

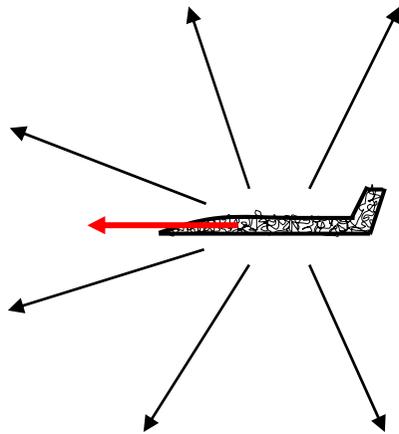
ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

E' stato visto in precedenza che *i piccoli disturbi di pressione si propagano alla velocità del suono.*

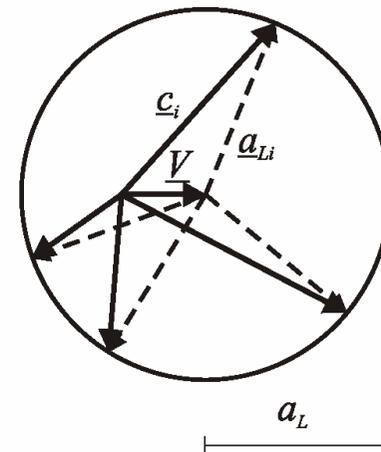
Ad esempio, *nel caso di un oggetto che si muova a velocità subsonica in aria ferma, i disturbi di pressione* causati dalla sua presenza, poiché viaggiano più velocemente dell'oggetto, *riescono a raggiungere tutti i punti del fluido prima che arrivi l'oggetto stesso.*

L'aria si deve *aprire* per far passare l'oggetto).

Alternativamente, *in un sistema di riferimento inerziale per il quale l'oggetto è fermo ed è investito da una corrente subsonica, questi disturbi riescono a risalire la corrente* in quanto essi viaggiano verso monte più velocemente di quanto quest'ultima viaggi verso valle.



*Velocità delle molecole
nel caso subsonico*



ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

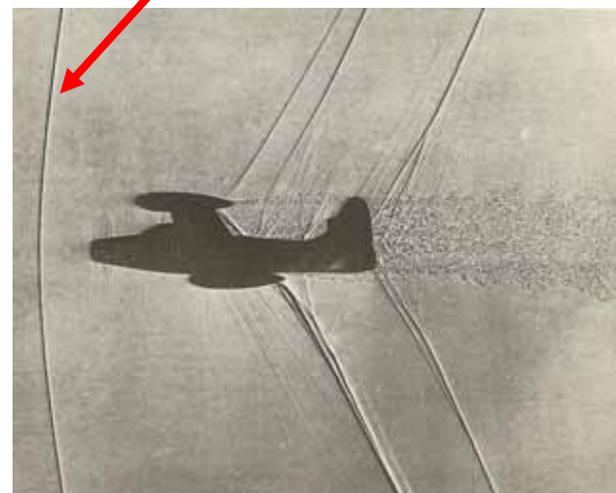
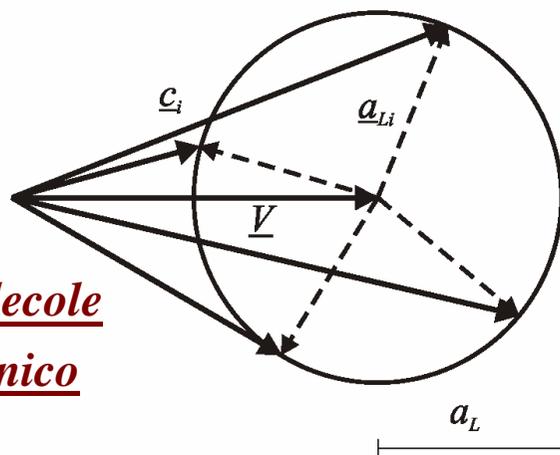
Nel caso, invece, in cui *l'oggetto si muova a velocità supersonica, sempre in aria ferma, arriva prima l'oggetto e poi i disturbi di pressione*. L'aria non può, quindi, essere avvisata da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.

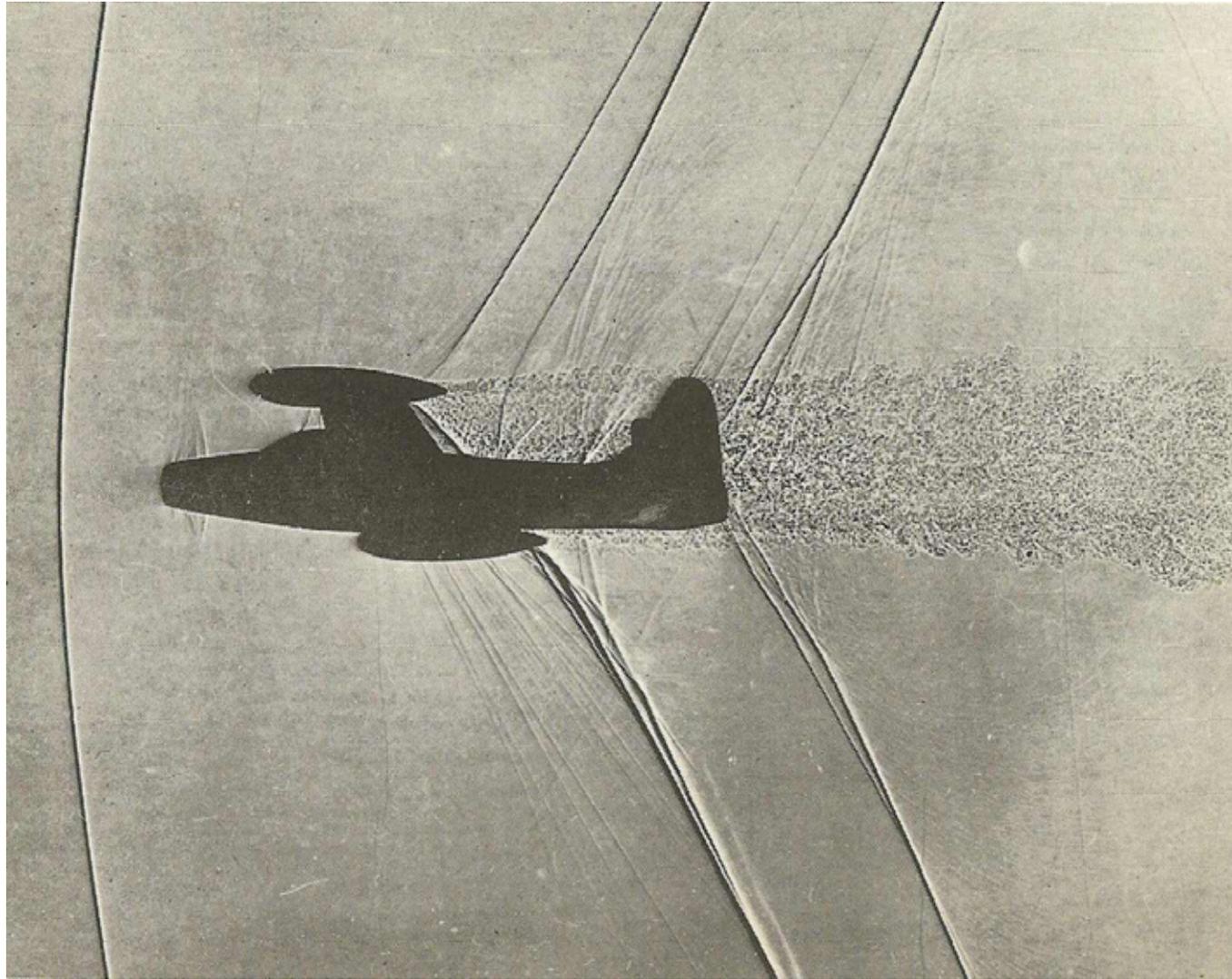
Va, peraltro, rilevato che *l'oggetto deve, in ogni caso, passare* e che *l'aria si deve comunque aprire* per farlo passare.

Da ciò deriva la presenza di *superfici di discontinuità (onde d'urto)* che, rendendo la corrente subsonica, e/o deviando la corrente supersonica, consentono al fluido di aprirsi per lasciar passare il corpo.

Occorre, comunque, osservare che le onde d'urto non sono presenti solo nel caso appena descritto, ma anche in *altre situazioni fluidodinamiche*.

Velocità delle molecole
nel caso supersonico





Shadowgraph del modello in scala 1/200 del *Thunderjet F 84* a $M = 1.05$ osservato con il metodo delle ombre (Shadowgraph). *Notare come l'onda d'urto davanti all'aereo, che viaggia a $M \cong 1$, risulti praticamente normale*

F14 rompe il muro del suono

LINEA

0:50:14



ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Si vedrà tra poco che, *in un sistema di riferimento nel quale l'oggetto è fermo, la corrente deve essere supersonica* e, se la sua velocità è costante nel tempo, *l'onda d'urto resta anch'essa ferma (onda stazionaria)*.

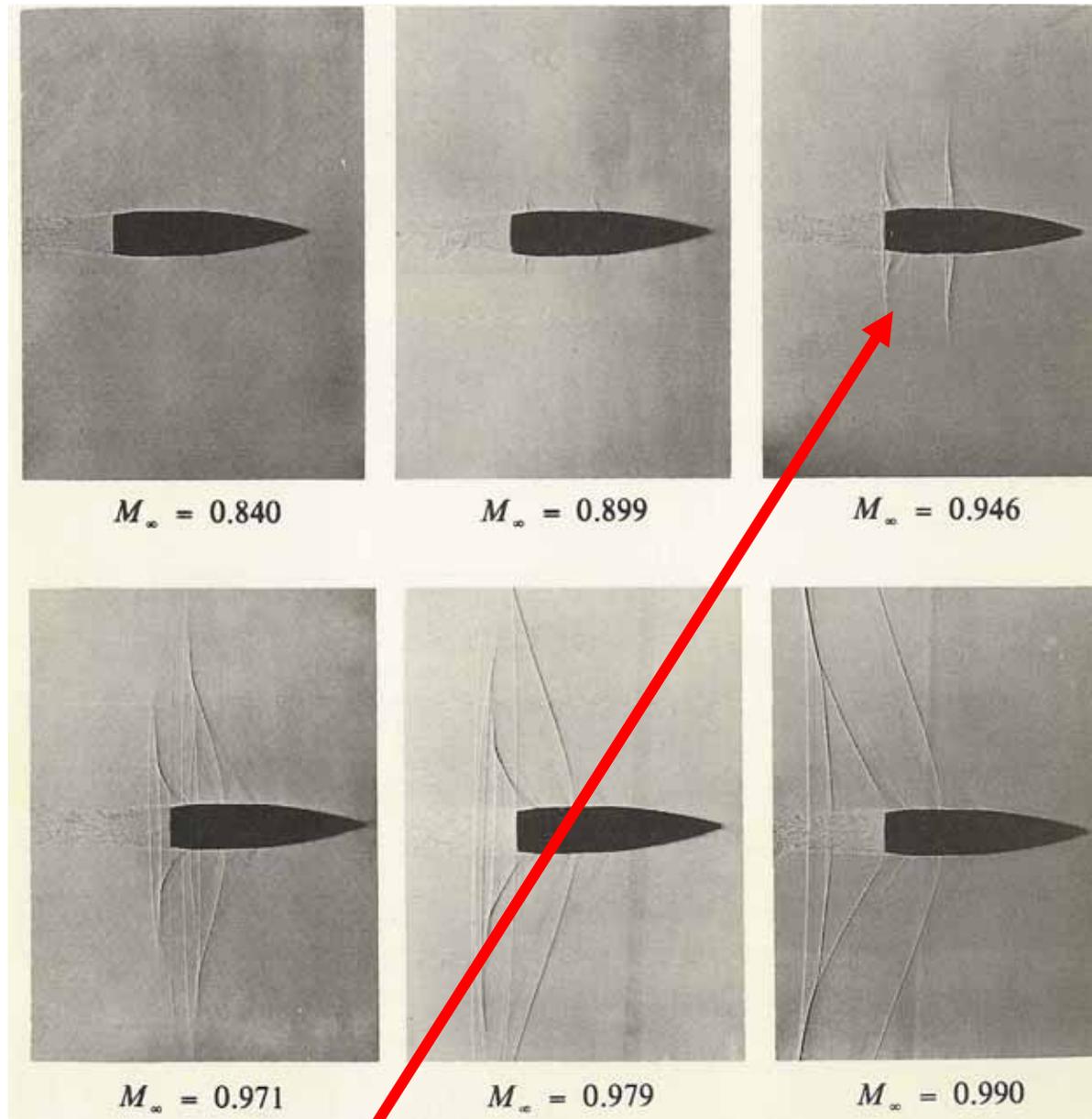
Intuitivamente ne consegue che: onde d'urto stazionarie (ferme rispetto al sistema di riferimento) sono possibili solo se la corrente a monte (prima) di esse è supersonica (nello stesso sistema di riferimento).

