UNIVERSITY OF NAPLES ***FEDERICO II*** *1224 A.D.*

Gasdinamica

T. Astarita

astarita@unina.it

www.docenti.unina.it

Versione del 29.5.2025

Moti compressibili con scambio termico

In ambito **industriale** esistono numerose situazioni nelle quali un fluido si muove all’interno di un condotto, in regime **compressibile**, **scambiando** energia sotto forma di **calore** e, quindi, variando la sua **entalpia totale**.

Tipici esempi sono gli **scambiatori** di **calore** e le camere di combustione di sistemi aperti.

Come già detto per un condotto il rapporto tra le **forze viscose** e le **forze d'inerzia** (flusso convettivo di quantità di moto) è:

$$\frac{1}{Re}\frac{L}{D} = \frac{1}{\frac{\rho V D}{\mu}}\frac{L}{D}$$

Moti compressibili con scambio termico

$$\frac{1}{Re}\frac{L}{D}=\frac{1}{\frac{\rho VD}{\mu}}\frac{L}{D}$$

L'**importanza** relativa dello **scambio termico** rispetto al **flusso convettivo** di **energia cinetica** è misurata dall'inverso del prodotto tra il numero di **Eckert** e quello di **Peclet**:

$$\frac{1}{Ec}\frac{1}{Pe}=\frac{1}{\frac{V^2}{c_p\Delta T}}\frac{1}{\frac{\rho c_p VD}{\lambda}}$$

Nel caso di condotti questo numero è moltiplicato per il rapporto fra la lunghezza del condotto ed il diametro e ricordando che Pe=$RePr$:

$$\frac{1}{Ec}\frac{1}{Pe}\frac{L}{D}=\frac{1}{Ec}\frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\frac{L}{D}=\frac{1}{\frac{V^2}{c_p\Delta T}}\frac{1}{\frac{\rho VD}{\mu}}\frac{1}{\frac{c_p\mu}{\lambda}}\frac{L}{D}$$

Moti compressibili con scambio termico

$$\frac{1}{Re}\frac{L}{D}=\frac{1}{\frac{\rho VD}{\mu}}\frac{L}{D} \qquad \frac{1}{Ec}\frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\frac{L}{D}=\frac{1}{\frac{V^2}{c_p\Delta T}}\frac{1}{\frac{\rho VD}{\mu}}\frac{1}{\frac{c_p\mu}{\lambda}}\frac{L}{D}$$

Quando $\frac{1}{Re}\frac{L}{D}$ è piccolo si possono trascurare gli effetti viscosi.

Spesso si suppone che il numero di **Eckert** sia di ordine **unitario** e, in questo caso per i gas (Pr~1), se gli effetti **viscosi** sono **trascurabili** lo sono anche gli scambio **termici**.

Se invece il numero di **Eckert** è invece **piccolo** (e.g. grandi differenze di temperatura) gli **scambi termici** potrebbero **non** essere **trascurabili** anche se quelli viscosi sono trascurabili e questa considerazione è alla base del modello del moto alla **Rayleigh**.

Moti compressibili con attrito

Le **ipotesi** alla base del moto con attrito alla **Rayleigh** sono:

- il moto è quasi **unidimensionale** e quasi **stazionario**;
- l'**area** della sezione di passaggio del condotto è **costante**;
- il fluido **non scambia energia** nel modo **lavoro**, e gli sforzi viscosi sono trascurabili;
- gli effetti delle forze **gravitazionali** sono **trascurabili**;
  - ovvero il numero di Froude è grande;
- la **produzione** di **entropia** è **trascurabile**, ovvero la trasformazione è **reversibile**;
  - la produzione di entropia è proporzionale al **gradiente** di **temperatura** al quadrato ed è necessario che le **differenze** di temperatura siano **piccole** il che, per avere uno scambio termico complessivo relativamente grande, implica, un **condotto** relativamente **lungo** ma non **troppo** altrimenti non è possibile **trascurare** gli effetti **viscosi**.
- le condizioni termofluidodinamiche del fluido cambiano per effetto degli scambi d'energia nel modo **calore** (che costituiscono la **forza spingente**).

La curva del moto alla Rayleigh

La conservazione della **massa**, con $A = cost$, implica la **costanza** del **flusso** di **massa**:

$$\dot{m} = \rho V A = G A = cost \qquad \rightarrow \qquad G = \rho V = cost$$

Dall'equazione di bilancio della **quantità** di **moto** proiettata sull'**asse** del **condotto**, trascurando il termine gravitazionale e gli effetti viscosi implica invece:

$$I = p + \rho V^2 = cost$$

Combinando queste due equazioni si ha:

$$I = p + GV = p + G^2 \frac{1}{\rho} = p + G^2 v$$

Che nel piano di **Clapeyron** p-v è l'equazione di una retta con pendenza negativa, infatti spesso la curva di Rayleigh è anche detta **linea** di **Rayleigh**.

La curva del moto alla Rayleigh

$$I = p + GV = p + G^2\frac{1}{\rho} = p + G^2 v$$

In un moto alla Rayleigh **pressione**, **velocità** e **volume specifico** sono legati da una relazione **lineare**.

Nell'ipotesi di moto anergodico l'equazione di **conservazione** dell'**energia** si riduce a:

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q}$$

dove $\dot{Q} = [W]$ rappresenta la **potenza scambiata** tra il fluido ed il suo ambiente (energia per unità di tempo) nel modo del **calore**.

Come già visto in forma differenziale si ha ($\dot{q} = [W/m^2], q = [J/kg]$):

$$dH = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = dq = T\,ds$$

Dove l'ultima uguaglianza e una conseguenza dell'ipotesi di **reversibilità**.

La curva del moto alla Rayleigh

Le equazioni che governano il moto alla **Rayleigh** sono state trovate senza fare **ipotesi** sul **modello di gas**:

$$G = \rho V = cost \qquad \frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$I = p + GV = p + G^2\frac{1}{\rho} = p + G^2 v \qquad dI = dp + \rho V\,dV = 0$$

$$\dot{m}\Delta H = \dot{Q} \qquad dH = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D}$$

Come già detto la prima e la seconda equazione mostrano che le **variazioni** di **velocità** sono di segno **opposto** a quelle di **densità** e di **pressione**.

$\dot{q}$ è il flusso termico alla parete ($[W/m^2]$) che può essere **positivo** o **negativo**, quindi l'**entalpia** di **ristagno** del fluido può sia **aumentare** che **diminuire**.

La curva del moto alla Rayleigh

Nel caso di scambio termico per **convezione** si ha:

$$\dot{q} = \hbar\left(T_p - T_{pa}\right)$$

Per il moto di gas turbolento in condotti il coefficiente di scambio termico convettivo è determinabile, a partire dal numero di Nusselt ***Nu***, con la relazione di **Dittus** e **Boelter**:

$$Nu = \frac{\hbar D}{\lambda} = 0.023\, Re^{0.8}\, Pr^{n} \qquad n = \begin{cases} 0.4 & \text{riscaldamento} \\ 0.3 & \text{raffreddamento} \end{cases}$$

La curva del moto alla Rayleigh

Le due equazioni:

$$G = \rho V = cost \qquad I = p + \rho V^2 = cost$$

unite alle **equazioni** di **stato** del **gas**:

$$p = \rho R T \qquad h = c_p T = \gamma c_v T$$

forniscono un sistema di quattro equazioni in cinque incognite e definiscono una **curva** che può essere **rappresentata** nel piano ***T-s***.

La **curva** di **Rayleigh** può essere diagrammata sul piano di ***T-s*** a partire dall'espressione della sua **tangente** locale $\partial T/\partial s$:

$$dI = dp + G\, dV = dp + \rho V\, dV = 0 \quad \rightarrow \quad dV = -\frac{dp}{\rho V}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{\rho V^2} = 0 \quad \rightarrow \quad V^2\, d\rho = dp = R(T\, d\rho + \rho\, dT)$$

Dividendo per $\rho R T$ si ha:

$$\frac{\gamma V^2}{\gamma R T}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho}(\gamma M^2 - 1) = \frac{dT}{T}$$

La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} \qquad dV = -\frac{dp}{\rho V} \qquad \frac{d\rho}{\rho}(\gamma M^2 - 1) = \frac{dT}{T}$$

L'equazione di **Gibbs** per un gas **più che perfetto** si può scrivere nella forma:

$$c_v dT = du = Tds - pdv = Tds - pd\frac{1}{\rho} = Tds + \frac{\rho RT}{\rho^2}d\rho = Tds + RT\frac{d\rho}{\rho}$$

$$Tds = c_v dT - RT\frac{d\rho}{\rho} \quad \rightarrow \quad ds = c_v\frac{dT}{T} - R\frac{d\rho}{\rho}$$

da cui sostituendo si ha:

$$ds = c_v(\gamma M^2 - 1)\frac{d\rho}{\rho} - R\frac{d\rho}{\rho} = c_v\gamma M^2 - (c_v + R)\frac{d\rho}{\rho} = c_p(M^2 - 1)\frac{d\rho}{\rho}$$

$$ds = c_p(M^2 - 1)\frac{d\rho}{\rho} = -c_p(M^2 - 1)\frac{dV}{V} = \frac{c_p(M^2 - 1)}{(\gamma M^2 - 1)}\frac{dT}{T}$$

La curva del moto alla Rayleigh

$$dV = -\frac{dp}{\rho V}$$

$$ds = c_p(M^2 - 1)\frac{d\rho}{\rho} = -c_p(M^2 - 1)\frac{dV}{V} = \frac{c_p(M^2 - 1)}{(\gamma M^2 - 1)}\frac{dT}{T} \qquad 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = T\,ds$$

Se il **flusso d'energia** è **entrante** $\dot{q} > 0$ si ha:

- $M < 1/\sqrt{(\gamma)}$ $\rightarrow$ $dV > 0,\ d\rho < 0, dT > 0$ e $dp < 0$
- $1/\sqrt{(\gamma)} < M < 1$ $\rightarrow$ $dV > 0,\ d\rho < 0, dT < 0$ e $dp < 0$
- $M > 1$ $\rightarrow$ $dV < 0,\ d\rho > 0, dT > 0$ e $dp > 0$

In regime **subsonico**, nonostante che normalmente $dT > 0$, l'aumento della velocità è tale da provocare un **aumento** del numero di **Mach** (viceversa in regime supersonico).

Nel moto alla **Rayleigh** con $\dot{q} > 0$ il comportamento del flusso è simile a quello di un ugello convergente infatti il **flusso** tende alle condizioni **soniche**.

Viceversa se il **flusso d'energia** è **uscente** $\dot{q} < 0$ il comportamento del flusso è analogo a quello di un ugello divergente infatti il **flusso** tende ad allontanarsi dalle condizioni **soniche**.

La curva del moto alla Rayleigh

$$dV = -\frac{dp}{\rho V}$$

$$ds = c_p(M^2-1)\frac{d\rho}{\rho} = -c_p(M^2-1)\frac{dV}{V} = \frac{c_p(M^2-1)}{(\gamma M^2-1)}\frac{dT}{T} \qquad 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = T\,ds$$

Dall'equazione precedente si ricava la **pendenza** della **curva** di **Rayleigh** nel piano ***T-s***:

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2-1}{M^2-1}$$

Al contrario del moto alla Fanno, la **temperatura** di **ristagno** nel moto alla **Rayleigh** è **variabile** e, per **normalizzare** i diagrammi è stata scelta la temperatura di ristagno in condizioni **critiche**.

La curva del moto alla Rayleigh

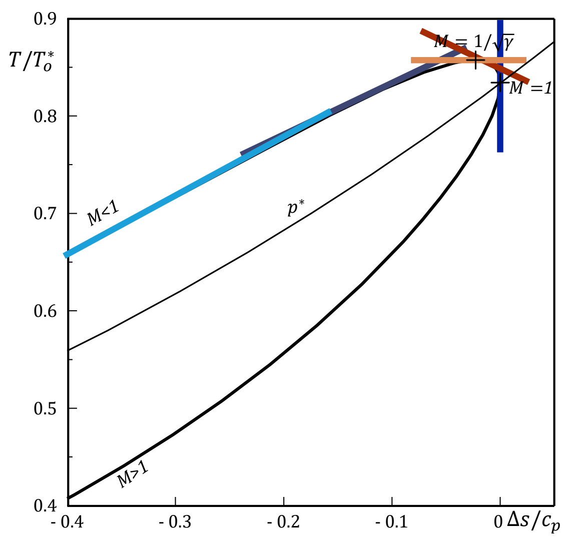
$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2-1}{M^2-1}$$

Al **variare** del numero di **Mach** si ha:

- per $M \to 0$, moto **iposonico**, la curva di **Rayleigh** tende ad una **isobara** ($p = cost$) e cioè ha come **asintoto** l'asse dell'**entropia** infatti :

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} \to 1 \qquad\qquad c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p$$

- per $M < 1/\sqrt{\gamma}$, la pendenza della curva è **positiva**;
- per $M = 1/\sqrt{\gamma}$, la pendenza della curva è **nulla** e la **temperatura** raggiunge un **massimo**;
- per $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$, la pendenza della curva è **negativa**;
- per $M = 1$, condizione **critica**, la curva ha tangente **verticale** e **l'entropia** raggiunge un **massimo**;



La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Al **variare** del numero di **Mach** si ha:

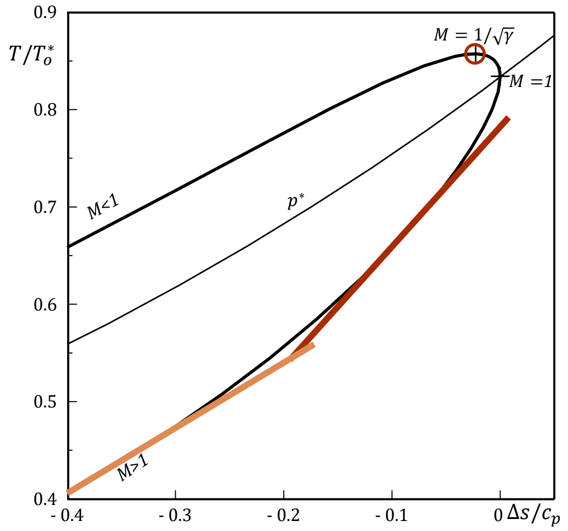
- per $M > 1$, moto **supersonico**, la pendenza della curva è positiva;
- per $M \to \infty$, moto **ipersonico** la curva di **Rayleigh** tenda ad una isocora ($\rho = cost$) e cioè ha come **asintoto** l'asse dell'**entropia** infatti:

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} \to \gamma \qquad \frac{c_p}{\gamma} = c_v = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v$$

Il punto di temperatura **massima** è relativo ad un numero di **Mach Newtoniano** unitario ($M = 1/\sqrt{\gamma} = (0.8452)$).

Per un fissato valore di γ ,utilizzando la **temperatura normalizzata** con quella di **ristagno critica** T/T_o^* e $\Delta s^* = 0$, la **curva** di **Rayleigh** è **unica**.

