è **collegato** a monte ad un **serbatoio**, il moto al suo interno è **subsonico** e si può considerare adiabatico e isoentropico.



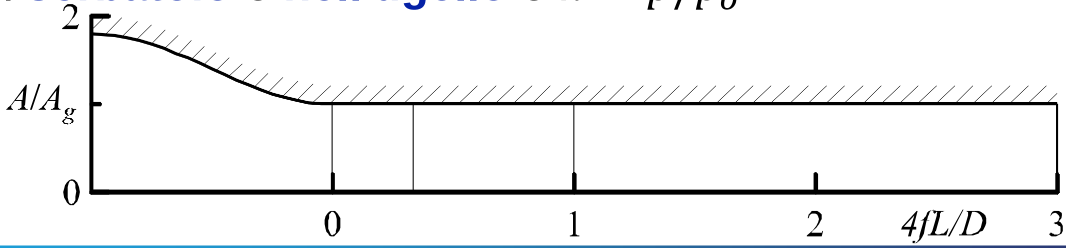
Ugello convergente e condotto con attrito

Sull'asse delle **ascisse** è riportato la lunghezza **adimensionale** $F = 4fL/D$ misurata dalla sezione di uscita dell'ugello e, su quello delle **ordinate**, il **rapporto** tra l'**area** della sezione locale e quella d'uscita.

Generalmente, la **lunghezza** di un ugello è dello stesso **ordine** di grandezza del suo **diametro** d'uscita e dato che $4f \sim 0.01$, se il disegno fosse in scala esso sarebbe **cortissimo**.

Analogamente a quanto già fatto, si suppone che la **pressione** nel serbatoio (uguale a quella di ristagno) sia **fissata** a 1*bar* e che la pressione **ambiente** possa **variare** da 1*bar* fino a 0.

Si supporrà che la pressione di **ristagno** sia **costante** nell'ugello, ma che diminuisca nel condotto; p_o rappresenta quindi la pressione di ristagno nel **serbatoio** e **nell'ugello** e $\pi = p/p_o$.

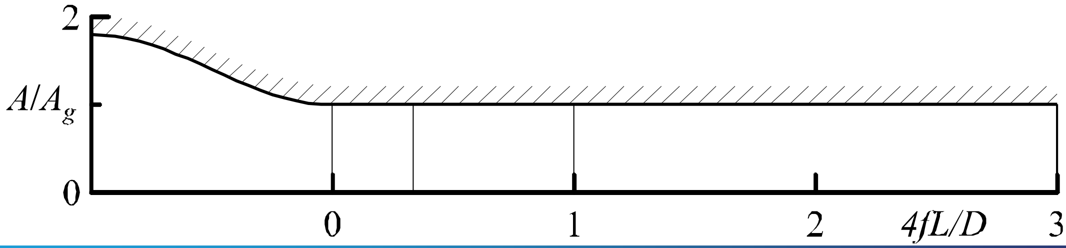


Ugello convergente e condotto con attrito

Poiché il moto all'uscita dell'ugello è **subsonico** o al limite sonico anche nel condotto (a sezione costante) il flusso sarà **subsonico** o al limite **sonico** solo all'uscita.

Inizialmente si supporrà che la pressione **ambiente** sia **nulla** (quindi $\pi_a = p_a/\,p_o = 0$) e si studierà il funzionamento al **variare** della lunghezza adimensionale F, successivamente si analizzerà il funzionamento con $F = cost$ al variare della pressione ambiente.

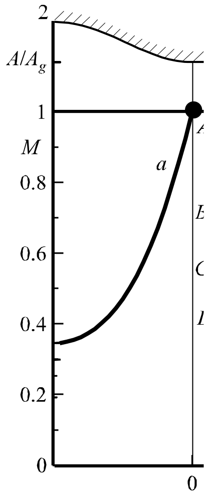
La posizione $\pi_a = 0$ implica che il moto sia **strozzato** all'**uscita** dell'condotto e, come visto per gli ugelli, sia presente un'**ventaglio** d'**espansione** all'uscita del condotto.



Ugello convergente e condotto con attrito

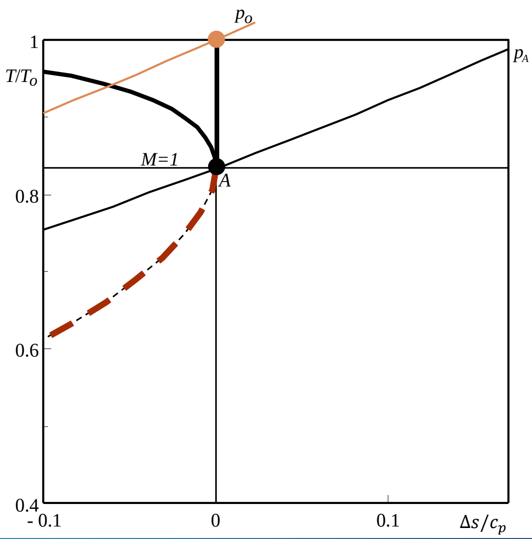
Per F=0, il sistema coincide con il sistema **serbatoio** ugello **convergente** ed avendo imposto $\pi_a = 0$ il moto nell'ugello è strozzato, il flusso di massa G è massimo e si segue la curva a.

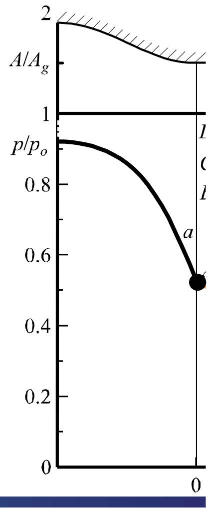
Nel piano ***T-s*** la trasformazione è semplicemente una **isentropica** che incontra la curva di **Fanno** nel punto di **massima entropia** (M=1).



Nella figura è stato imposto che il salto di **entropia** fosse **nullo** nelle condizioni di **ristagno**.

La parte **supersonica** della curva di Fanno è tratteggiata perché, in queste condizioni non è possibile percorrerla.

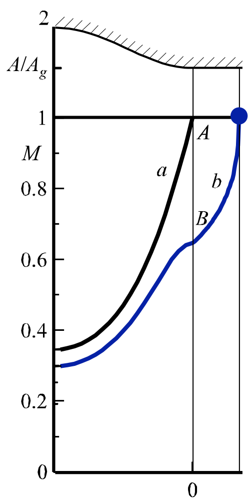




Ugello convergente e condotto con attrito

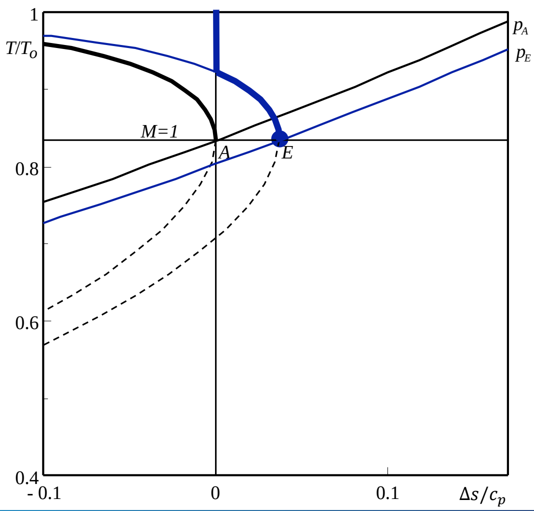
Per $F > 0$ la corrente **non** potrà entrare nel condotto in condizioni **soniche**; ad esempio per F=0.33 a valle dell'**espansione** isentropica nell'**ugello**, la corrente seguirà una curva di **Fanno** più **esterna** relativa ad un **flusso** di **massa inferiore**.

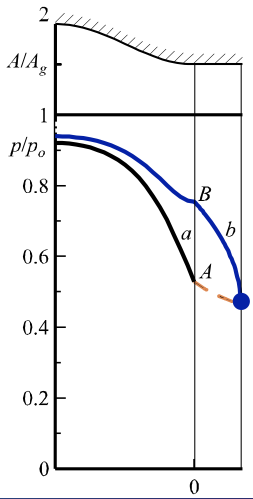
Il numero di Mach all'ingresso del condotto sarà minore di 1 ed il moto nell'**ugello non** sarà più **strozzato**.



La pressione **critica** nella sezione d'uscita è **minore** di quella precedente.

Poiché $\pi_a = 0$ la corrente continua la sua espansione nel **condotto** raggiungendo la condizione **sonica** solo all'**uscita**.

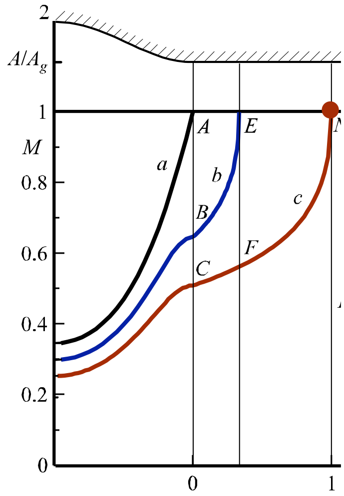


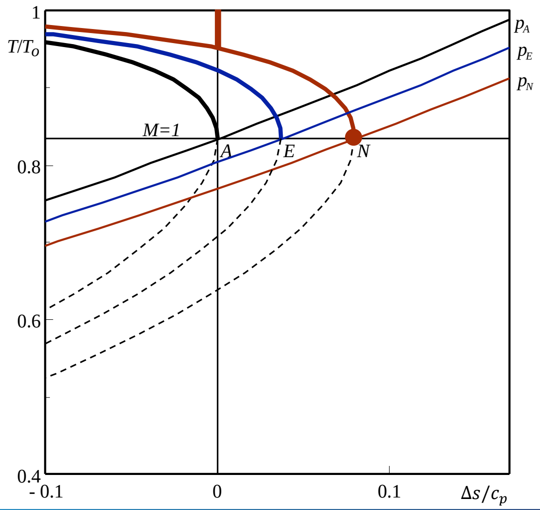


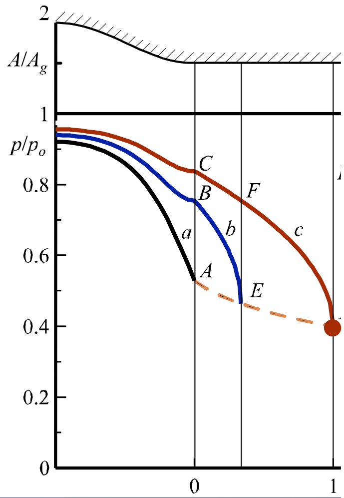
Ugello convergente e condotto con attrito

Successivi **allungamenti** del condotto conducono a comportamenti analoghi con:

- **diminuzione** del numero di **Mach** all'uscita dell'ugello;
- **diminuzione** del **flusso** di **massa**;
- funzionamento lungo curve di **Fanno** più **esterne**;
- maggiore **produzione** d'**entropia**;
- **minore pressione critica** (coincidente con quella all'uscita).



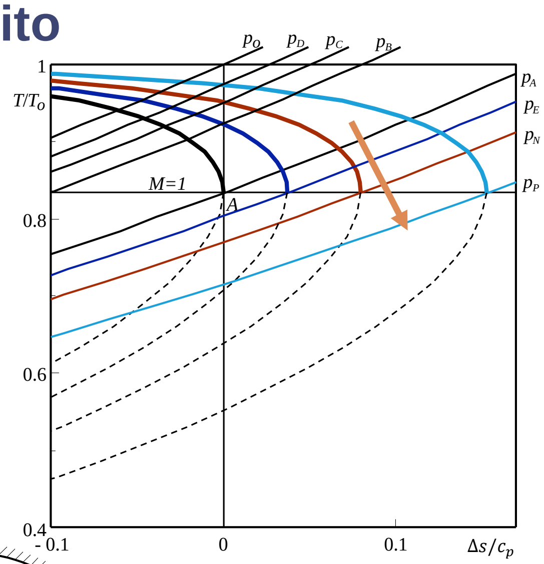


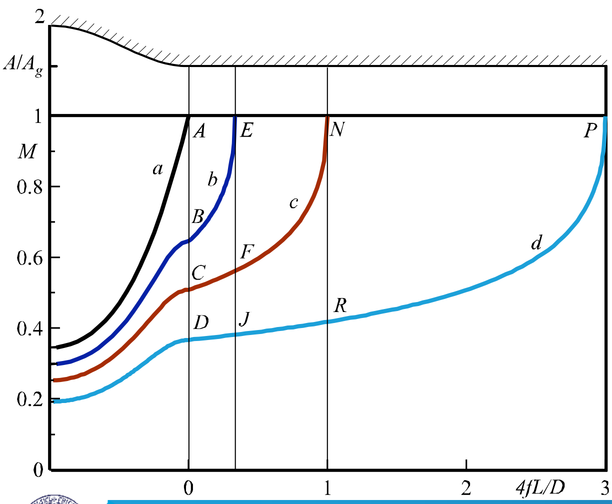


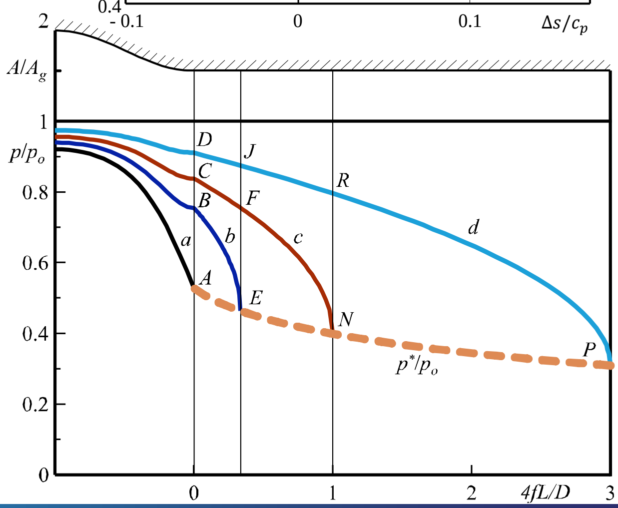
Ugello convergente e condotto con attrito

Nella figura è mostrata anche la curva relativa a $\pi^* = p^*/p_o$. Essa tende a **zero** per $F \to \infty$, cioè per un numero di **Mach** all'ingresso del condotto che **tende a zero**.