Se la corrente fosse subsonica, non ci sarebbe la necessità di un'onda d'urto, in quanto i piccoli disturbi di pressione riuscirebbero a risalire la corrente e a farla aprire per tempo.

Va rilevato che ciò non è strettamente vero in campo transonico.

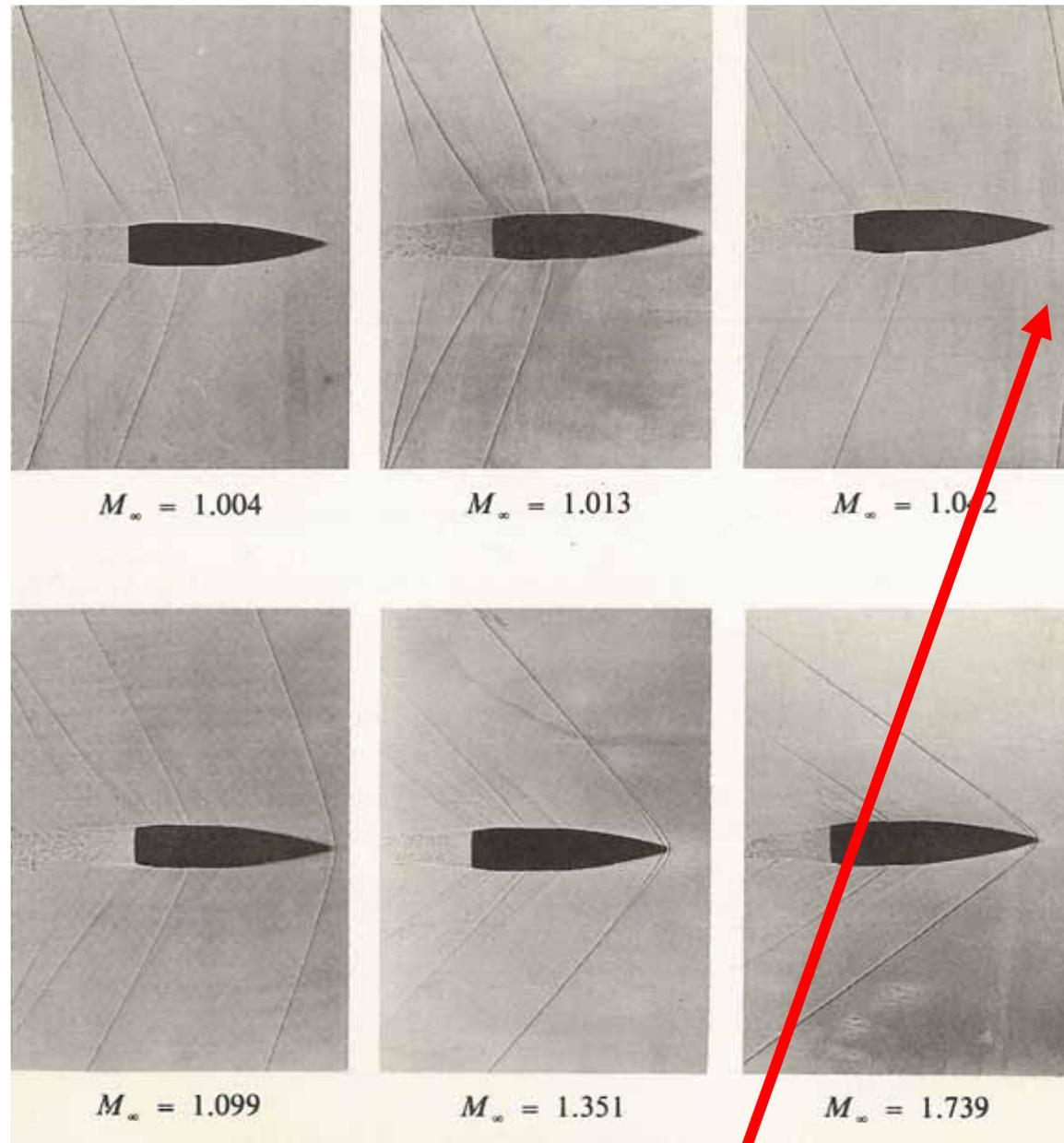
Si vedrà anche che, onde d'urto instazionarie (in moto rispetto al sistema di riferimento adottato) possono originarsi anche *in una corrente non necessariamente supersonica* ma, al limite, ferma.

Le onde d'urto si chiamano normali, quando sono perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda, altrimenti si dicono oblique.



Shadowgraphs di un campo di moto intorno a un proiettile in moto subsonico.

Pur essendo il moto subsonico, si può notare la presenza di onde (di Mach) anche lì dove la corrente accelera.



Shadowgraphs di un campo di moto intorno a un proiettile in moto supersonico.

Notare l'onda d'urto staccata, quasi normale, per $M \cong 1$ e il suo inclinarsi all'aumentare del numero di Mach

ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Le onde d'urto possono essere, in generale, di vario tipo.

E' stato già detto che le onde d'urto si chiamano normali, se perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda, altrimenti si dicono oblique.

E' stato anche detto che esse possono essere stazionarie (se ferme rispetto al sistema di riferimento) o instazionarie (se si muovono).

Nel seguito saranno considerate solo le onde d'urto adiabatiche, nel senso che il fluido che le attraversa non scambia energia nel modo calore tra i suoi diversi punti. Ovviamente, il fluido non scambia lavoro per assenza di "eliche" nel campo di moto.

Va comunque osservato che, come si vedrà, onde d'urto molto forti possono provocare forti innalzamenti della temperatura del fluido e, di conseguenza, scambi termici per irraggiamento, ovvero reazioni chimiche, esotermiche od endotermiche, le quali possono essere tenute in conto con una non adiabaticità del moto.

L'ipotesi di assenza di scambi di energia nel modo lavoro, unitamente all'adiabaticità, fa sì che attraverso l'onda d'urto si può assumere la trasformazione come omoenergetica ($H = cost$).

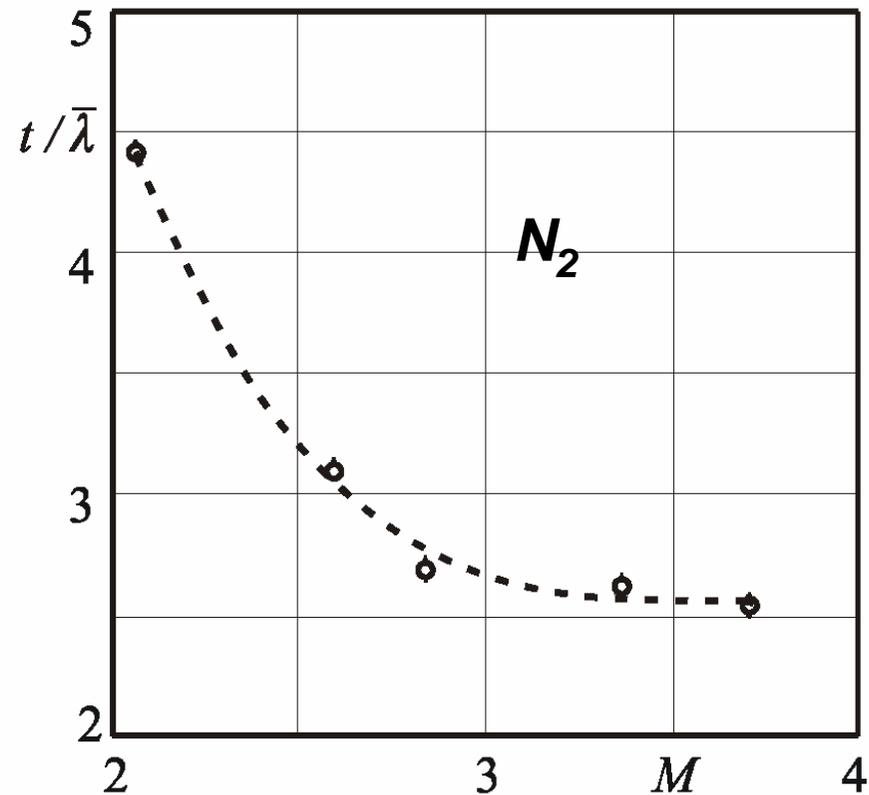
SPESSORE DI UN'ONDA D'URTO

Nei campi di moto qui esaminati, le onde d'urto possono essere generalmente considerate come superfici di discontinuità. Infatti, ***il loro spessore risulta dell'ordine di qualche cammino libero medio molecolare.***

Nella figura a lato è riportato lo ***spessore di un'onda d'urto*** t , espresso in termini di cammino libero medio molecolare $\bar{\lambda}$, al variare del numero di Mach M .

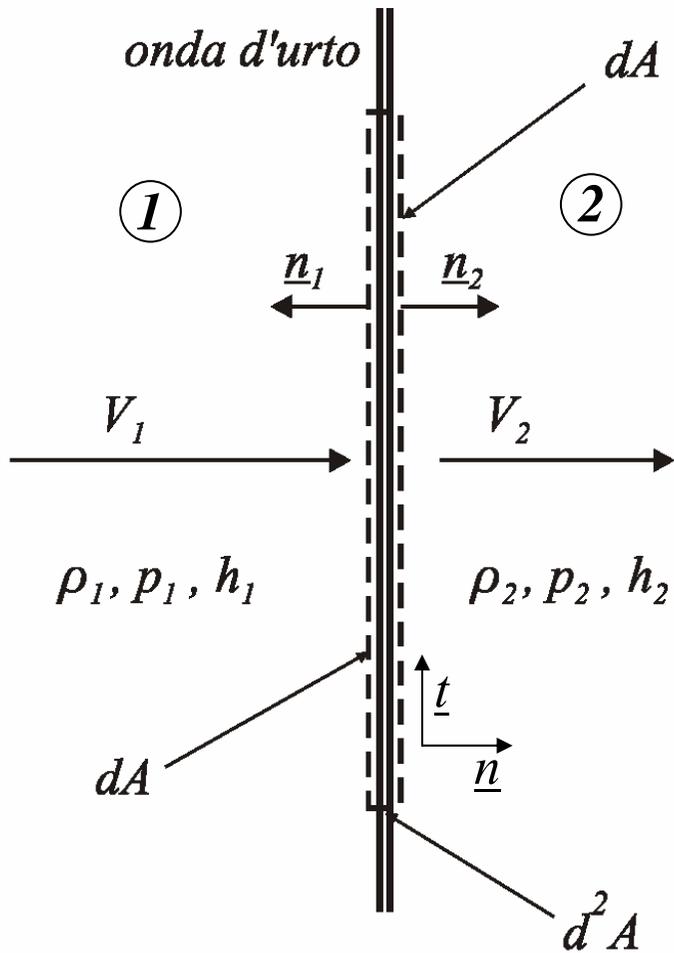
Lo spessore t è stato misurato sperimentalmente nel caso specifico di onde d'urto in una corrente di azoto N_2 .

Si ricordi che $\bar{\lambda}$, per aria in condizioni normali, è dell'ordine di $10^{-7}m$ e che l'aria è costituita prevalentemente da azoto.