In coordinate **dimensionali**, invece, ad ogni coppia di valori G e I corrisponde una **particolare** curva di **Rayleigh.**



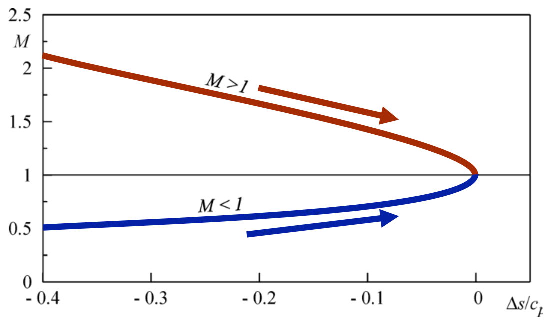
La curva del moto alla Rayleigh

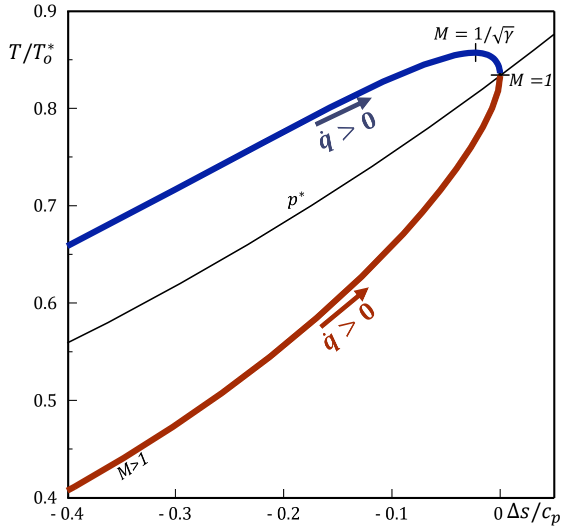
$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Dato che il moto alla Rayleigh è **reversibile** le variazioni d'entropia sono solo dovute agli scambi di energia nel modo **calore**, che possono essere sia **positivi**, che **negativi**.

$$dH = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = dq = T\,ds$$

In caso di flusso di calore **entrante** $\dot{q} > 0$ la corrente evolve lungo la curva di Rayleigh verso **entropie crescenti** e il fluido tende alle condizioni **soniche**.





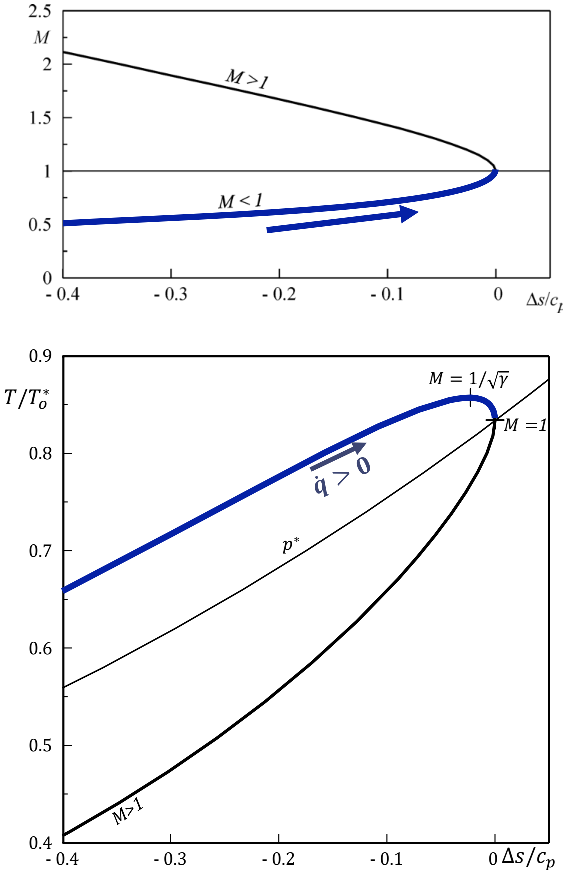
La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Per $\dot{q} > 0$ e condizioni all'ingresso del condotto **subsoniche**, lungo il condotto si sia ha un **aumento** del numero di **Mach** e della **velocità** ed un **diminuzione** di **densità** e **pressione**.

Come in un convergente, se la pressione ambiente lo consente e se il calore scambiato è **sufficientemente grande** si può raggiungere il punto di **massima entropia** cioè la condizione **sonica**, in questo caso il moto **strozza** e non si può più addurre energia senza modificare la portata.

Anche per il moto alla **Rayleigh**, il punto **sonico** è una condizione **limite** del moto ed è anche detta **condizione critica**.

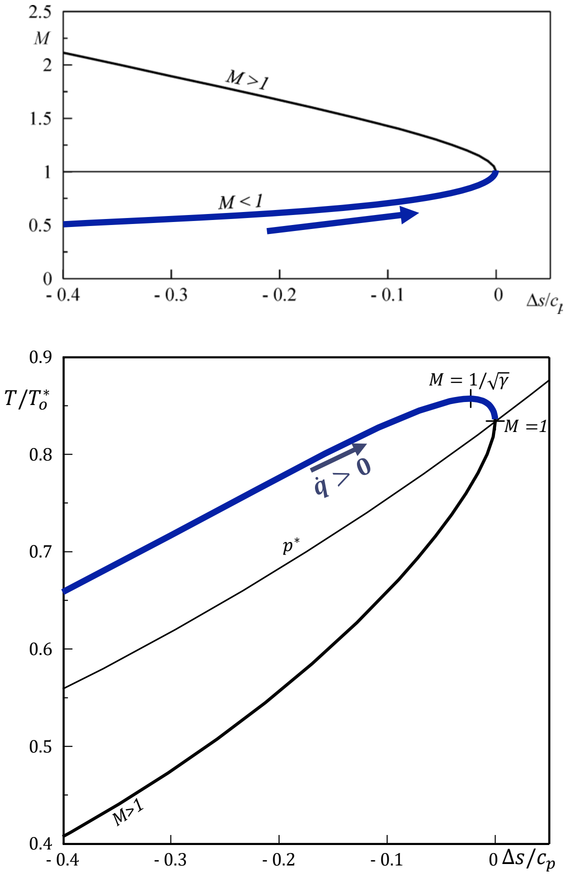


La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Come si vedrà in seguito, un **ulteriore aumento del calore scambiato** dà luogo ad una **diminuzione** di G, cioè della portata di massa.

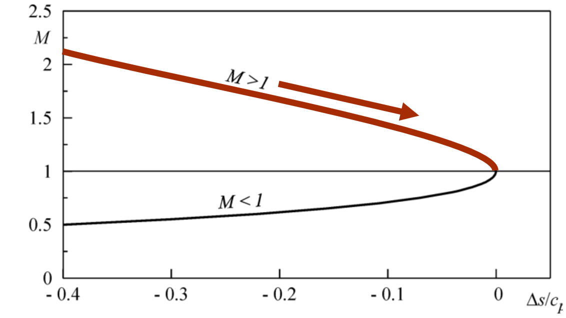
Poiché le condizioni soniche corrispondono alla massima entropia possibile, se il moto all'ingresso del condotto è **subsonico**, esso potrà al **massimo** diventare **sonico** all'uscita del condotto.



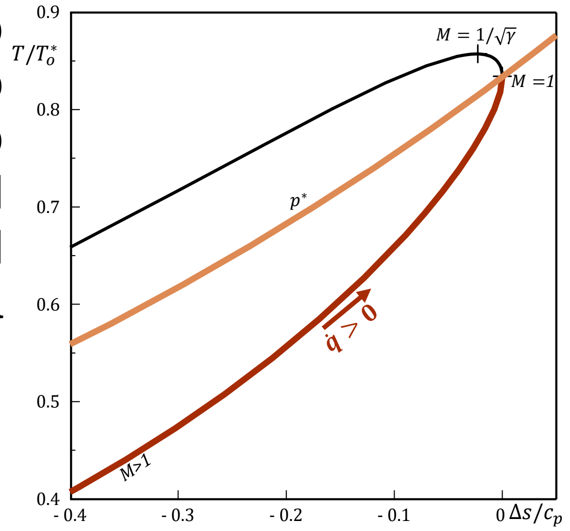
La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Per $\dot{q} > 0$ e condizioni all'ingresso del condotto **supersoniche**, il comportamento del fluido è esattamente opposto a quello in moto subsonico, lungo il condotto si sia ha una **diminuzione** del numero di **Mach** e della **velocità** ed un **aumento** di **temperatura**, **densità** e **pressione**.



Come in un convergente, anche in questo caso (in assenza di onde d'urto) si possono raggiungere le condizioni **soniche** solo all'**uscita** del **condotto**, in altre parole il moto rimane **supersonico** lungo tutto il condotto diventando, al meno, **sonico** nella sezione d'**uscita**.

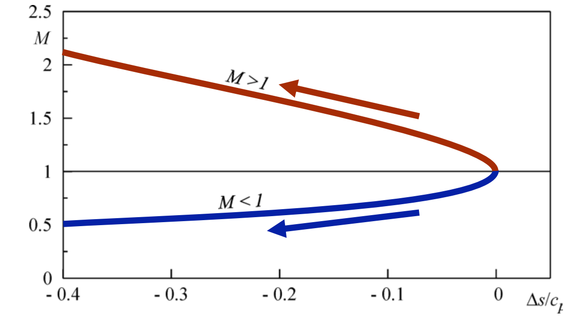


La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

$$dH = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = dq = T\,ds$$

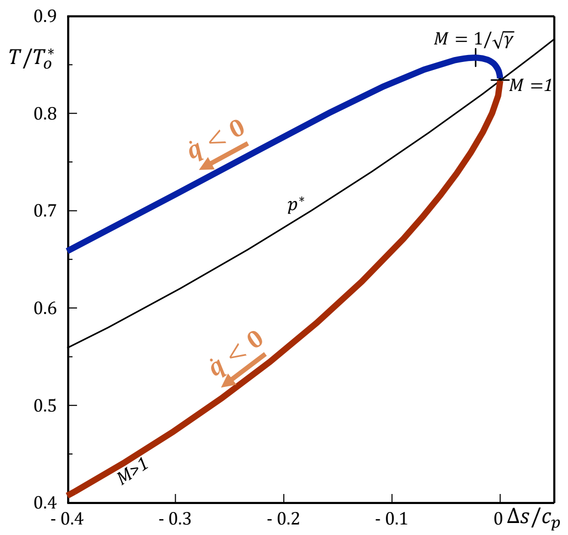
In caso di flusso di calore **uscente** $\dot{q} < 0$ la corrente evolve lungo la curva di Rayleigh verso **entropie decrescenti**.



Per $\dot{q} < 0$ il comportamento è **opposto** e, come per un ugello divergente, il flusso tende ad **allontanarsi** dalle condizioni **soniche**.

Quindi le condizioni **soniche** si possono avere solo all'**ingresso** del **condotto**.

Anche in questo caso la **sottrazione** di calore è **limitata** potendosi sottrarre al più l'**entalpia totale** posseduta **inizialmente** dal fluido.



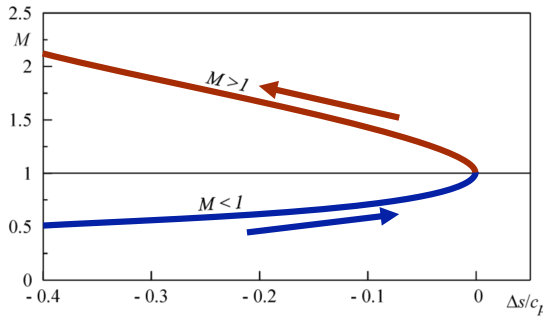
La curva del moto alla Rayleigh

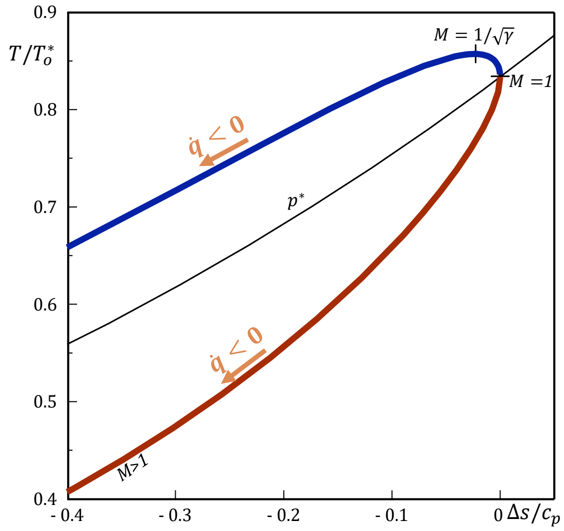
$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Come nel moto alla Fanno, all'**aumentare** del numero di **Mach** la **pressione** e la **densità diminuiscono** monotonicamente.

In linea del tutto **teorica**, sarebbe possibile accelerare un flusso **subsonico** fino a ad un regime **supersonico** prima **riscaldando** e poi **raffreddando** il fluido.

In pratica, questa operazione non si può realizzare anche perché il processo è **instabile**.





La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

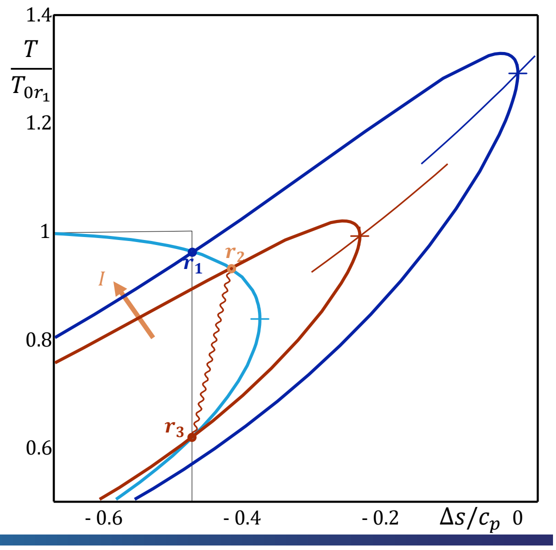
Mantenendo costante il flusso di massa e **variando** l'impulso specifico si ottiene un'**infinità** di **curve** di **Rayleigh**.

Come già detto, i **punti caratteristici** di un ugello convergente si trovano tutti su un'unica curva di **Fanno**.

Attraverso un **onda** d'**urto** sono costanti G, I ,H e quindi anche i punti r_3 e r_2 si trovano su un'**unica** curva di **Rayleigh**.

Il punto r_1 invece, avendo un diverso valore dell'impulso, si trova su una curva più **esterna**. In figura sono anche mostrate le pressioni di ristagno dei punti critici.

Poiché in un moto alla Fanno l'**impulso** specifico è una funzione **decrescente** dell'**entropia**, il punto r_2 corrisponde ad un impulso specifico **minore** di quello del punto r_1 e, quindi, la curva di **Rayleigh** più **interna** è relativa ad un **impulso** specifico **minore**.



La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

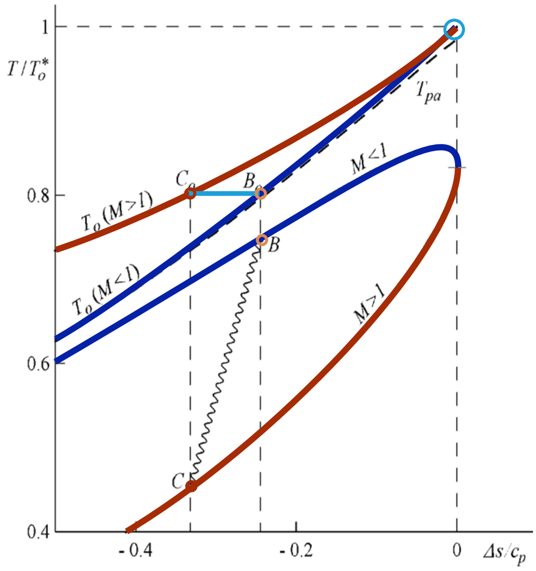
In una curva di Rayleigh G e I sono costanti ed è interessante diagrammare la **temperatura** di **ristagno** in funzione dell'**entropia**.

La temperatura di ristagno, essendo **proporzionale** alla quantità di **calore scambiato**, deve aumentare spostandosi verso entropie crescenti ed avere un **massimo** in condizioni **critiche**.

I punti C e B sono i punti a monte ed a valle di un'**onda** d'**urto**, che hanno la **stessa temperatura** di **ristagno**.