Anche nel piano ***T-s*** si vede che le **pressioni critiche** sono **decrescenti** al **diminuire** del **flusso** di **massa**.



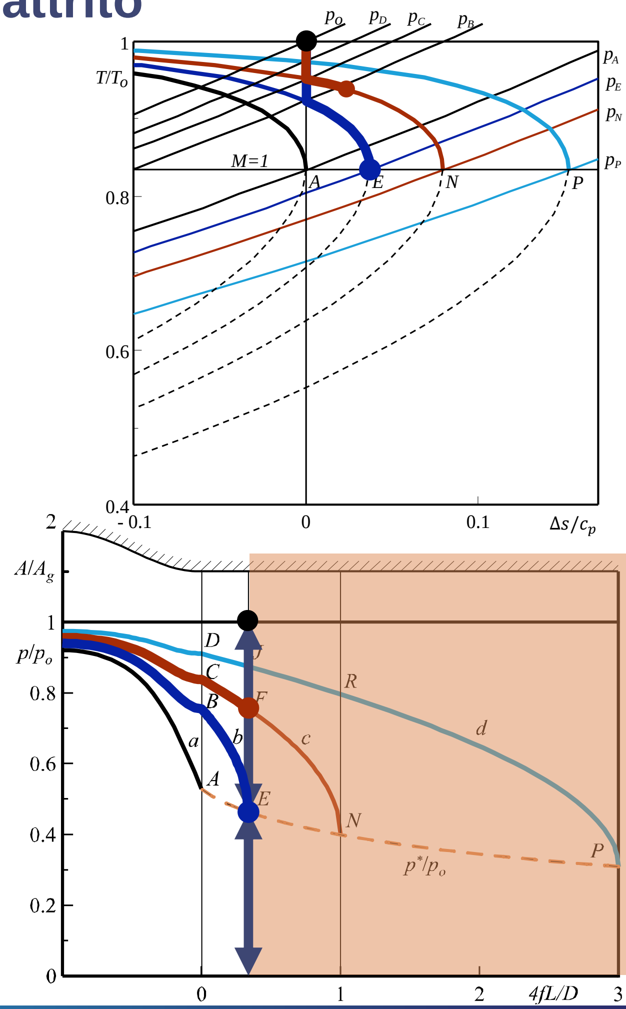




Ugello convergente e condotto con attrito

Questi diagrammi si possono utilizzare anche per analizzare il funzionamento con $F = cost$ al **variare** della **pressione ambiente**. Ad esempio per F=0.33 si ha:

- per $\pi_a < \pi_E$ il moto è **strozzato**, **non** è rispettata la condizione di **Kutta** e la portata è massima; si segue la curva b e all'uscita è presente un **ventaglio** d'**espansione**.
- per $\pi_a = \pi_E$ è rispettata la condizione di **Kutta**.
- per $1 > \pi_a > \pi_E$ il numero di Mach all'uscita è subsonico ed il moto non è **strozzato**, è rispettata la condizione di **Kutta e** la portata diminuisce al crescere di π_a; si seguono le curve tipo c (o d).
- per $\pi_a = 1$ la portata è nulla.

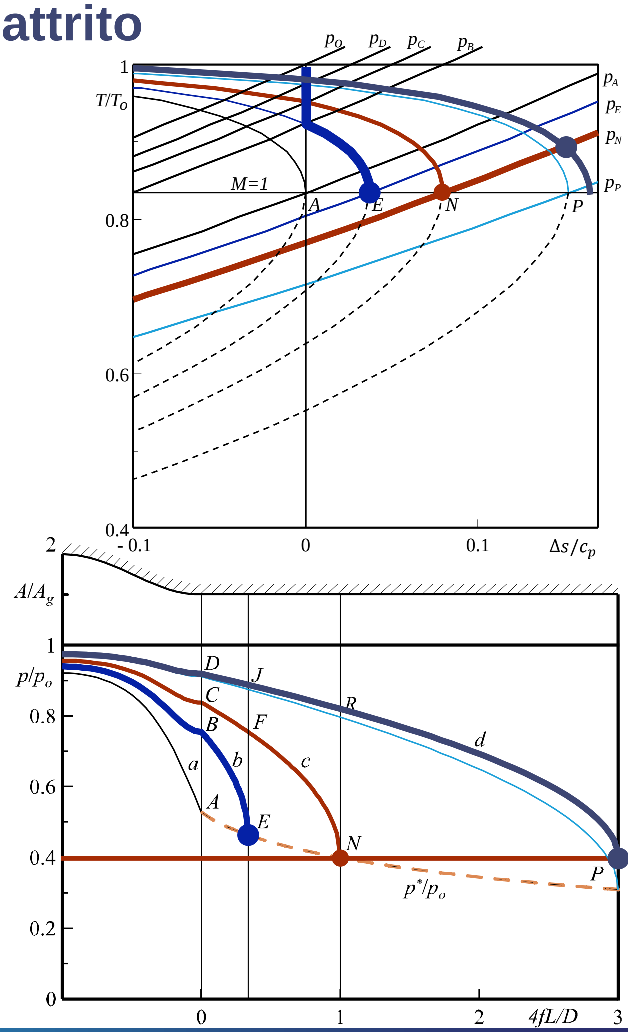


Ugello convergente e condotto con attrito

Si supponga ora che la pressione **ambiente** sia fissata al valore del punto ***N*** e che F=1. In queste condizioni l'uscita del condotto è **sonica**.

Al variare di F si ha:

- per $F < 1$ il moto è **strozzato**, **non** è rispettata la condizione di **Kutta** e la portata è massima; e.g. per F=0.33 si segue la curva b e all'uscita è presente un **ventaglio** d'**espansione**.
- per $F > 1$ il numero di Mach all'uscita è subsonico ed il moto non è **strozzato**, è rispettata la condizione di **Kutta** e la portata diminuisce al crescere di F; e.g. F=3 si segue la curva **scura**.

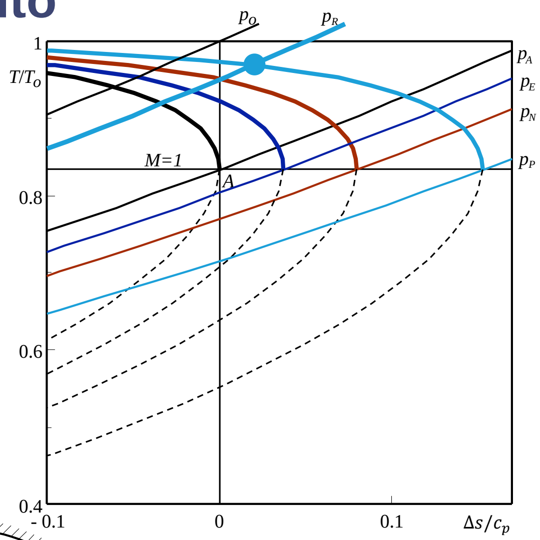


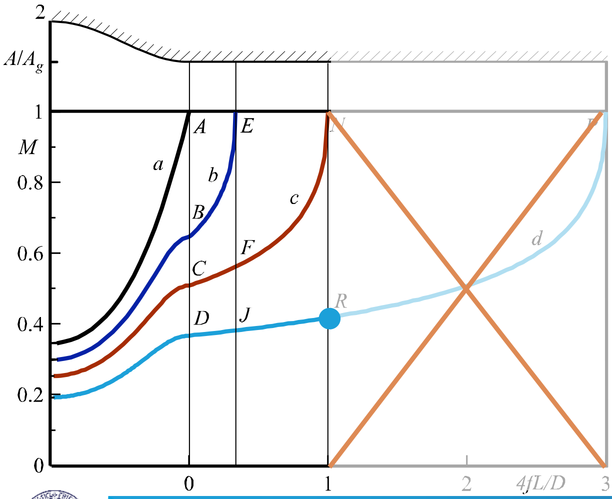
Ugello convergente e condotto con attrito

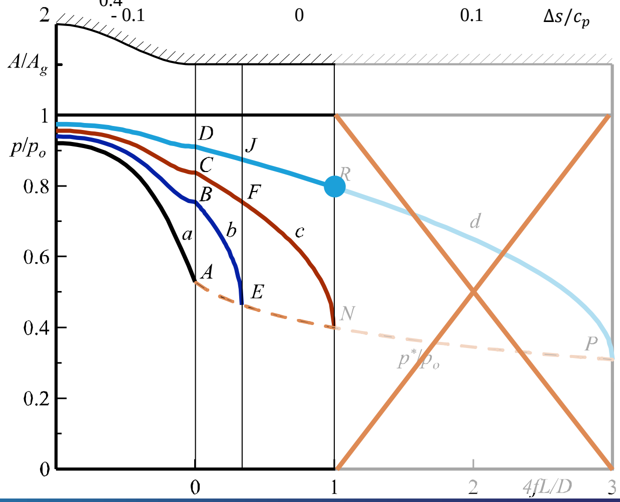
Un punto **generico** nel diagramma di pressione oltre a fissare p_a stabilisce anche la **lunghezza** adimensionale del condotto F.

Ad esempio fissando il **punto R** si blocca $\pi_a = \pi_R$ e $F = F_R$.

I punti a **destra** di R **non** sono punti di funzionamento **reali**.



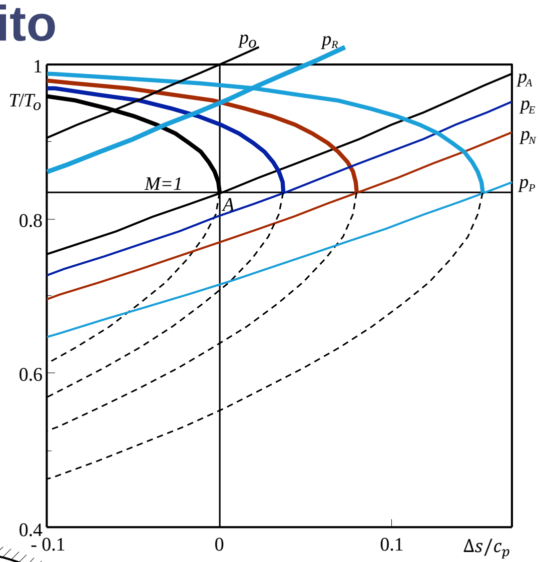


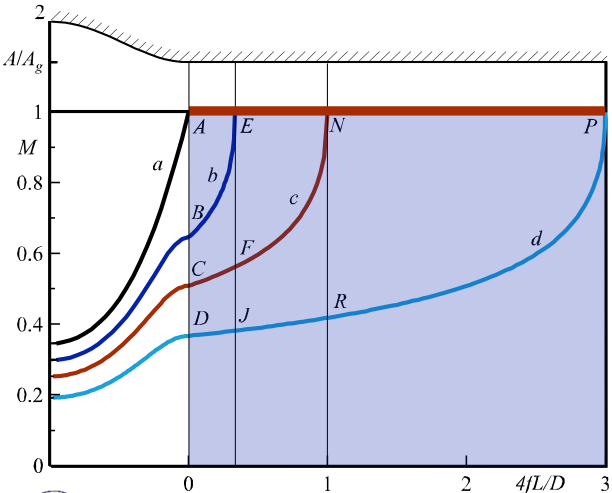


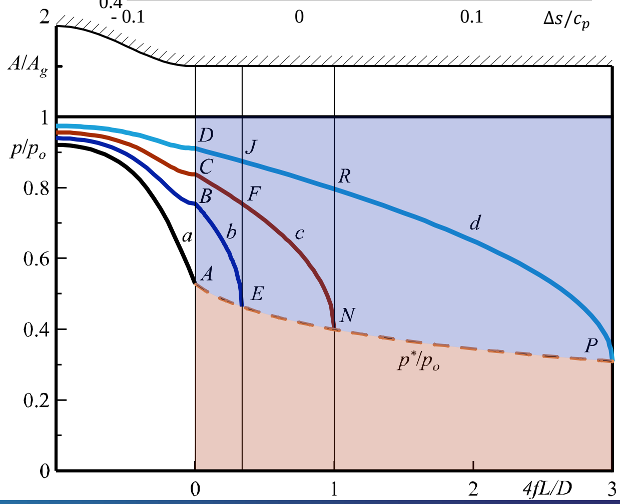
Ugello convergente e condotto con attrito

I punti del diagramma di pressione al di **sopra** della curva π^* sono punti **subsonici**.

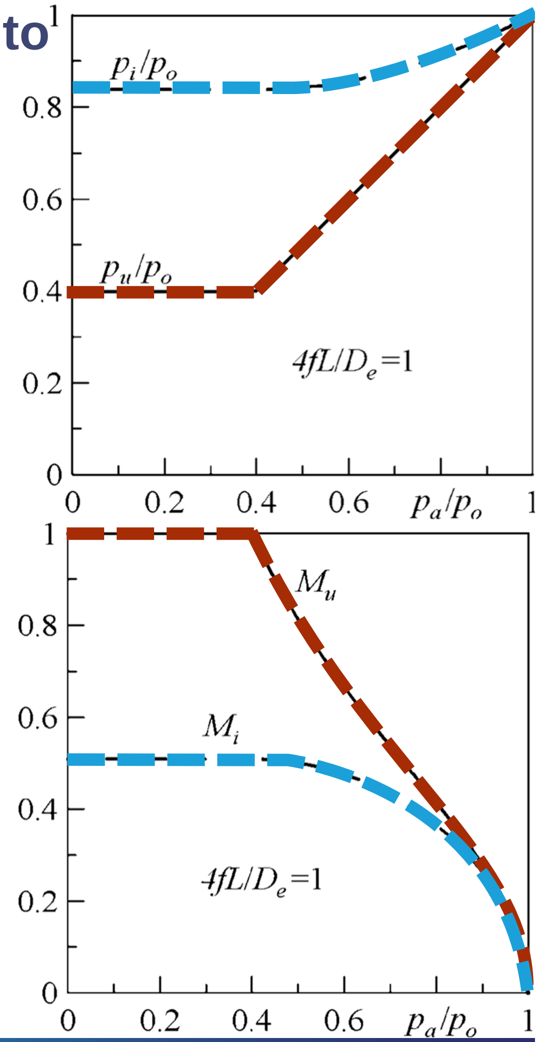
I punti del diagramma di pressione al di **sotto** della curva π^* sono punti in cui l'uscita del condotto è **sonica** e la pressione si adatta esternamente con un **ventaglio** d'**espansione**.







