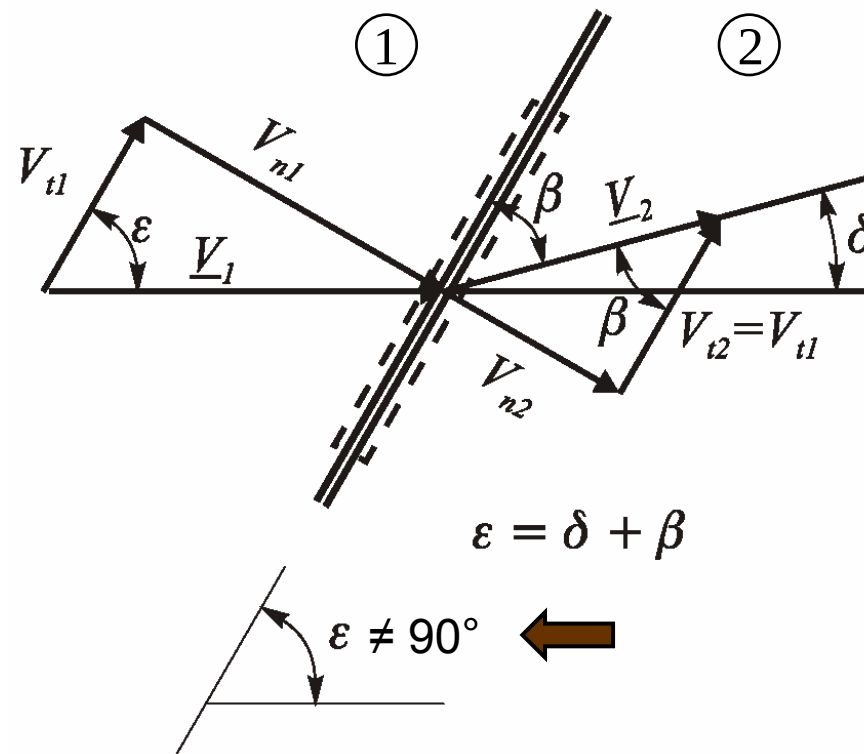


# ONDA D'URTO OBLIQUA STAZIONARIA

Nella figura è mostrato il volume di controllo relativo al caso di **un'onda d'urto obliqua stazionaria inclinata di un angolo  $\varepsilon \neq 90^\circ$  (detto angolo d'urto)** rispetto alla direzione della corrente a monte. L'onda d'urto obliqua **non è più normale** rispetto alla  $V_1$ .

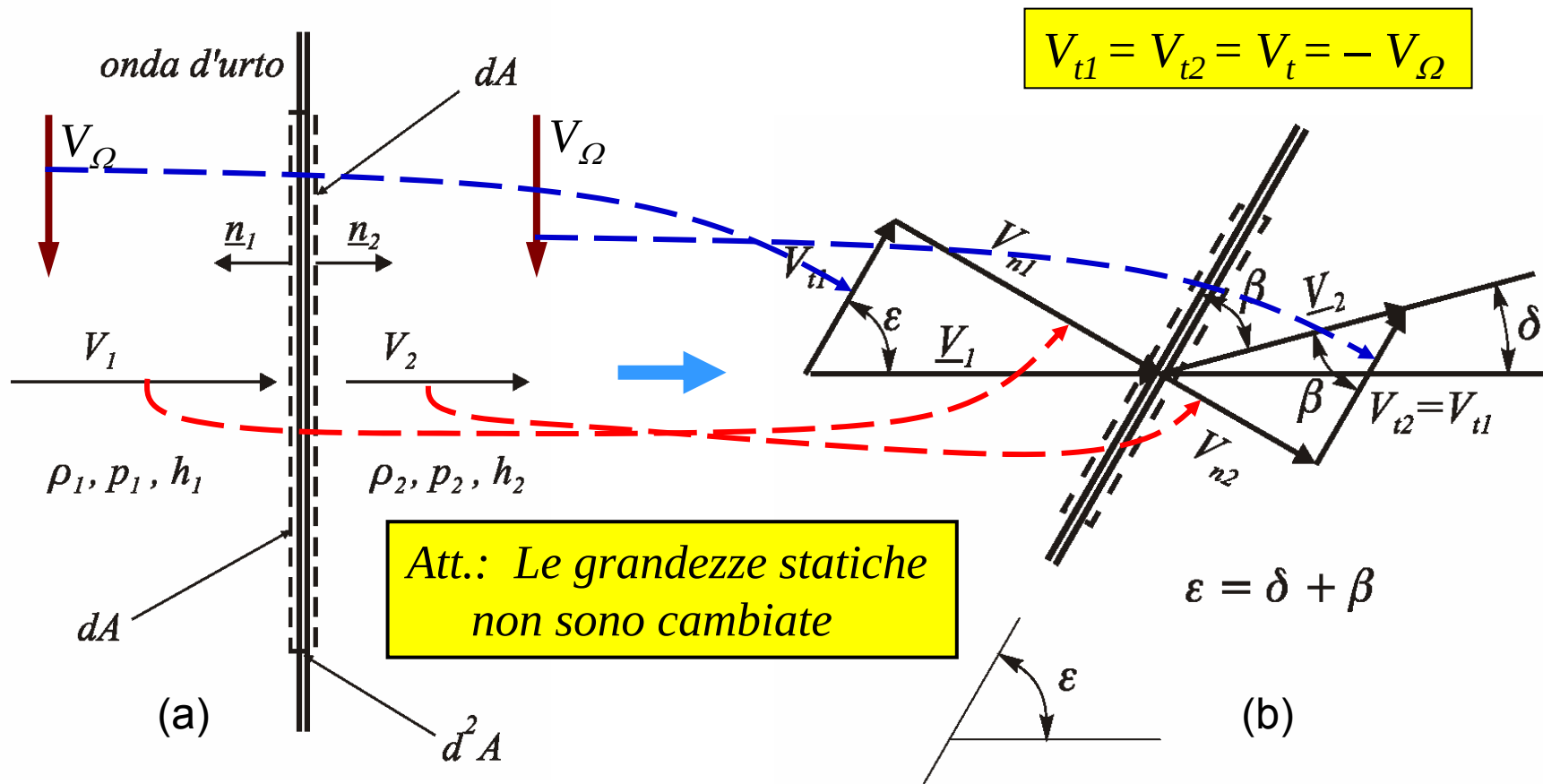
Questo caso si può derivare da quello dell'onda d'urto normale stazionaria, cambiando il sistema di riferimento inerziale rispetto al quale si scrivono le equazioni del bilancio.