C_o e B_o sono i corrispondenti punti di **ristagno** quindi la curva **supersonica** del grafico della temperatura di ristagno si trova al di sopra di quella **subsonica**.

Chiaramente per $M \to 0$ le due curve di temperatura **statica** e di **ristagno** devono tendere a coincidere.



La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

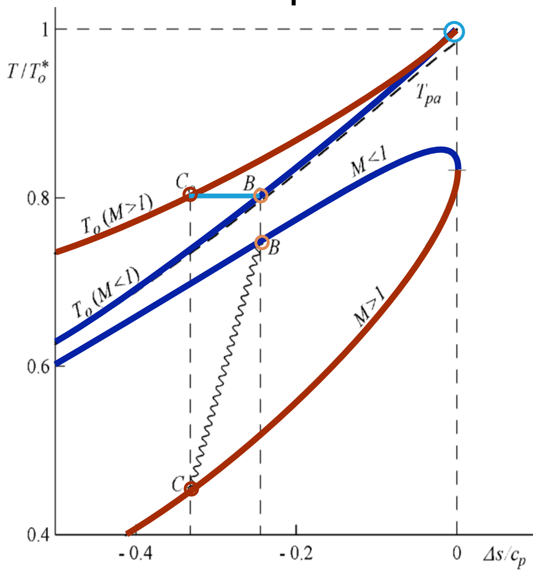
La **distanza** fra i punti C e B essendo proporzionale al salto d'entropia diminuisce al diminuire del numero di Mach a monte.

Mentre la curva **subsonica tende a zero** quella **supersonica** ha un **asintoto** orizzontale che può essere spiegato ricordando che per Mach a monte che tende ad infinito il numero di Mach a valle tende a M_{2l}.

La curva **supersonica** tende quindi al valore finito della temperatura di ristagno relativo a M_{2l}.

Per l'ipotesi di moto **reversibile** l'**area** sottesa alle curve di **Rayleigh** è proporzionale alla **quantità** di **calore scambiato**.

$$dH = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = dq = T\,ds$$



La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

$$dH = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = dq = T\,ds$$

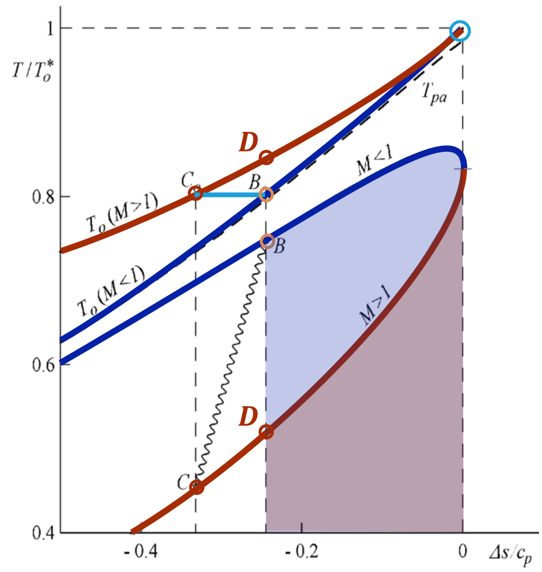
Sottraendo calore, partendo dal punto **critico** seguendo la curva **subsonica** sino al punto ***B*** si ha:

$$c_p(T_{oB} - T_o^*) = q = \int_*^B T\,ds$$

In modo analogo sulla curva **supersonica**, fermandosi alla stessa entropia punto ***D***:

$$c_p(T_{oD} - T_o^*) = q = \int_*^D T\,ds$$

L'area **sottesa** e **minore** quindi $T_{oD} > T_{oB}$ è questo dimostra ancora che la curva superiore è quella **supersonica**.

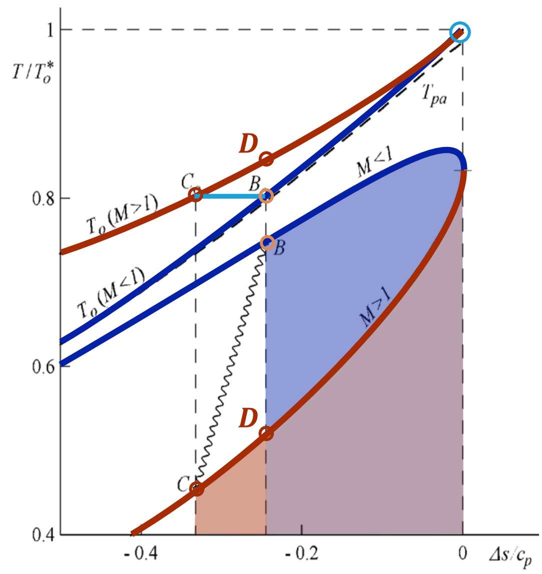


La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Da un altro punto di vista **integrando** lungo la curva **supersonica** fino al punto ***C*** che ha la stessa temperatura di ristagno del punto ***B*** le aree sottese devono essere uguali.

L'area **sottesa** al tratto ***D-**** è comune a entrambe quindi le due **aree** mostrate in figura (**rossa** e **blu**) devono essere **uguali** (sembrano diverse perché l'asse delle temperature parte da 0.4).



La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

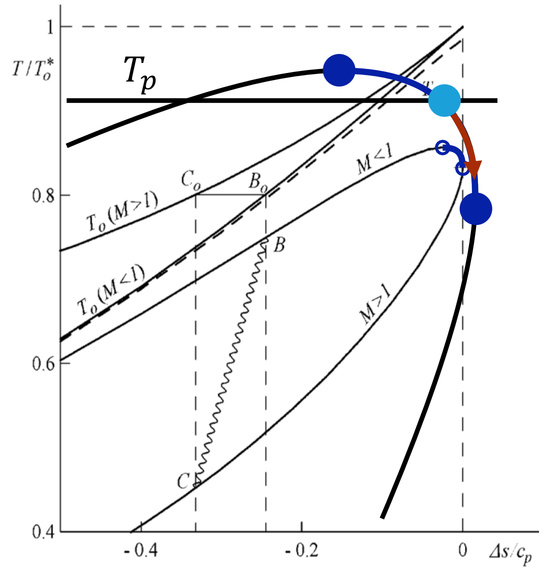
Il tratto della curva subsonica compreso tra il punto di **massima temperatura** è quello di massima **entropia** potrebbe sembrare **instabile** ($1/\sqrt{\gamma} < M < 1$).

Infatti se si suppone che il flusso di calore sia associato ad uno scambio **convettivo** e, **erroneamente**, si scegliesse come temperatura di **riferimento** nell'equazione di **Newton** quella **statica**:

$$\dot{q} = \hbar\left(T_p - T\right)$$

In queste ipotesi il tratto di curva **a tangente negativa** è effettivamente instabile.

Si supponga di fissare un punto d'**equilibrio iniziale** ($T_p = T$); una piccola **perturbazione** verso **destra** porta ad una **diminuzione** della **temperatura**, un **aumento** del **flusso** termico ($\dot{q}$>0) e un **allontanamento** dalle condizioni d'equilibrio.



La curva del moto alla Rayleigh

$$\frac{c_p}{T}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$

Se invece la perturbazione fosse verso **sinistra** la temperatura **aumenta** il **flusso** termico è **negativo** e si ha di nuovo un **allontanamento** dalle condizioni d'equilibrio.

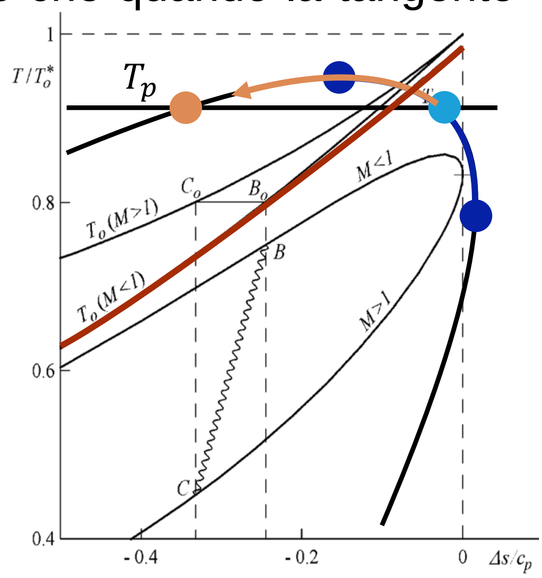
In questo caso il sistema si porterà in un nuovo punto di equilibrio stabile sulla parte della curva di Rayleigh a **tangente positiva**.

Con ragionamenti analoghi è facile dimostrare che quando la tangente è **positiva** i punti si trovano in condizione d'equilibrio **stabile**.

In realtà la temperatura di **riferimento** corretta nell'equazione di **Newton** è quella di **parete adiabatica**:

$$\dot{q} = \hbar\left(T_p - T_{ap}\right)$$

Come si vede dalla figura questa è strettamente crescente e la curva di **Rayleigh non** presenta **instabilità**.



Rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh

Le due equazioni:

$$G = \rho V = cost \qquad\qquad I = p + \rho V^2 = cost$$

unite alle **equazioni** di **stato** del **gas**:

$$p = \rho R T \qquad\qquad h = c_p T = \gamma c_v T$$

Permettono di trovare i seguenti **rapporti caratteristici** per il **moto alla Rayleigh**; essi sono funzione del solo numero di Mach e di γ.

$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{(\gamma+1)M}{1+\gamma M^2}\right)^2 \qquad\qquad \frac{p}{p^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1+\gamma M^2}{M^2(\gamma+1)} \qquad\qquad \frac{p_o}{p_o^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}\left[\frac{2}{\gamma+1}\psi\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \ln\left[M^2\left(\frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right] \qquad\qquad \frac{T_o}{T_0^*} = \frac{2(\gamma+1)M^2}{(1+\gamma M^2)^2}\psi$$

Rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh

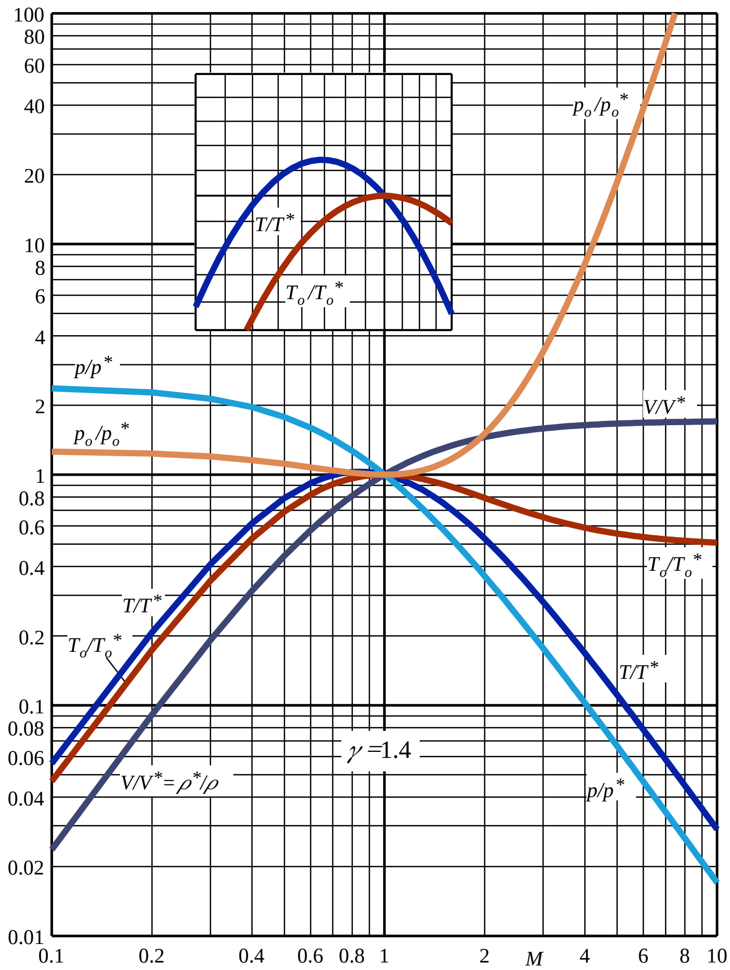
$$\frac{T}{T^*} = \left(\frac{(\gamma+1)M}{1+\gamma M^2}\right)^2$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1+\gamma M^2}{M^2(\gamma+1)}$$

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2}\left[\frac{2}{\gamma+1}\psi\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{T_o}{T_0^*} = \frac{2(\gamma+1)M^2}{(1+\gamma M^2)^2}\psi$$



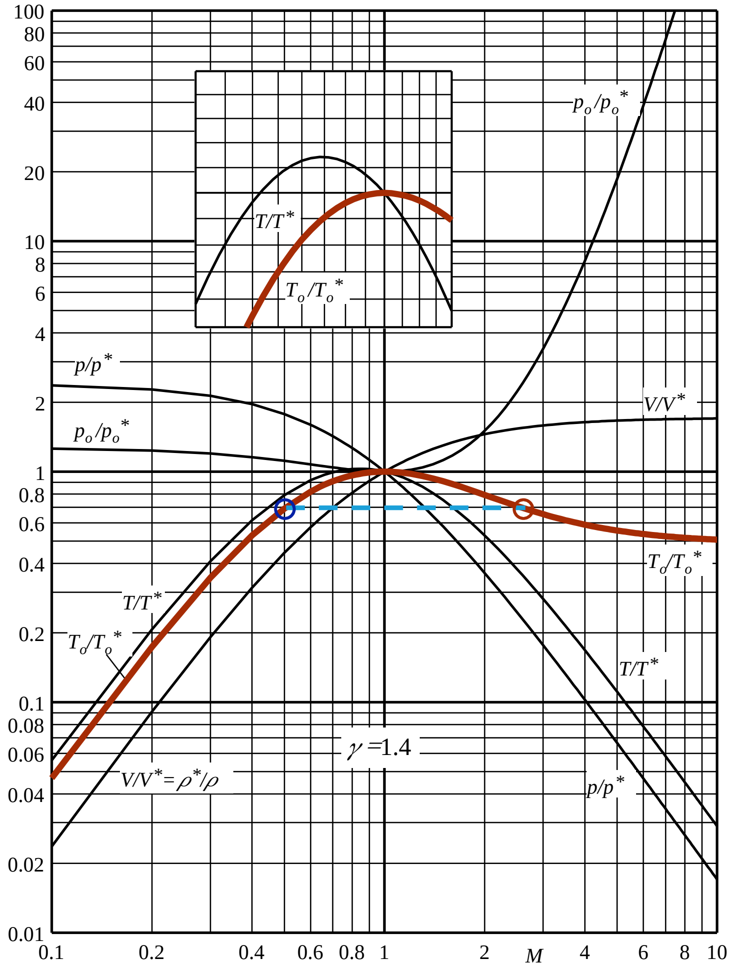
Rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh

T_0/T_0^* tende a **zero** al tendere del numero Mach a **zero**, mentre, per $M\to\infty$, raggiunge il valore limite:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{T_o}{T_0^*}=\frac{(\gamma^2-1)}{\gamma^2}=(0.4898)$$

La **quantità** di **calore** che si può cedere al fluido è teoricamente **illimitata** per moto **subsonico** mentre è **limitata** per moto **supersonico**.