Ugello convergente e condotto con attrito



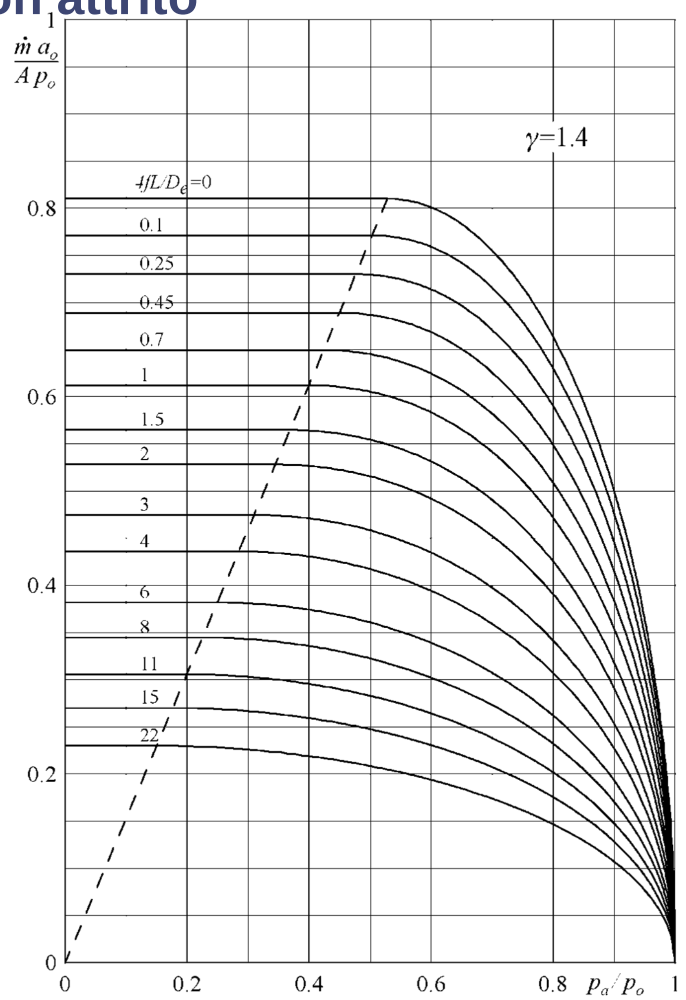
I diagrammi mostrano l'andamento della pressione e del numero di Mach nella **sezione** d'ingresso p_i, M_i e d'**uscita** p_u, M_u del condotto in funzione di π_a per F=1 ($\pi^* \cong 0.40, M_i \cong 0.51$).

All'**uscita** del condotto si ha:

- per $\pi_a \geq \pi^*$ è rispettata la **condizione di Kutta** ($p_a = p_u$) e p_u è una funzione lineare di p_a; M_u cresce invece in modo **non lineare** al diminuire di π_a.
- per $\pi_a < \pi^*$ il moto è **strozzato** e non è rispettata la **condizione di Kutta** e $\boldsymbol{\pi_u = \pi^*}$, $\boldsymbol{M_u = 1}$;

All'**ingresso** del condotto (ovvero all'uscita dell'ugello) p_i, M_i sono costanti per $\pi_a \leq \pi^*$. La variazione per $\pi_a > \pi^*$ è non lineare e meno rapida.

Ugello convergente e condotto con attrito



La **portata** è funzione di π_a e F e può essere diagrammata in forma **adimensionale** come il **fattore** d'**efflusso** (utilizzando però la pressione di ristagno nel **serbatoio**):

$$\frac{\dot{m} a_o}{p_o A}$$

La **portata** può essere **calcolata** in qualsiasi sezione del sistema ed, in particolare, nella sezione d'**uscita**:

$$\dot{m} = \frac{p_{ou} A \Psi_u}{a_o} \rightarrow \frac{\dot{m} a_o}{p_o A} = \frac{p_{ou}}{p_o} \Psi_u = \pi_{ou} \Psi_u$$

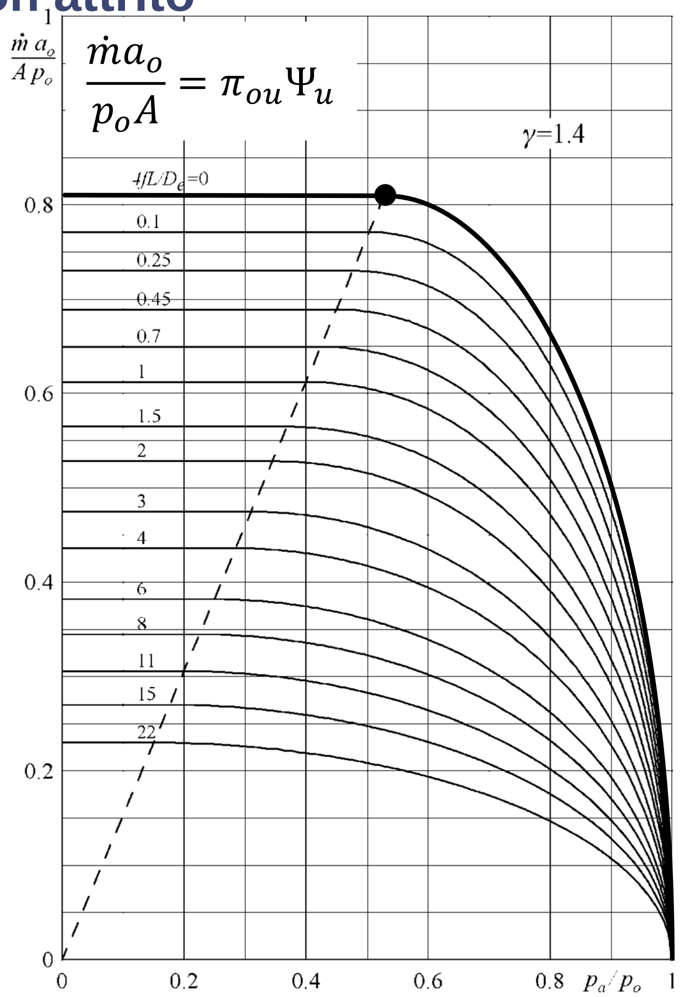
Ugello convergente e condotto con attrito

Per F=0 si ha $p_{ou} = p_o$ e la curva coincide con quella del solo **ugello convergente**.

Al **diminuire** di π_a la portata **aumenta** per l'aumento del **fattore** d'**efflusso**.

Quando $\pi_a = \pi^*$ il moto **strozza** è la portata rimane bloccata al valore massimo Ψ^* relativo alle condizioni **critiche**:

$$\frac{\dot{m}a_o}{p_o A} = \pi_{ou}\Psi_u = \Psi^* = (0.8102)$$



Ugello convergente e condotto con attrito

Per F **crescente** π_{ou} **diminuisce** e con esso la **portata**.

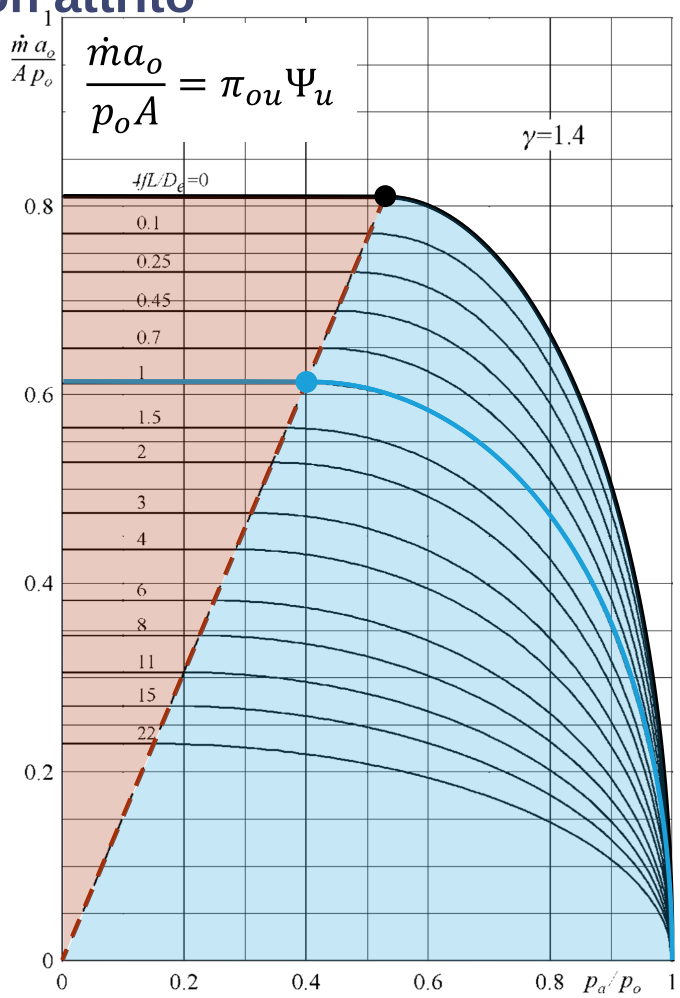
Per $\pi_a < \pi^*$il moto è **strozzato** e la pressione **critica** decresce **linearmente** con π_{ou} infatti:

$$\pi^* = \frac{p_u^*}{p_o} = \frac{p_u^*}{p_{ou}^*}\frac{p_{ou}^*}{p_o} = cost \cdot \pi_{ou}$$

dove, per $\gamma = 1.4$ la costante vale 0.5283.

La **lunghezza** del tratto **orizzontale** a **portata costante** diminuisce di **conseguenza**.

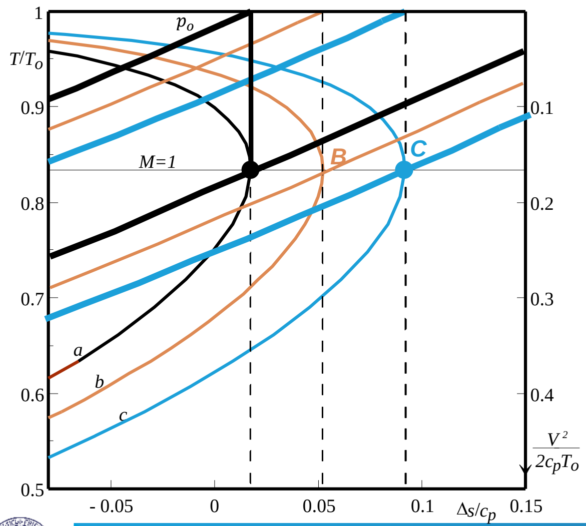
Per $\pi_a > \pi^*$ la variazione è governata dalla variazione del fattore d'efflusso.

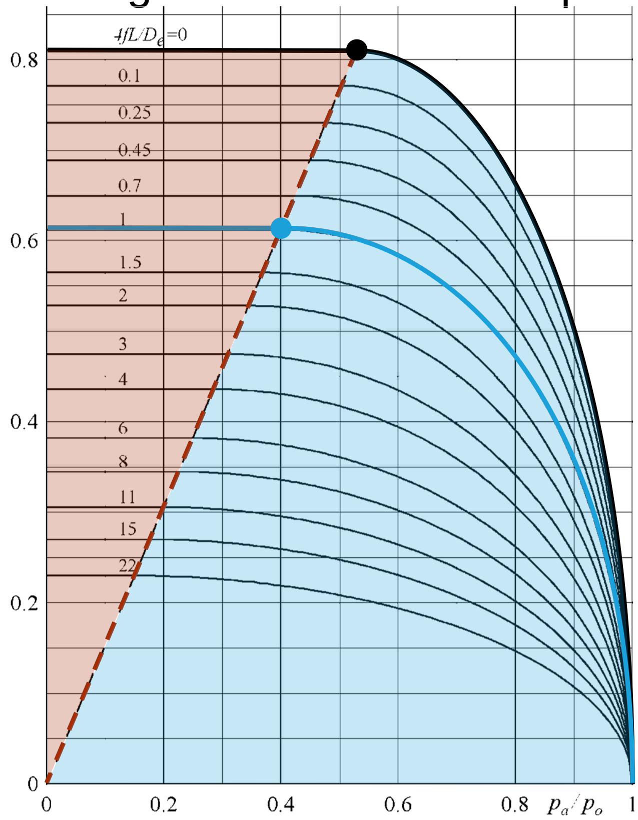


Ugello convergente e condotto con attrito

Per F **crescente** la diminuzione di della pressione di **ristagno** (π_{ou}) è evidente dal piano di ***T-s*** perché il sistema segue curve di **Fanno** più **esterne**.

Nella stessa figura si nota anche la **diminuzione proporzionale** della pressione **critica** (π^*).



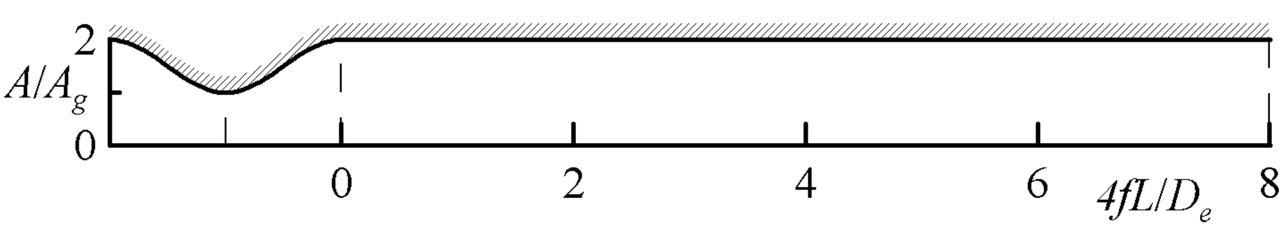


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Il funzionamento del sistema composto da un serbatoio, un ugello **convergente-divergente** e da un condotto a sezione **costante adiabatico** con **attrito** alla parete è più **complesso** del caso con un semplice ugello convergente.

Per F=0, il sistema coincide con il sistema **serbatoio** ugello **convergente-divergente** e la tipologia di funzionamento dipende dalla pressione ambiente e dai **tre rapporti caratteristici di pressione** $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ **e** $\boldsymbol{r_3}$.

In questo caso se $\pi_a < r_1$ il moto è **strozzato** nella gola dell'ugello e la portata non dipende da π_a.