Si consideri nuovamente il volume di controllo dell'onda d'urto normale

Se, ora, un nuovo sistema di riferimento si muove rispetto a quella inerziale di Fig.(a) dall'alto verso il basso (parallelamente all'onda d'urto) con velocità  $V_\Omega$  costante, anche questo sistema sarà inerziale.

Per l'osservatore solidale a questo nuovo sistema, sia il fluido a monte che quello a valle dell'onda appariranno dotati, oltre che delle preesistenti rispettive velocità  $V_1$  e  $V_2$ , normali all'onda, anche di una velocità parallela all'onda che è la stessa per entrambi i fluidi ed è pari a:



L'equazione di conservazione della massa per un'onda d'urto obliqua risulta pertanto:

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

L'equazione del bilancio della quantità di moto dà luogo a:

$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

che ovviamente rappresenta la proiezione, in direzione normale all'onda d'urto, dell'equazione vettoriale:

$$d\dot{m} (\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA (p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

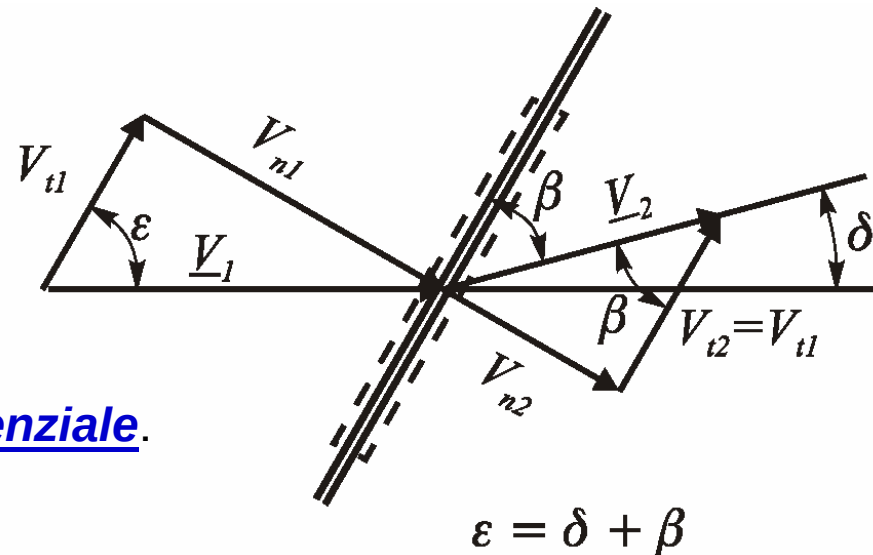
L'altra proiezione, nella direzione tangenziale all'onda d'urto, dà luogo invece alla:

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2}$$

che, per l'equazione di continuità, mostra:

$$V_{t1} = V_{t2}$$

costanza della componente tangenziale.



La costanza della componente tangenziale della velocità, associata alla riduzione della componente normale, genera la deviazione della corrente di un angolo  $\delta$  (detto **angolo di deviazione della corrente**).

La sostituzione di  $V_{n1}$  e  $V_{n2}$  rispettivamente al posto di  $V_1$  e  $V_2$  nella:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

conduce ad una **forma strana** dell'equazione di conservazione dell'energia (l'energia cinetica non ha componenti !) e in particolare:

$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2}$$

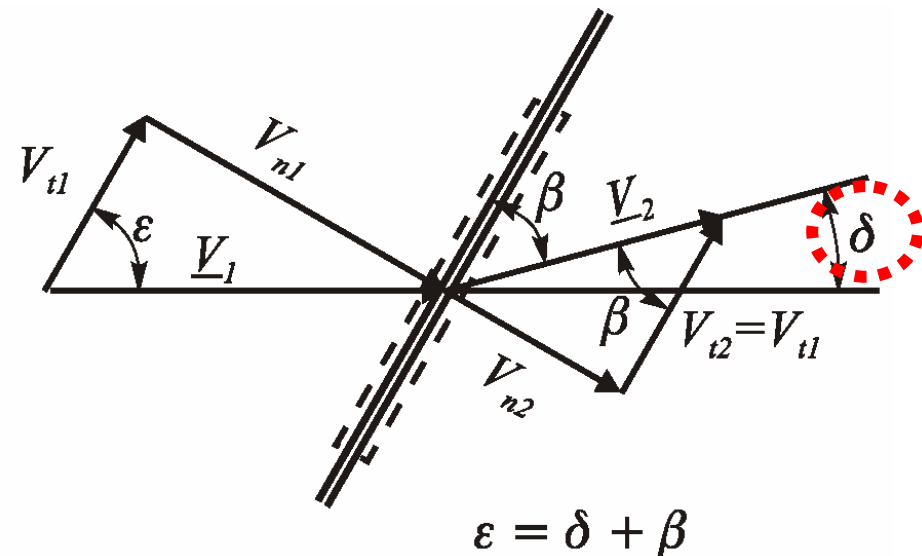
ma:

$$V_{t1} = V_{t2}$$

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

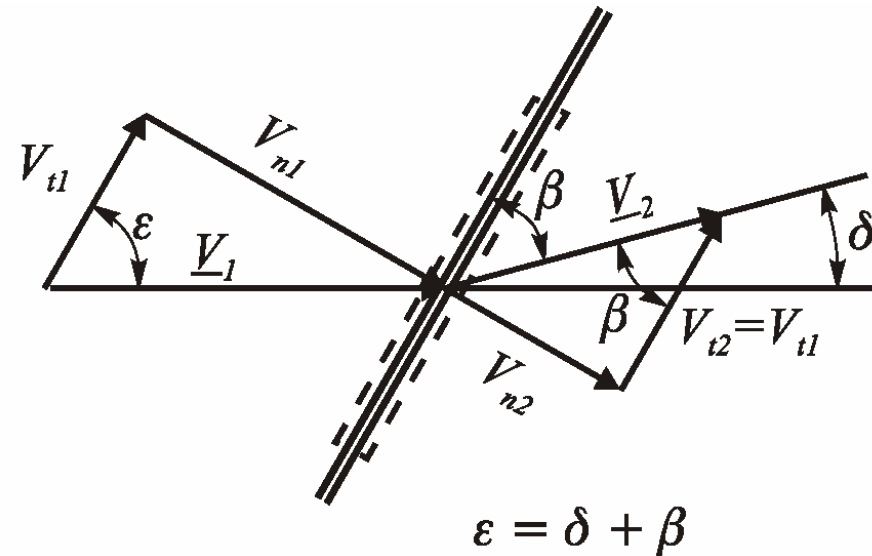
$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

**Un'onda d'urto obliqua è quindi riconducibile ad un'onda d'urto normale purché si considerino le sole componenti normali della velocità  $V_{n1}$  e  $V_{n2}$ .**



Per poter calcolare un'onda d'urto obliqua, si introduce quindi la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda d'urto definita come:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{a_1} = M_1 \sin \varepsilon$$



L'introduzione di  $M_{n1}$ , che ovviamente deve essere maggiore o uguale ad 1, risulta particolarmente utile perché i parametri termofluidodinamici a valle dell'onda d'urto obliqua (inclinata rispetto alla corrente con un angolo  $\varepsilon$ ) risultano identici a quelli a valle di un'onda d'urto normale ( $\varepsilon = 90^\circ$ ) per la quale il numero di Mach a monte sia proprio uguale a  $M_{n1}$ .

Ovviamente, anche il numero di Mach a valle andrà riguardato come componente normale del numero di Mach a valle dell'onda d'urto obliqua:

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \frac{V_2 \sin \beta}{a_2} = M_2 \sin \beta = M_2 \sin(\varepsilon - \delta)$$

**Ne consegue che tutte le relazioni viste per le onde d'urto normali stazionarie sono ancora valide, purché  $M_1$  e  $M_2$  siano rispettivamente sostituiti con le quantità  $M_{n1} = M_1 \sin \varepsilon$  e  $M_{n2} = M_2 \sin \beta$ :**

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad \longrightarrow \quad M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon + 2}{(2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \sin^2 \beta}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \quad \longrightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \left[ \gamma - 1 + 2(M_1^2 \sin^2 \varepsilon) \right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left[ 2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right]^{-1}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[ (\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left( \gamma - 1 + 2M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right)^\gamma (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[ (\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left( \gamma - 1 + 2M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right)^\gamma \left( 2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1 \right) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Occorre qui osservare esplicitamente che ***non è formalmente corretto ricavare il rapporto delle pressioni di ristagno, dalla relazione relativa alle onde d'urto normali*** poiché questa non tiene conto della componente tangenziale della velocità.

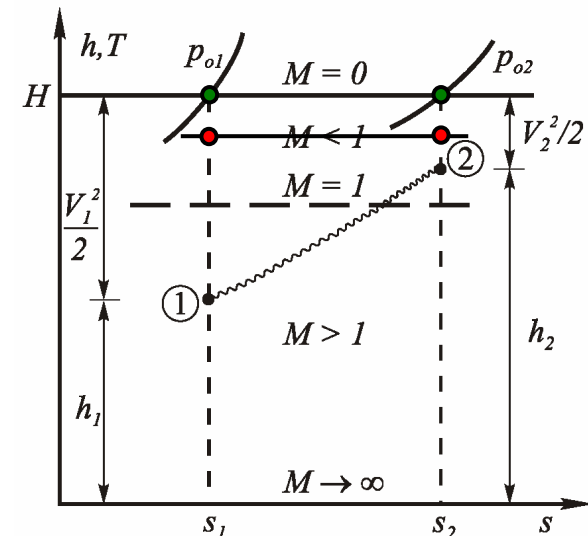
Tuttavia, se sul piano  $h$ - $s$  si individuano i due stati di ristagno normali (in rosso), essi risulteranno allineati in orizzontale, così come lo saranno i due stati totali (in verde) i quali si ottengono aggiungendo ai primi lo stesso contributo entalpico relativo all'uguale componente tangenziale della velocità.

**Gli stati totali avranno, ovviamente, lo stesso salto entropico di quelli normali.**

La relazione precedente è quindi giustificata dalla:

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

**Per un gas più che perfetto si ha: stesso salto entropico, stesso rapporto delle pressioni di ristagno.**



$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1)$$

Si nota che, per dati  $M_1$  e  $p_1$ , l'aumento di pressione attraverso l'onda d'urto dipende dall'angolo  $\varepsilon$  che l'onda forma con la direzione della corrente a monte.

In particolare, l'onda d'urto normale dà luogo al massimo aumento di pressione attraverso l'urto ( $\sin^2 \varepsilon = 1$ ). Al diminuire di  $\varepsilon$ , la quantità  $\sin^2 \varepsilon$  diminuisce anch'essa, e quindi il rapporto  $p_2/p_1$  diminuisce.