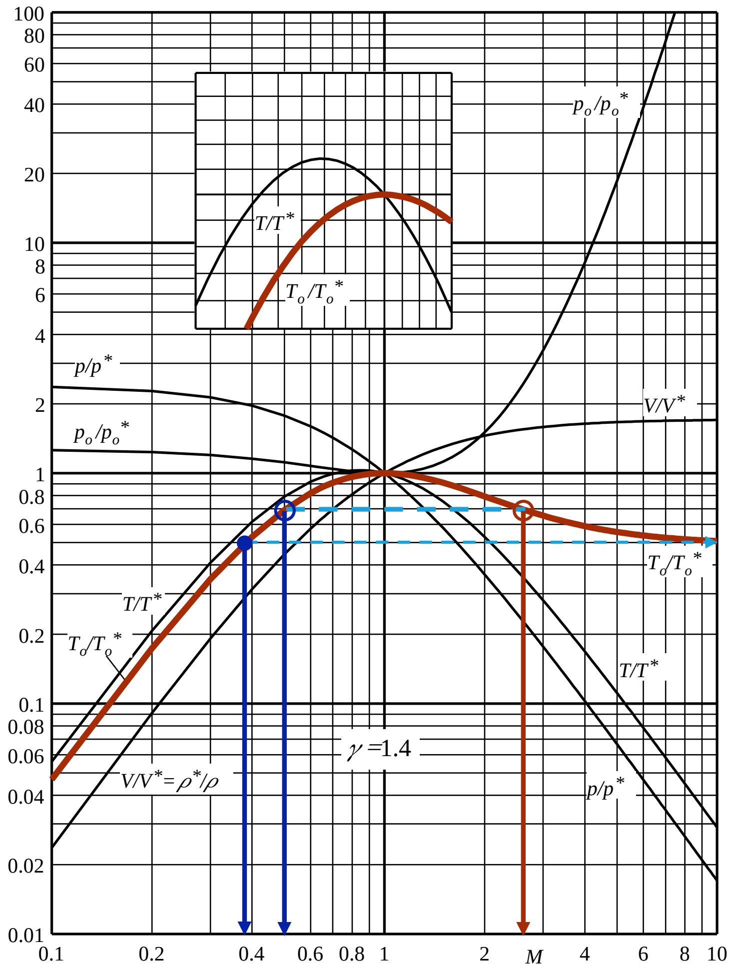
Per ogni T_0/T_0^* minore del valore limite esistono **due** valori del numero di **Mach**, uno in regime **subsonico** e l'altro in quello **supersonico**



Rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh

I due punti del diagramma in **orizzontale** rappresentano i punti a **monte** ed a **valle** di un 'onda d'urto ed i relativi M rappresentano il **numero** di **Mach** a monte ed a valle dell'onda.

Dal diagramma si può notare anche che, per $M\to\infty$, il numero di Mach a **valle** dell'onda d'urto tende al **valore** limite M_{2l}.



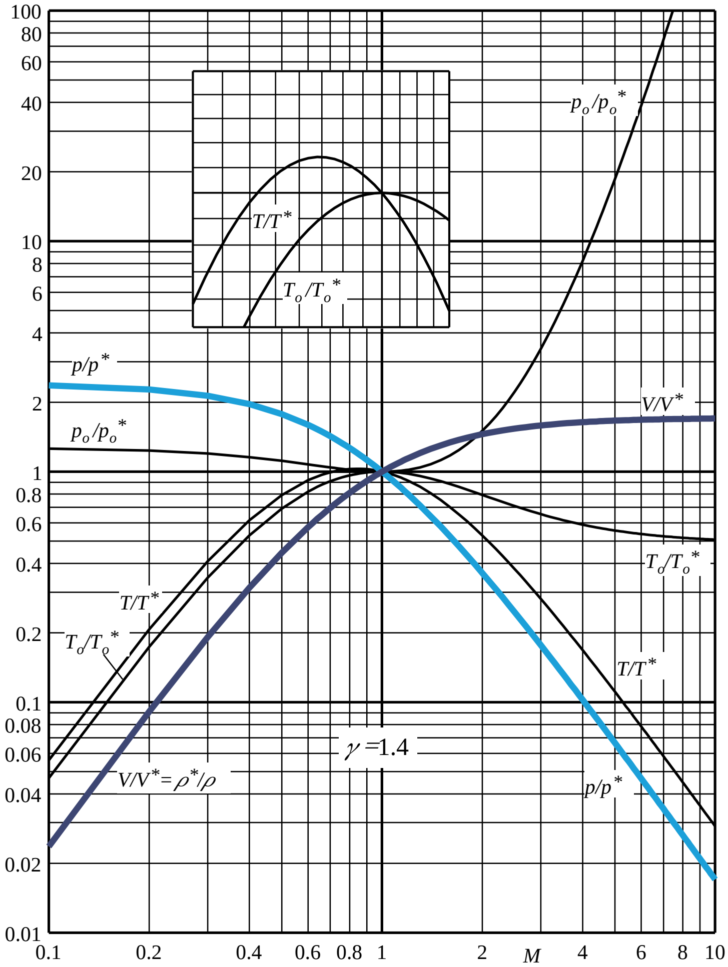
Rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh

All'aumentare di **Mach**, i rapporti $\frac{\rho}{\rho^*}$ (in figura è mostrato $\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*}$) e $\frac{p}{p^*}$ sono **decrescenti**.

Per $M \to 0$:

- $\frac{\rho}{\rho^*}$ è illimitato;
- $\lim_{M\to 0} \frac{p}{p^*} = \gamma + 1 = (2.400)$;

Infatti in queste condizioni la curva di **Rayleigh** tende ad un **isobara**.



Rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh

All'aumentare di **Mach**, i rapporti $\frac{\rho}{\rho^*}$ (in figura è mostrato $\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{V}{V^*}$) e $\frac{p}{p^*}$ sono **decrescenti**.

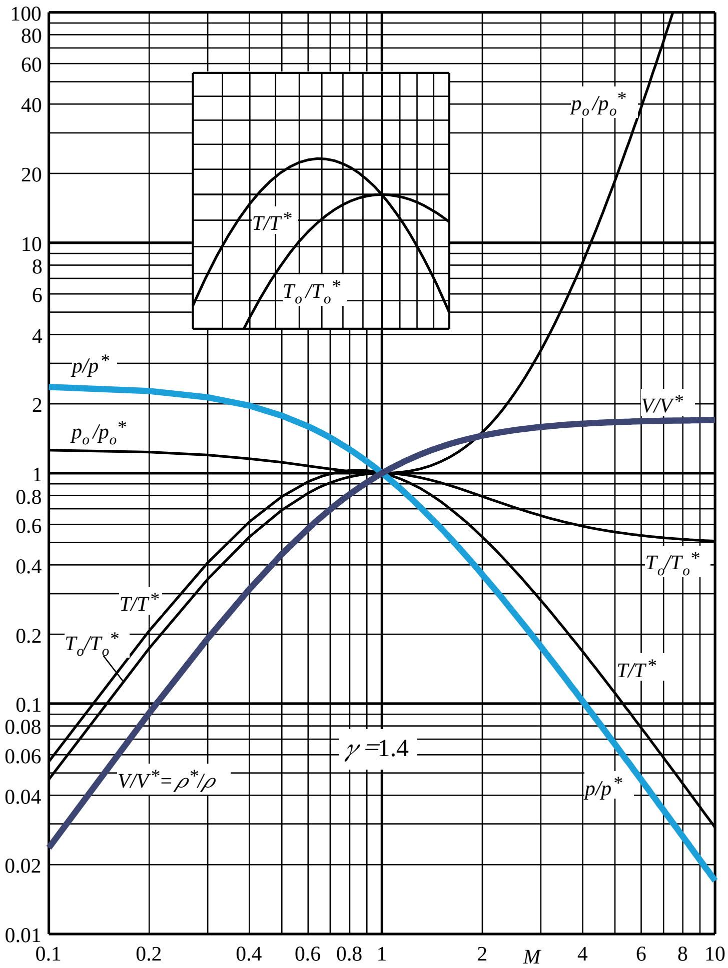
Per $M \to \infty$:

- $\frac{p}{p^*}$ tende a zero;
- $\lim_{M\to\infty} \frac{\rho}{\rho^*}\left(= \frac{V^*}{V}\right) = \frac{\gamma}{\gamma+1} = (0.5833)$;

Infatti in queste condizioni, come nel moto alla **Fanno**, la curva di **Rayleigh** tende ad un **isocora.**

In figura è mostrato:

- $\lim_{M\to\infty} \frac{V}{V^*} = \frac{\gamma+1}{\gamma} = (1.7143)$



Rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh

Il rapporto $\frac{T}{T^*}$ tende a **zero** sia per $M \rightarrow 0$ che per $M \rightarrow \infty$.

Raggiunge un **massimo** per $M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = (0.8452)$:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma} = (1.0286)$$

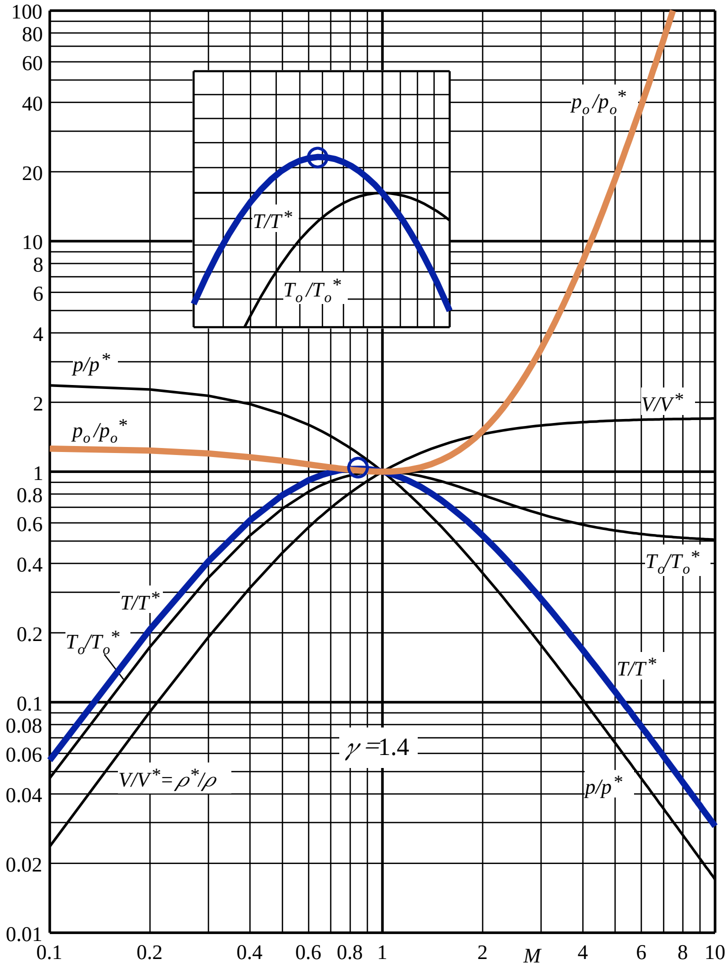
Il rapporto tra le **pressioni di ristagno** presenta un **minimo** assoluto per $M = 1$.

Per $M \rightarrow 0$:

- $\lim_{M \rightarrow 0} \frac{p_o}{p_o^*} = \gamma + 1 \left[\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = (1.268)$

Per $M \rightarrow \infty$:

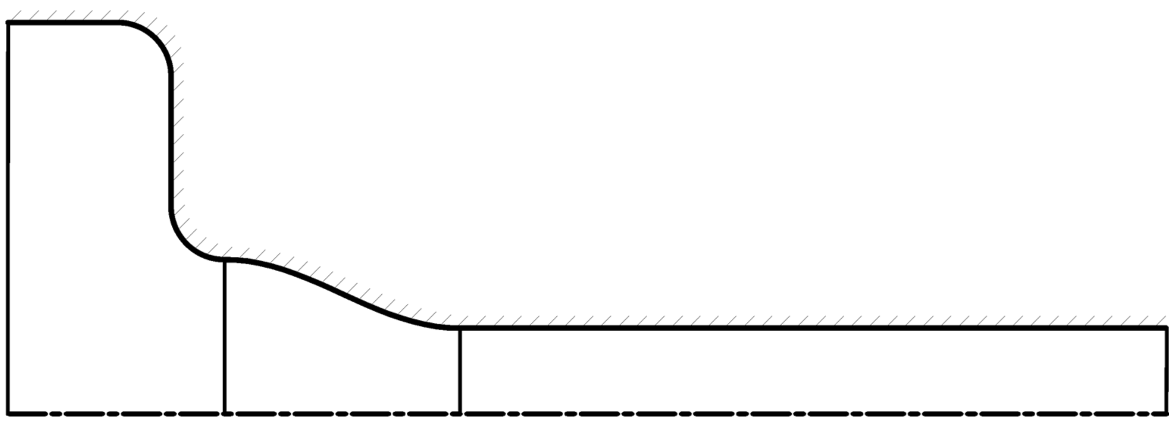
- $\frac{p_o}{p_o^*}$ è illimitato;



Ugello convergente e condotto con scambio termico

Il comportamento di un condotto, collegato ad un ugello convergente, nel quale si ha moto alla **Rayleigh** e con un flusso di energia nel modo calore **positivo** (in altre parole, energia ceduta al fluido), è molto **simile** a quello già descritto nel caso di moto alla **Fanno**.

Dato che l'**ugello** è **collegato** a monte ad un **serbatoio**, il moto al suo interno è **subsonico** e si può considerare adiabatico e isoentropico.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

Se si suppone che il flusso **termico** sia **costante** sulla superficie del condotto integrando la:

$$dH = c_p \, dT_o = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{dx}{D} = dq = T\,ds$$

fra la sezione d'ingresso 1 e quella d'uscita 2 si ha:

$$\Delta H = c_p(T_{02} - T_{01}) = 4\frac{\dot{q}}{G}\frac{L_{12}}{D} = q$$

Normalmente si suppone che la quantità di **calore scambiato** q sia nota e dividendo per $c_p T_{01}$, si ottiene:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 = 4\frac{\dot{q}}{c_p T_{01} G}\frac{L_{12}}{D} = \frac{q}{c_p T_{01}}$$

Le curve di funzionamento sono rappresentante usando questa ascissa che, se come detto $\dot{q} = cost,$ è anche una **lunghezza adimensionale** del **condotto**. Quindi si può confondere la lunghezza del condotto con la quantità di calore scambiato.

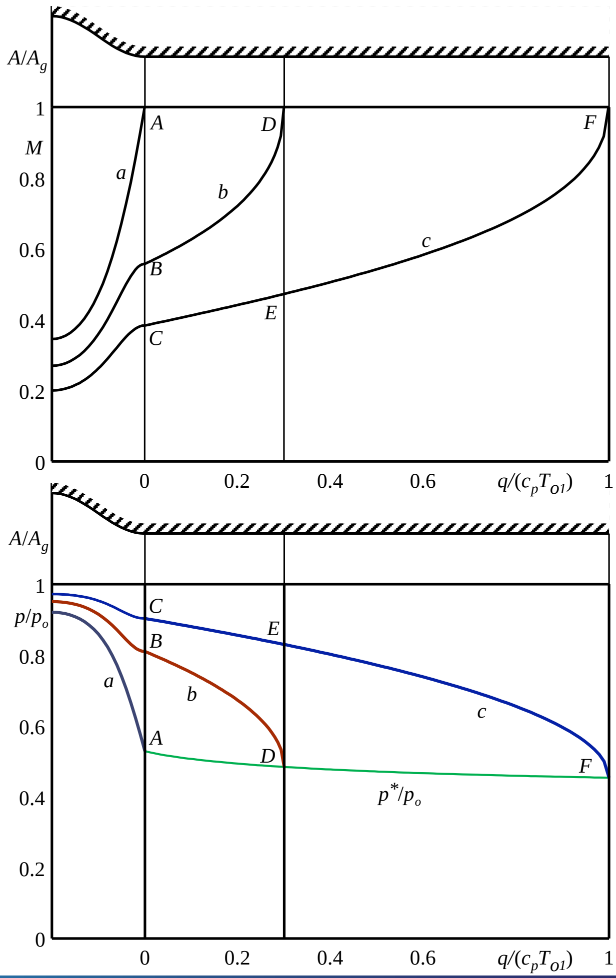
Per $q > 0$ se nella sezione 2 si raggiungono le condizioni **critiche** ($M = 1$), si ha:

$$\frac{T_0^*}{T_{01}} - 1 = \frac{q^*}{c_p T_{01}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{T_0^*}{T_{01}} = 1 + \frac{q^*}{c_p T_{01}}$$

dove la quantità q^* rappresenta l'**energia ceduta** al fluido nel modo **calore** che lo porta alle condizioni **critiche** mentre il rapporto tra le temperature di ristagno può essere letto dalle tabelle.