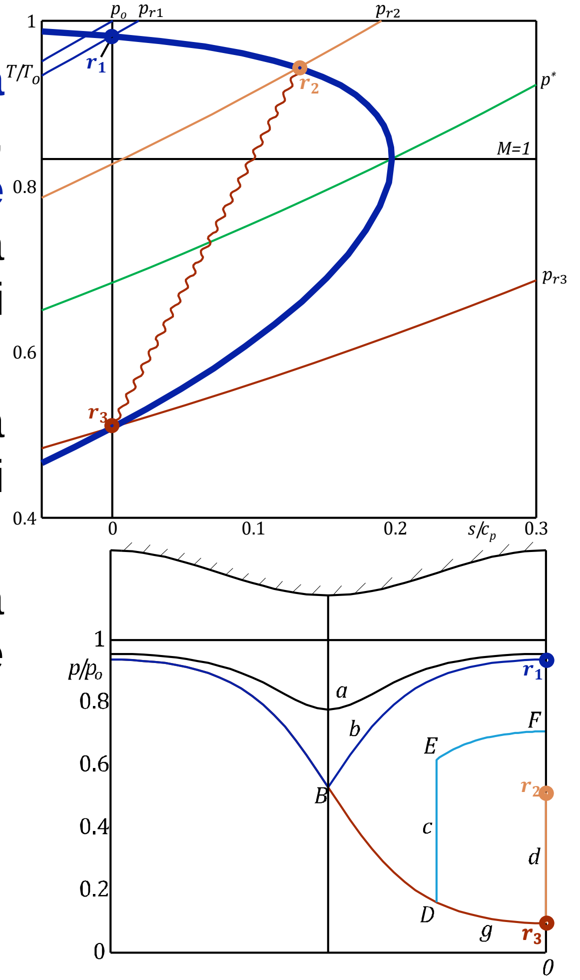


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Quindi per F=0 e $\pi_a < r_1$ il **flusso** di **massa** all'**uscita** dell'ugello $G = \dot{m}/A$ è **costante**, poiché anche l'**entalpia totale** $\boldsymbol{H}$ è **costante** tutti i punti di **funzionamento**, con gola strozzata, si trovano sulla **stessa** curva di **Fanno**.

Fissando un **entropia**, e di conseguenza la pressione di **ristagno**, si individuano i punti $\boldsymbol{r_1}$ **e** $\boldsymbol{r_3}$ sul ramo **subsonico** e **supersonico**.

Il punto r_2 , a valle di un'**onda** d'urto, si trova sulla stessa curva di **Fanno**, anche perché G, I ed H sono costanti attraverso l'onda.



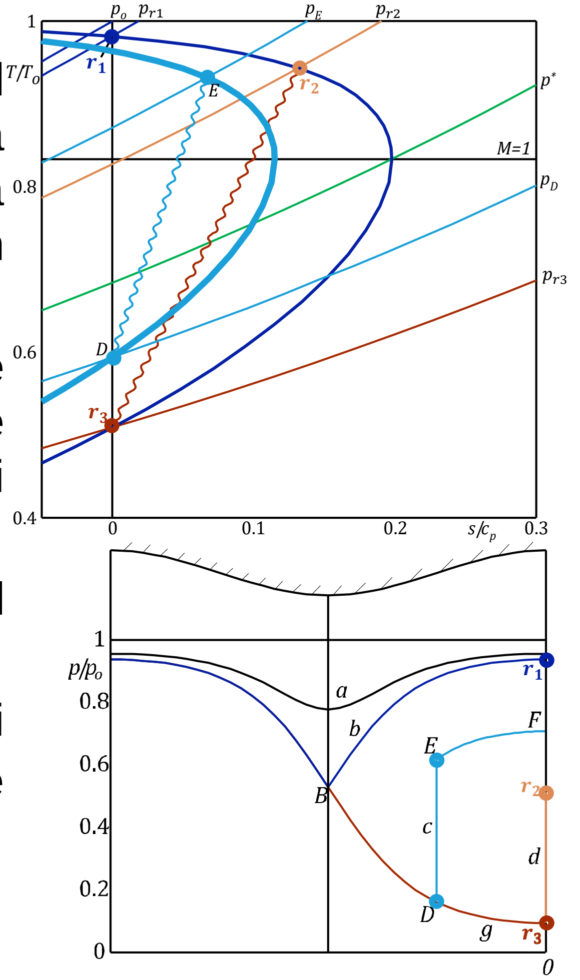
Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Il funzionamento con **onda** d'urto nel **divergente** è più complesso. Il **punto D** a monte dell'onda si trova alla stessa entropia dei punti $\boldsymbol{r_1}$ **e** $\boldsymbol{r_3}$ e ad una **pressione** ed un numero di **Mach intermedi**.

Visto che la **portata** attraverso l'ugello è **costante** e $A_D < A_u$ il **flusso** di **massa** è **maggiore** ($G_D > G_u$). Quindi il **punto** $\boldsymbol{D}$ si trova su una curva di **Fanno** più **interna**.

Su questa curva deve trovarsi anche il **punto** $\boldsymbol{E}$ a **valle** dell'**onda**.

Dato che $M_D < M_{r_3}$ il **salto** d'**entropia** di quest'onda è **inferiore** a quello precedente e, di conseguenza, $s_E < s_{r_2}$.

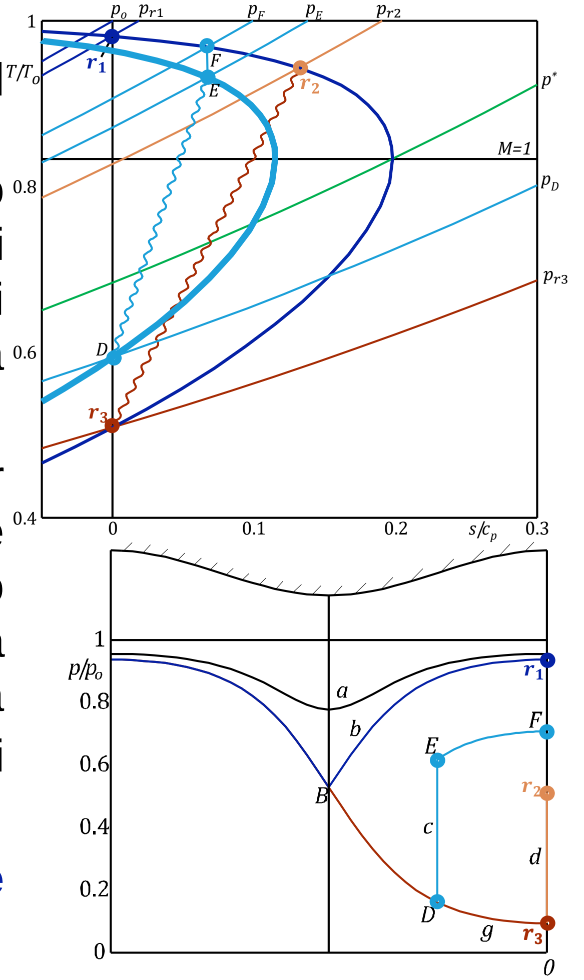


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Il **punto F** si trova alla stessa **entropia** del **punto E** ma ad una **pressione** più **elevata**. Dato che la portata e l'entalpia totale sono costanti all'uscita dell'ugello il flusso di massa è lo stesso di quello dei punti caratteristici e la compressione isentropica si arresta sulla **curva** di **fanno iniziale**.

La lunghezza **adimensionale** per raggiungere le condizioni critiche (in breve lunghezza critica) è **proporzionale** al tratto di curva di **Fanno** percorribile, quindi si ha $F^*_{r_1} > F^*_F > F^*_{r_2} > F^*_{r_3}$, dove la disuguaglianza finale è stata vista quando si sono discussi i rapporti caratteristici.

Nel libro si usa la **lunghezza dimensionale** chiaramente si ha $L^*_{r_1} > L^*_F > L^*_{r_2} > L^*_{r_3}$

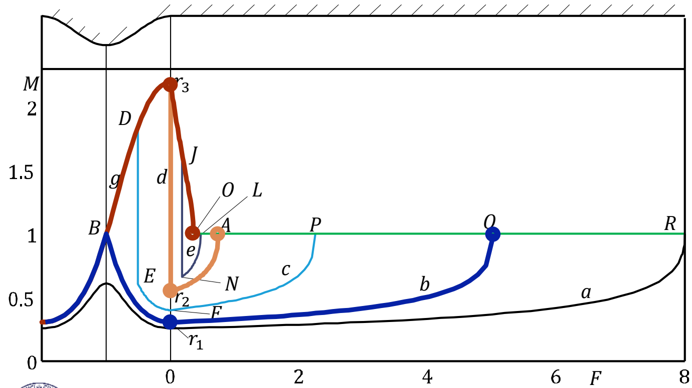


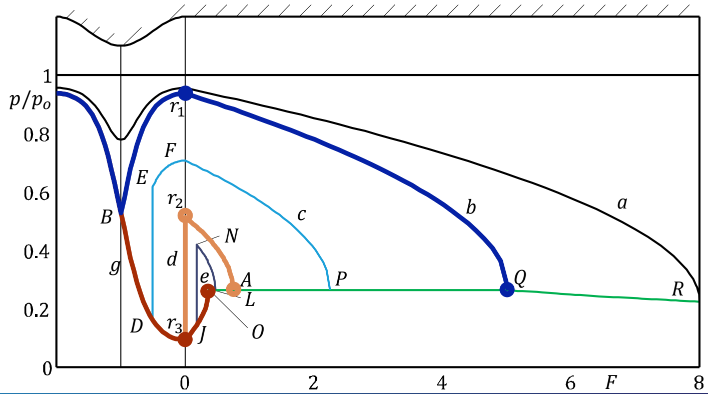
Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Le curve mostrate in figura, relative a $\pi_a = 0$ mostrano i possibili funzionamenti al variare della lunghezza adimensionale del **condotto**.

Le curve che partono dai punti caratteristici dell'ugello sono dette **curve caratteristiche** e dividono il diagramma in zone con diverse tipologie di funzionamento.

Le curve caratteristiche sono tutte relative allo **stesso** flusso di **massa** ma ad una **diversa lunghezza caratteristica** F^*.



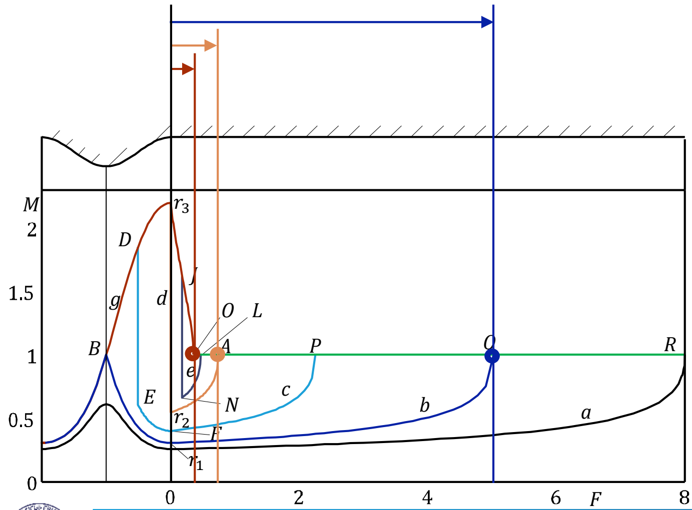


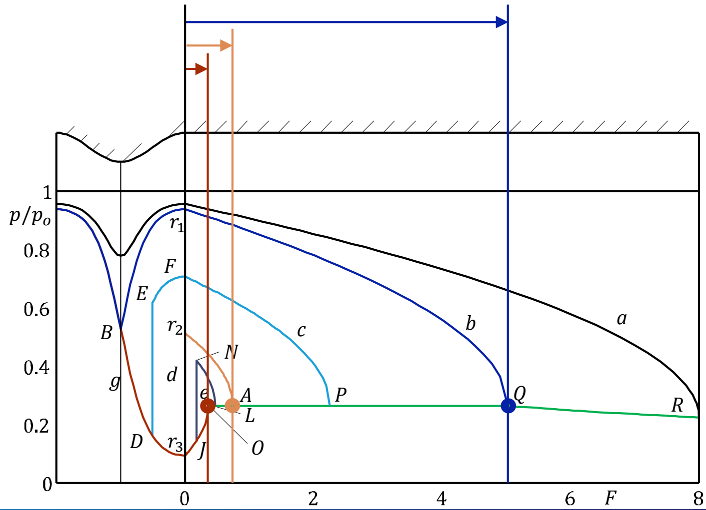
Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Le lunghezze **caratteristiche** sono anche, colloquialmente, dette:

- $F^*_{r_1}$ **lunghezza** critica in regime subsonico o lunghezza **critica subsonica**;
- $F^*_{r_2}$ **lunghezza critica** con onda d'**urto** all'uscita dell'ugello;
- $F^*_{r_3}$ **lunghezza** critica in regime supersonico o lunghezza **critica supersonica**;

Dato che $F^*_{r_1} > F^*_{r_2} > F^*_{r_3}$ **solo** se il condotto ha una **lunghezza inferiore** a quella critica supersonica si potranno seguire tutte le curve di figura.

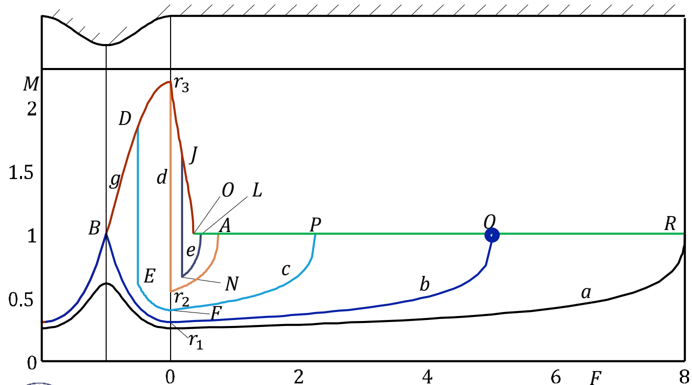


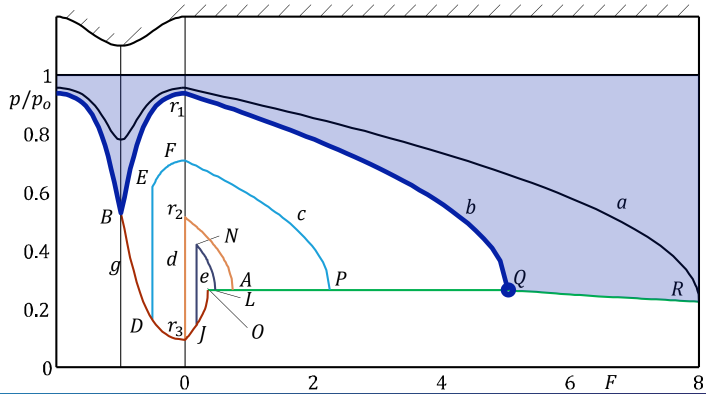


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Se $F > F^*_{r_1}$ si possono seguire **solo** le curve di tipo a che si trovano al di sopra (nel diagramma delle pressioni) della curva **caratteristica** b e sono relative ad un funzionamento alla **venturi** nell'**ugello** ed un funzionamento al più sonico all'uscita del condotto.