Il valore limite (inferiore) dell'angolo d'urto:

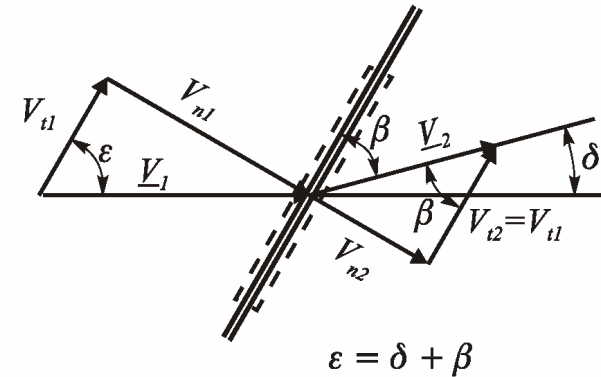
$$\varepsilon_{min} = \mu = \arcsin(1/M_1)$$

dà luogo a  $p_2/p_1 = 1$ , che corrisponde al caso di un'onda di Mach che non produce alcun aumento di pressione della corrente.

Valori di  $\varepsilon < \mu$  non sono possibili perché la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda risulterebbe inferiore all'unità.

Si ricordi a tal proposito la relazione già vista:

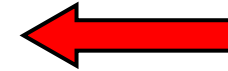
$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{a_1} = M_1 \sin \varepsilon$$

$$V_{t1} = V_{t2} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\cancel{V_{t2}}}{\cos \beta} \frac{\cos \varepsilon}{\cancel{V_{t1}}} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \beta}$$
~~$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$~~
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{V_2 \sin \beta} = \frac{\cos \beta \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon \sin \beta} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \beta} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan (\varepsilon - \delta)}$$
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left[ 2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right]^{-1}$$

$$\tan (x-y)=(\tan x-\tan y) /\left(1+\tan x \tan y\right)$$

$$\frac{(\gamma + l)M_l^2 \sin^2 \varepsilon}{2 + (\gamma - l)M_l^2 \sin^2 \varepsilon} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan(\varepsilon - \delta)}$$
$$\tan \delta = \left( \frac{\gamma + I}{2 \left( \sin^2 \varepsilon - I/M_1^2 \right)} - I \right)^{-1} \cot \varepsilon$$

$$\tan \delta = \left( \frac{\gamma + 1}{2 \left( \sin^2 \varepsilon - 1/M_1^2 \right)} - 1 \right)^{-1} \cot \varepsilon$$



Da questa relazione, è interessante notare che la deviazione della corrente è nulla sia nel caso per il quale:

$$\cot \varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon = 90^\circ$$

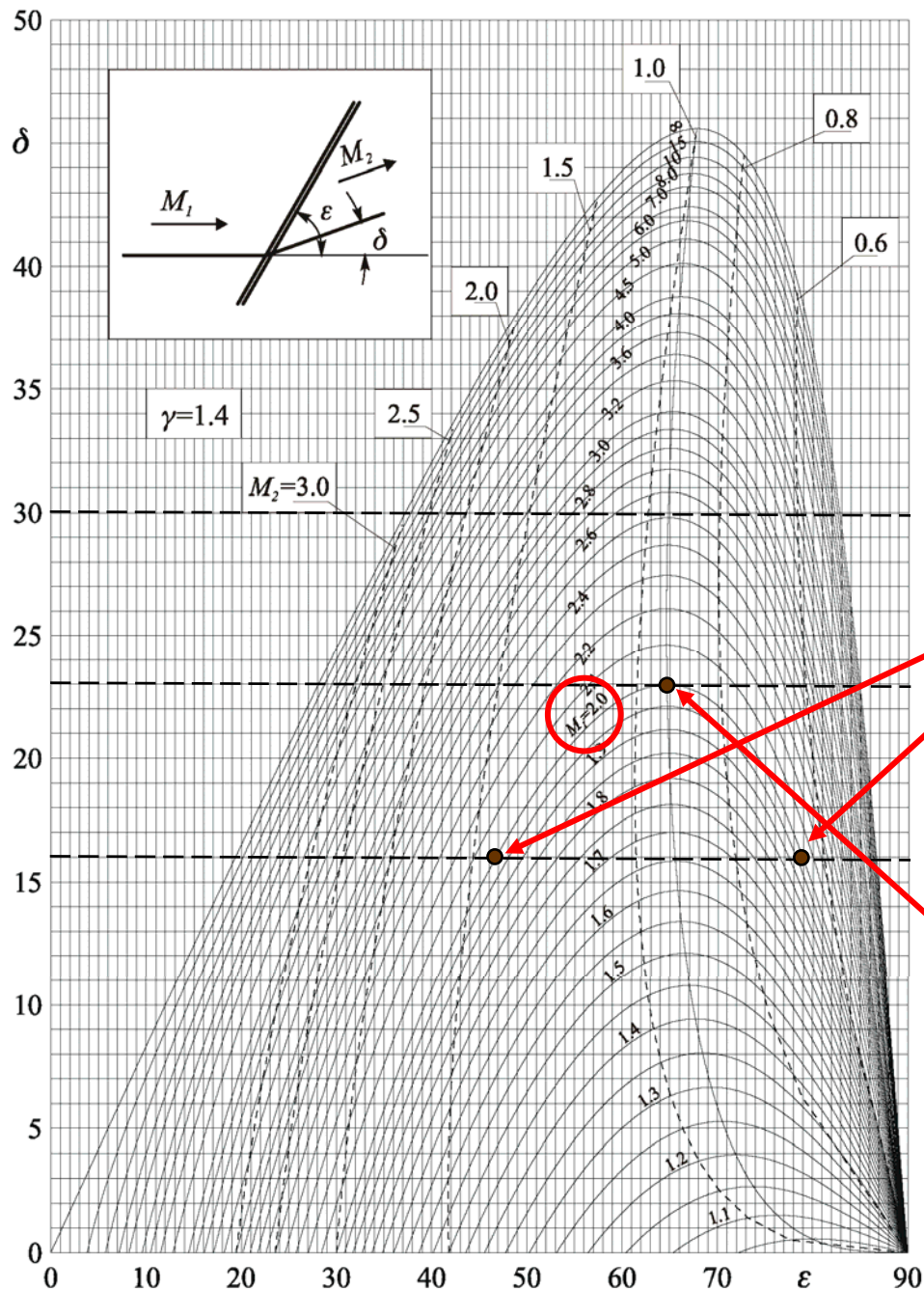
corrispondente all'onda d'urto normale, così come nel caso in cui:

$$\sin^2 \varepsilon_{min} - 1/M_1^2 = 0$$

relativo a quella che è stata già definita onda di Mach, la cui inclinazione (nel seguito sempre indicata con il simbolo  $\mu$ ) risulta come già scritto pari a:

$$\varepsilon_{min} = \mu = \arcsin(1/M_1)$$

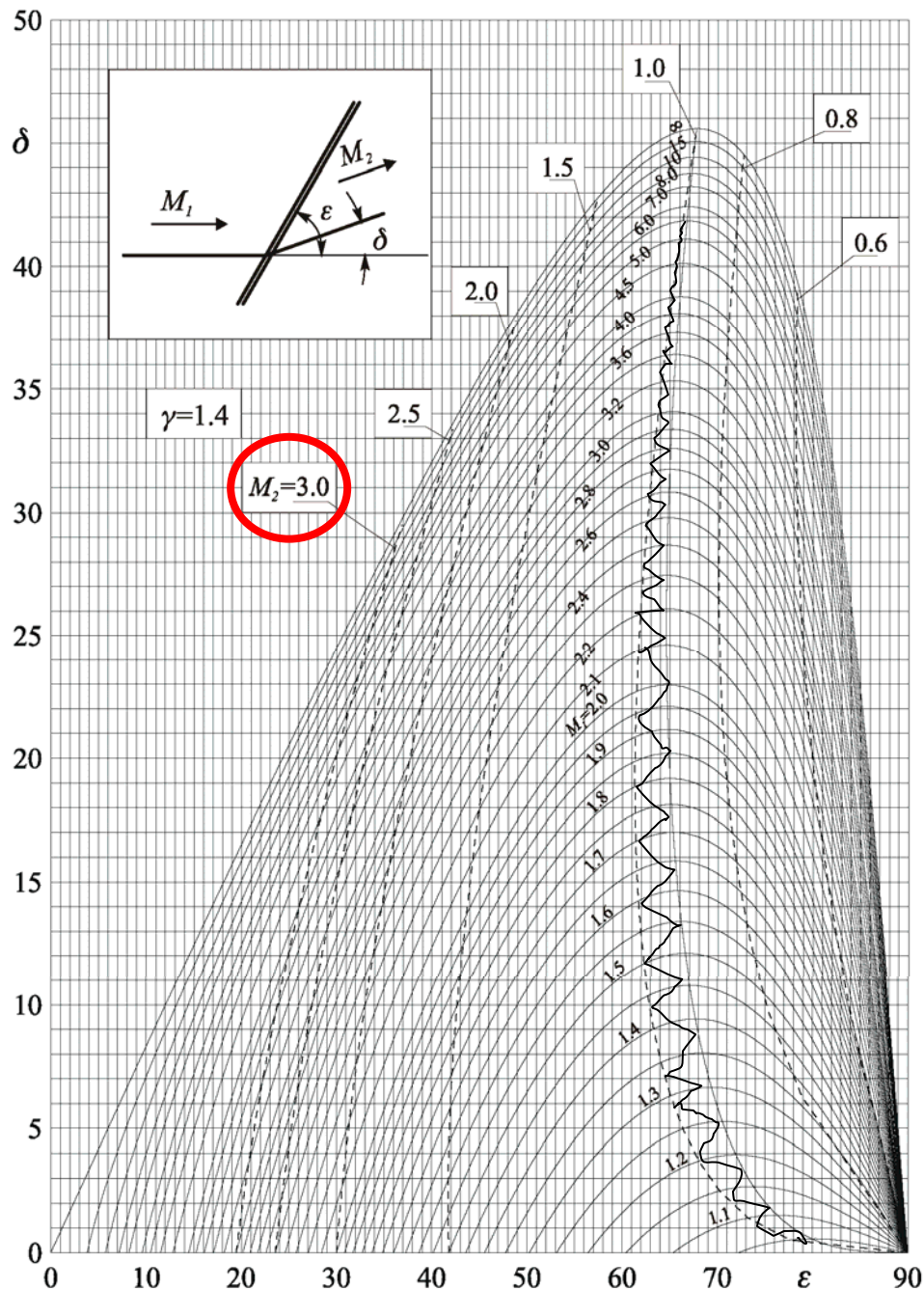
L'onda di Mach, dunque, è quella per la quale il numero di Mach normale è pari ad 1 per cui essa non comporta alcuna variazione finita delle proprietà termofluidodinamiche del fluido.



Per un dato numero di Mach, al crescere del valore di  $\delta$ , si hanno tre possibilità: due soluzioni con valori distinti dell'angolo di inclinazione dell'onda d'urto  $\varepsilon$ ; una sola soluzione (all'apice della curva corrispondente al numero di Mach assegnato); nessuna soluzione.