La **determinazione** delle **curve caratteristiche** del sistema è analoga a quella del moto alla **Fanno**.

Anche l'**interpretazione** è molto simile e si procederà ad evidenziare le differenze.



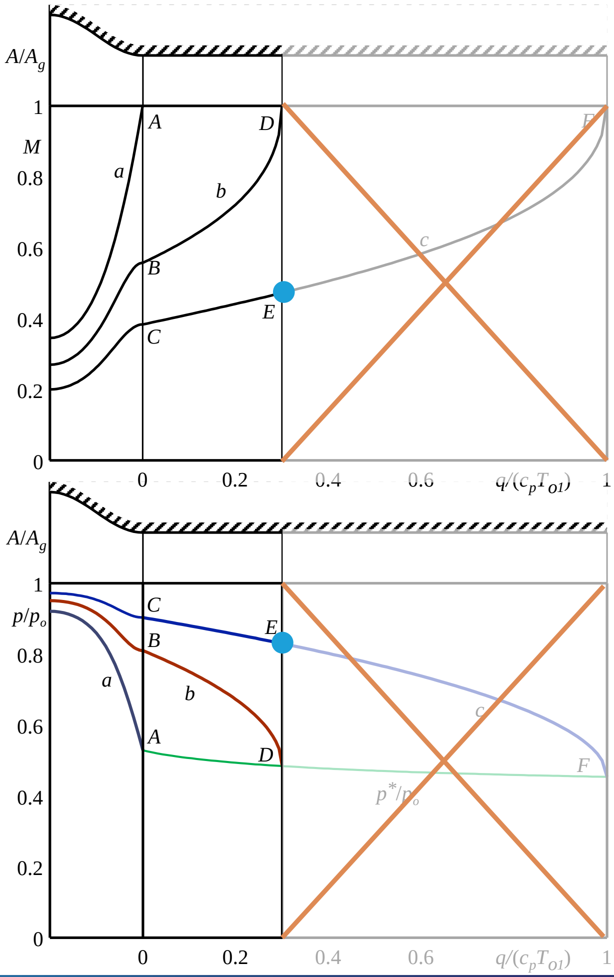
Ugello convergente e condotto con scambio termico

Inizialmente si analizzerà il caso di un flusso **positivo**, quindi un'**adduzione** di **calore**.

Come già detto un punto **generico** nel diagramma di pressione oltre a fissare p_a stabilisce anche la quantità di calore addotto che è proporzionale alla **lunghezza** del condotto.

Ad esempio fissando il **punto $\boldsymbol{E}$** si blocca $\pi_a = \pi_E$ e $T_o = T_{oE}$.

I punti a **destra** di $\boldsymbol{E}$ **non** sono punti di funzionamento **reali**.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

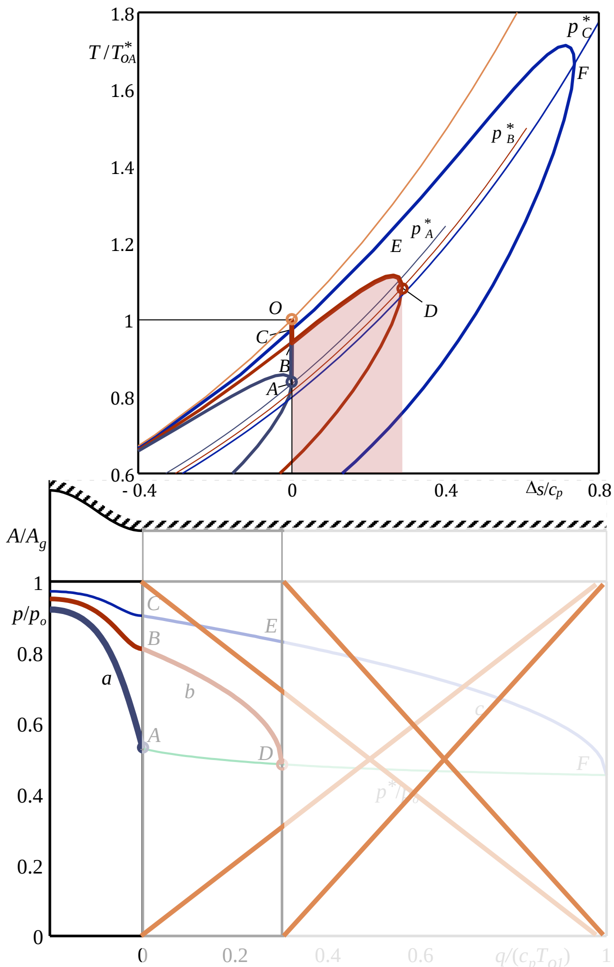
Anche in questo caso è interessante analizzare il **funzionamento** nel piano piano ***T-s***.

Supponendo che $\pi_a \leq \pi^*$ nella sezione di uscita del condotto si raggiungono le condizioni **soniche** e esso è **strozzato**.

Per $q/c_pT_{o1} = 0$, il sistema **coincide** con il semplice serbatoio ugello **convergente**.

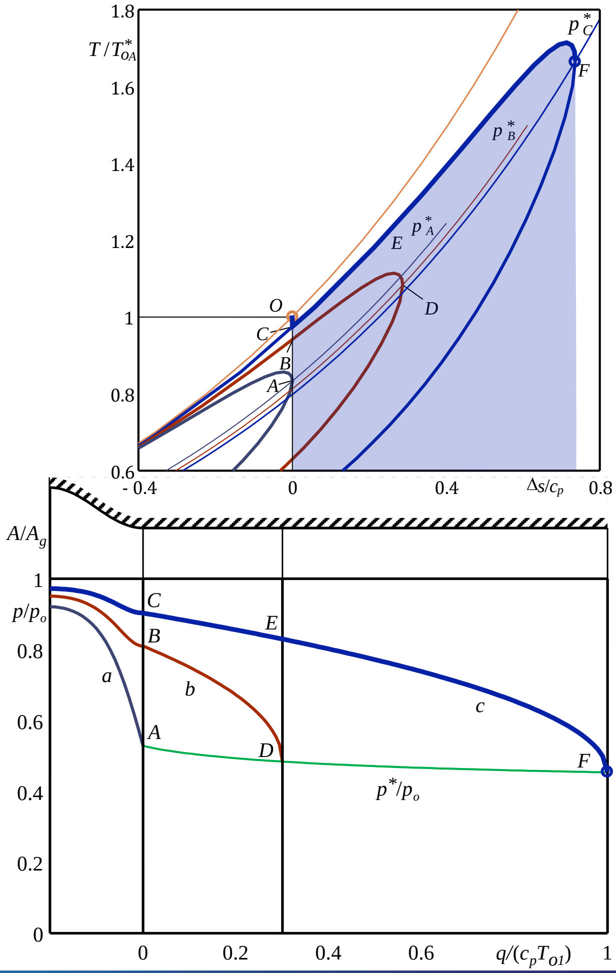
Le **condizioni** di **ristagno** sono indicate con il punto $\boldsymbol{O}$.

Per $q/c_pT_{o1} > 0$ (proporzionale all'area sottesa alla curva), il numero di Mach all'uscita dell'ugello è **minore** di uno e si segue una curve del tipo ***b***. la **portata** è **inferiore** a quella del caso precedente.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

All'aumentare del **calore addotto** il numero di **Mach** all'uscita dell'ugello **diminuisce** e con esso il **flusso di massa**.



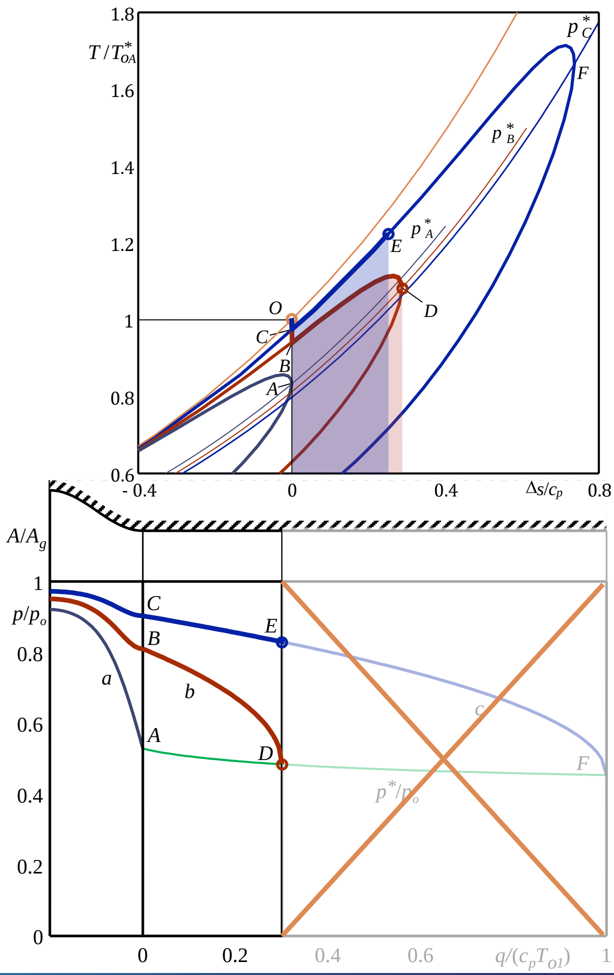
Ugello convergente e condotto con scambio termico

Se $q/c_pT_{o1} = 0.3$:

Per $\pi_a \leq \pi^*$, come già detto, il moto è **strozzato** ($q = q^*$) e si ha un **ventaglio** di **espansione** all'uscita del condotto.

Per $\pi_a = \pi_E > \pi^*$ il moto è tutto **subsonico** ($q < q^*$) ed è rispettata la condizione di **Kutta**.

Il punto ***E*** si trova ad un **entropia** minore di quella del punto ***D***, infatti, la **curva** di **Rayleigh**, essendo relativa ad un flusso di massa inferiore, è più **esterna**.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

La curva verde mostra che la **pressione critica** π^*è debolmente **decrescente** con la quantità di **calore** scambiata, infatti nel limite di flusso di calore infinito il numero di Mach all'ingresso del condotto M tende a zero e si ha:

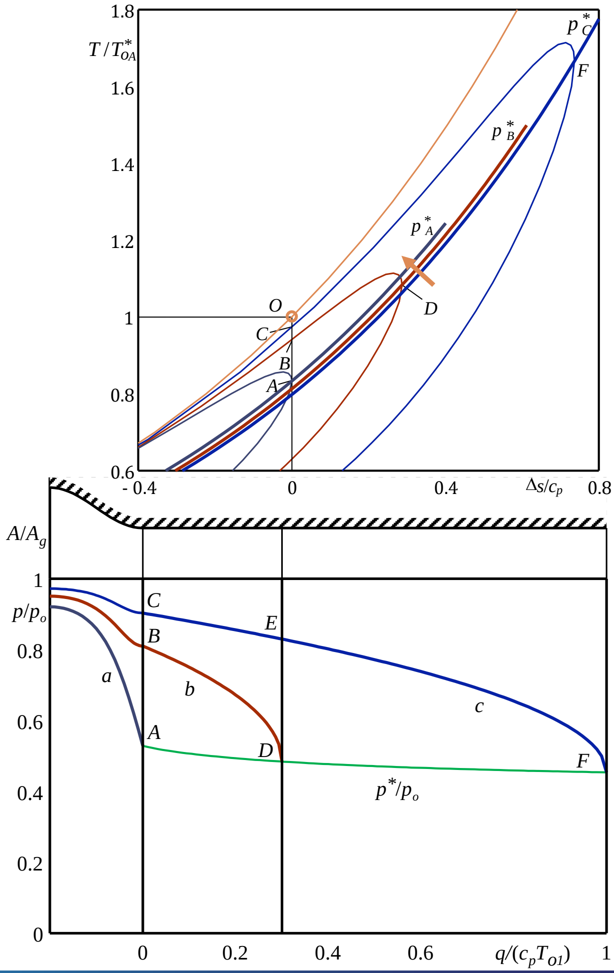
$$\frac{p^*}{p_o}=\frac{p^*}{p}\frac{p}{p_o}=\frac{1+\gamma M^2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\lim_{M\to 0}\frac{p^*}{p_o}=\frac{1}{\gamma+1}=(0.41\bar{6})$$

Allo stesso risultato si arriva anche con:

$$\lim_{M\to 0}\frac{p^*}{p_o}=\lim_{M\to 0}\frac{p^*}{p_o^*}\frac{p_o^*}{p_o}=\left(\frac{0.5283}{1.268}\right)$$

Ciò si nota anche nel piano ***T-s***.



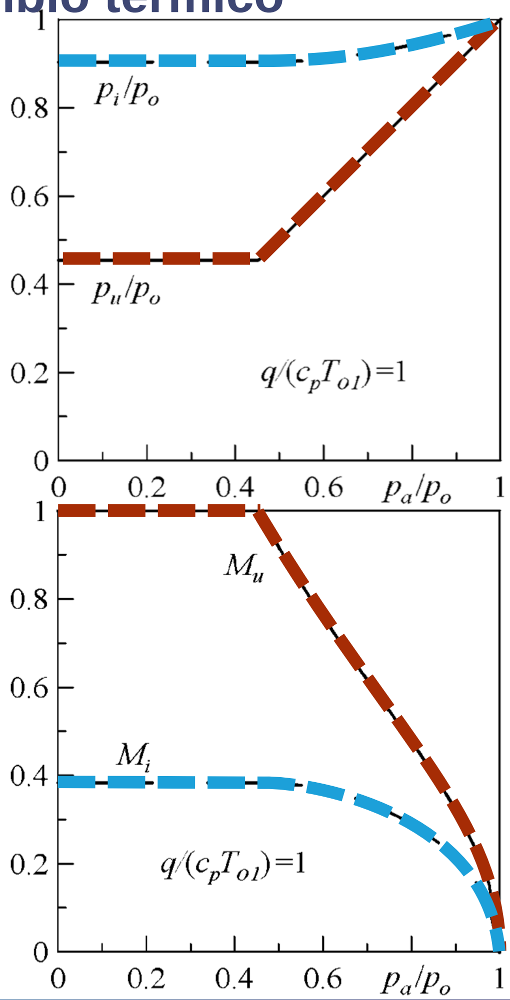
Ugello convergente e condotto con scambio termico

I diagrammi mostrano l'andamento della pressione e del numero di Mach nella **sezione** d'ingresso p_i, M_i e d'**uscita** p_u, M_u del condotto in funzione di π_a per $q/c_pT_{o1}=1$ ($\pi^*\cong 0.45, M_i\cong 0.38$).