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA

Volume di controllo



Eq. Bilancio Quantità di moto

$$\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \cancel{\underline{S}} = \cancel{\underline{M/g}}$$

$$A_1 = A_2 = dA \gg \bar{\lambda}^2 ; \quad \underline{M} = 0 \quad \text{e}$$

$$\underline{S} = 0 \quad \text{perchè: } d^2 A \ll dA$$

$$\dot{m}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

$$V_{t1} = V_{t2} = 0 \quad \text{quindi: } \underline{V}_2 \parallel \underline{V}_1$$

Eq. Conservazione della massa

$$\rho_1 A_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 + \rho_2 A_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = 0$$

$$\text{poichè: } A_1 = A_2 = dA$$

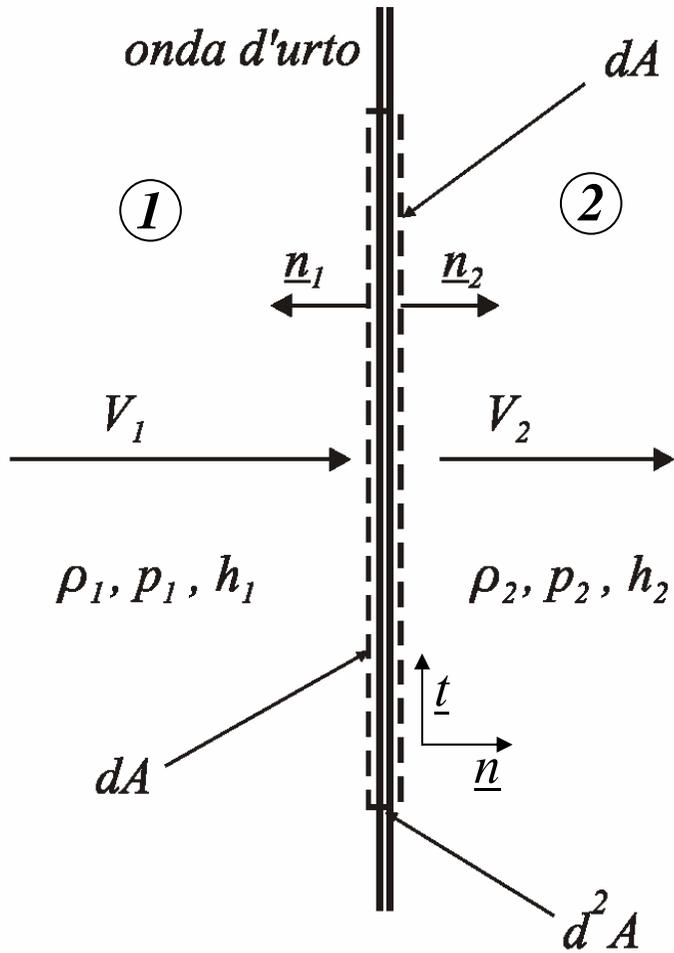
$$\underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 = -V_1 ; \quad \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = V_2$$

$$\text{si ha: } \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \underline{G} = \text{cost}$$

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

Volume di controllo



Eq. Bilancio Quantità di moto

Sostituendo: $d\dot{m} = \rho_1 V_1 dA = \rho_2 V_2 dA$ nella:

$$d\dot{m} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA (p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

poichè: $\underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 = -V_1$; $\underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = V_2$

e proiettando normalmente all'onda, si ottiene:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

Eq. Conservazione dell'energia

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

tenendo conto che: $\dot{Q} = \dot{L} = 0$, si ha:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

Quindi l'onda d'urto è una trasformazione
termofluidodinamica che avviene attra-
verso una superficie (volume sottilissimo),
per la quale ciascuna delle grandezze
 G , I ed H resta costante.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Si ricorda che l'equazione di bilancio della quantità di moto è la seguente:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = p_2 - p_1$$

Dividendo per $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$, si ottiene:

$$V_1 - V_2 = \frac{p_2}{\rho_2 V_2} - \frac{p_1}{\rho_1 V_1}$$

Ricordando poi che $a^2 = \gamma RT = \gamma p/\rho \rightarrow p/\rho = a^2/\gamma$, si perviene a:

$$\gamma(V_1 - V_2) = \frac{a_2^2}{V_2} - \frac{a_1^2}{V_1}$$

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

La $H = h + V^2/2$, in condizioni omoenergetiche, può essere scritta anche nella forma:

$$a^2 = a_o^2 - \frac{\gamma - 1}{2} V^2 \quad \leftarrow h = \gamma RT/(\gamma - 1) = a^2/(\gamma - 1)$$

che sostituita nella relazione precedentemente trovata:

$$\gamma(V_1 - V_2) = \frac{a_2^2}{V_2} - \frac{a_1^2}{V_1} \quad \rightarrow \quad \gamma(V_1 - V_2) = a_o^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) + \frac{\gamma - 1}{2} (V_1 - V_2)$$

e tenendo conto della: $V^* = a^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_\ell \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$

da luogo alla:

$$V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2} \quad (V_1 - V_2)/V_1 V_2$$

Relazione di Prandtl per l'onda d'urto normale

La velocità critica del suono è la media geometrica tra quella a monte e quella a valle dell'onda d'urto.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Introducendo un numero di Mach riferito alla velocità critica: $M^* = \frac{V}{a^*}$
(*questa è l'unica eccezione al simbolo **)

la relazione: $V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma + 1} a_o^2 = a^{*2}$

*Per $H = \text{cost}$
si ha: $a^* = \text{cost}$*

diventa semplicemente:

$$M_1^* M_2^* = 1$$

Poiché si può scrivere:

$$M^{*2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a^{*2}} = M^2 \frac{T}{T_o} \frac{T_o}{T^*} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{\gamma + 1}{2}$$

quadrando, sostituendo e risolvendo in M_2 , si ottiene infine la *relazione che lega il numero di Mach a valle M_2 a quello a monte M_1 dell'onda:*

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Poiché per la stabilità termodinamica è $\gamma \geq 1$, **ad ogni valore di $M_1 > 1$, corrisponde un valore di $M_2 < 1$ e, quasi, viceversa.**

Il caso $M_1 = 1$ conduce a $M_2 = 1$, **nulla succede alla corrente.**

Per $M_1 \rightarrow \infty$, il valore limite di M_2 risulta essere:

$$M_{2\ell} = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2}$$

che per il caso particolare di $\gamma = 1.4 \rightarrow M_{2\ell} = 0.3780$

Per $M_1 \rightarrow M_{2I}$, **il denominatore della frazione vale zero** e $M_2 \rightarrow \infty$.

Il **quasi** deriva dal fatto che, per valori subsonici di M_1 inferiori a M_{2I} , il denominatore della frazione è negativo e il valore di M_2 risulta un numero complesso.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Utilizzando la relazione tra M_1 e M_2 , è possibile ricavare allora:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) = \frac{H}{c_p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) (\gamma - 1 + 2/M_1^2)$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_1 (1 + \gamma M_1^2) = p_2 (1 + \gamma M_2^2) = I$$

$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$\rho_2/\rho_1 = p_2 T_1 / p_1 T_2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = (\gamma + 1) M_1^2 [2 + (\gamma - 1) M_1^2]^{-1}$$

Questi sono alcuni dei rapporti caratteristici per un'onda d'urto normale.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Essendo l'onda d'urto omoenergetica, si ha: $\frac{T_{o2}}{T_{o1}} = 1$

Il rapporto tra le pressioni di ristagno si può scrivere: $p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_{o2}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{o1}} \quad \frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

Sostituendo le relazioni per la pressione di ristagno, il M_2 in funzione del M_1 e l'espressione di p_2/p_1 precedentemente trovata, si ottiene **[il rapporto tra le pressioni di ristagno:](#)**

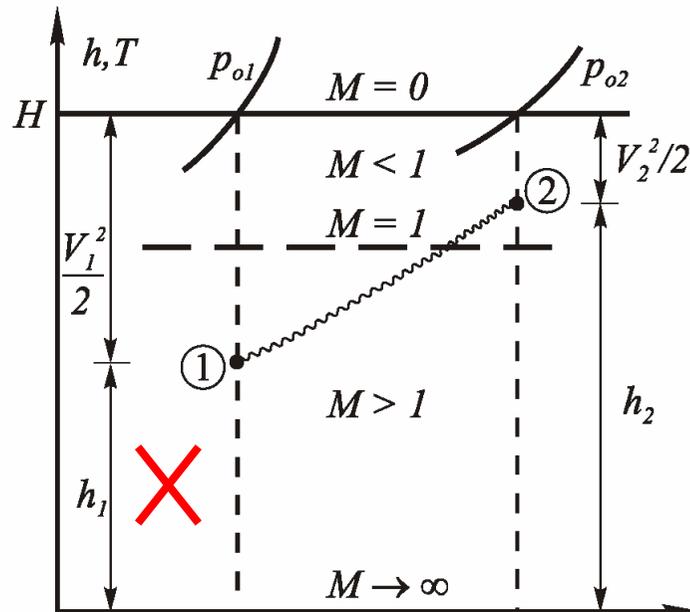
$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma + 1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1 - \gamma}}$$

che, per $M_1 > 1$, conduce sempre a:

$$p_{o2} / p_{o1} < 1$$

per tutti i valori possibili di $\gamma > 1$.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO



Si ricordi che l'entropia è data da:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

In termini delle grandezze di ristagno si può scrivere ($T_{o2} = T_{o1}$):

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Utilizzando, poi, la appena trovata:

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} (\gamma - 1 + 2M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

si ottiene, infine, la **variazione di entropia attraverso l'onda d'urto**:

$$\Delta s / R = (s_2 - s_1) / R = \left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \ln(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1 + 2M_1^2) \right] / (\gamma - 1)$$

relazione il cui diagramma nella figura in alto mostra quali sono **i soli urti possibili** ($M_1 > 1$), perché deve essere $\Delta s \geq 0$.

ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Espandendo in serie di Taylor, nell'intorno di $M_1^2 = 1$, la relazione:

$$\Delta s / R = (s_2 - s_1) / R = \left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \ln(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1 + 2/M_1^2) \right] / (\gamma - 1)$$

si ottiene la seguente espressione:

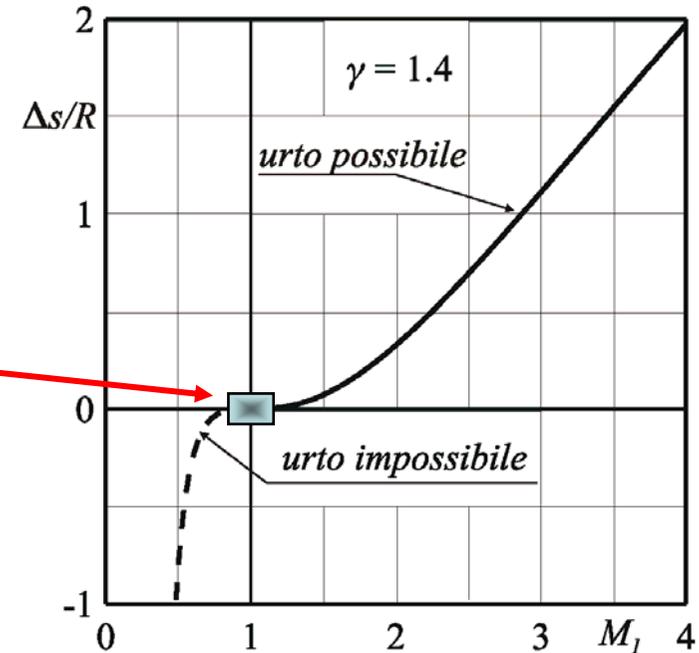
$$\frac{\Delta s (M_1^2 \rightarrow 1)}{R} = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^3$$

che per $M_1^2 = 1$ risulta nulla insieme alle sue derivate prima e seconda rispetto a M_1^2 (**punto di flesso della curva**).

Questo fatto fa sì che **le onde d'urto che avvengono per $M_1 \rightarrow 1$ (onde di Mach) siano praticamente isoentropiche, cioè reversibili**.