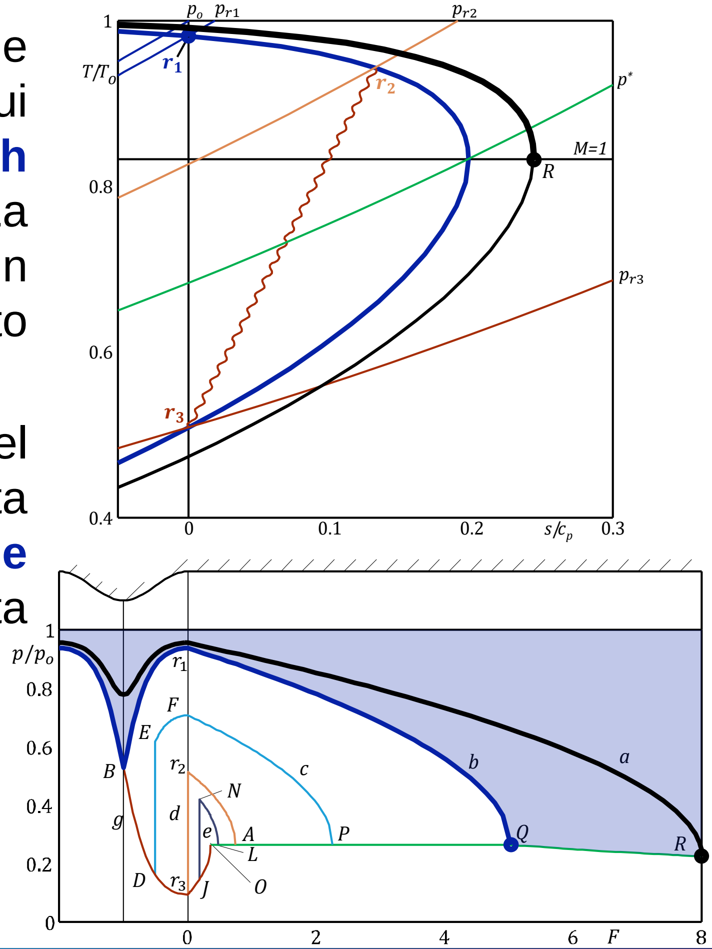
Queste curve sono praticamente le stesse già viste e relative al caso dell'**ugello** semplicemente **convergente** seguito da un condotto alla **Fanno**.





Nel piano ***T-s*** il funzionamento segue una curva di **Fanno** più **esterna** in cui si entra ad un numero di **Mach inferiore** a quello del punto r_1. La corrente, quindi, può **percorrere** un tratto di condotto **maggiore**, rispetto alla curva caratteristica b.

Al **crescere** della **lunghezza** del condotto la curva di **Fanno** diventa sempre più **esterna** e la **pressione critica diminuisce** e nel limite diventa nulla.

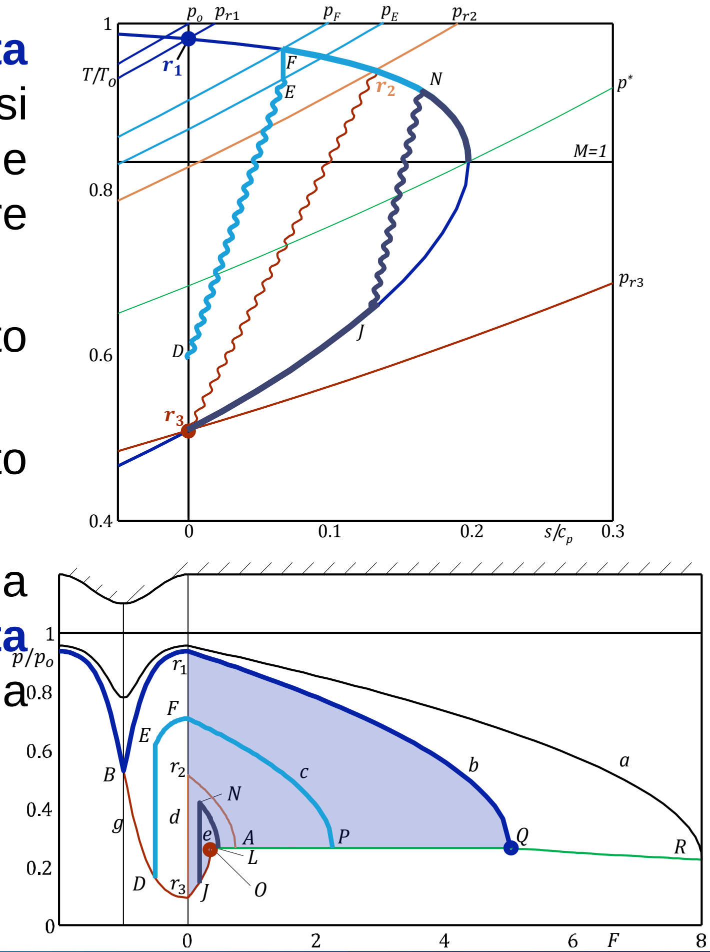


Come già detto tutti i punti all'**uscita** dell'ugello compresi tra r_1 e r_3 si trovano sulla **stessa** curva di **Fanno** e sono quindi relativi allo stesso valore di π^*.

Nelle curve di **tipo *c*** il funzionamento è con un'onda d'**urto** nel **divergente**

Nelle curve di **tipo *e*** il funzionamento è con onda nel **condotto**.

Anche in questo caso attraverso l'onda d'urto la **lunghezza critica aumenta** quindi, come si vede dalla figura si ha $F^*_{r_3} < F^*_N < F^*_{r_2}$.



Ugello convergente divergente e condotto con attrito

La **determinazione** delle curve **caratteristiche** è semplice utilizzando le **tabelle** del moto alla **Fanno** (*FF*). Conoscendo il numero di Mach dei punti caratteristici all'uscita dell'ugello si leggono direttamente i rapporti caratteristici. Ad esempio partendo con il punto r_3 si ha:

$$M_{r_3} \xrightarrow{FF} \frac{p_{r_3}}{p^*}, \frac{p_{or_3}}{p_o^*}, \frac{T_{r_3}}{T^*} \qquad\qquad M_{r_3} \xrightarrow{ISO} \frac{p_{r_3}}{p_o}, \frac{T_{r_3}}{T_o}$$

da cui, per esempio per la **pressione**, si ha:

$$\frac{p^*}{p_o} = \frac{p^*}{p_{r_3}} \frac{p_{r_3}}{p_o}, \qquad\qquad \frac{p_o^*}{p_o} = \frac{p_0^*}{p_{or_3}} \cancelto{=1}{\frac{p_{or_3}}{p_o}} = \frac{p_0^*}{p_{or_3}}$$

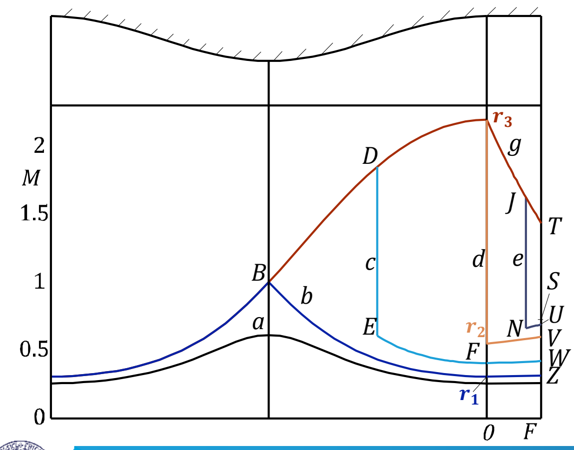
Mentre le grandezze termofluidodinamiche del punto critico possono essere valutate partendo da uno qualsiasi dei punti caratteristici le **lunghezze** critiche sono chiaramente **differenti**.

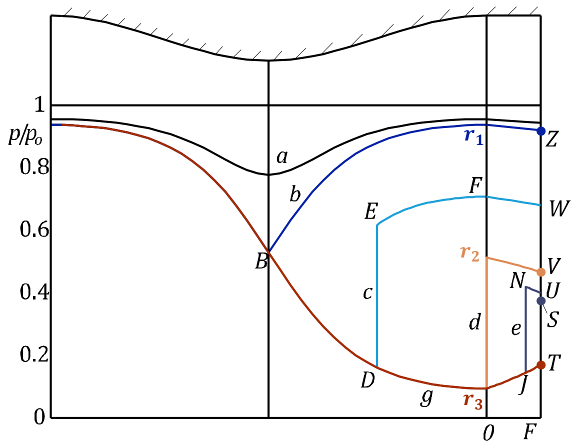
$$M_{r_1} \xrightarrow{FF} F_{r_1}^*, \qquad\qquad M_{r_2} \xrightarrow{FF} F_{r_2}^*, \qquad\qquad M_{r_3} \xrightarrow{FF} F_{r_3}^*$$

Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Si ipotizzi ora, che il **condotto** abbia una **lunghezza minore** di quella critica **supersonica** $F_{r_3}^*$ e che π_a vari fra zero e uno.

I vari funzionamenti saranno presentati mostrando **solo** le curve di **pressione** e le curve nel piano ***T-s***. Le curve del numero di Mach sono riportate qui per completezza.





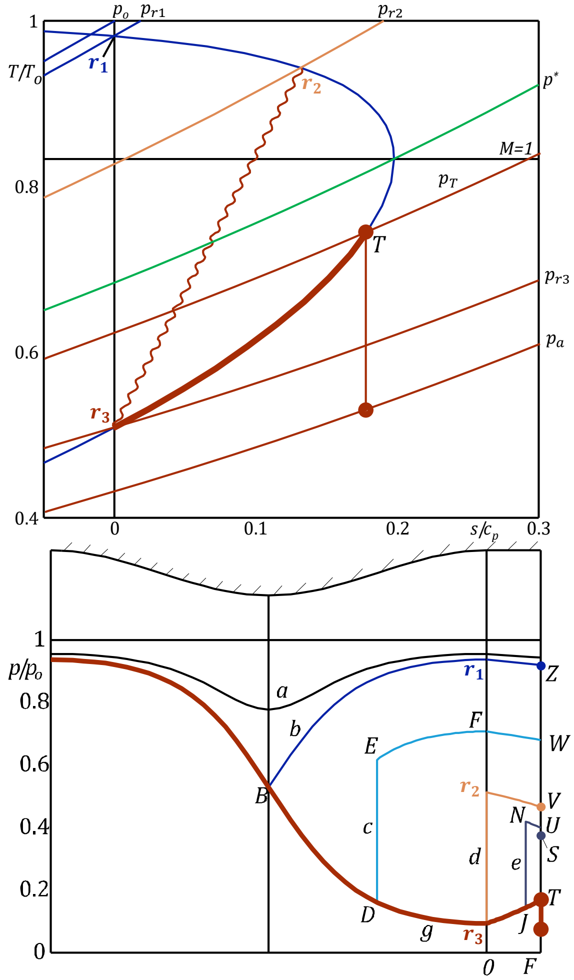
Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Per $\pi_a < \pi_T$ il fluido segue la curva caratteristica **supersonica** fino al punto T.

Solo all'**esterno** del condotto un **ventaglio d'espansione** porta la corrente alla **pressione ambiente**.

Non è rispettata la **condizione** di **Kutta** e l'ugello si dice **sottoespanso**.

Quando $\pi_a = \pi_T$ il fluido segue la curva caratteristica supersonica fino al punto T, la **condizione** di **Kutta** è rispettata e il funzionamento, in analogia con la terminologia degli ugelli convergenti, si dice **corretto**.

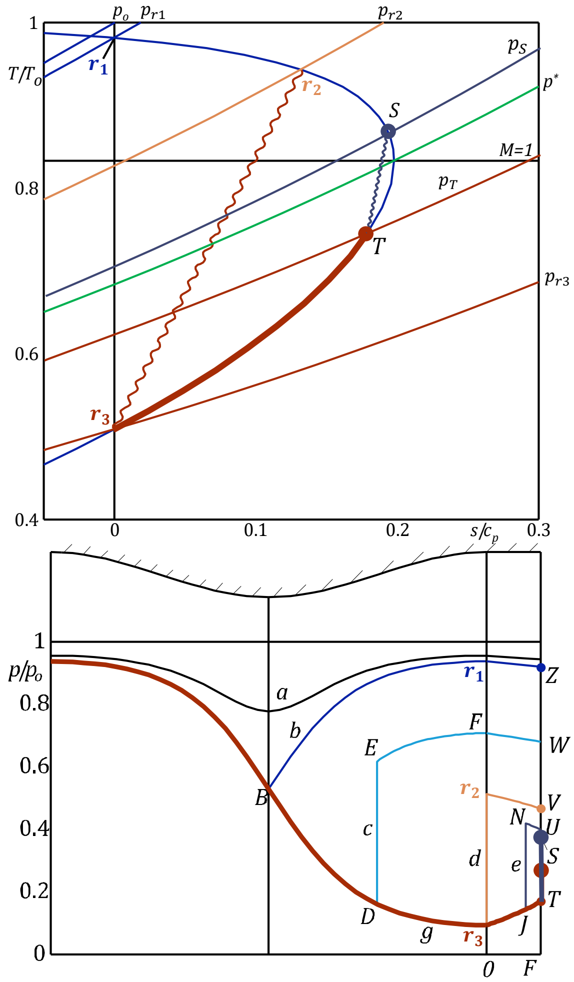


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Per $\pi_T < \pi_a < \pi_S$ il fluido segue la **curva caratteristica** supersonica fino al punto T e solo all'**esterno** del condotto un'onda d'urto **obliqua**, **comprime** la corrente portandola alla **pressione ambiente**.