All'**uscita** del condotto si ha:

- per $\pi_a>\pi^*$ è rispettata la **condizione di Kutta** ($p_a=p_u$) e p_u è una funzione lineare di p_a; M_u cresce invece in modo **non lineare** al diminuire di π_a.
- per $\pi_a\le\pi^*$ il moto è **strozzato** e non è rispettata la **condizione di Kutta** e $\boldsymbol{\pi_u=\pi^*}$, $\boldsymbol{M_u=1}$;

All'**ingresso** del condotto (ovvero all'uscita dell'ugello) p_i, M_i sono costanti per $\pi_a\le\pi^*$. La variazione per $\pi_a>\pi^*$ è non lineare e meno rapida.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

La **portata** è funzione di π_a e q/c_pT_o e può essere diagrammata in forma **adimensionale** come il **fattore** d'**efflusso** (però con la pressione e temperatura di ristagno nel serbatoio):

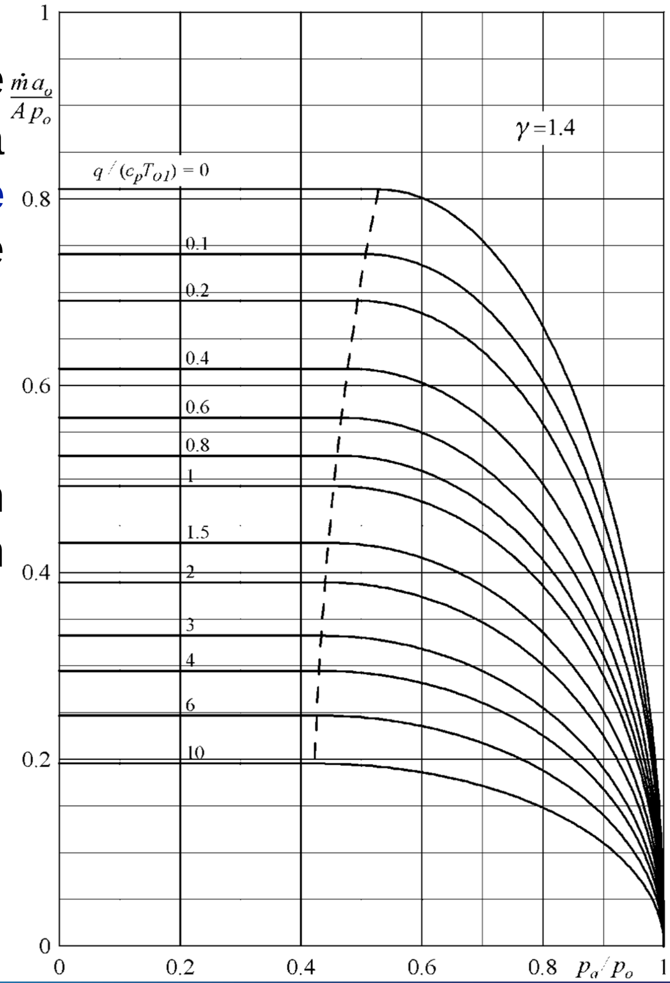
$$\frac{\dot{m}a_o}{p_oA}$$

La **portata** può essere **calcolata** in qualsiasi sezione del sistema ed, in particolare, nella sezione d'**uscita**:

$$\dot{m} = \frac{p_{ou}A\Psi_u}{a_{ou}} \rightarrow \frac{\dot{m}a_o}{p_oA} = \frac{p_{ou}}{p_o}\frac{a_0}{a_{0u}}\Psi_u$$

$$\frac{\dot{m}a_o}{p_oA} = \pi_{ou}\frac{a_0}{a_{0u}}\Psi_u$$

Quindi **dipende** anche da $\frac{a_0}{a_{0u}}$.



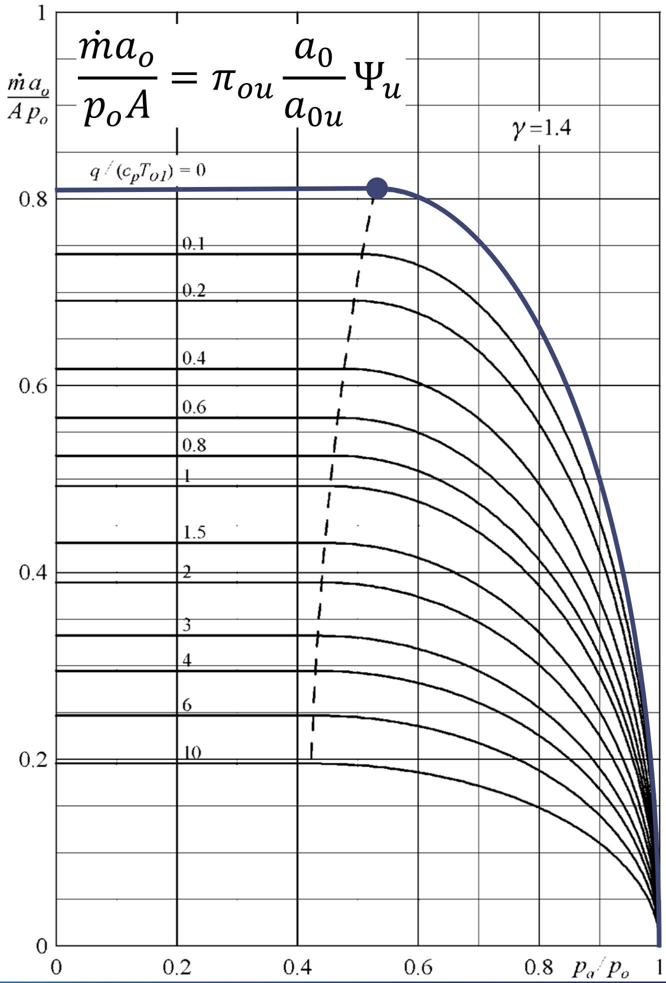
Ugello convergente e condotto con scambio termico

Per q/c_pT_o =0 si ha $p_{ou} = p_o$ e $a_0 = a_{0u}$ quindi la curva coincide con quella del solo **ugello convergente**.

Al **diminuire** di π_a la portata **aumenta** per l'aumento del **fattore** d'**efflusso**.

Quando $\pi_a = \pi^*$ il moto **strozza** è la portata rimane bloccata al valore massimo Ψ^* relativo alle condizioni **critiche**:

$$\frac{\dot{m}a_o}{p_oA} = \pi_{ou}\frac{a_0}{a_{0u}}\Psi_u = \Psi^* = (0.8102)$$



Ugello convergente e condotto con scambio termico

$$\frac{\dot{m}a_o}{p_o A} = \pi_{ou}\frac{a_0}{a_{0u}}\Psi^*$$

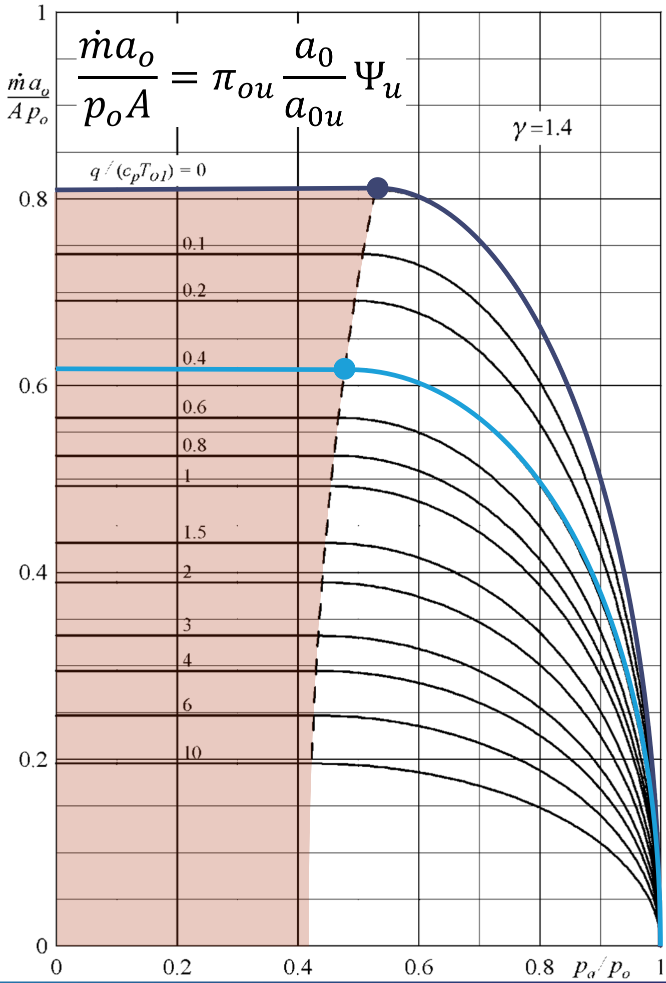
Per $\pi_a < \pi^*$ la **portata diminuisce** all'aumentare di q sia per una diminuzione di $\pi_{ou} = \pi_o^*$ che di $a_0/a_{0u} = a_0/a_0^*$:

- π_o^* **diminuisce** debolmente e nel limite $q \to \infty$ il numero di Mach all'ingresso tende a zero e si ha:

$$\lim_{M\to 0}\frac{p_o^*}{p_o} = \left(\frac{1}{1.268}\right)$$

- a_0/a_{0u} **diminuisce** come la radice quadrata di q e nel limite $q \to \infty$ tende a zero.

La **portata** quindi tende a **zero** per $q \to \infty$.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

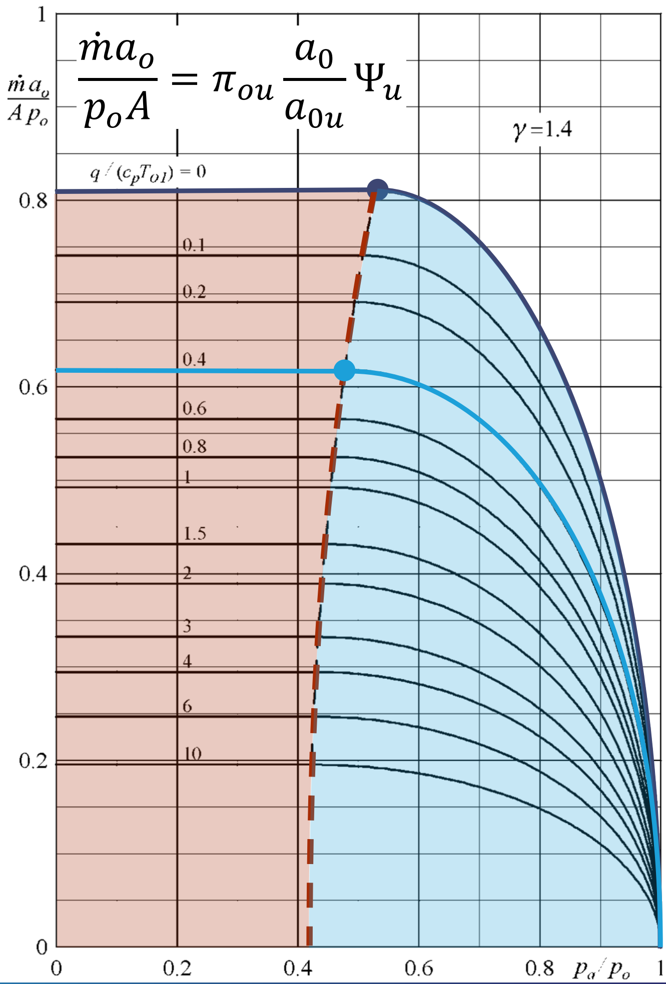
La curva di π^* al **contrario** del moto alla **Fanno** non è una retta.

Come già detto:

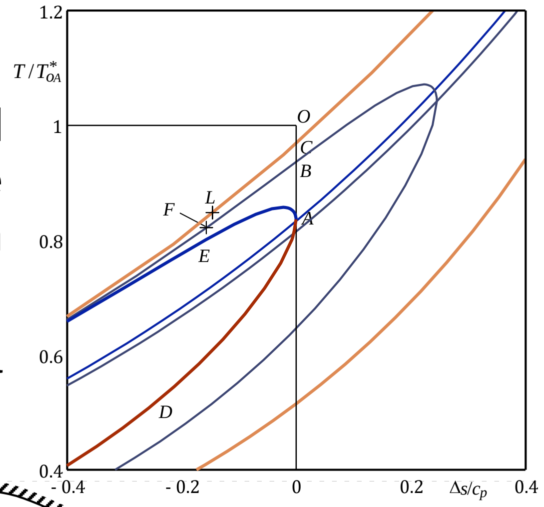
$$\lim_{M\to 0}\pi^* = (0.41\bar{6})$$

e la curva **converge** a questo valore per portata nulla.

Per $\pi_a > \pi^*$ la **variazione** è governata dalla variazione del fattore d'**efflusso**.

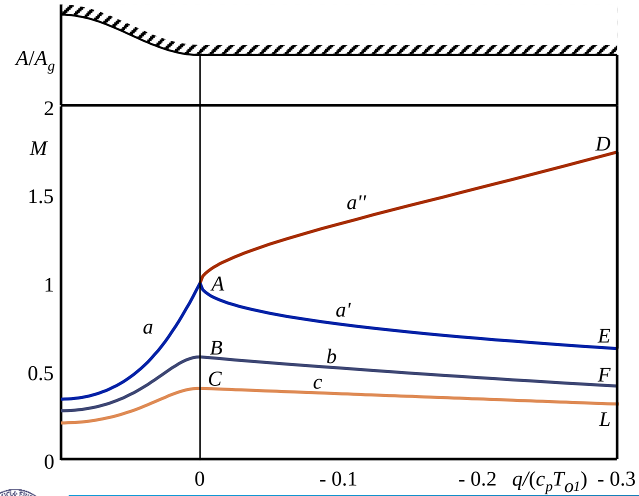


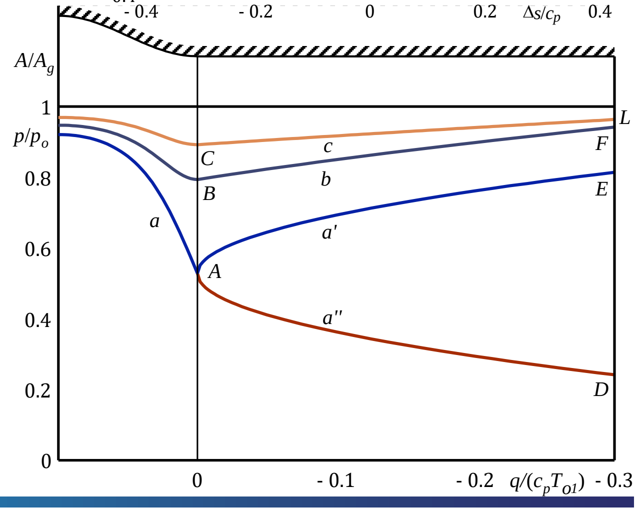
Ugello convergente e condotto con scambio termico



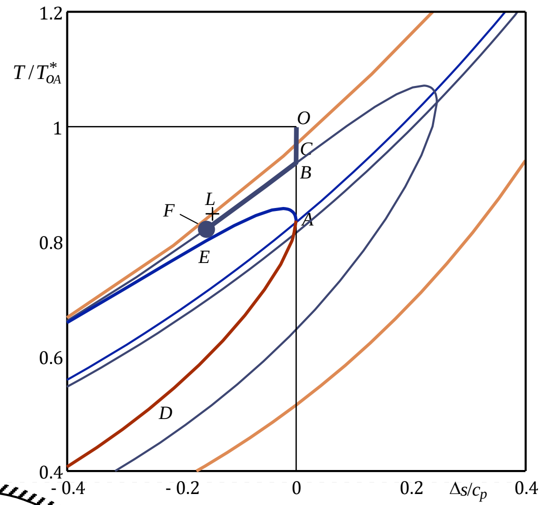
Per una **sottrazione** di **calore**, ovvero se il flusso termico è **negativo** ($q < 0$) il funzionamento è totalmente diverso e le curve caratteristiche **ricordano** quelle di un ugello **convergente divergente**.

In questo caso il flusso evolve lungo la curva di Rayleigh verso **entropie decrescenti**.