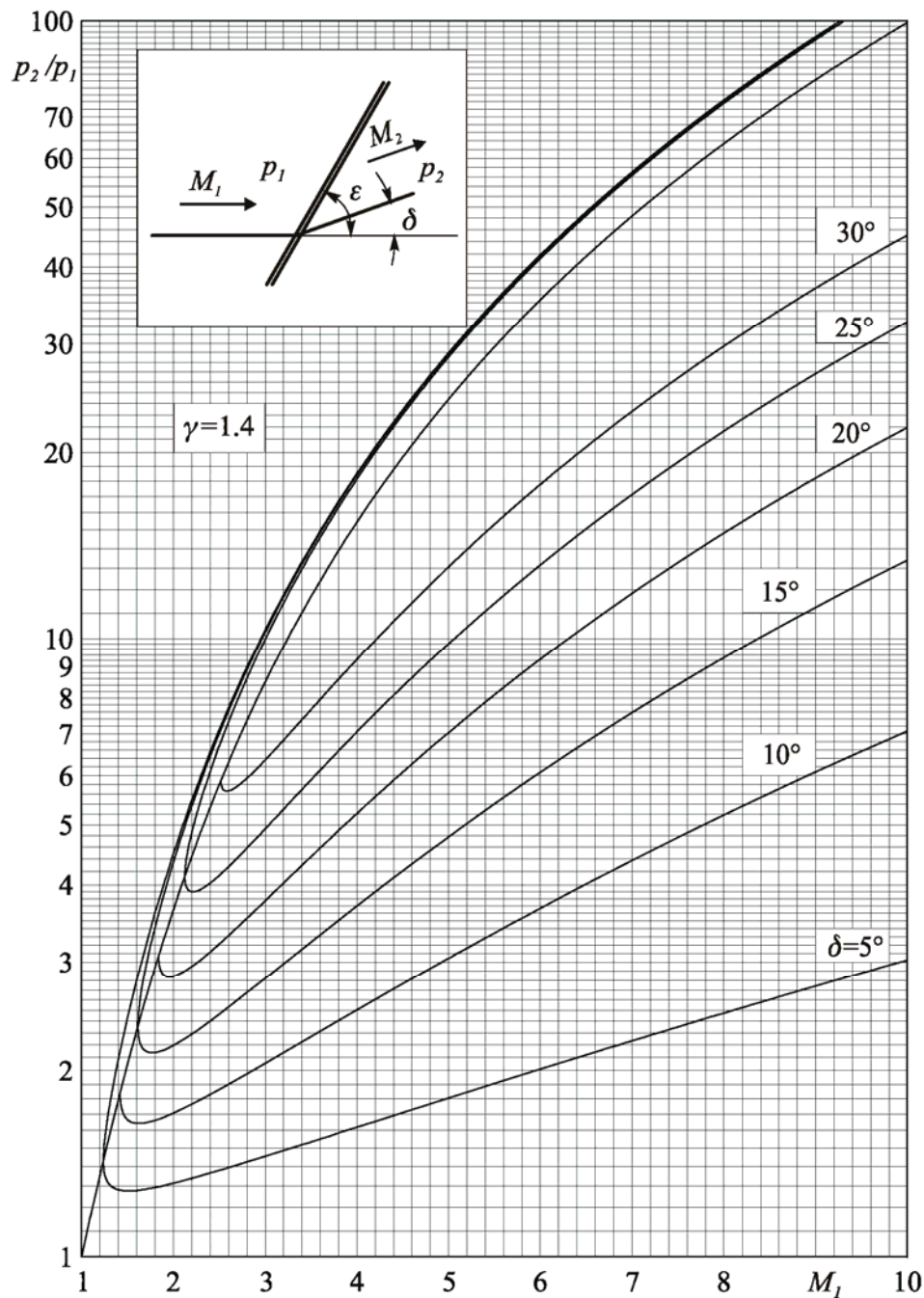
Nel caso delle due soluzioni, la prima (valore di  $\varepsilon$  più basso) è detta soluzione debole mentre l'altra soluzione forte. Ciò perché, per un dato numero di Mach a monte dell'onda d'urto, valori maggiori di  $\varepsilon$  corrispondono ad un più elevato numero di Mach normale e di conseguenza ad una più alta intensità di urto.

La soluzione unica corrisponde al caso di massima deviazione possibile della corrente  $\delta_{max}$  per un dato numero di Mach.



L'assenza di soluzioni per  $\delta > \delta_{max}$  sta a significare che, se alla corrente è imposta una deviazione maggiore di quella massima possibile per quel dato numero di Mach, non si può deviare la corrente con una semplice onda d'urto obliqua. Si vedrà poi cosa succede.

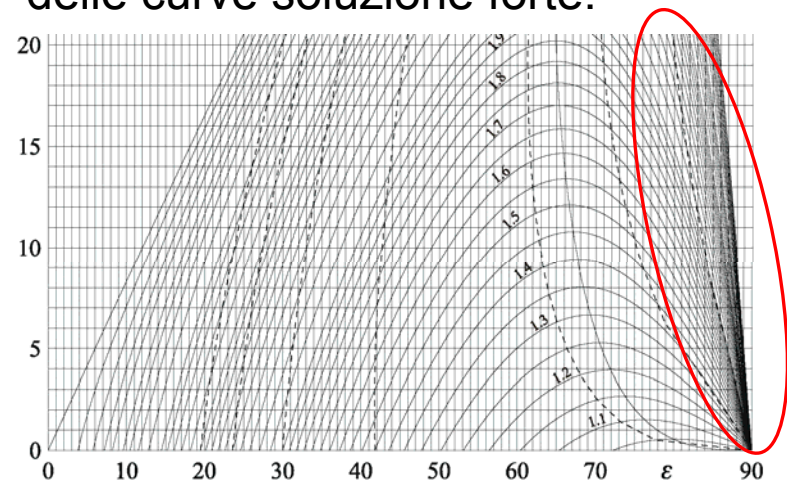
Nella figura sono anche indicati (curve tratteggiate) alcuni valori di  $M_2$ . In particolare la curva  $M_2 = 1$  mostra che: la soluzione forte conduce sempre ad un valore di  $M_2 < 1$ , la soluzione debole dà luogo quasi sempre ad un valore di  $M_2 > 1$ , salvo che nella piccola zona in prossimità dell'angolo di deviazione massima della corrente per la quale  $M_2 < 1$ . L'angolo  $\epsilon$  varia tra  $\mu$  e  $90^\circ$ .