Non è rispettata la **condizione** di **Kutta** e l'ugello si dice **sovraespanso**.

Quando $\pi_a = \pi_S$ l'onda diventa **normale** e si trova nella sezione d'uscita del condotto. Il numero di Mach nella sezione d'uscita è **subsonico** e la **condizione** di **Kutta** è rispettata.

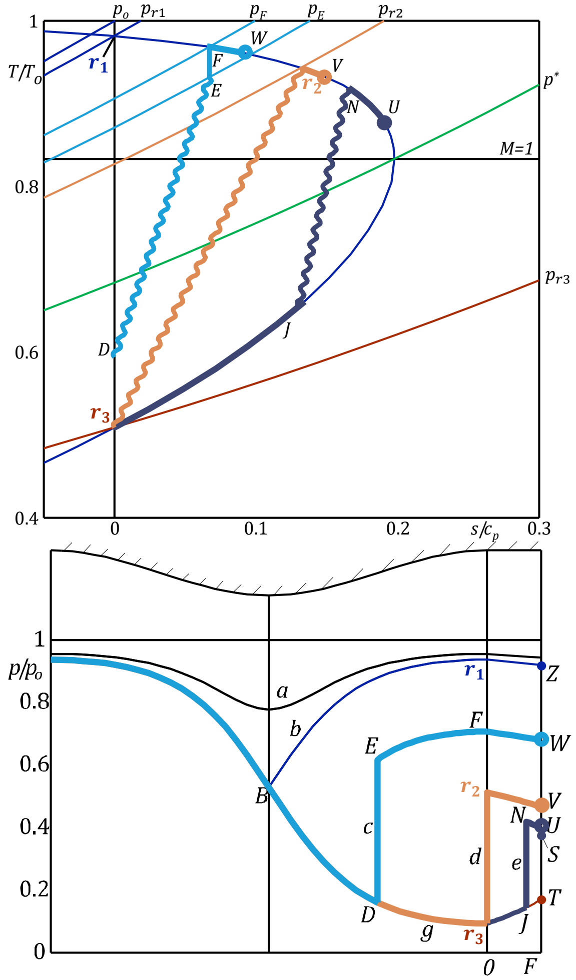


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Per $\pi_S < \pi_a < \pi_V$ il fluido segue la **curva caratteristica** supersonica fino al punto J e l'onda d'urto si sposta all'**interno** del condotto, a valle il moto è subsonico ed è rispettata la **condizione** di **Kutta**.

Quando $\pi_a = \pi_V$ l'onda d'urto normale si trova nella sezione d'**uscita** dell'**ugello** (d'**ingresso** del **condotto**), a valle il moto è subsonico ed è rispettata la **condizione** di **Kutta**.

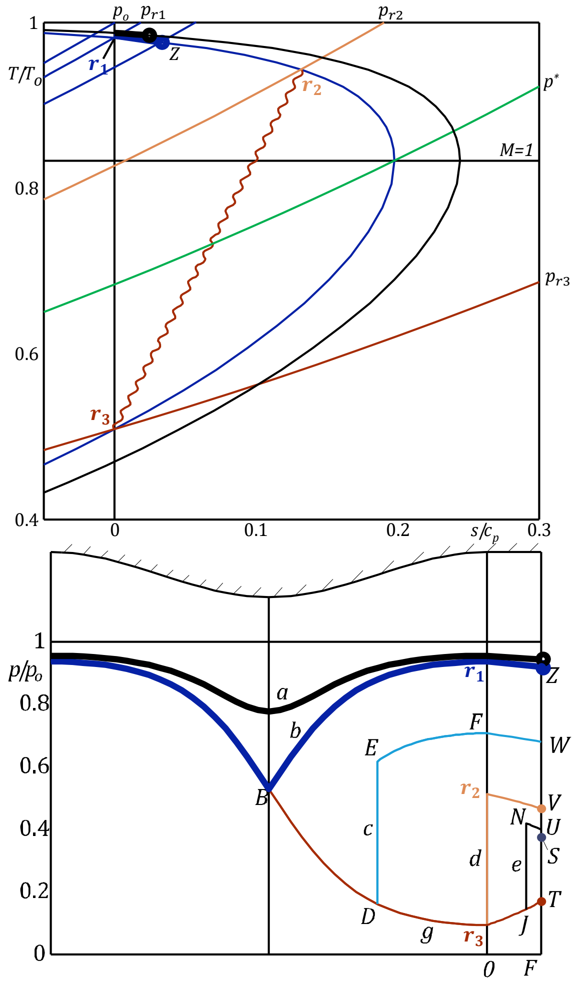
Per $\pi_V < \pi_a < \pi_Z$ il fluido segue la **curva caratteristica** supersonica fino al punto D e l'onda d'urto si sposta all'**interno** del ugello, a valle il moto è subsonico ed è rispettata la **condizione** di **Kutta**.



Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Quando $\pi_a = \pi_Z$ l'onda si porta nella gola dell'ugello e diventa un'onda di Mach, il fluido segue la curva caratteristica subsonica fino al punto Z ed è rispettata la **condizione** di **Kutta**.

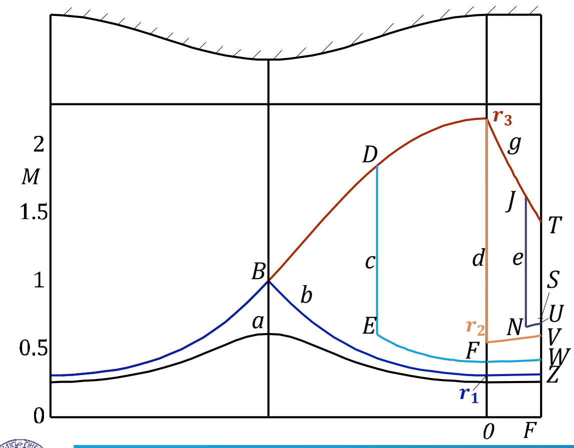
Per $\pi_Z < \pi_a < 1$ il fluido segue una curva tutta subsonica ed il comportamento è analogo a quello del sistema serbatoio, ugello semplicemente convergente condotto con attrito; è rispettata la **condizione** di **Kutta**.

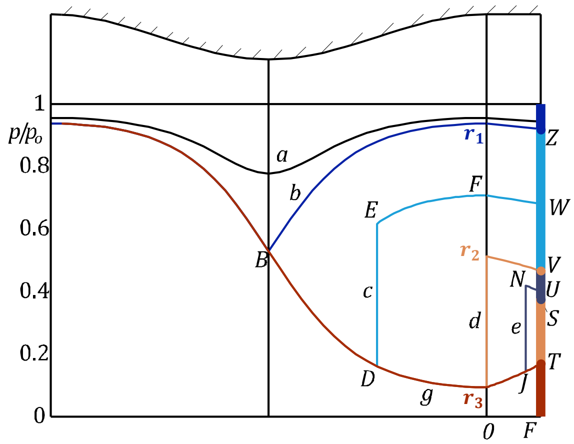


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

I regimi di funzionamento sono:

- Per $\pi_Z < \pi_a < 1$ il moto è tutto **subsonico**;
- Per $\pi_V < \pi_a < \pi_Z$ si ha un'**onda** d'urto normale nel **divergente**;
- Per $\pi_S < \pi_a < \pi_V$ si ha un'**onda** d'urto normale nel **condotto**;
- Per $\pi_T < \pi_a < \pi_S$ si ha un'**onda** d'urto **obliqua** all'uscita del condotto;
- per $0 < \pi_a < \pi_T$ si ha un **ventaglio** d'**espansione** all'uscita del condotto.

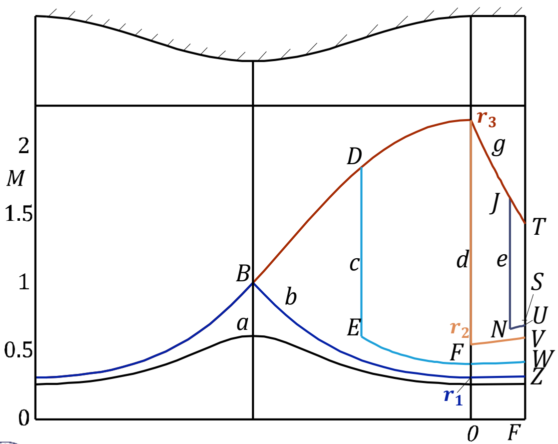


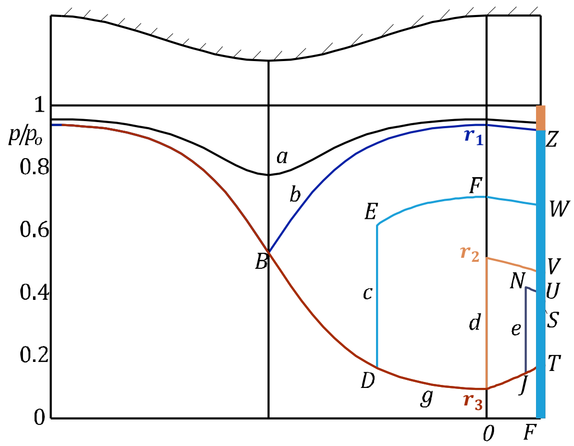


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

In **conclusione** si ha per:

- $\pi_a < \pi_Z$ l'ugello è sempre **strozzato** in gola.
- $\pi_a < \pi_S$ la curva di funzionamento è **sempre** quella **critica supersonica**; la distribuzione del numero di Mach e pressione **non** sono **funzione** di p_a. L'**adattamento** della corrente alla pressione ambiente avviene all'**esterno** dell'ugello. Normalmente **non** è verificata la **condizione** di **Kutta**.
- $\pi_S < \pi_a < 1$ il numero di **Mach** all'uscita del condotto è **subsonico** ed è rispettata la **condizione di Kutta**.





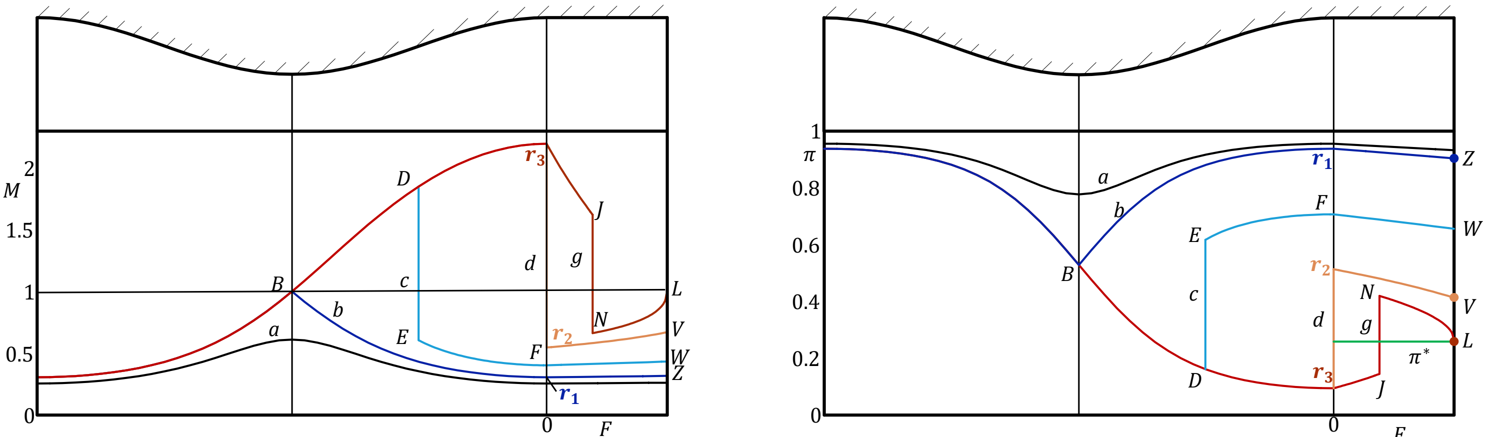
Se si assegnano le **condizioni di ristagno** nel serbatoio e la **pressione ambiente** si può individuare la **curva** di **funzionamento** (quindi il numero di Mach in ogni sezione dell'ugello e del condotto) **direttamente** quando **non** è rispettata la condizione di **Kutta** (uscita supersonica). Infatti in questo caso si segue la curva caratteristica **supersonica** e solo all'**uscita** del **condotto** la pressione si adatta a quella ambiente con un **ventaglio** d'**espansione** o un'onda d'urto obliqua.

Se il funzionamento è con **onda** d'**urto** nel **condotto** si deve procedere per **tentativi**.

Se il funzionamento è con **onda** d'**urto** nell'**ugello** considerando che $\pi_u = \pi_a$ si può facilmente ricavare il rapporto p_u/p^* e da questo il numero di Mach nella sezione d'uscita da cui è facile risalire a monte.

Se il funzionamento nell'ugello è alla **venturi** si deve procedere per **tentativi**.

Se il **condotto** ha una **lunghezza** compresa tra quella critica **supersonica** e quella con onda d'urto all'uscita dell'ugello ($F^*_{r_3} < F < F^*_{r_2}$), non è possibile avere un efflusso tutto **supersonico**.