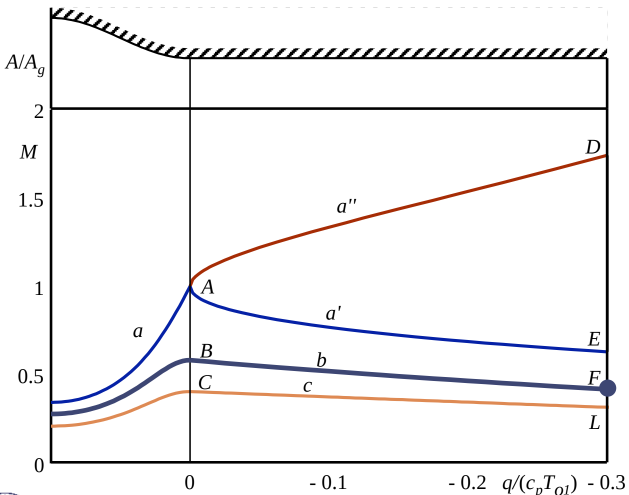


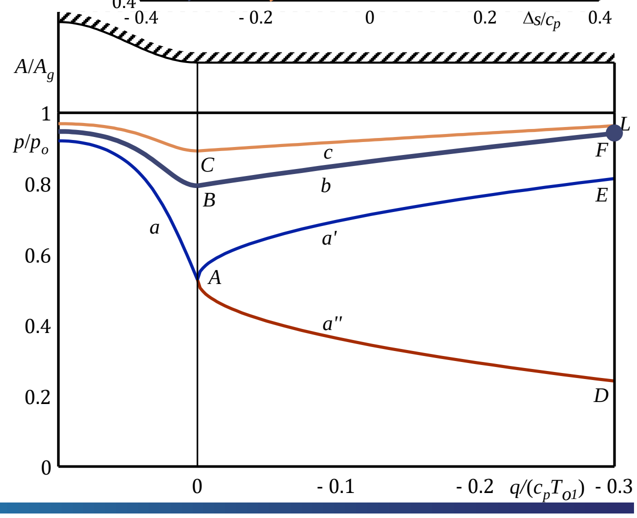
Ugello convergente e condotto con scambio termico



Se le condizioni all'uscita dell'ugello sono **subsoniche** (e.g. **curva b**), il fluido dopo l'espansione nell'ugello evolve verso entropie decrescenti **decelerando** e aumentando la sua **pressione**.

All'uscita del condotto il flusso è subsonico e quindi è rispettata la condizione di **Kutta**.





Ugello convergente e condotto con scambio termico

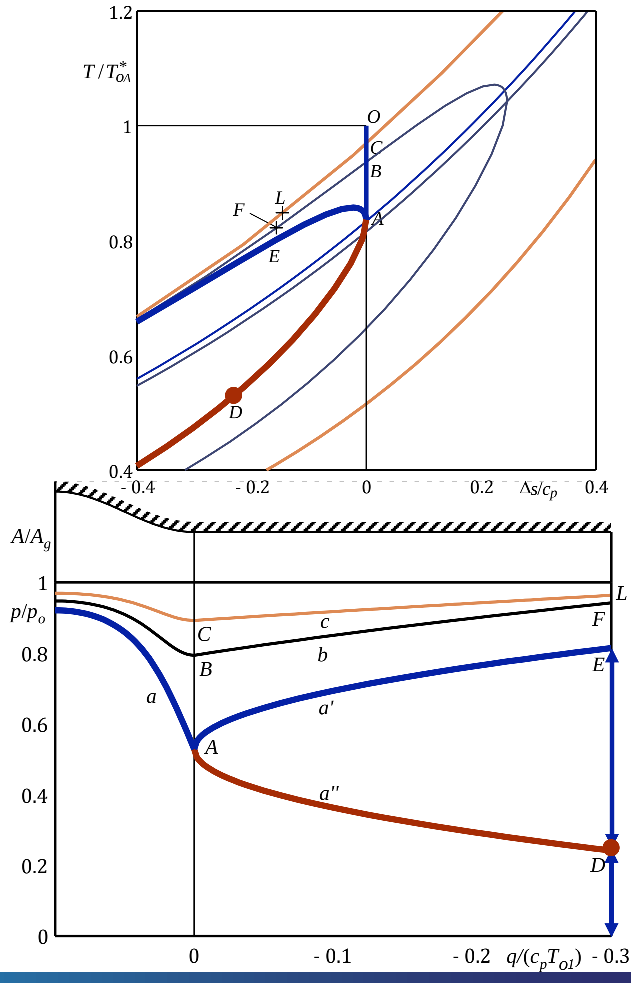
Se le condizioni all'uscita dell'ugello sono **soniche** il fluido può evolvere seguendo il ramo:

- **subsonico** della curva di Rayleigh
- **supersonico** della curva di Rayleigh.

Se $\pi_a < \pi_D$ il fluido segue sicuramente la curva **supersonica** ed è presente un **ventaglio** di **espansione** all'uscita del condotto.

Se $\pi_a = \pi_D$ il fluido segue la curva **supersonica** ed è rispettata la condizione di **Kutta**.

Se $\pi_D < \pi_a < \pi_E$ il fluido segue la curva **supersonica** ed è presente un'onda d'urto obliqua all'uscita del condotto.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

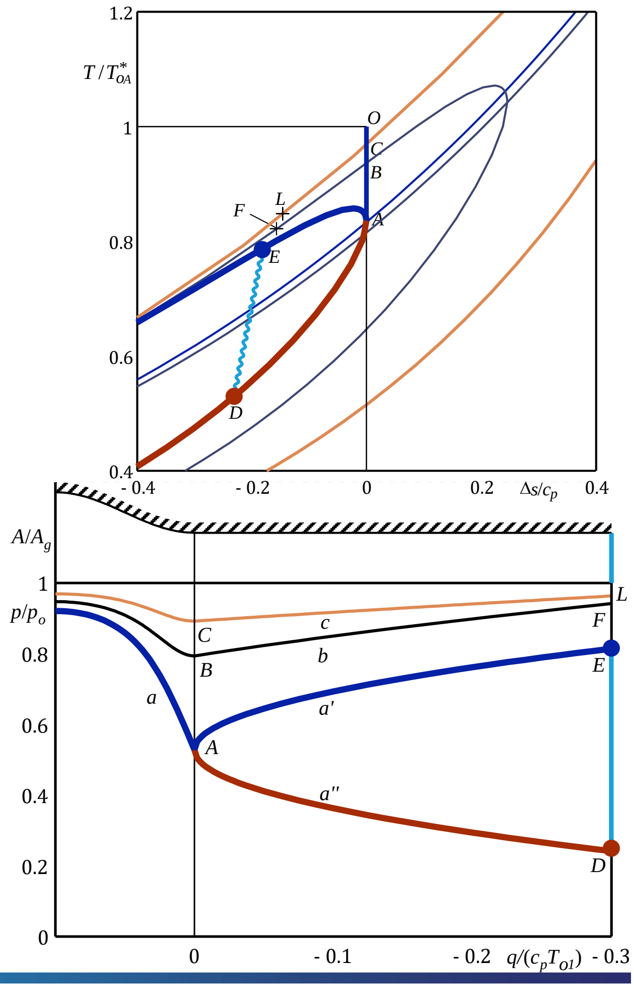
Se $\pi_a = \pi_E$ il fluido può seguire la curva **subsonica** ed è rispettata la condizione di **Kutta**.

Si osserva che i punti ***D*** e ***E***:

- trovandosi sulla **stessa** curva di **Rayleigh** hanno uguali valori di ***G*** e ***I***;
- hanno **uguale entalpia totale *H*** perché si trovano alla stessa **ascissa**, cioè a partire dalle condizioni di ristagno è stata **sottratta** la stessa **quantità di calore**.

Quindi i punti ***D*** e ***E*** sono punti a monte ed a valle di un'**onda** d'**urto normale** che si trova all'**uscita** del condotto.

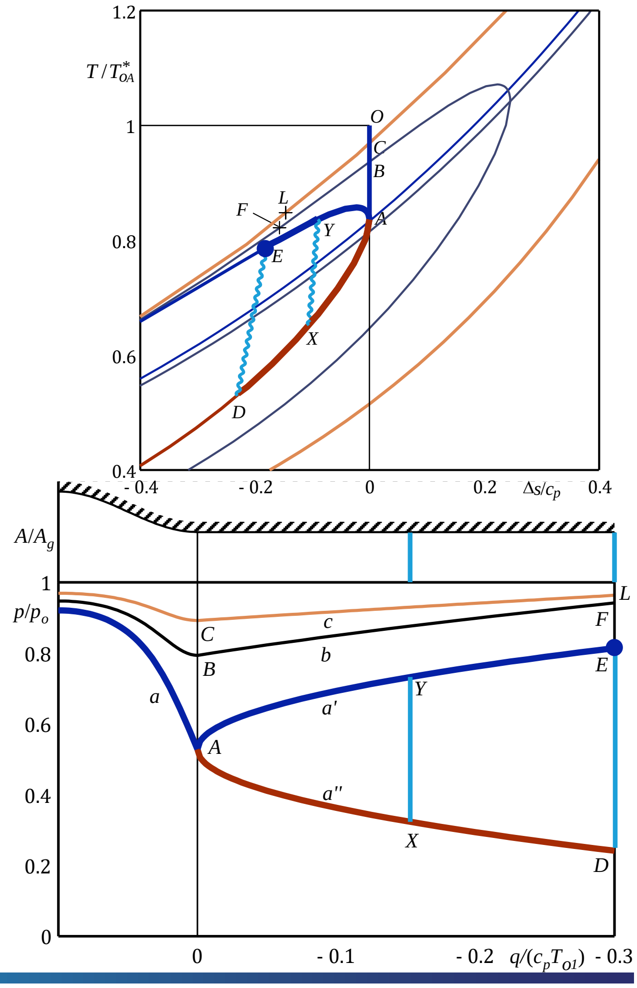
Per $\pi_a = \pi_E$ sono possibili **entrambi** i funzionamenti seguendo sia la curva **subsonica** che quella **supersonica**.



Ugello convergente e condotto con scambio termico

In realtà, se $\pi_a = \pi_E$ il funzionamento è ancora più **indeterminato** potendosi avere i funzionamenti lungo:

- la curva **subsonica**;
- la curva **supersonica** con onda d'urto all'uscita del condotto;
- curve del tipo AXYE con un'**onda** d'**urto** in una **qualunque sezione** del condotto.



Infatti con lo stesso ragionamento fatto per i i punti ***D*** e ***E*** anche i punti X e Y rappresentano i punti a monte ed a valle di un'onda d'urto normale.

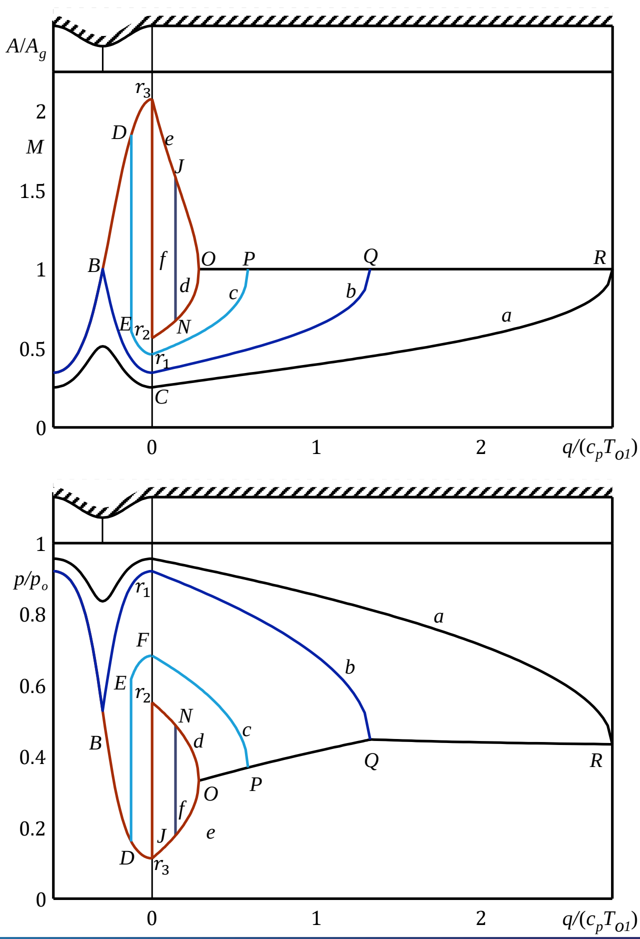
L'onda d'urto nel **condotto** è pertanto **metastabile**.

Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

Un condotto alla **Rayleigh** collegato ad un ugello convergente divergente, sottoposto a un flusso di energia nel modo calore **positivo**, si comporta in modo **simile** a quello descritto per il moto alla **Fanno** e in figura si riportano le curve caratteristiche.

La sostanziale **differenza** con il moto alla Fanno è che, anche per moto strozzato nella gola, all'**uscita** dell'ugello l'**impulso specifico** I varia. Si percorrono quindi curve di **Rayleigh diverse**.

L'unica eccezione sono i punti r_2 e r_3 che hanno lo stesso impulso e si trovano sulla stessa curva di **Rayleigh**.

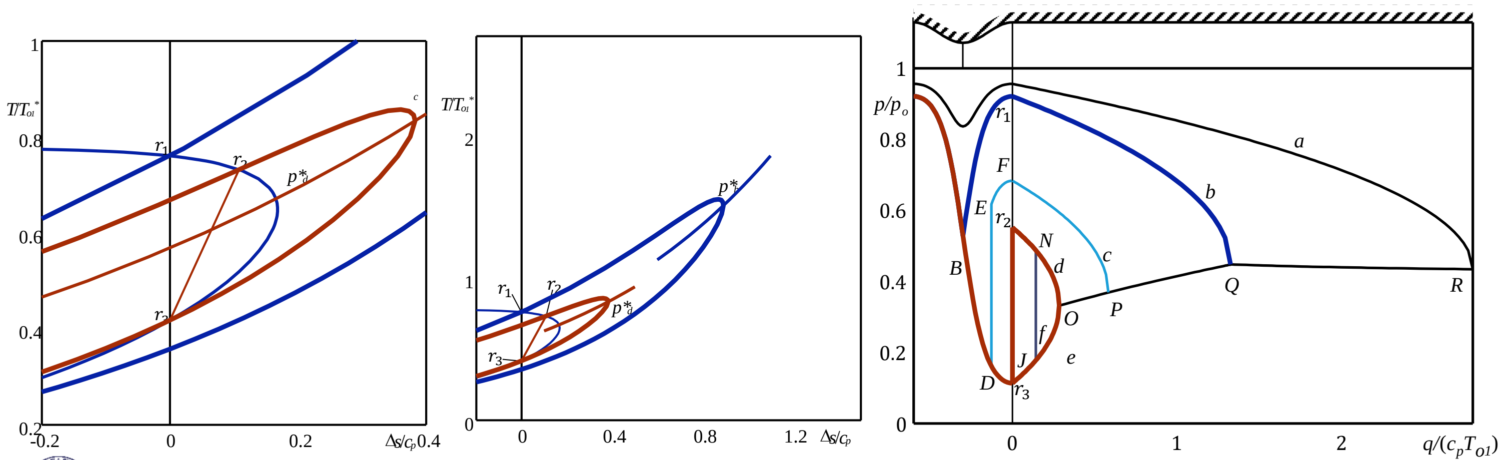


Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

La posizione dei **punti caratteristici** all'uscita di un ugello convergente su un piano T-s è più semplice utilizzando una curva di **Fanno**.