Nella figura a lato è diagrammato, in scala semilogaritmica il **rapporto delle pressioni** in funzione del numero di Mach a monte dell'onda, per diversi valori dell'angolo di deviazione  $\delta$ .

La soluzione forte e quella debole sono separate dalla curva luogo dei massimi delle curve della figura precedente.

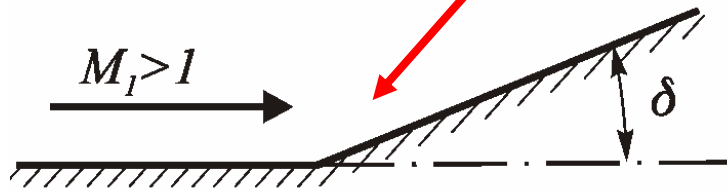
La soluzione forte dà luogo ad **una compressione abbastanza indipendente da  $\delta$** . A tal proposito si ricordi la forte pendenza delle curve soluzione forte.



# MOTO SUPERSONICO SU UN DIEDRO

Si consideri un flusso supersonico uniforme (per semplicità considerato **non viscoso**) su una parete che ad un certo punto devia bruscamente di un angolo  $\delta$  per la presenza di una **concavità**, ovvero di un **diedro infinito** con angolo di semiapertura anche esso uguale a  $\delta$ .

In dipendenza dai valori di  $M_1$  e di  $\delta$ , sono possibili i tre comportamenti prima descritti: **due soluzioni** con valori distinti dell'angolo  $\epsilon$ ; **una sola soluzione** **nessuna soluzione**.

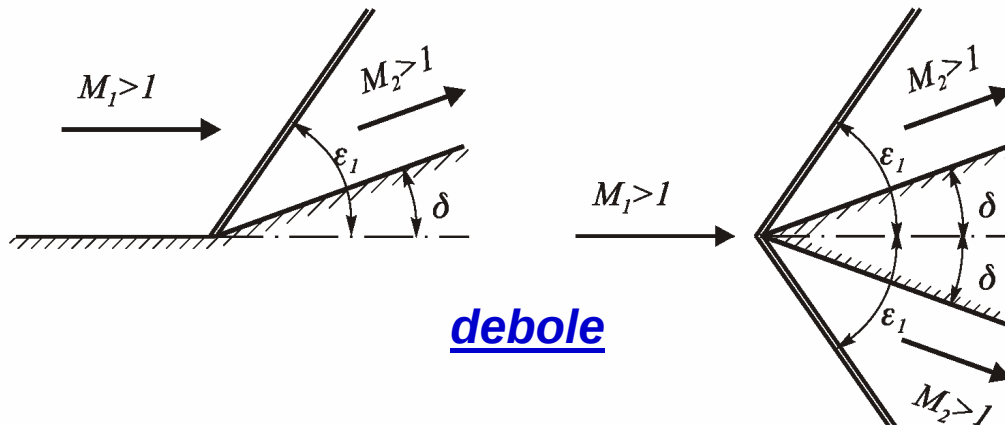


a)