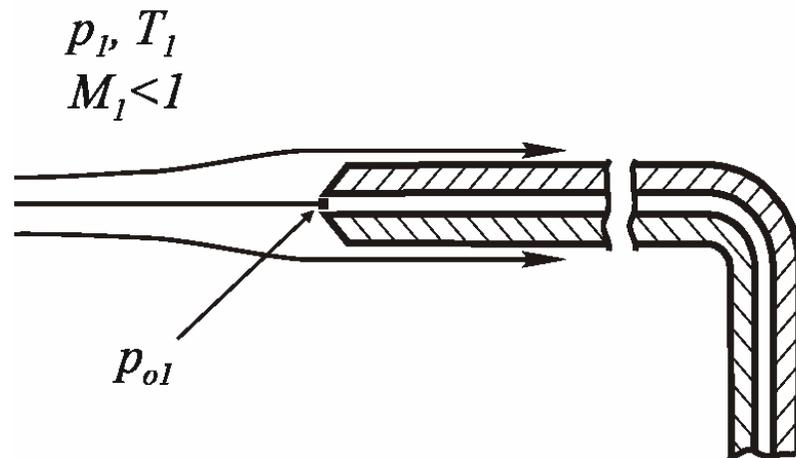
Quindi, **solo l'onda di Mach che si ha per $M_1 \rightarrow 1$ può essere sia di compressione che di espansione** poiché la trasformazione è reversibile, essendo $\Delta s = 0$.

$$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 -$$



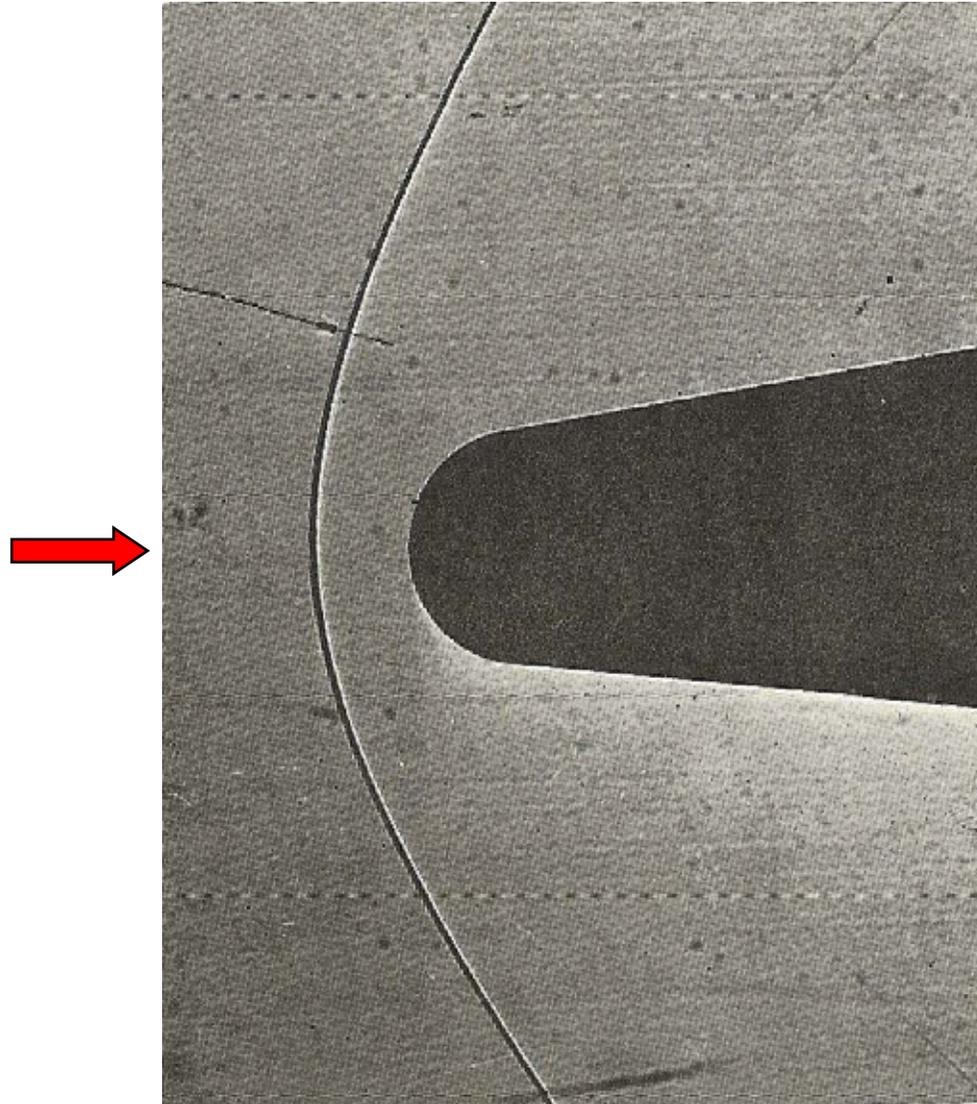
TUBO DI PITOT IN UNA CORRENTE SUBSONICA

Nel tubo di Pitot investito da una corrente subsonica si può considerare che il fluido decelerì, fino al punto di misura della pressione sull'asse, isentropicamente ed omoenergeticamente, e, quindi, che lo strumento misura, di fatto, la pressione di ristagno della corrente.



Tutto ciò non è vero per un tubo di Pitot investito da una corrente supersonica.

Cosa succede, invece, per un tubo di Pitot investito da una corrente supersonica ?



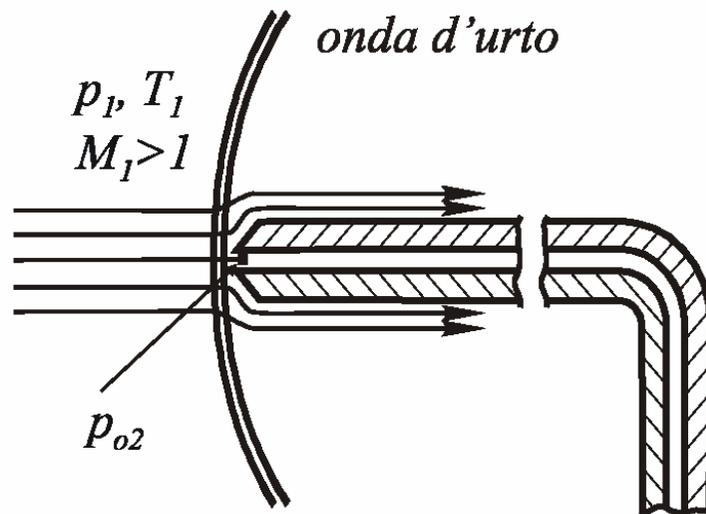
Shadowgraph di un'onda d'urto in un flusso supersonico su un cono smussato a $M = 1.36$. *Notare come l'onda sull'asse risulti normale all'asse stesso.*

TUBO DI PITOT IN UNA CORRENTE SUPERSONICA

Se in una corrente supersonica è presente un corpo tozzo (cioè che non presenta un bordo di attacco a spigolo vivo, o a punta), davanti al corpo si genera un'onda d'urto che, per corpi assialsimmetrici posti ad angolo d'attacco nullo rispetto all'asse del corpo, risulta normale all'asse stesso.

Questo è il caso del tubo di Pitot immerso in una corrente supersonica.

In questo caso, il Pitot non misurerà la pressione di ristagno della corrente, bensì *misura la pressione di ristagno p_{o2} a valle dell'onda d'urto normale presente davanti ad esso, sul suo asse.*



In un tunnel supersonico è relativamente facile misurare la pressione statica p_1 a monte dell'onda d'urto con una presa di pressione posta sulle pareti del tunnel.

Quindi, il rapporto p_{o2}/p_1 , detto anche funzione di Rayleigh per il tubo di Pitot, risulta utile per la misura del numero di Mach in un tunnel supersonico e si può ricavare a partire dalla:

$$\frac{P_{o2}}{P_1} = \frac{P_{o2}}{P_2} \frac{P_2}{P_1}$$

Sostituendo in questa espressione le già trovate:

$$P_o = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

si ottiene infine la:

Funzione di Rayleigh

$$\frac{P_{o2}}{P_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{2 M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{2 M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Come già detto, questa formula è chiamata **funzione di Rayleigh**.

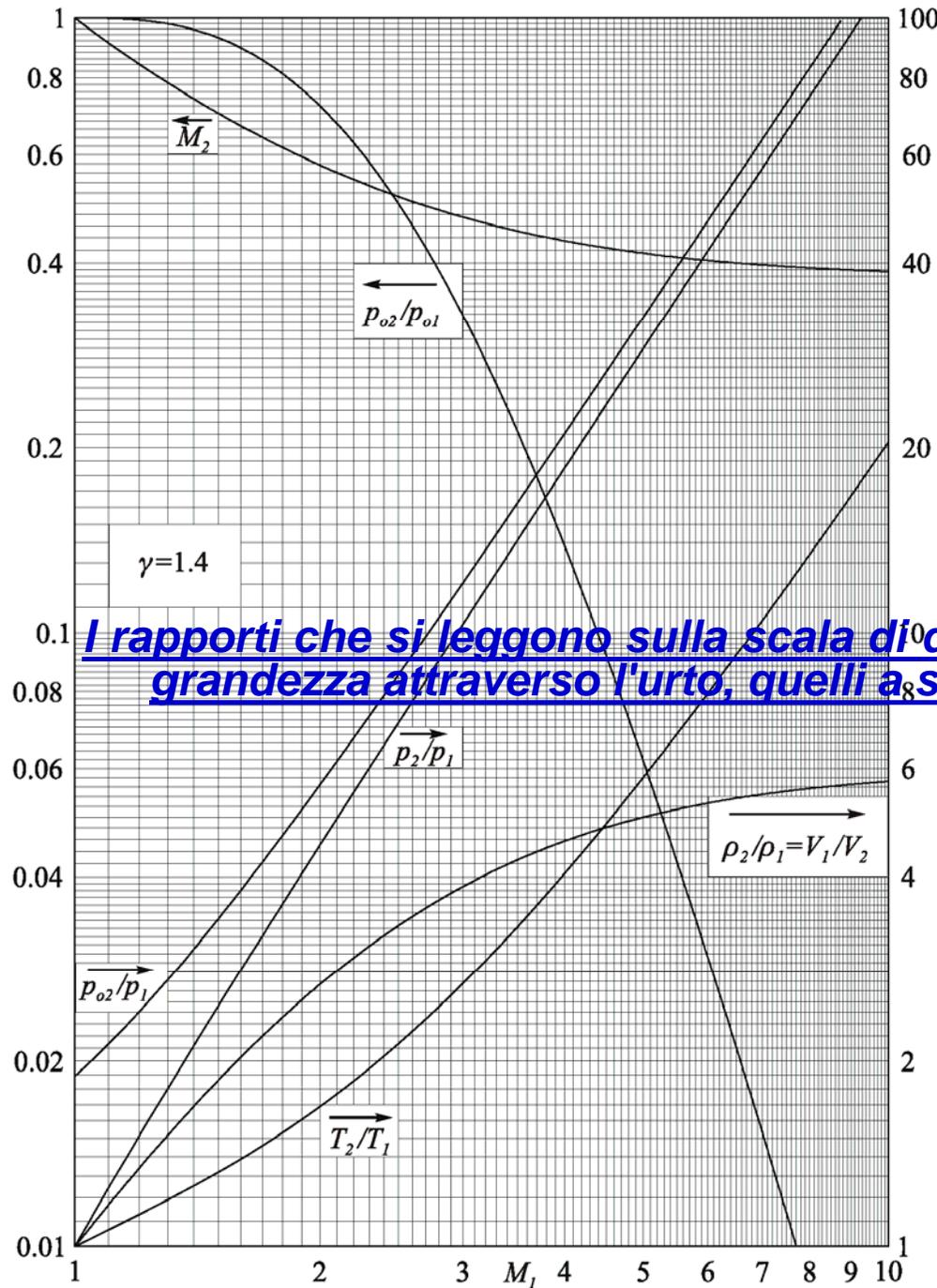
Per $M_1 = 1$, e cioè per un' **onda di Mach** ($p_{o2} = p_{o1}$), essa dà luogo al valore:

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \frac{p_{o1}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

che corrisponde al **valore isoentropico**. Questo valore, nel caso di $\gamma = 1.4$, risulta uguale a 1.893. Il suo reciproco è pari a 0.5283.