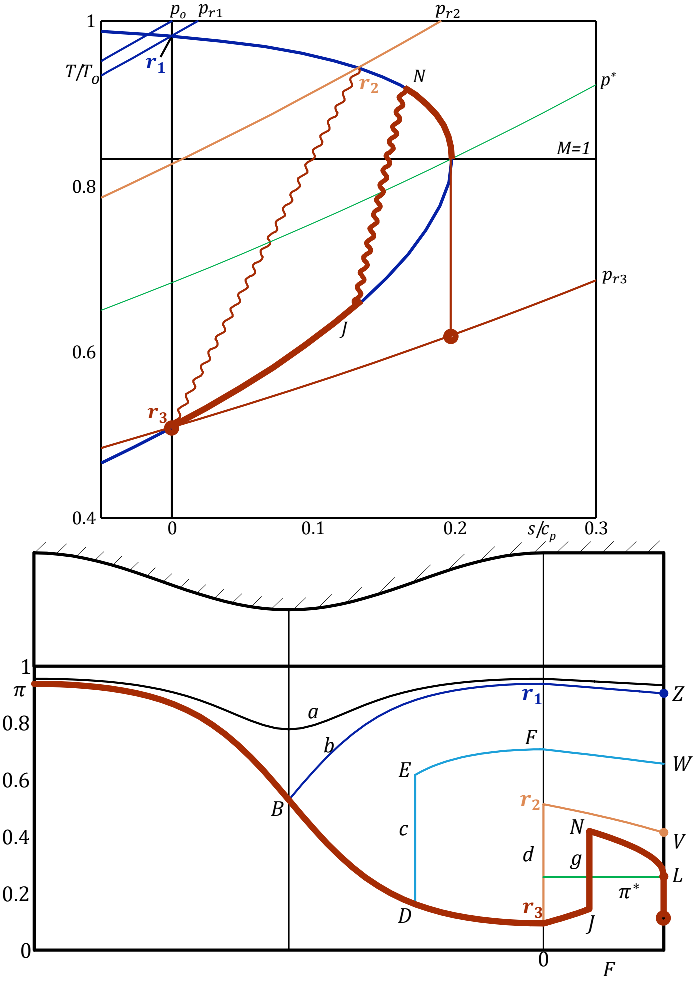


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

In questo caso se $\pi_a < \pi^*$ il fluido segue la **curva caratteristica supersonica** fino al punto J dove un'onda d'urto porta la corrente in regime subsonico.

Successivamente la corrente accelera sino alle condizioni soniche all'uscita e solo all'**esterno** del condotto un **ventaglio d'espansione** fa **espandere** la corrente portandola alla **pressione ambiente**.

Non è rispettata la **condizione** di **Kutta**.

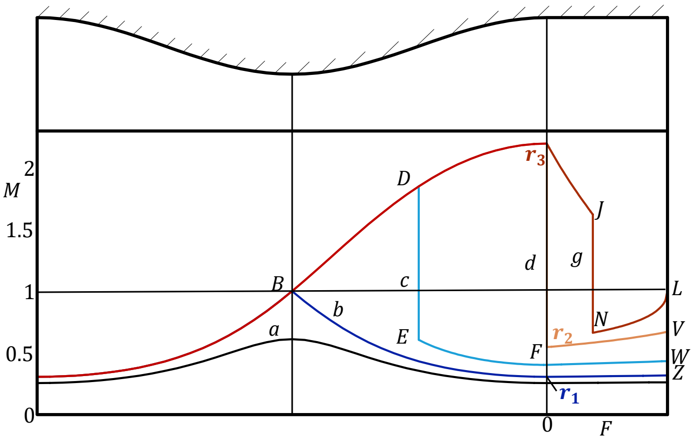


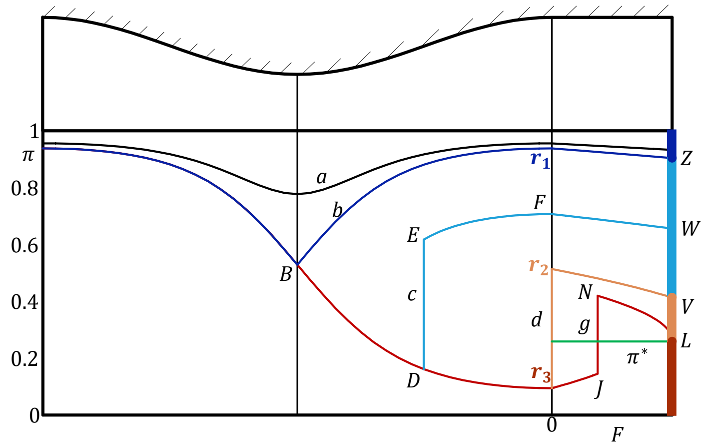
Ugello convergente divergente e condotto con attrito

I regimi di funzionamento sono:

- Per $\pi_Z < \pi_a < 1$ il moto è tutto **subsonico**.
- Per $\pi_V < \pi_a < \pi_Z$ si ha un'**onda** d'urto normale nel **divergente**;
- Per $\pi_L = \pi^* < \pi_a < \pi_V$ si ha un'**onda** d'urto normale nel **condotto**;
- per $0 < \pi_a < \pi_L$ si ha un **ventaglio** d'**espansione** all'uscita del condotto.

Il procedimento per la **determinazione** della curva di **funzionamento** è analogo a quello precedente; però per determinare la **posizione** dell'**onda** d'**urto** per $\pi_a \leq \pi^*$ si procede per **tentativi**.

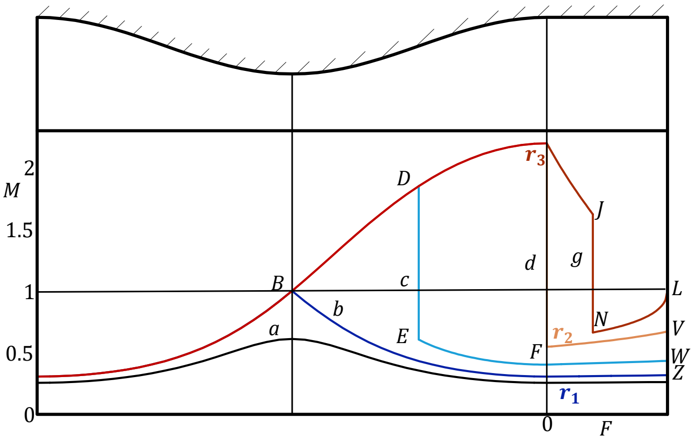


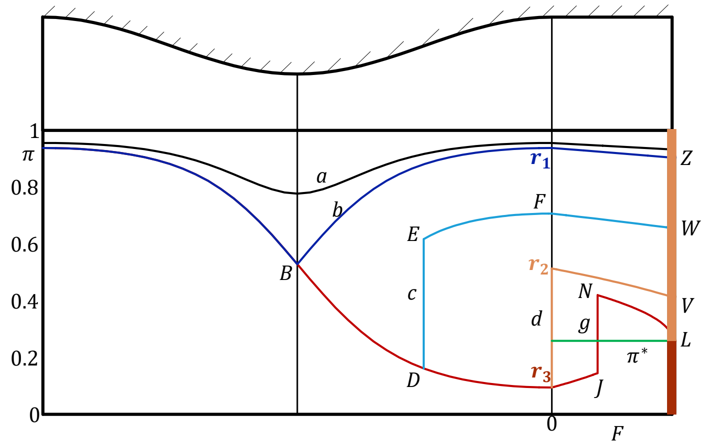


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

In **conclusione** si ha per:

- $\pi_a < \pi_Z$ l'ugello è sempre **strozzato** in gola.
- $\pi_a < \pi_L = \pi^*$ la curva di funzionamento si **blocca**; la distribuzione del numero di Mach e pressione **non** sono **funzione** di $\boldsymbol{p_a}$. L'**adattamento** della corrente alla pressione ambiente avviene all'**esterno** dell'ugello. Normalmente **non** è verificata la **condizione** di **Kutta**.
- $\pi_L < \pi_a < 1$ il numero di **Mach** all'uscita del condotto è **subsonico** ed è rispettata la **condizione di Kutta**.

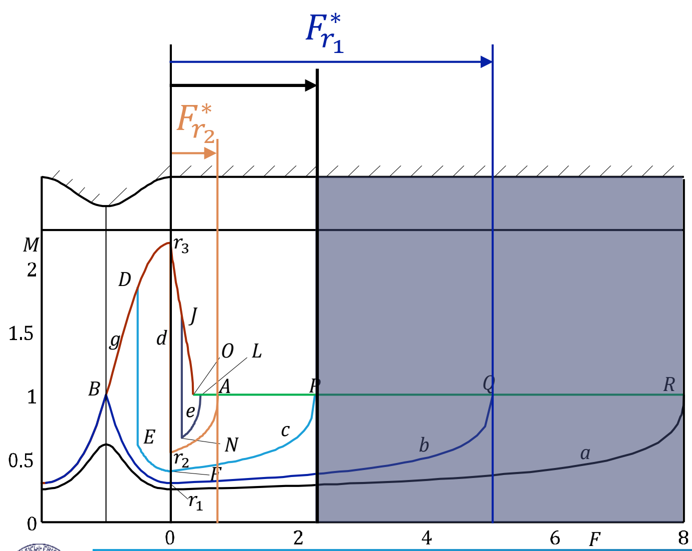


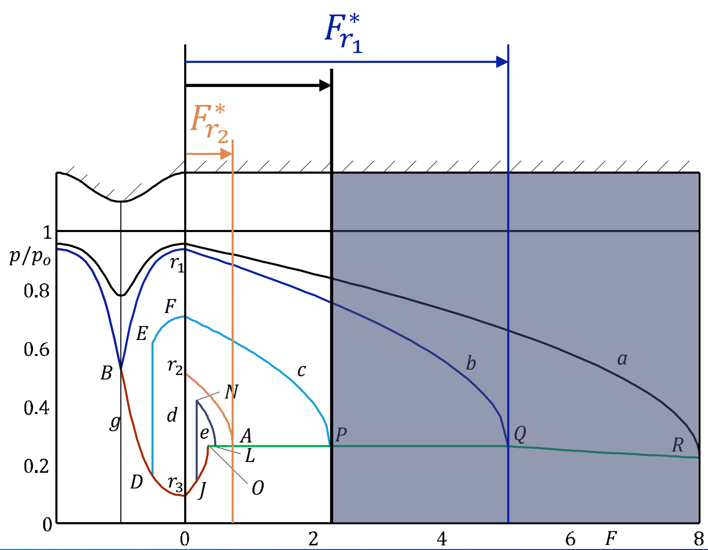


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Se il **condotto** ha una **lunghezza** compresa tra quella critica con onda d'urto all'uscita dell'ugello e quella **subsonica** ($F^*_{r_2} < F < F^*_{r_1}$):

- al più si può avere moto **supersonico** nel **divergente** e un funzionamento con **onda** d'urto nell'**ugello**;
- il funzionamento nel **condotto** può essere solo **subsonico.**

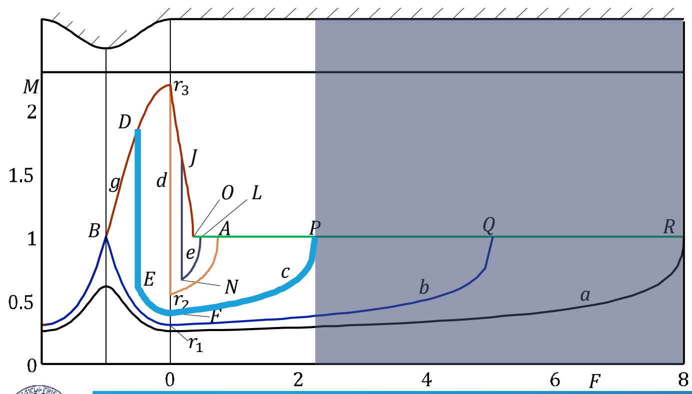


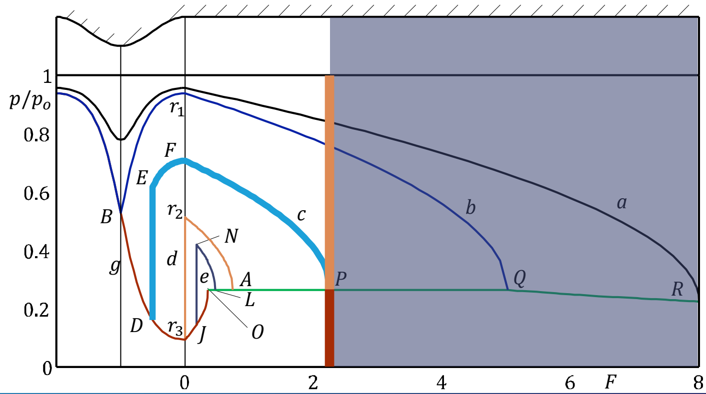


Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Se $\pi_a < \pi^*$ il fluido segue nell'ugello la **curva caratteristica supersonica** fino al punto D dove un'onda d'urto porta la corrente in regime **subsonico**, quindi la corrente **decelera** nel **divergente**. Successivamente la corrente accelera nel condotto sino alle condizioni soniche all'uscita e solo all'**esterno** del condotto un **ventaglio d'espansione** fa **espandere** la corrente portandola alla **pressione ambiente**. **Non** è rispettata la **condizione** di **Kutta**.

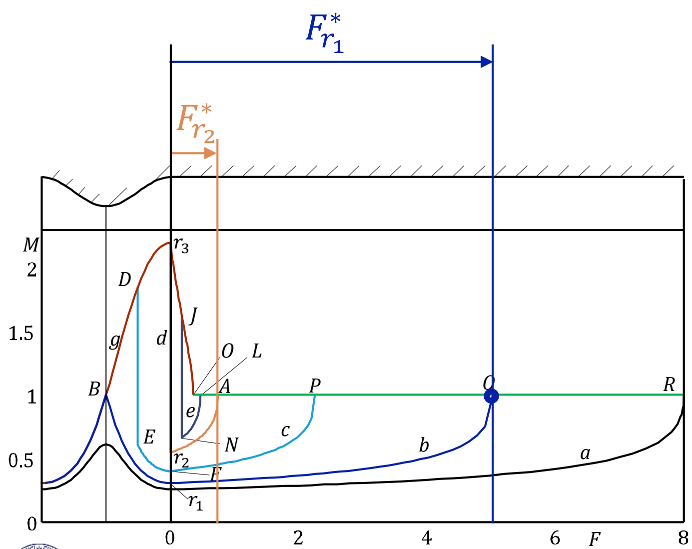
Se $\pi_a > \pi^*$ il numero di **Mach** all'uscita del condotto è **subsonico** ed è rispettata la **condizione di Kutta**.