Per ora nelle figure (a sinistra un ingrandimento) sono rappresentate solo due curve di **Rayleigh**:

- quella **esterna** relativa al punto r_1;
- quella **interna** relativa ai punti r_2 **e** r_3.

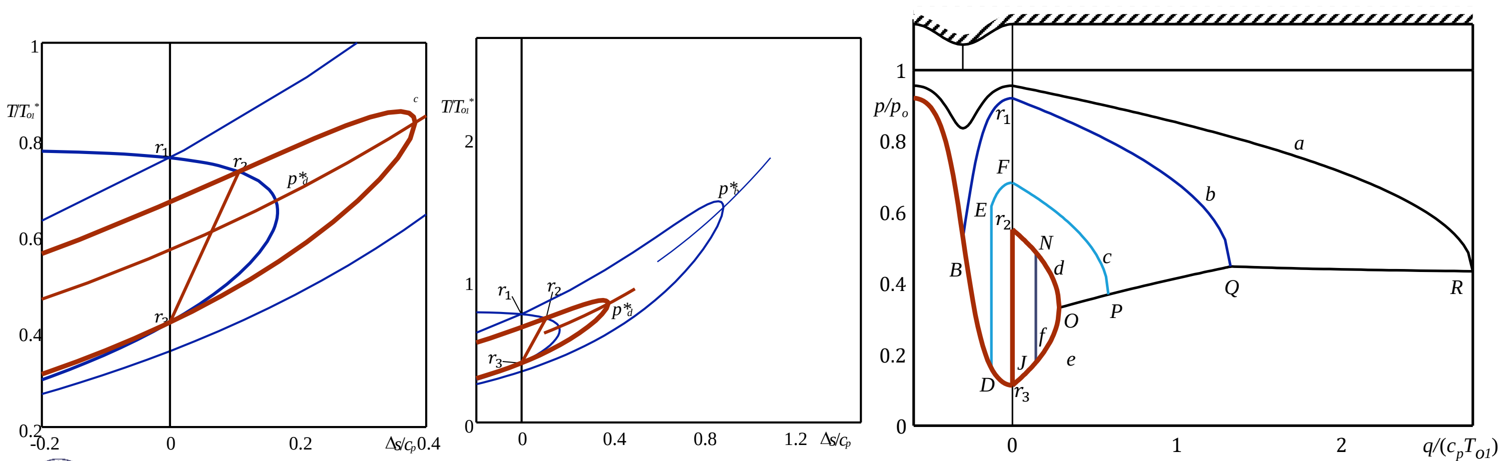


Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

Come per il caso del raffreddamento I punti sul ramo **subsonico** della curva di **Rayleigh** possono essere raggiunti direttamente o attraverso un'**onda** d'**urto**.

Nel diagramma di **pressione**, avendo la stessa entalpia totale, si trovano alla **stessa ascissa**.

Come già detto l'onda d'urto può essere **posizionata** in qualsiasi **posizione** ed è **metastabile**.

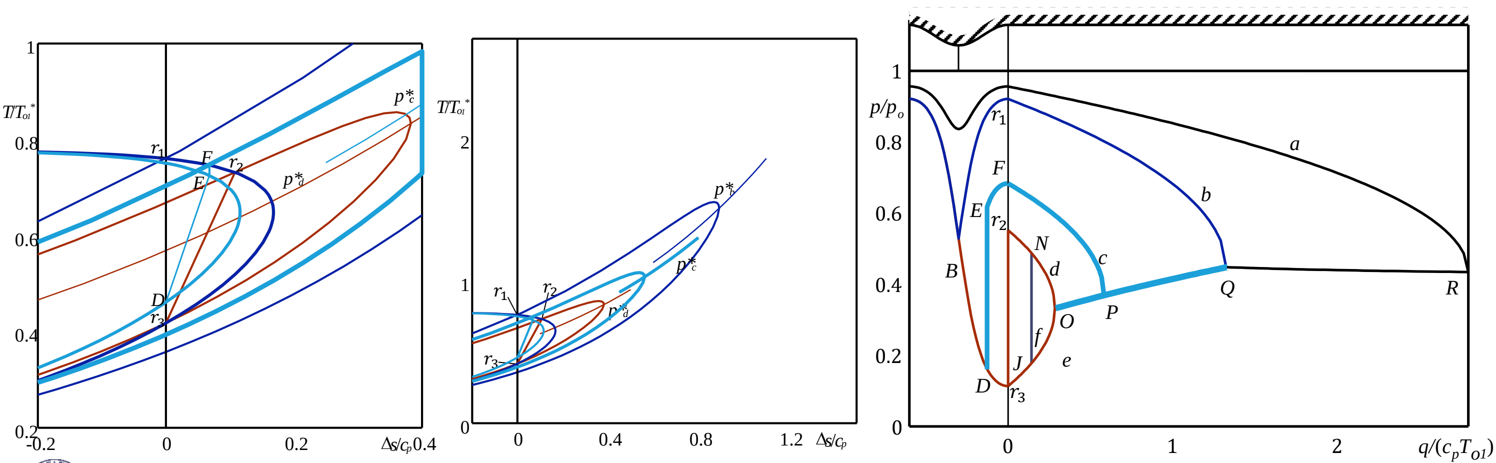


Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

Ai punti compresi fra $\boldsymbol{r_1}$ **e** $\boldsymbol{r_2}$ corrispondono **infinite** curve di **Rayleigh**, una di queste è mostrata in figura.

Come si può notare dalla figura la **pressione critica cresce** spostandosi da r_2/r_3 a r_1.

Le curve appena descritte sono relative ad uno **stesso** flusso di **massa** ed ad un **impulso specifico crescente** al tendere verso r_1.

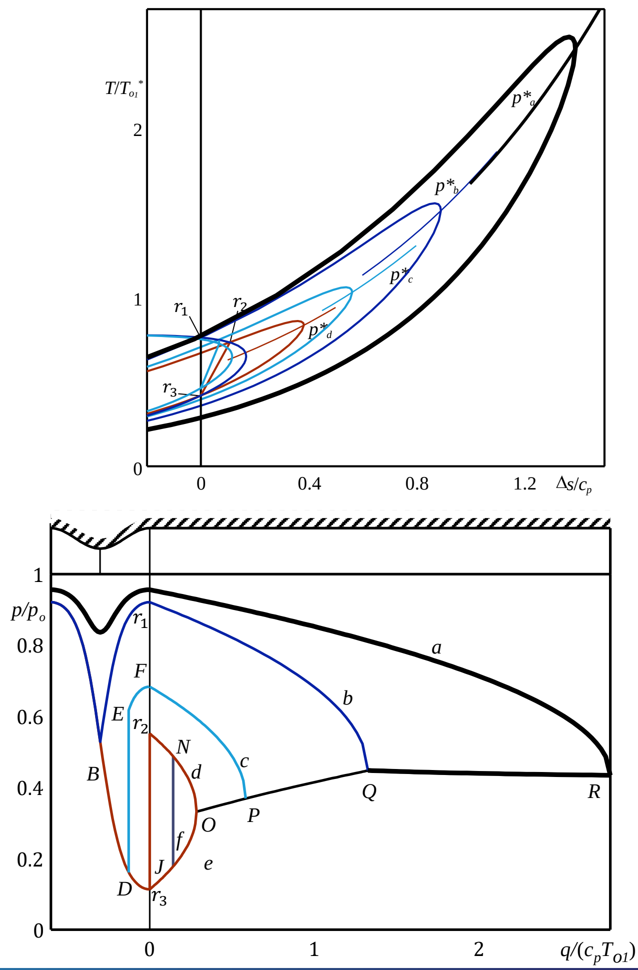


Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

I punti relativi ad un comportamento alla **venturi** sono associati a **differenti** valori del **flusso** di **massa** e dell'**impulso specifico** quindi si trovano su curve di Rayleigh ancora più **esterne**.

Come già detto per il caso dell'ugello solo convergente, al **diminuire** del numero di **Mach** all'ingresso del condotto la **pressione** critica **diminuisce debolmente**. Nel piano T-s la differenza fra le pressioni critiche è meno evidente.

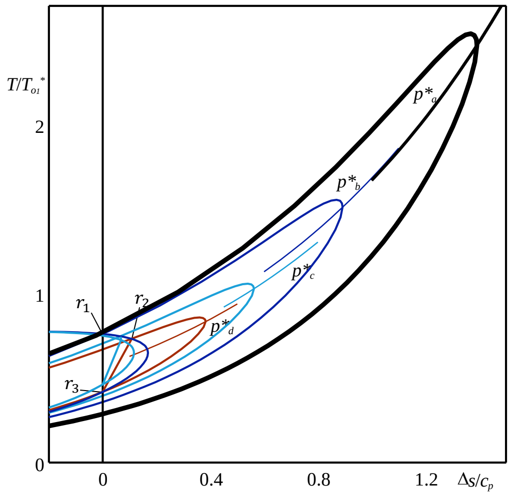
Il punto Q è quindi un punto di **massimo** per la **pressione critica**.

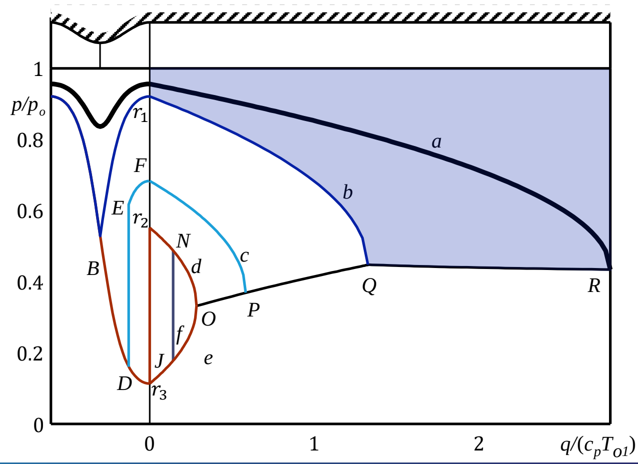


Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

Per $q > q^*_{r_1}$ si possono seguire **solo** le curve di tipo a che si trovano al di sopra della curva **caratteristica** b e sono relative ad un funzionamento alla **venturi** nell'**ugello** ed un funzionamento al più sonico all'uscita del condotto.

Queste curve sono praticamente le stesse già viste e relative al caso dell'**ugello** semplicemente **convergente** seguito da un condotto alla **Rayleigh**.





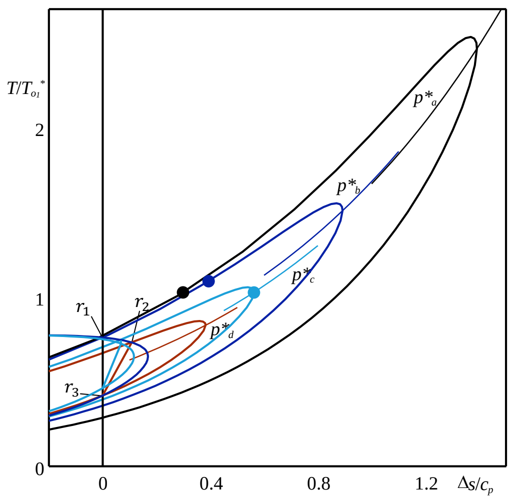
Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

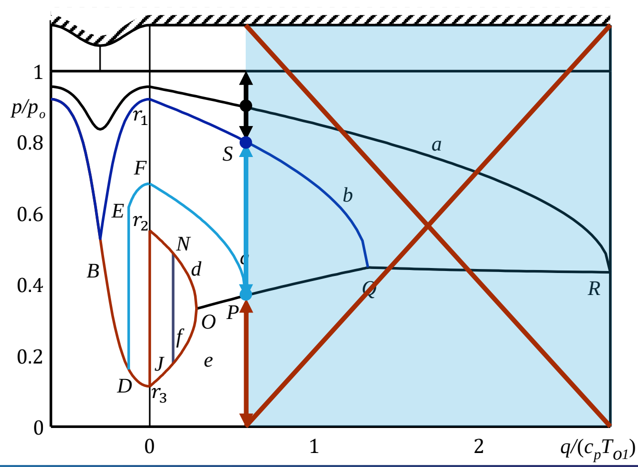
Per $q^*_{r_2} < q < q^*_{r_1}$ al variare di π_a si ha:

Per $\pi_a > \pi_S$ funzionamento alla **venturi** nell'**ugello** con uscita subsonica dal condotto; è **rispettata** la condizione di **Kutta**.

Per $\pi_P < \pi_a < \pi_S$ funzionamento con **onda** d'**urto** nel **divergente** e uscita al più sonica dal condotto; è **rispettata** la condizione di **Kutta**.

Per $\pi_a < \pi_P$ funzionamento con **onda** d'**urto** nel **divergente** e uscita **sonica** dal condotto; **non** è **rispettata** la condizione di **Kutta**.





Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

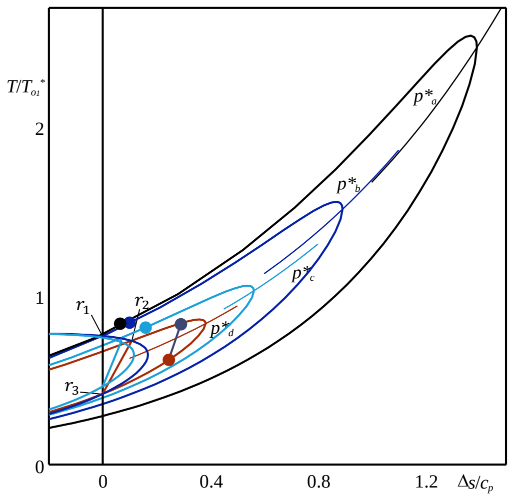
Per $q < q^*_{r_2} = q^*_{r_3}$ al variare di π_a si ha:

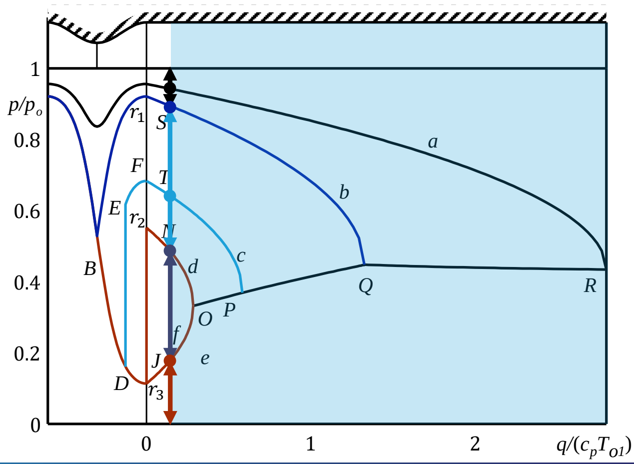
Per $\pi_a > \pi_S$ funzionamento alla **venturi** nell'**ugello** con uscita subsonica dal condotto; è **rispettata** la condizione di **Kutta**.

Per $\pi_N < \pi_a < \pi_S$ funzionamento con **onda** d'**urto** nel **divergente**; è **rispettata** la condizione di **Kutta**.

Per $\pi_J < \pi_a < \pi_N$ funzionamento con **onda** d'**urto** **obliqua** all'uscita del condotto; **non** è **rispettata** la condizione di **Kutta**.

Per $\pi_a < \pi_J$ funzionamento supersonico con **ventaglio** d'**espansione** all'uscita del **condotto**; **non** è **rispettata** la condizione di **Kutta**.





Ugello convergente divergente e condotto alla Rayleigh

Come già detto per $\pi_a = \pi_N$ il funzionamento è con **onda** d'**urto** nel **condotto** e la **posizione** dell'onda è **indeterminata**.

Si deve evidenziare che questa condizione particolare si ha solo se la **pressione** **ambiente** è **esattamente** **uguale** a quella del punto N.