Le figure che seguono mostrano **la dipendenza dei diversi rapporti adimensionali (caratteristici) delle diverse grandezze termofluidodinamiche e del numero di Mach a valle dell'onda d'urto per il caso particolare di $\gamma = 1.4$** .

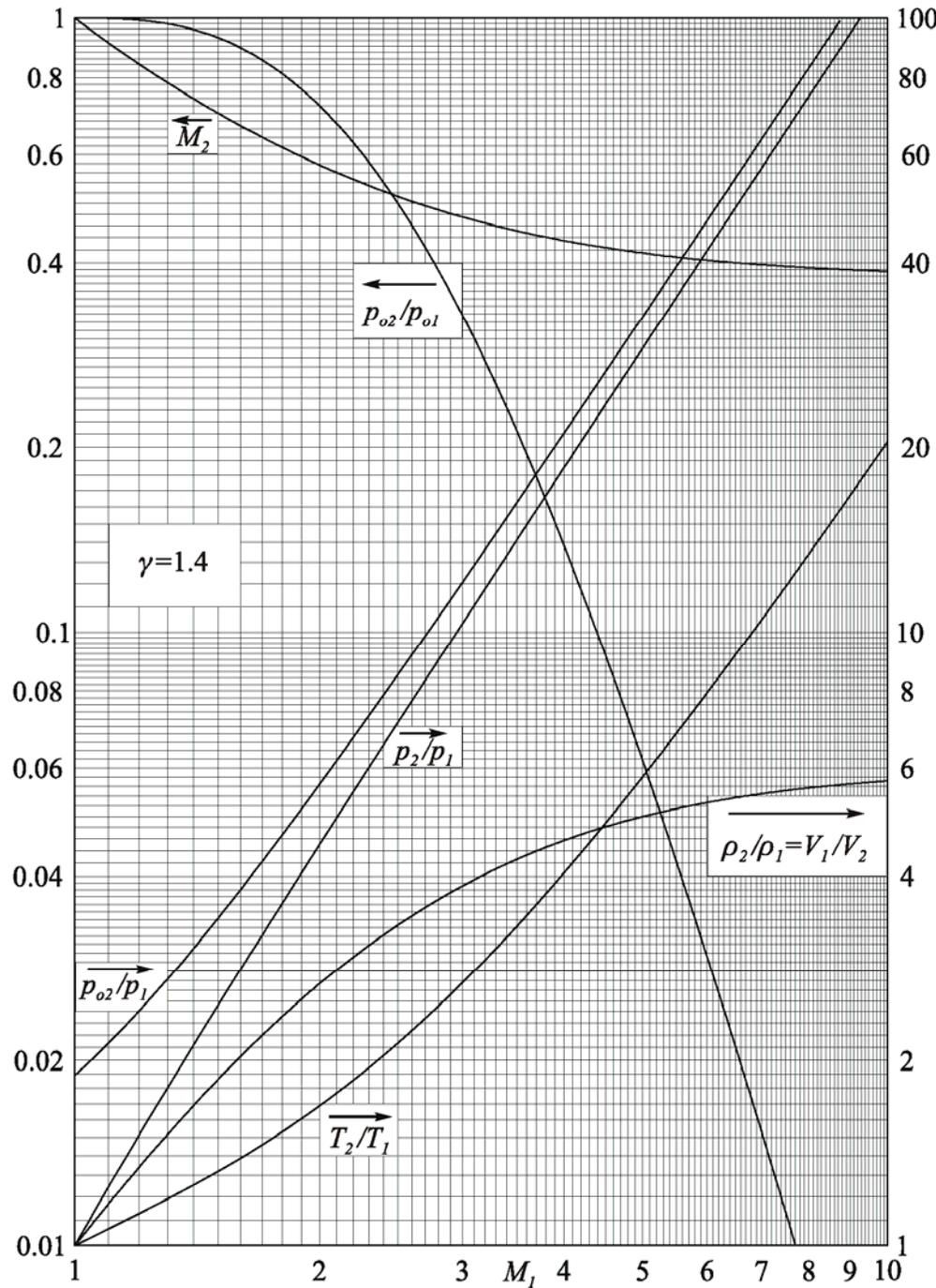
Analoghi andamenti si hanno per valori diversi di γ .



I rapporti che si leggono sulla scala di destra comportano un aumento della grandezza attraverso l'urto, quelli a sinistra una diminuzione.

All' aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su (il Mach deve essere almeno sonico), si hanno i seguenti comportamenti:

- diminuisce il numero di Mach a valle M_2 , sino ad un valore asintotico;
- diminuisce continuamente il rapporto tra le pressioni di ristagno (aumenta l'entropia);
- aumenta continuamente il rapporto tra le pressioni statiche;
- aumenta il rapporto tra le densità statiche sino ad un valore asintotico;
- aumenta continuamente il rapporto tra le temperature statiche (quelle di ristagno non variano);
- aumenta il rapporto p_{02}/p_1 .



Valori limite per $M_1 \rightarrow \infty$ ($\gamma = 1.4$)

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2} = 0.3780$$

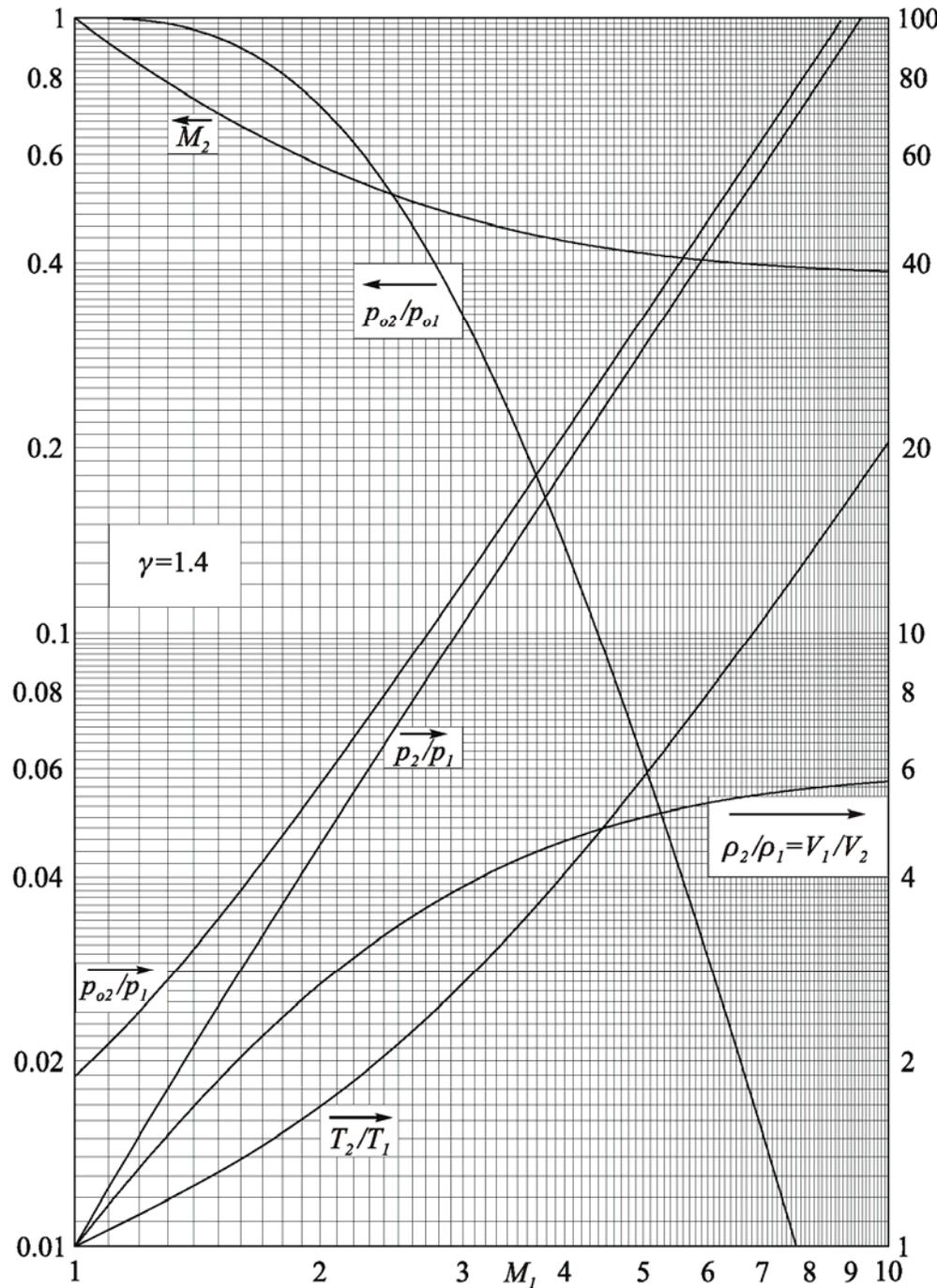
$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)M_1^2}{\gamma + 1} = \infty$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} = 6$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} = \infty$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{02}}{p_{01}} = \text{cost} (M_1^2)^{\frac{1}{1-\gamma}} = 0$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{02}}{p_1} = \text{cost} M_1^2 = \infty$$



In una corrente (con $\gamma = 1.4$) ad elevatissimo numero di Mach (ipersonica), la **densità a valle** di una onda d'urto normale è pari a **sei volte quella a monte** e la **velocità della corrente diventa un sesto di quella a monte**.

In questo caso resta comunque da controllare se è ancora valida l'ipotesi di **gas più che perfetto** a causa dell'elevato aumento di temperatura della corrente che può provocare fenomeni di **dissociazione**.

Il diagramma dimostra anche che, per **bassi valori del numero di Mach**, si ha $p_{o2} / p_{o1} \cong 1$ e che quindi l'onda d'urto può essere considerata praticamente **isoentropica**.

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

TABELLE DELLE ONDE D'URTO NORMALI

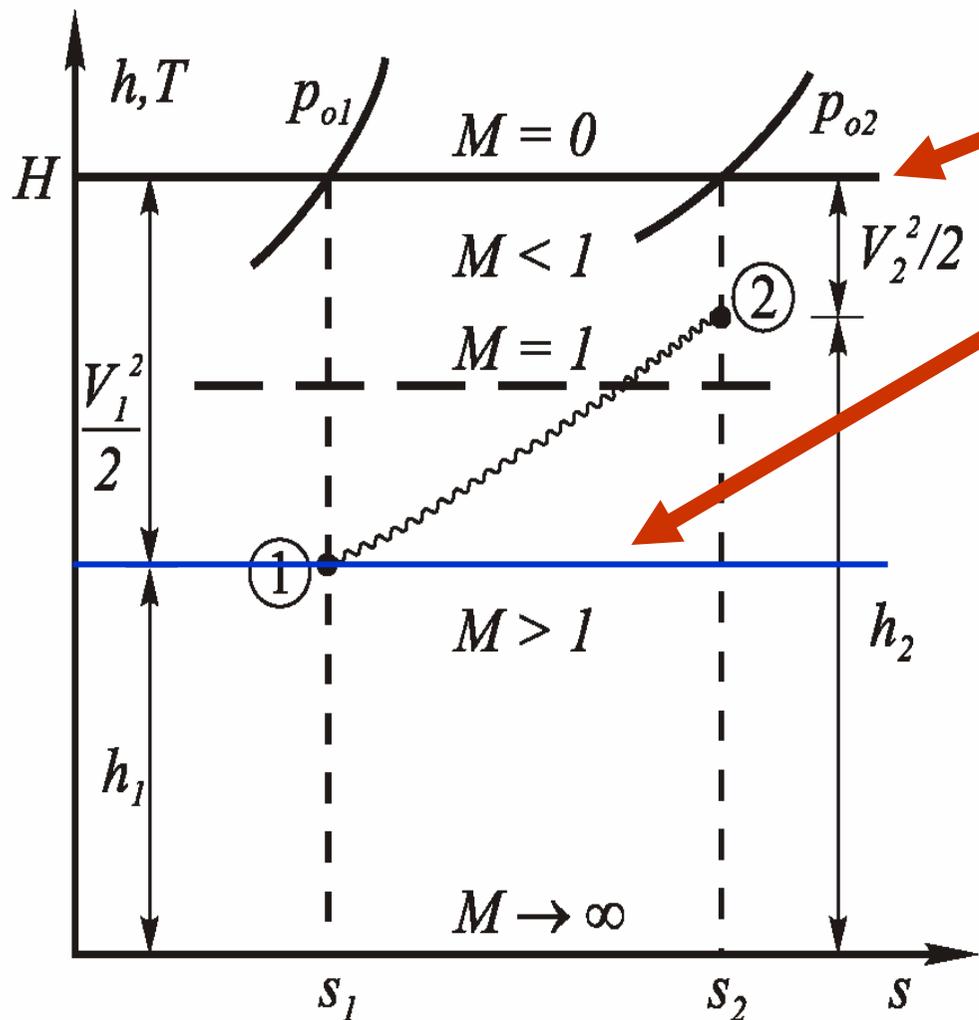
Una più dettagliata descrizione dell'andamento dei rapporti caratteristici è riportata nelle tabelle (per $M_1 = M > 1$) così come mostrato di seguito

Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)							
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\rho V^2/\rho_0$	A/A^*	M^*	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}		
1.00	.5283	.6339	.8333	.698	1.000	1.000	.0000	9.000	+1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283	
1.01	.5221	.6287	.8306	.6728	1.000	1.008	.4472	-1	8.193	+1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.6478	1.000	1.017	.1257		7.864	+1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.8250	.6228	1.001	1.025	.2294		7.614	+1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.8222	.6000	1.001	1.033	.3510		7.406	+1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)						
M	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	p_1/p_{o2}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Sul piano $h-s$ (o $T-s$) i due punti ① e ②, rispettivamente a monte e a valle dell'onda d'urto, devono apparire così come rappresentato nella figura.

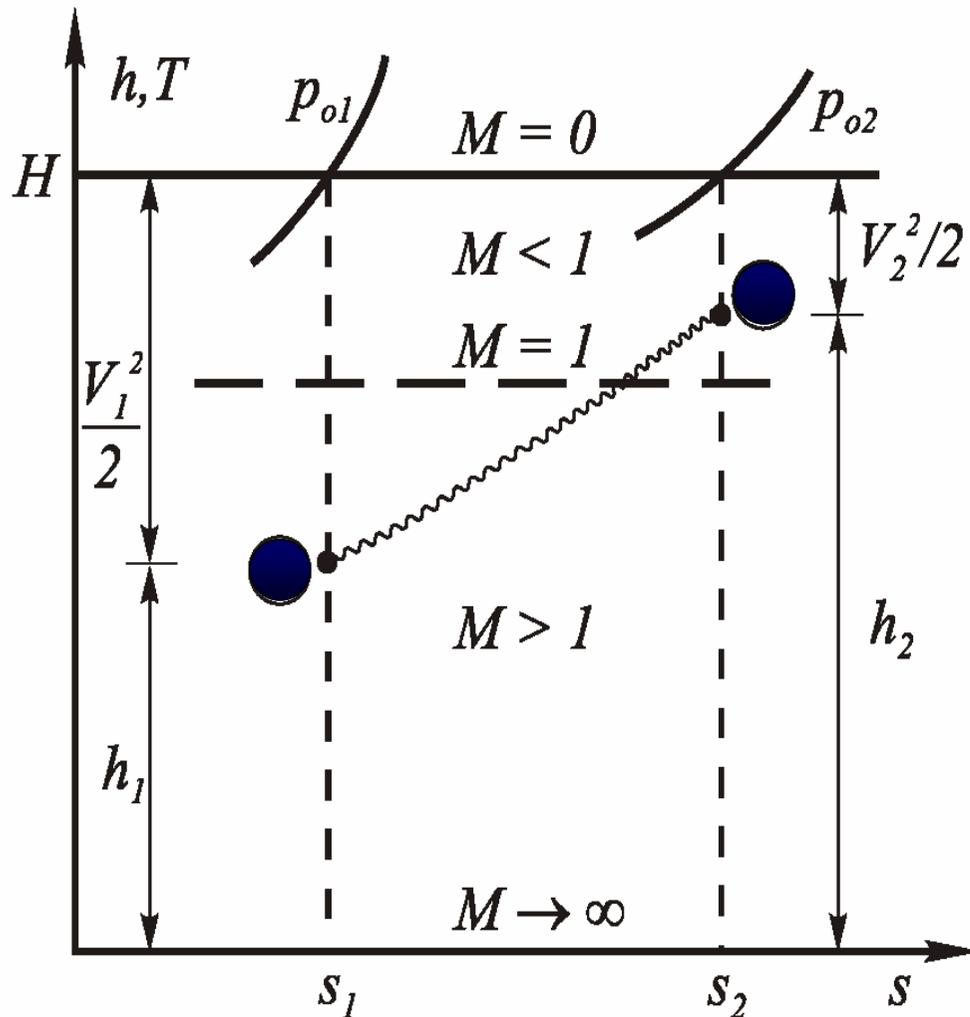
Si ricordi che attraverso l'onda d'urto: $H = h + V^2/2 = cost$ ed s aumenta.



Per un gas perfetto, **una volta stabilita sul piano $h-s$ (ovvero $T-s$) la retta orizzontale $H = \text{cost}$ (risp. $T_o = \text{cost}$) relativa al livello energetico totale H della corrente, ciascun'altra retta orizzontale al di sotto di questa rappresenta il luogo dei punti per il quale le quantità h , T , $V^2/2$ (e quindi V), a e M sono costanti.**

Man mano che **questa retta si abbassa, il numero di Mach ad essa relativo tende ad aumentare perché la velocità del fluido V aumenta e la velocità del suono (la T) diminuisce.**

E' possibile quindi dividere il piano $h-s$, al di sotto della retta $H = cost$, in due zone mediante la retta orizzontale corrispondente a $M = 1$ (retta tratteggiata): la **superiore** caratterizzata da $M < 1$ e la **inferiore** caratterizzata da $M > 1$.



Poiché lo stato ① a monte dell'onda d'urto è quello corrispondente ad una **corrente supersonica**, il punto che lo rappresenta deve trovarsi nella **zona inferiore** ($M > 1$) così come riportato in figura.

Viceversa, il punto che rappresenta lo stato a valle ② si deve trovare nella **zona superiore** ($M < 1$) **ed a destra del punto 1** in quanto $\Delta s > 0$ (**ovviamente** $p_{o2} < p_{o1}$).

Il collegamento tra i punti ① e ② è stato indicato nel modo particolare rappresentato in figura, in quanto **non rappresenta una classica trasformazione termodinamica.**

A questo punto, si può pensare di definire l'onda d'urto come una superficie di discontinuità attraverso la quale avviene una brusca conversione di energia cinetica ordinata in energia cinetica disordinata ad entalpia totale costante. La brusca diminuzione di velocità dà luogo ad un brusco innalzamento della densità:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

della pressione:

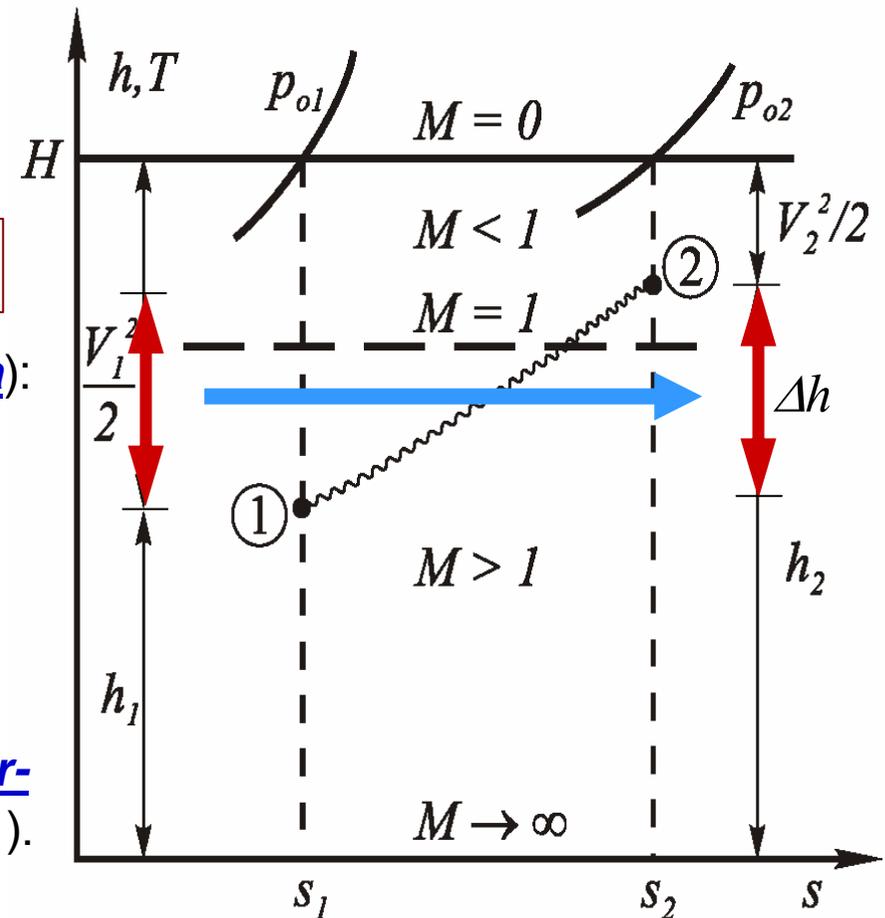
$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

dell'entalpia (e quindi della temperatura):

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

e, ovviamente, dell'entropia.

Invece, la pressione di ristagno attraverso l'onda d'urto, diminuisce ($p_{o2}/p_{o1} < 1$).

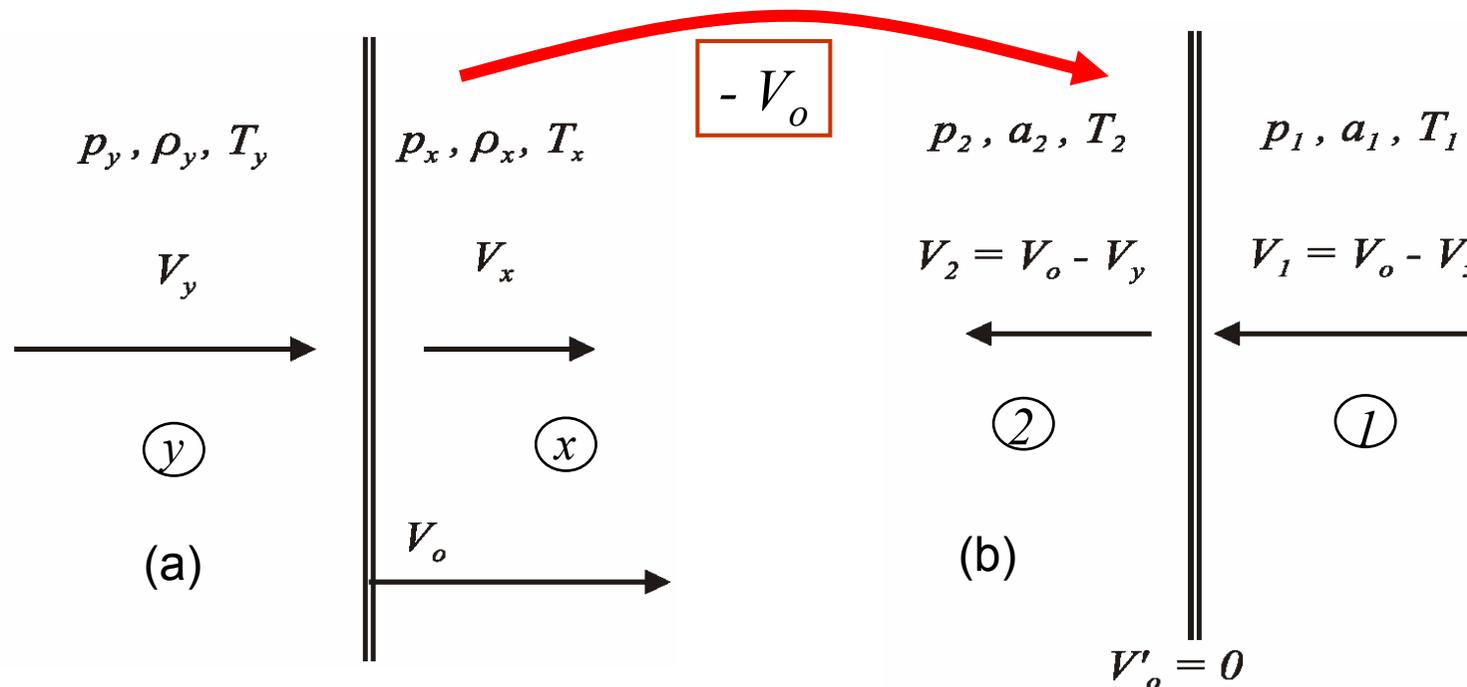


ONDA D'URTO NORMALE NON STAZIONARIA

Nella Figura (a) è rappresentata **un'onda d'urto normale che**, in un sistema di riferimento inerziale Ω , **viaggia a velocità costante V_o** in un fluido avente velocità V_x **a monte** (prima del passaggio dell'onda) e V_y **a valle** (dopo l'onda; si suppone poi che per un'onda che viaggia verso destra sia: $V_o > V_x$).