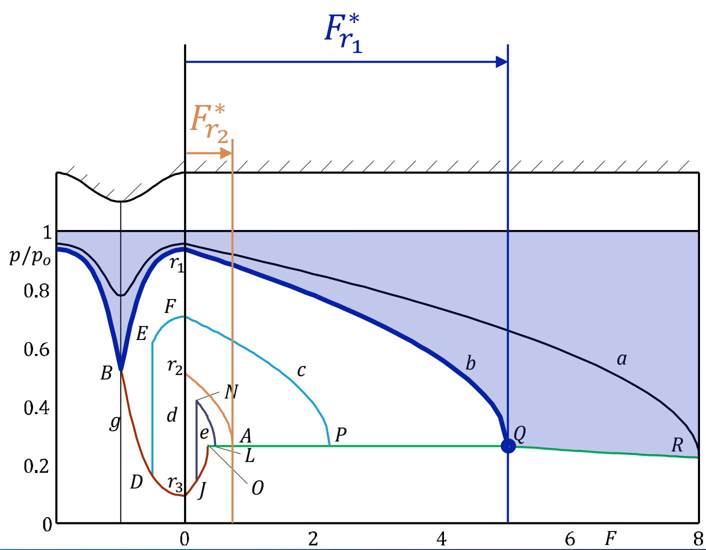




Ugello convergente divergente e condotto con attrito

Se il **condotto** ha una **lunghezza** superiore a quella critica **subsonica** ($F > F^*_{r_1}$), il moto è al più sonico all'uscita del condotto e, come già detto, il funzionamento del sistema è analogo a quello di un condotto attaccato ad un serbatoio mediante un ugello semplicemente convergente.





Temperatura di parete adiabatica

Per moto **incompressibile** il flusso termico convettivo positivo dalla parete verso la corrente è governato dalla **legge di Newton**:

$$\dot{q} = \hbar\left(T_p - T_\infty\right)$$

In questa formula:

- $\hbar$ (nel libro è utilizzato α) è il coefficiente di scambio termico **convettivo**;
- T_p la temperatura di **parete**;
- T_∞ è la temperatura **statica** della corrente (coincidente con quella di ristagno per moto incompressibile).

Se la parete è **adiabatica** la temperatura di parete deve essere uguale a quella statica della corrente $T_p = T_\infty$.

Se il moto **non** può essere considerato **incompressibile** la parete si porterà ad una temperatura diversa e la legge di Newton diventa:

$$\dot{q} = \hbar\left(T_p - T_{pa}\right)$$

Dove T_{pa} è la **temperatura** di **parete adiabatica**.

Temperatura di parete adiabatica

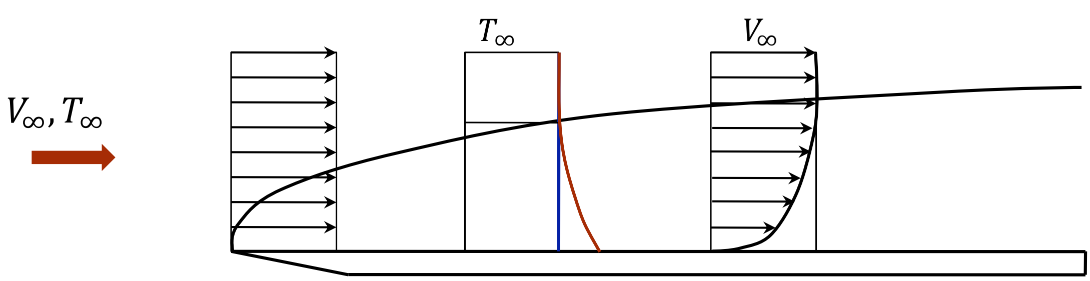
Si supponga di avere uno **strato** limite su una **lastra piana**.

In figura sono mostrati i profili di **velocità** a monte della lastra piana e in una sezione intermedia.

Inoltre, per moto **incompressibile**, è mostrato il profilo di temperatura, in una sezione intermedia, in **rosso** in caso di flusso termico **positivo** ed in blu quando il **flusso** è **nullo**.

La conservazione della **massa** nelle ipotesi di moto **stazionario** è:

$$\int_S \rho\, \underline{V} \cdot \underline{n}\, dS = 0$$



Temperatura di parete adiabatica

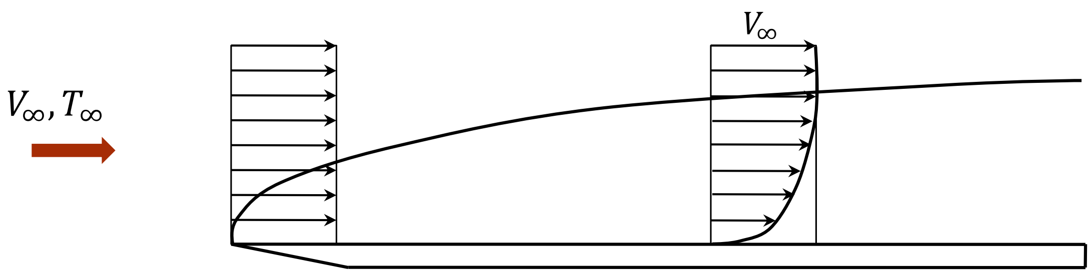
$$\int_S \rho\, \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

La conservazione dell'**energia** nelle ipotesi moto **stazionario**, **adiabatico** e ed **anergodico** è:

$$\int_S \rho\, H \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Moltiplicando la prima equazione per $-H_\infty$ e sommando si ha:

$$\int_S \rho\, (H - H_\infty)\, \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$



Temperatura di parete adiabatica

$$\int_S \rho\, (H - H_\infty)\, \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

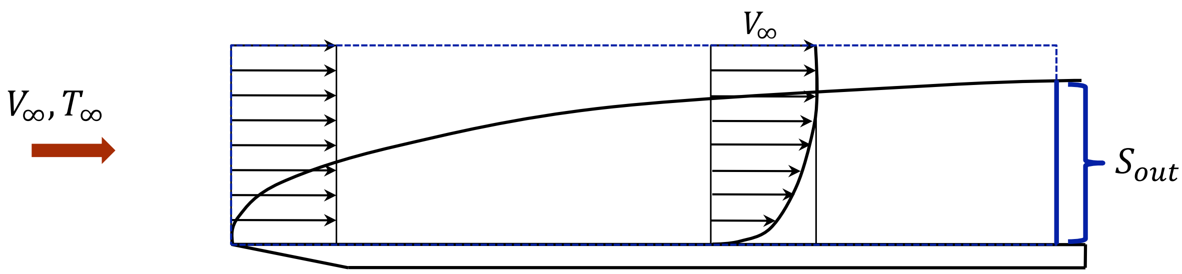
Che applicata al **volume** di **controllo** mostrato in figura e ricordando che all'esterno dello strato limite $H = H_\infty$ implica:

$$\int_{S_{out}} \rho\, (H - H_\infty)\, \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0$$

Dove con S_{out} si è indicata la sezione destra del volume di controllo.

Se il numero di **Prandtl** Pr è **unitario** lo spessore di strato limite **termico** è **uguale** a quello **dinamico**:

$$Pr = 1 \qquad \rightarrow \qquad \delta = \delta_T$$



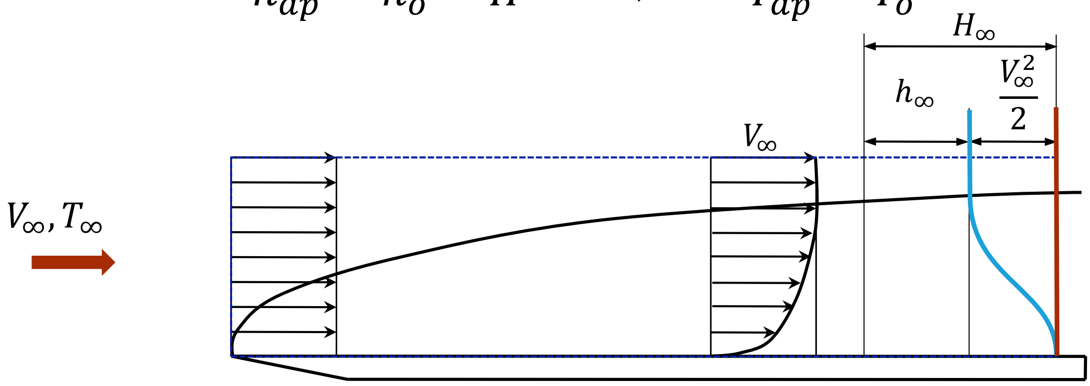
Temperatura di parete adiabatica

$$\int_{S_{out}} \rho \left(H - H_\infty\right) \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0 \qquad Pr = 1 \qquad \rightarrow \qquad \delta = \delta_T$$

Avvicinandosi alla parete la **velocità** inizia a **diminuire** è l'**entalpia** ad aumentare queste variazioni avvengono simultaneamente e l'**entalpia totale** rimane **invariata** (l'energia cinetica è proporzionale alla differenza fra le due curve).

Evidentemente la **conservazione** dell'energia è **soddisfatta** e il fluido si porterà sulla parete all'**entalpia** di ristagno:

$$h_{ap} = h_o = H \qquad \rightarrow \qquad T_{ap} = T_o$$



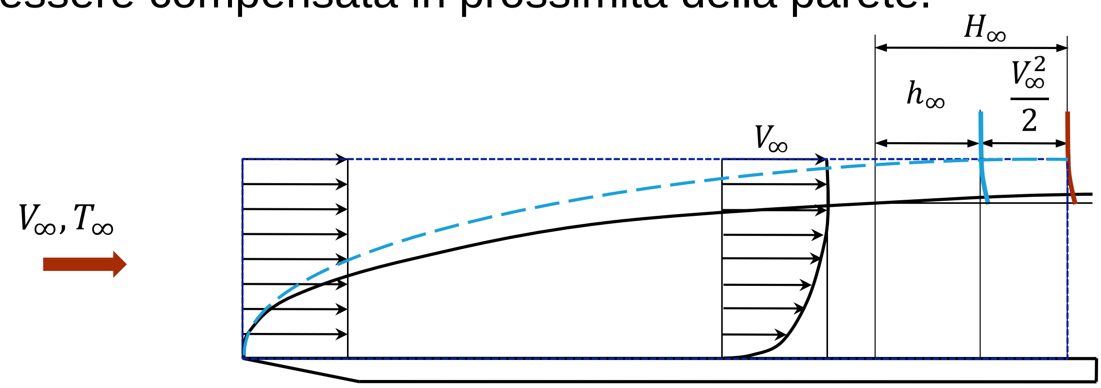
Temperatura di parete adiabatica

$$\int_{S_{out}} \rho \left(H - H_\infty\right) \underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0 \qquad Pr < 1 \qquad \rightarrow \qquad \delta < \delta_T$$

Se il numero di Prandtl Pr è, come per i gas, minore di uno lo **spessore** di strato limite **termico** è **maggiore** di quello **dinamico**.

Avvicinandosi alla parete si incontra prima lo strato limite termico e l'**entalpia** inizia ad **aumentare** e, dato che la velocita rimane invariata, anche l'**entalpia totale aumenta**.

Quindi $H - H_\infty > 0$ e si ha un **eccesso** di portata di **entalpia totale** che dovrà essere compensata in prossimità della parete.



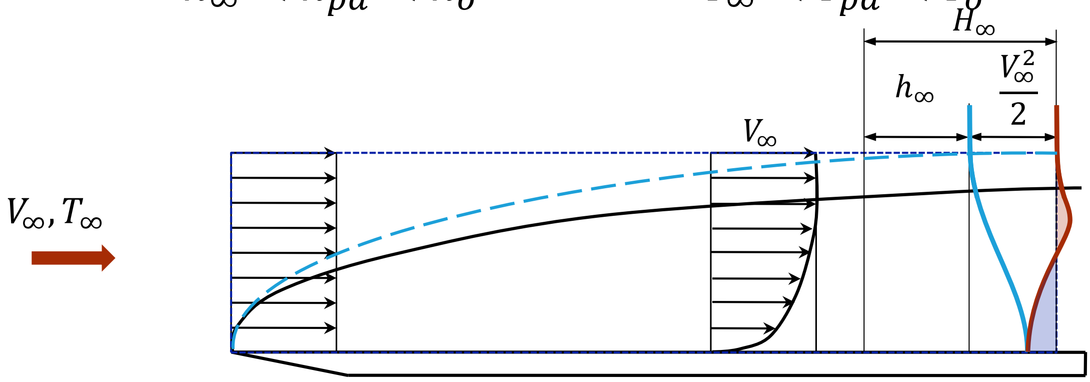
Temperatura di parete adiabatica

$$\int_{S_{out}} \rho\,(H - H_\infty)\,\underline{V} \cdot \underline{n} dS = 0 \qquad Pr < 1 \quad \rightarrow \quad \delta < \delta_T$$

Quando si entra nello strato limite dinamico la **velocita** diminuisce più **rapidamente** di quanto aumenta l'**entalpia** e l'entalpia totale diminuisce.

Per soddisfare la **conservazione** dell'energia il difetto di portata di **entalpia totale** in prossimità della parete compensa l'eccesso nella zona più esterna e si ha:

$$h_\infty < h_{pa} < h_o \qquad \rightarrow \qquad T_\infty < T_{pa} < T_o$$



Temperatura di parete adiabatica

Quando ci si avvicina alla parete non tutta **l'energia cinetica** viene **recuperata** alla parete e si ha:

$$r = \frac{T_{pa} - T_\infty}{T_{o\infty} - T_\infty} = \frac{T_{pa} - T_\infty}{\frac{V^2}{2c_p}}$$

dove r è il **fattore** (o coefficiente) di **recupero** (recovery factor).

Se r ha valore **unitario**, la **temperatura** di parete **adiabatica** coincide con quella di **ristagno**.

Per moto **iposonico** (incompressibile), la temperatura di **ristagno** e quella **statica** coincidono per cui si recupera la classica legge di **Newton** sulla convezione.

Dalla relazione precedente si ricava:

$$T_{pa} = T_\infty + r\frac{V^2}{2c_p} = T_\infty\left(1 + r\frac{\gamma - 1}{2}M_\infty^2\right)$$

Temperatura di parete adiabatica

$$T_{pa} = T_\infty + r\frac{V^2}{2c_p} = T_\infty\left(1 + r\frac{\gamma\ - 1}{2}M_\infty^2\right)$$

Il **fattore** di **recupero** è funzione del numero di **Prandtl** e, in moto **turbolento** si ha (in parentesi il valore per aria):

$$r = \sqrt[3]{Pr} \cong (0.90)$$

Quindi in aria si recupera il 90% dell'energia cinetica e la temperatura di parete **adiabatica** è molto prossima a quella di **ristagno**.