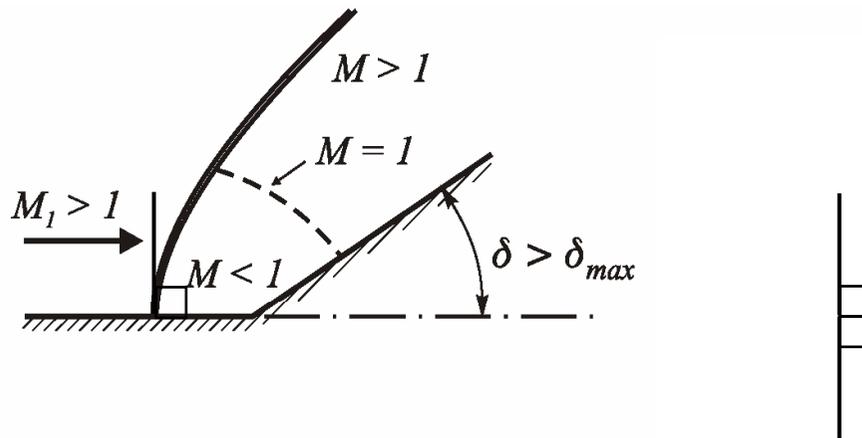


Per $\delta > \delta_{max}$ non esiste un'onda d'urto obliqua in grado di deviare la corrente dell'angolo δ . Nel caso di $\gamma = 1.4$, ciò accade, ad es., qualunque sia il numero di Mach a monte della corrente, se $\delta > 45.58^\circ$ (limite per $M \rightarrow \infty$).

L'onda d'urto allora si stacca dal punto angolare e si sposta a monte di quest'ultimo (**onda d'urto staccata**).

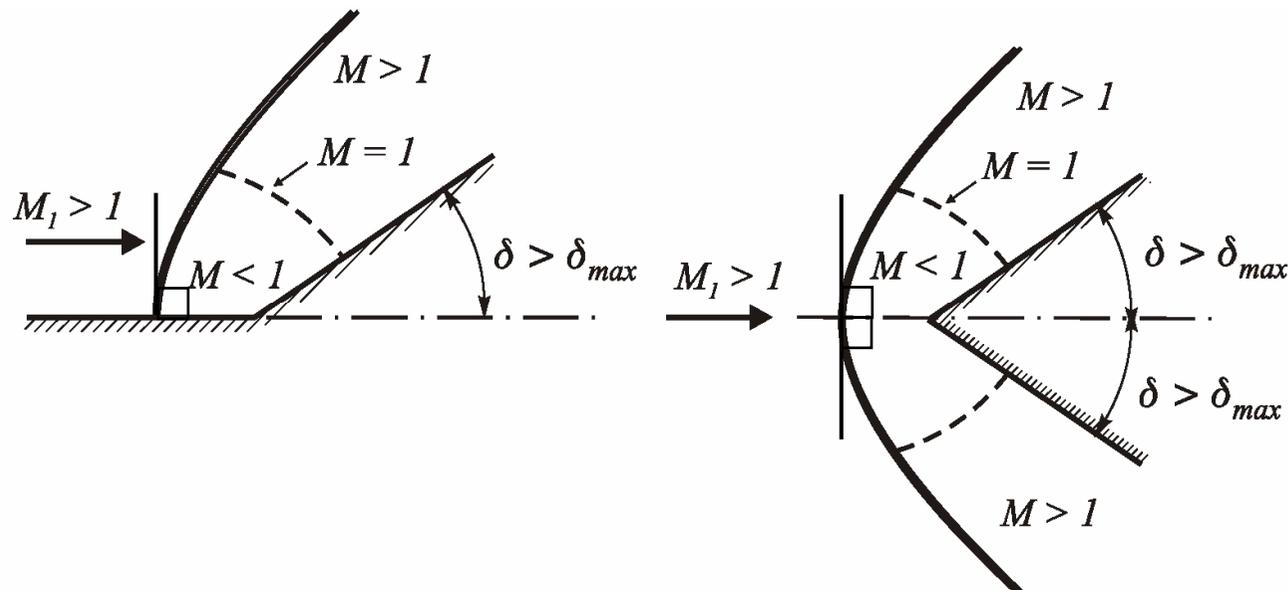
Poiché nel caso di flusso su parete, su questa (o sul piano di mezzzeria del diedro nel caso del diedro) **la corrente non deve essere deviata**, e poiché le uniche onde che non deviano la corrente sono quelle normali o quelle di Mach, l'onda d'urto sulla parete (o sul piano di mezzzeria del diedro) deve essere **necessariamente normale** alla direzione della corrente.