Per rendere l'onda stazionaria, bisogna osservarla in un sistema di riferimento Ω' (sempre inerziale) che si muova rispetto ad Ω con una velocità pari alla V_o e quindi occorre **sottrarre la V_o a tutte le velocità di figura**.

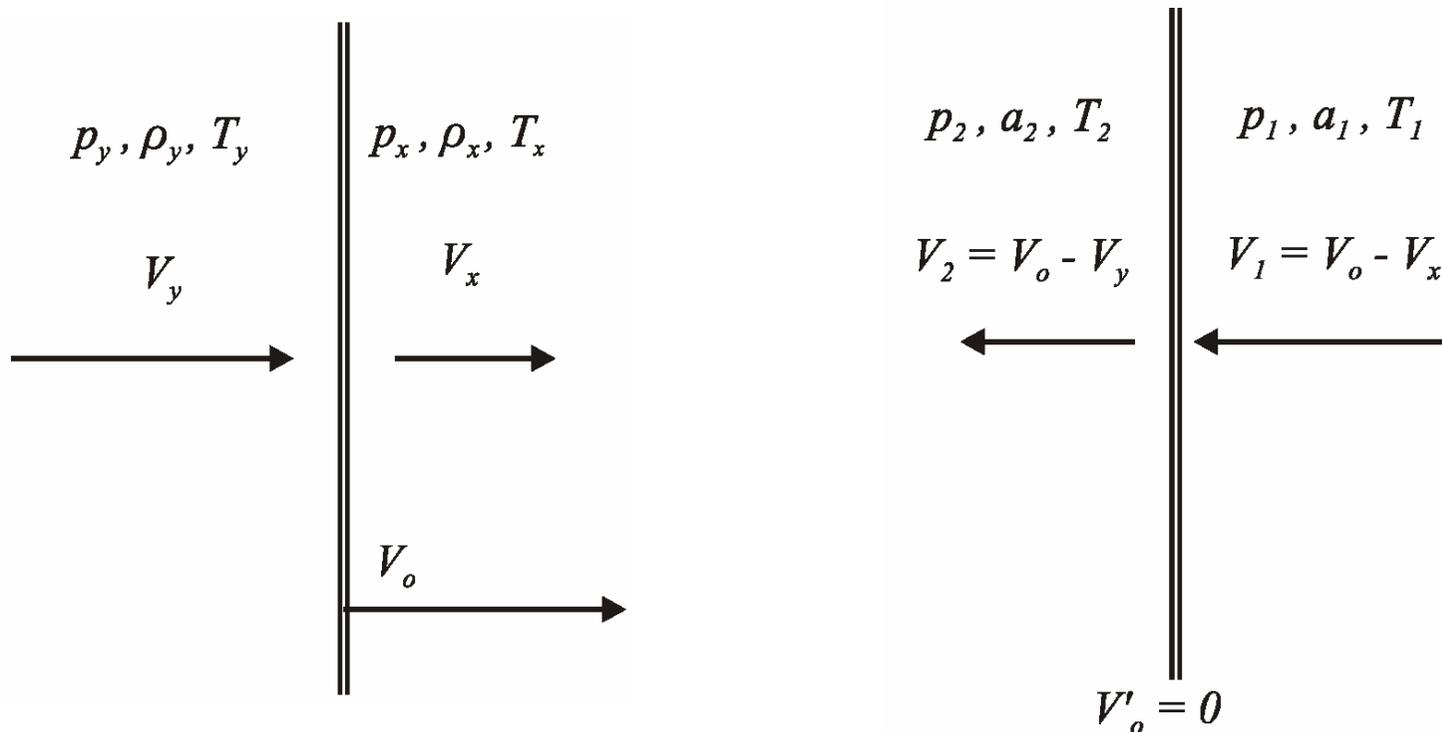
Conviene, allora anche **invertire i versi delle velocità**. Si veda la Figura (b).



Occorre poi osservare che, in entrambe le figure, le **condizioni statiche della corrente** (poiché **sempre misurate con uno strumento che comunque si muove alla velocità del fluido**, cioè **solidale alle particelle di fluido**) **sono le stesse qualunque sia il sistema di riferimento.**

Valgono, quindi, le relazioni:

$$\begin{array}{l} p_x = p_1; \quad p_y = p_2; \quad T_x = T_1; \\ T_y = T_2; \quad a_x = a_1; \quad a_y = a_2 \end{array}$$



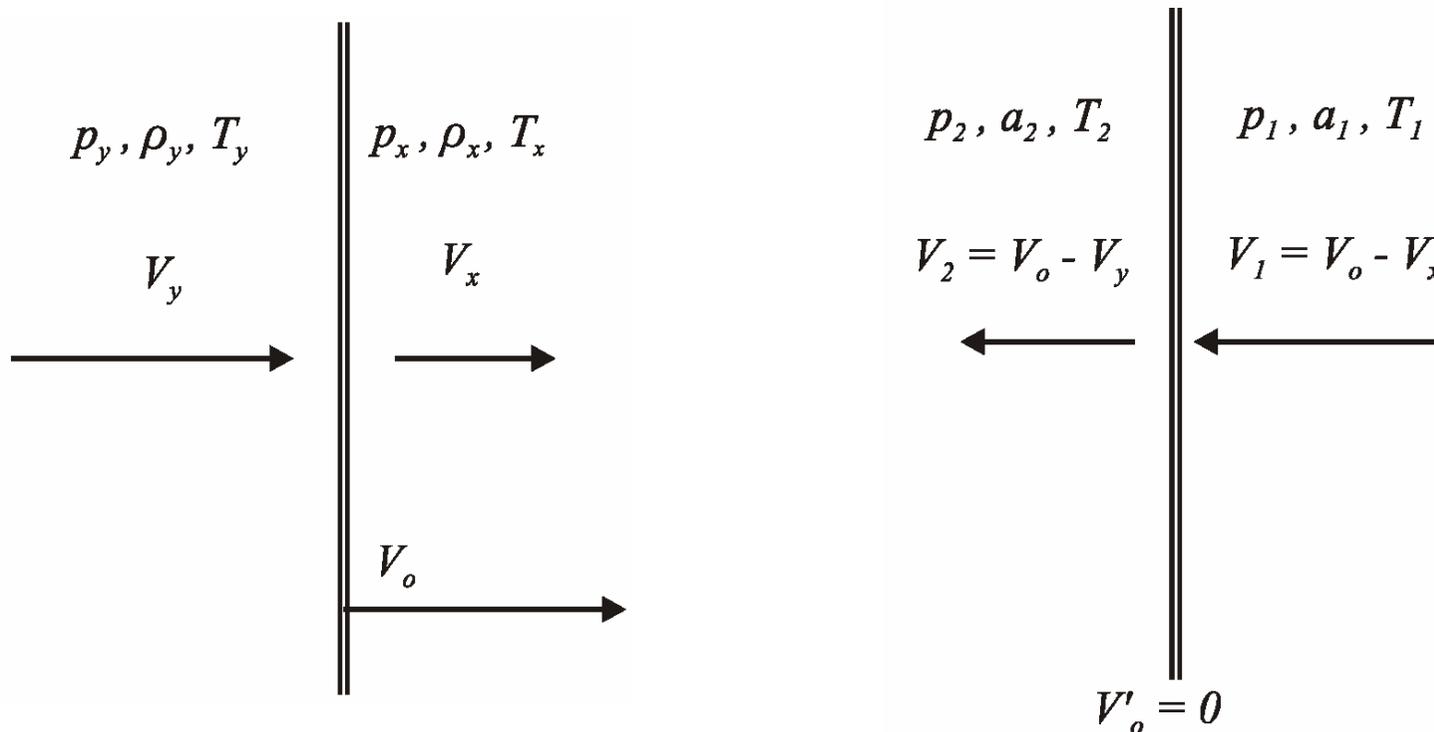
Tenendo conto delle relazioni precedenti, **i due numeri di Mach nel sistema di riferimento con l'onda d'urto in movimento**, risultano:

$$M_x = \frac{V_x}{a_1} \quad ; \quad M_y = \frac{V_y}{a_2}$$

E, **nel sistema con l'onda d'urto stazionaria**:

$$M_1 = \frac{V_o - V_x}{a_1} \quad ; \quad M_2 = \frac{V_o - V_y}{a_2}$$

Nel sistema di riferimento con l'onda d'urto stazionaria è possibile, ora, applicare le formule già trovate in precedenza.



Per quanto riguarda le grandezze di ristagno (temperatura e pressione), per **l'onda d'urto in movimento** si ha:

$$T_{ox} = T_x \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right) \neq T_{oy} = T_y \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_y^2 \right)$$
$$p_{ox} = p_x \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} ; p_{oy} = p_y \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_y^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

mentre, per **l'onda d'urto stazionaria**:

$$T_{o1} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_{o2} = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)$$
$$p_{o1} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} ; p_{o2} = p_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Si noti che T_{ox} è diversa da T_{oy} mentre, nell'onda stazionaria: $T_{o1} = T_{o2}$.
Anche per la p_o può essere $p_{ox} \leq p_o \leq p_{oy}$.