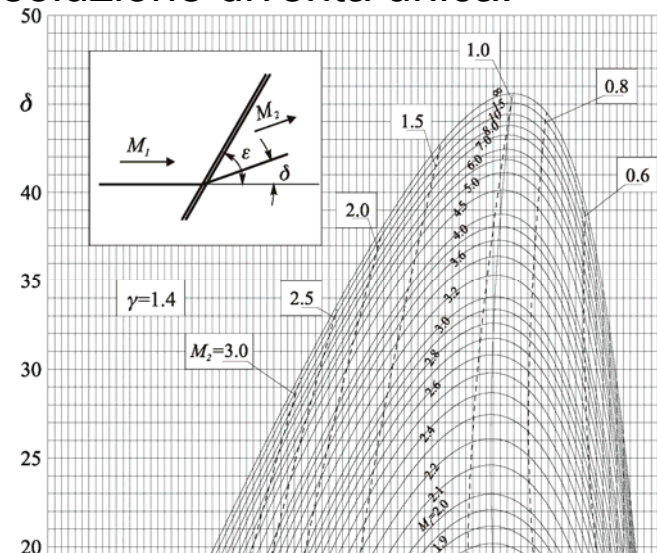
*Concavità angolosa*

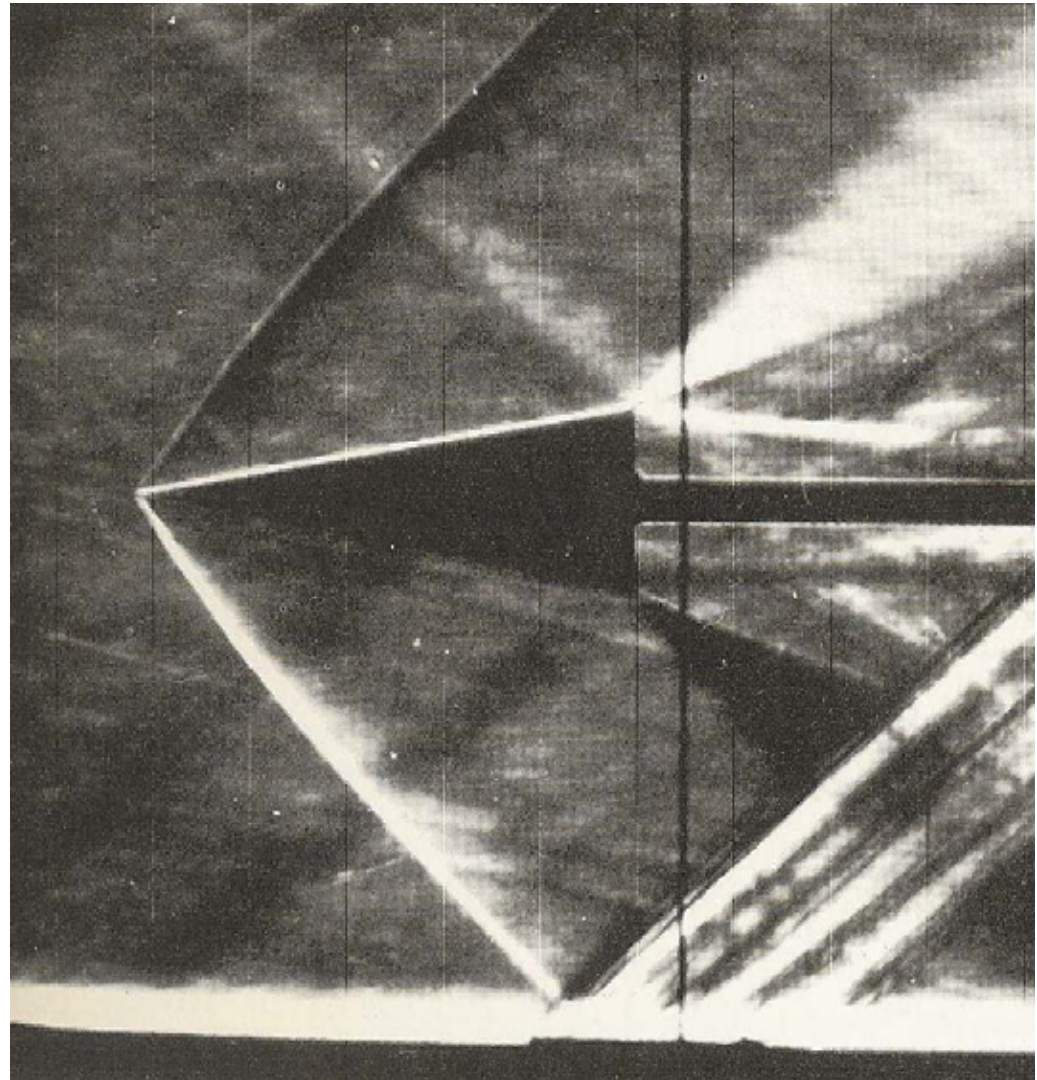
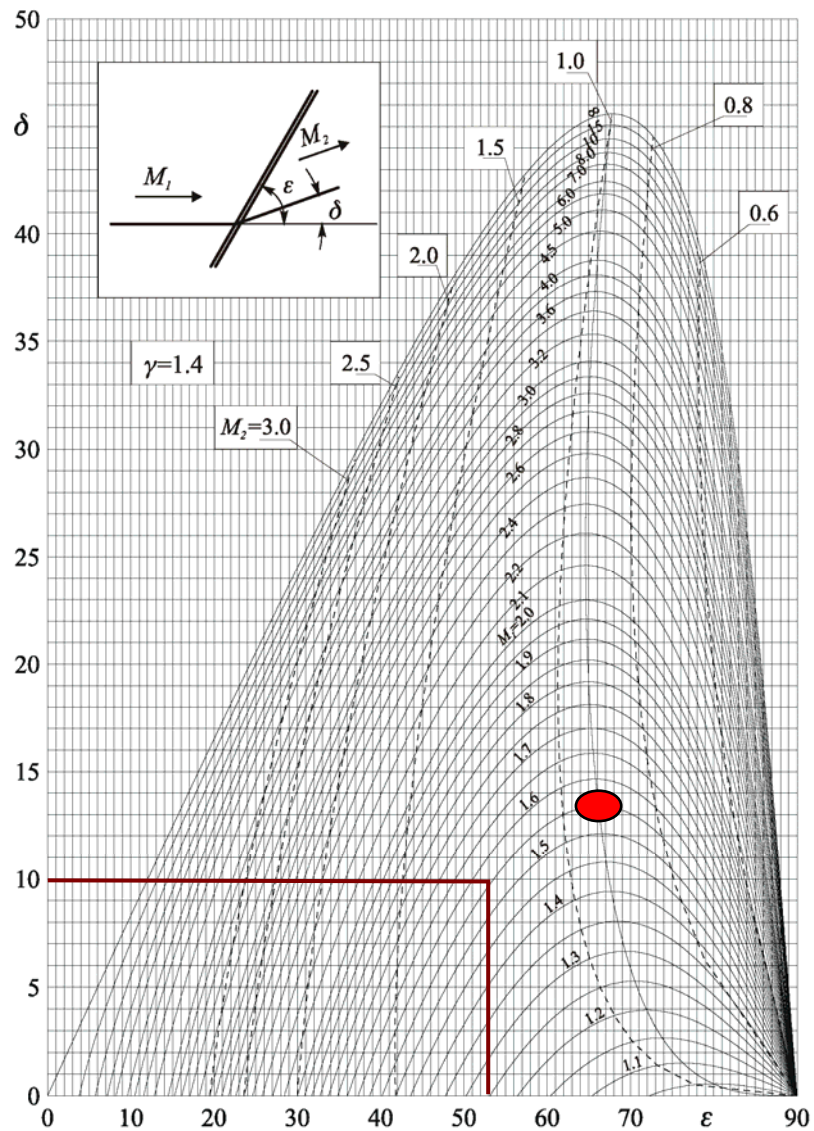
*Diedro (bidimensionale piano)*

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione  $\delta$  cui la corrente deve essere soggetta risulta minore dell'angolo di deviazione massima corrispondente al valore di  $M_1$ . In questo caso sono teoricamente possibili entrambe le soluzioni, debole e forte. L'esperienza mostra che la soluzione che fisicamente accade in questi casi è quella debole.



All'aumentare dell'angolo di deviazione  $\delta$ , e/o al diminuire del numero di Mach a monte, i due angoli di inclinazione  $\varepsilon$  delle onde d'urto, relativi alla soluzione debole e a quella forte, tendono ad avvicinarsi sino a che coincidono e la soluzione diventa unica.





*Immagine Schlieren di un flusso supersonico di aria su un diedro con  $M_1 = 1.56$  e  $\delta = 10^\circ (< \delta_{max})$*