Pertanto, **la soluzione del problema di un'onda d'urto in movimento, di cui si conosca la velocità di propagazione e la velocità del fluido in cui si propaga**, si risolve attraverso **i seguenti 4 passi successivi**:

- **l'onda d'urto è resa stazionaria** sottraendo la velocità dell'onda a quella del fluido in cui si propaga e determinando il numero di Mach a monte;
- **si risolve il problema** per quanto riguarda le grandezze statiche e la V_o **con le formule già ricavate per l'onda d'urto stazionaria**;
- si calcolano **i numeri di Mach per l'onda d'urto in movimento**;
- **si calcolano infine le grandezze di ristagno per l'onda d'urto in movimento**;

Se la velocità dell'onda non è nota, ma lo sono V_x , V_y e $a_x = a_1$, la relazione:

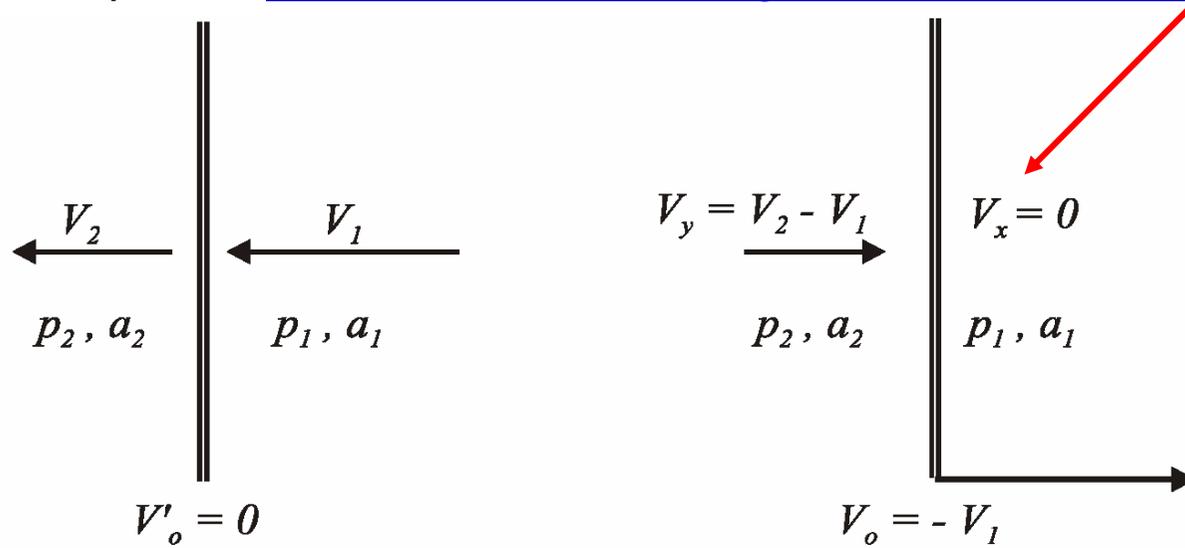
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = (\gamma + 1)M_1^2 \left[2 + (\gamma - 1)M_1^2 \right]^{-1}$$

dell'onda stazionaria conduce all'espressione sulla **velocità di propagazione dell'onda** in funzione di queste velocità:

$$V_o = \frac{(\gamma + 1)V_y - (\gamma - 3)V_x}{4} \pm \left[a_1^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 (V_y - V_x)^2 \right]^{1/2}$$

Delle due soluzioni, occorre, evidentemente, scartare quella con il segno negativo perché priva di significato.

Un caso rilevante è quello per il quale la velocità a monte dell'onda è nulla ($V_x = 0$), cioè quando **l'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete**:



Dall'esame della figura si possono trarre le seguenti conclusioni:

- poiché la velocità V_1 è maggiore della V_2 , **il fluido a valle di un'onda d'urto che si propaga in un fluido in quiete segue l'onda**;
- poiché la velocità dell'onda V_o (in modulo) è uguale a V_1 (che, nel sistema di riferimento con l'onda stazionaria, deve essere maggiore di a_1 perché si abbia l'onda d'urto), **un'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete con una velocità maggiore della velocità del suono nello stesso fluido a_1** .
- Le T_{ox} e p_{ox} sono **minori** delle T_{oy} e p_{oy} rispettivamente, anche per il riscaldamento e la compressione del fluido in y (che in x non si muove).

Se nel caso precedente per il quale è ancora $V_x = 0$, si conosce la V_y e si vuole ricavare la velocità dell'onda V_o , occorre procedere in questo modo.

Dalla figura, indicando con $-V_y = V_p$, si ha:

$$V_p = V_1 - V_2$$

e dividendo tutto per a_1 :

$$\frac{V_p}{a_1} = \frac{V_1}{a_1} - \frac{V_2}{a_1} = M_1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} M_2$$

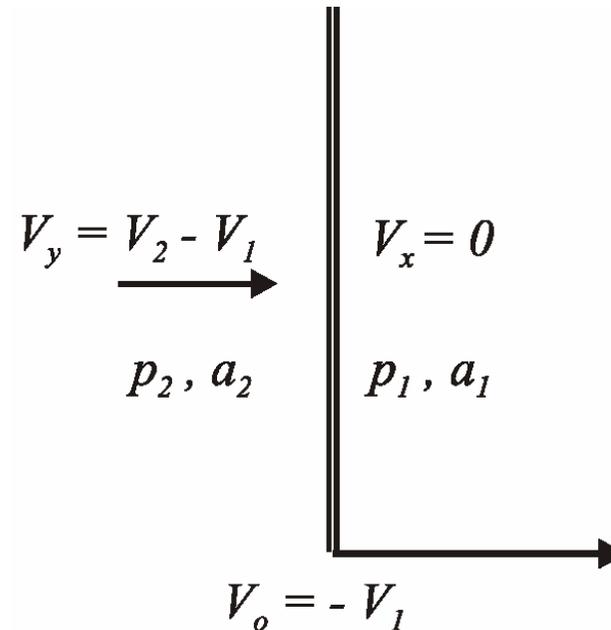
Sostituendo in questa formula:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) (\gamma - 1 + 2M_1^2)$$

e, ponendo $M_p = V_p / a_1$, si ha:

$$M_p = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1}$$



La

$$M_p = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1}$$

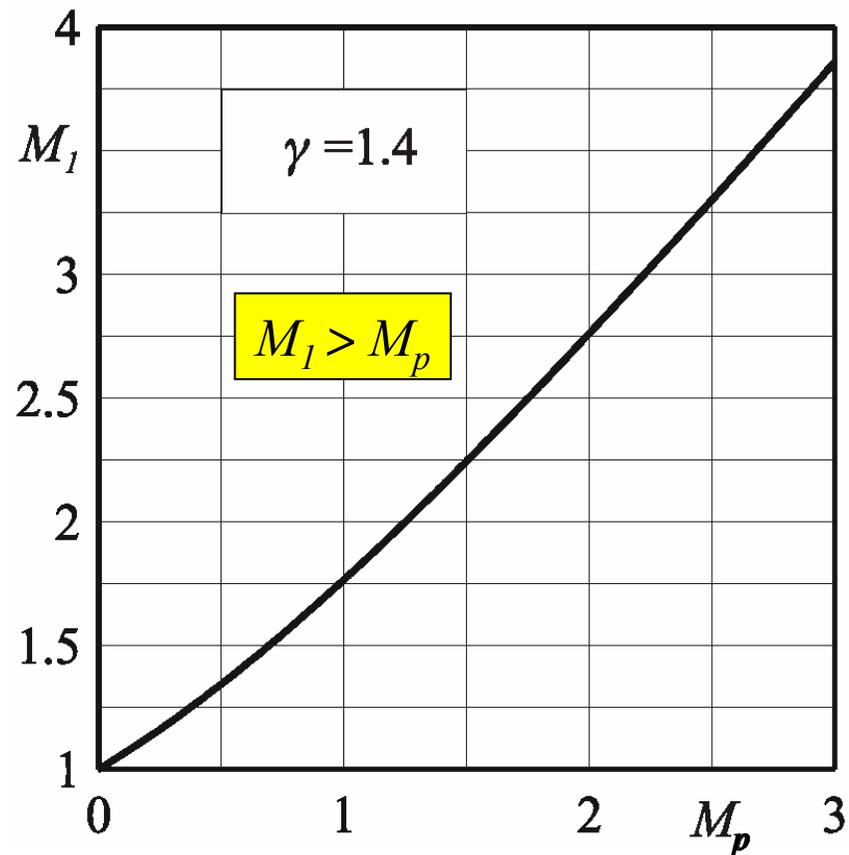
risolta in M_1 (scartando la soluzione negativa) dà luogo alla relazione:

$$M_1 = \frac{\gamma + 1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$$

che è anche rappresentata nella figura a lato per $\gamma = 1.4$.

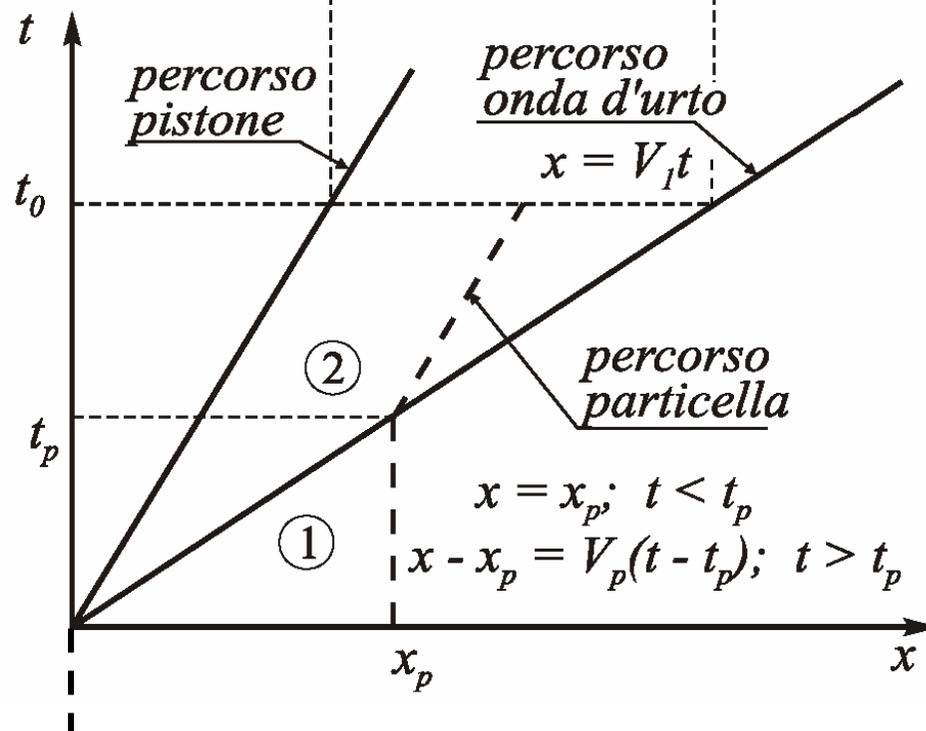
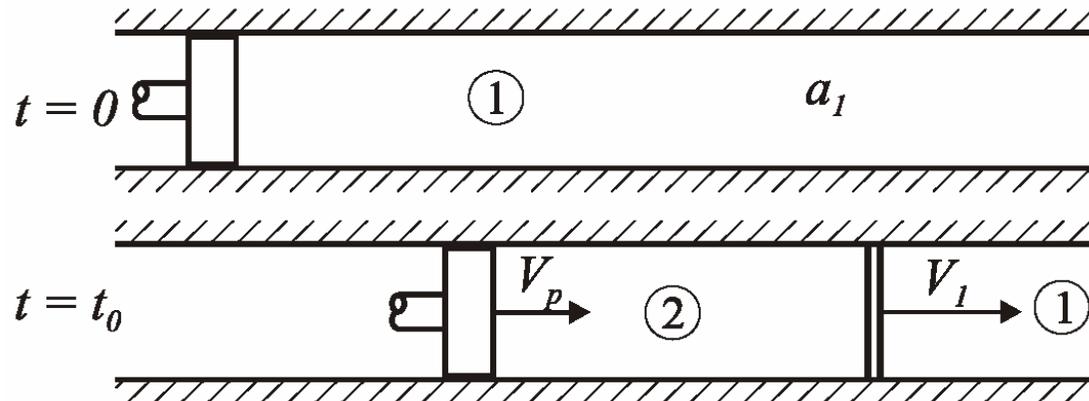
M_1 rappresenta, ovviamente, il numero di Mach, e quindi la velocità, con la quale l'onda si propaga nel mezzo in quiete.

M_p ha il pedice p perchè, come si vedrà tra poco, può assumere il significato di numero di Mach di un pistone che si muove in un condotto.



$$M_1 = \frac{\gamma + 1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$$

$$M_1 > M_p$$



La relazione precedente consente di determinare la velocità di propagazione dell'onda d'urto nella situazione di figura in cui un pistone, a partire dall'istante $t = 0$, è improvvisamente accelerato in un condotto alla velocità V_p .

Nello stesso istante, parte un'onda d'urto normale dalla superficie del pistone con una velocità $V_1 = V_o$, che accelera il fluido a valle di essa alla velocità V_p .

Nella regione (1) il fluido è fermo, nella regione (2) muove a velocità V_p .