L'onda d'urto, che sulla parete, o sul piano di mezzeria, è normale alla corrente e presenta alti valori di ε nelle sue vicinanze, rende il moto subsonico permettendo, perciò, al flusso di deviare di un angolo maggiore di δ_{max} .

Man mano che ci si allontana dalla parete (o dal piano di mezzeria) l'onda d'urto diventa progressivamente meno verticale (ε diminuisce), e quindi meno forte, ed il numero di Mach, a valle di essa, tende ad aumentare sino a poter diventare supersonico.

Le linee tratteggiate rappresentano le linee soniche (sulle quali $M = 1$).



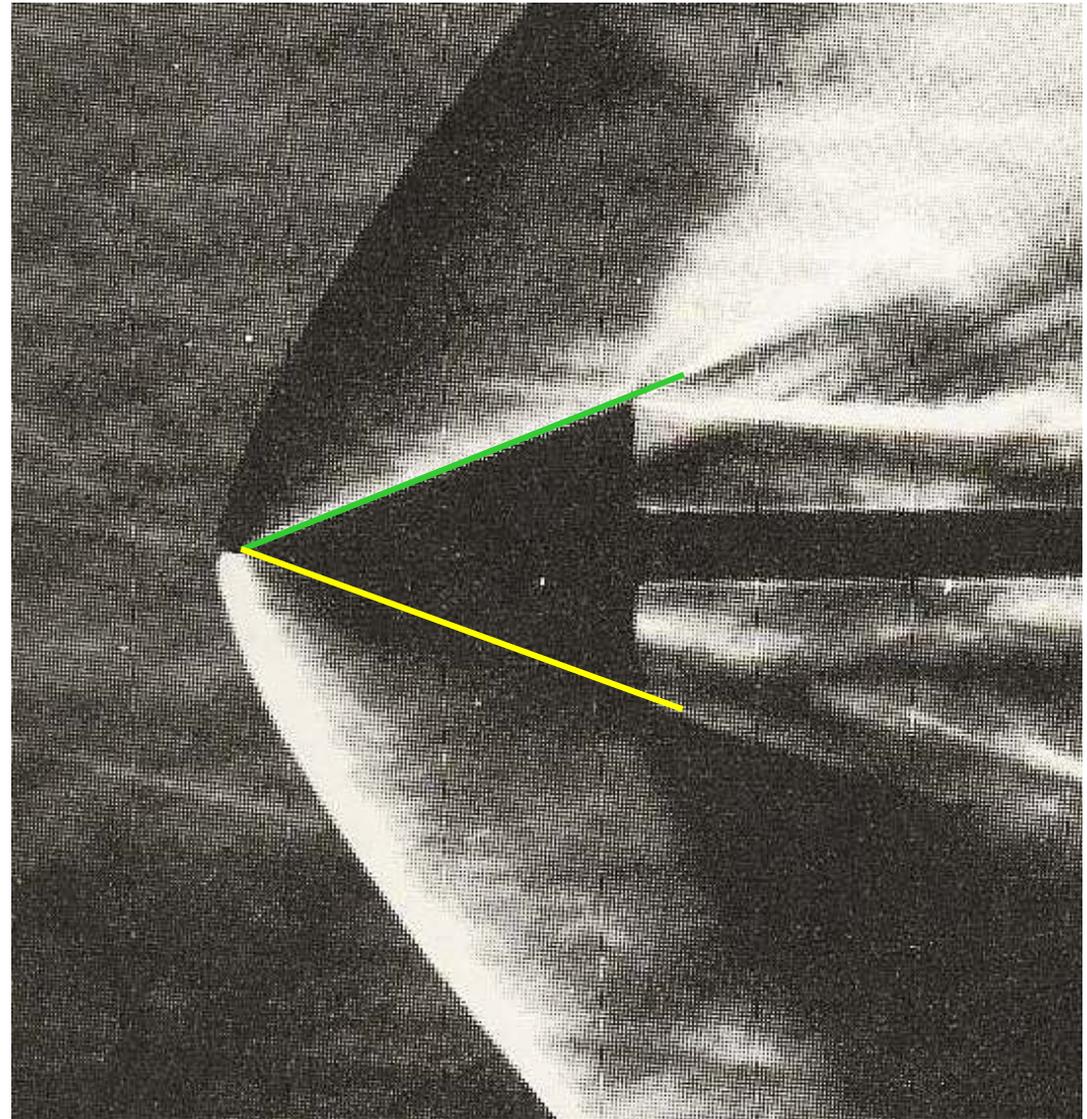
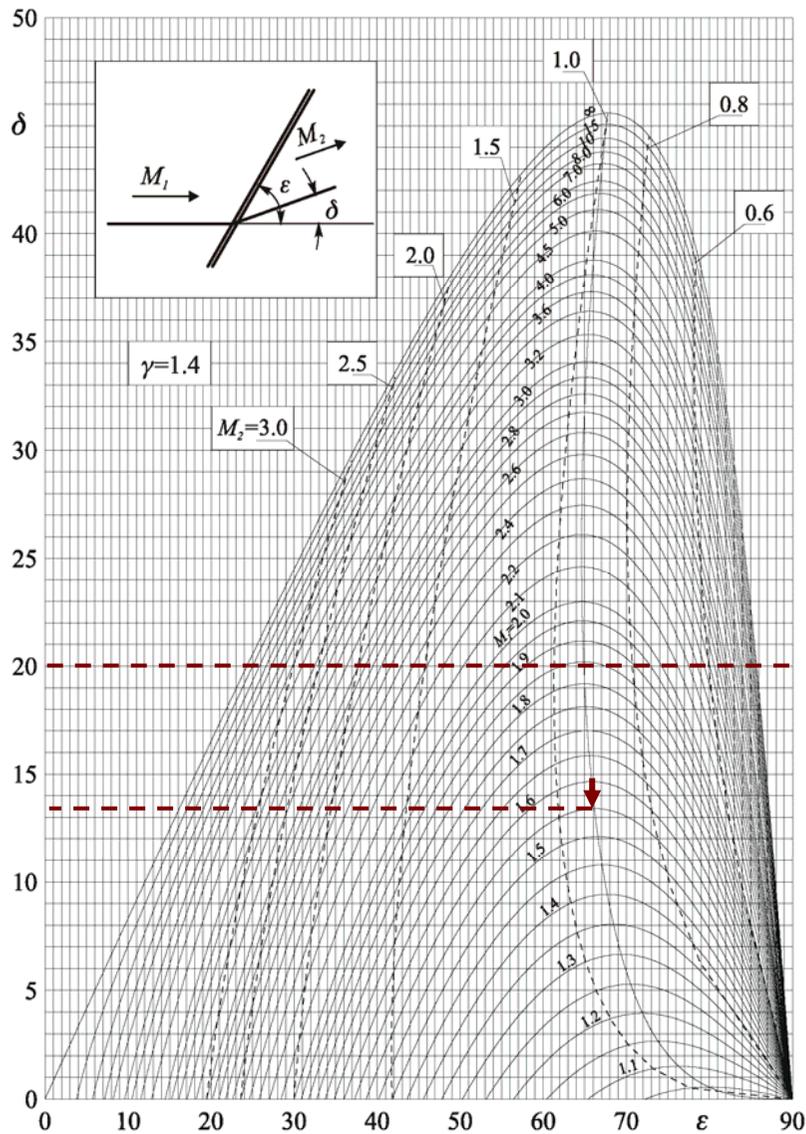
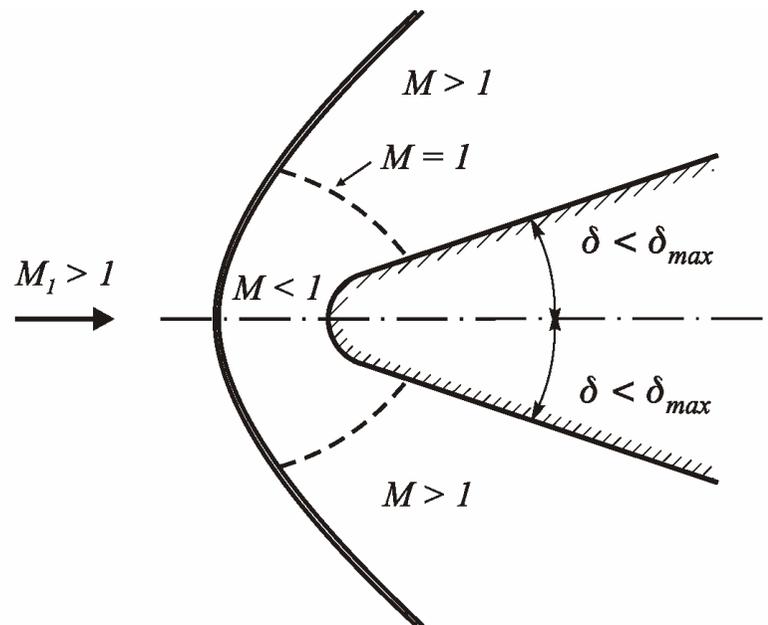
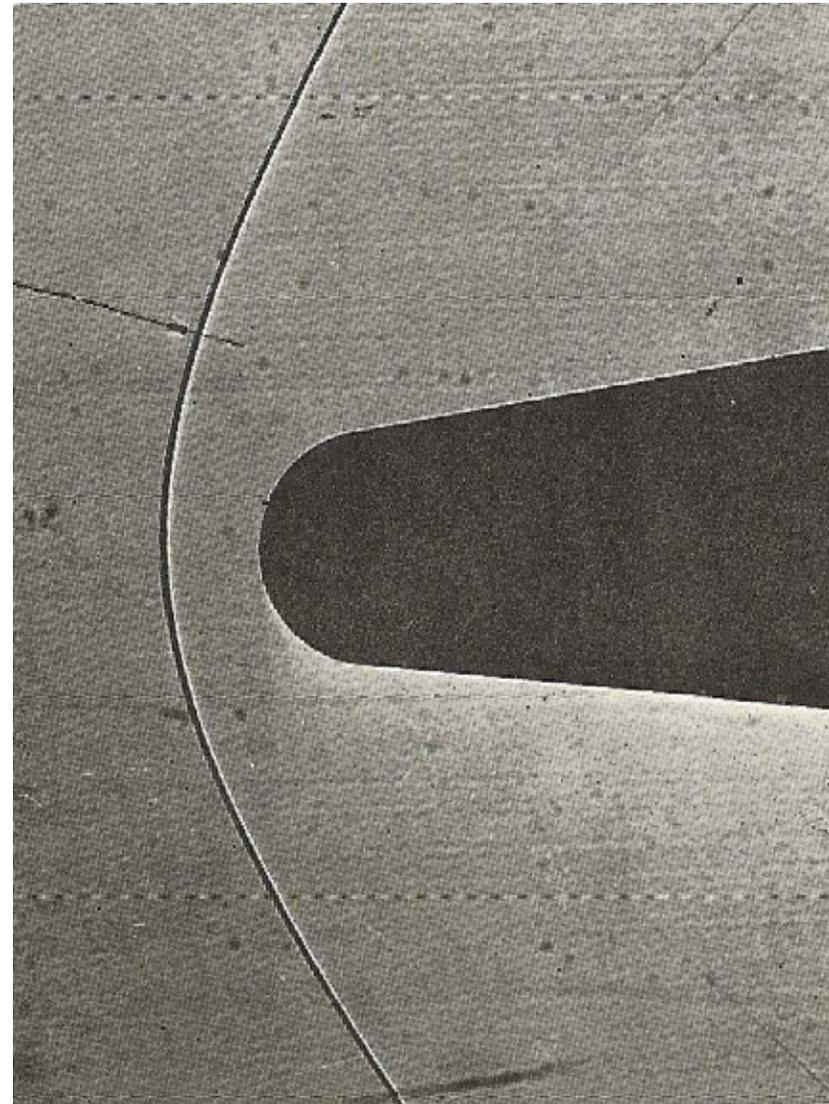
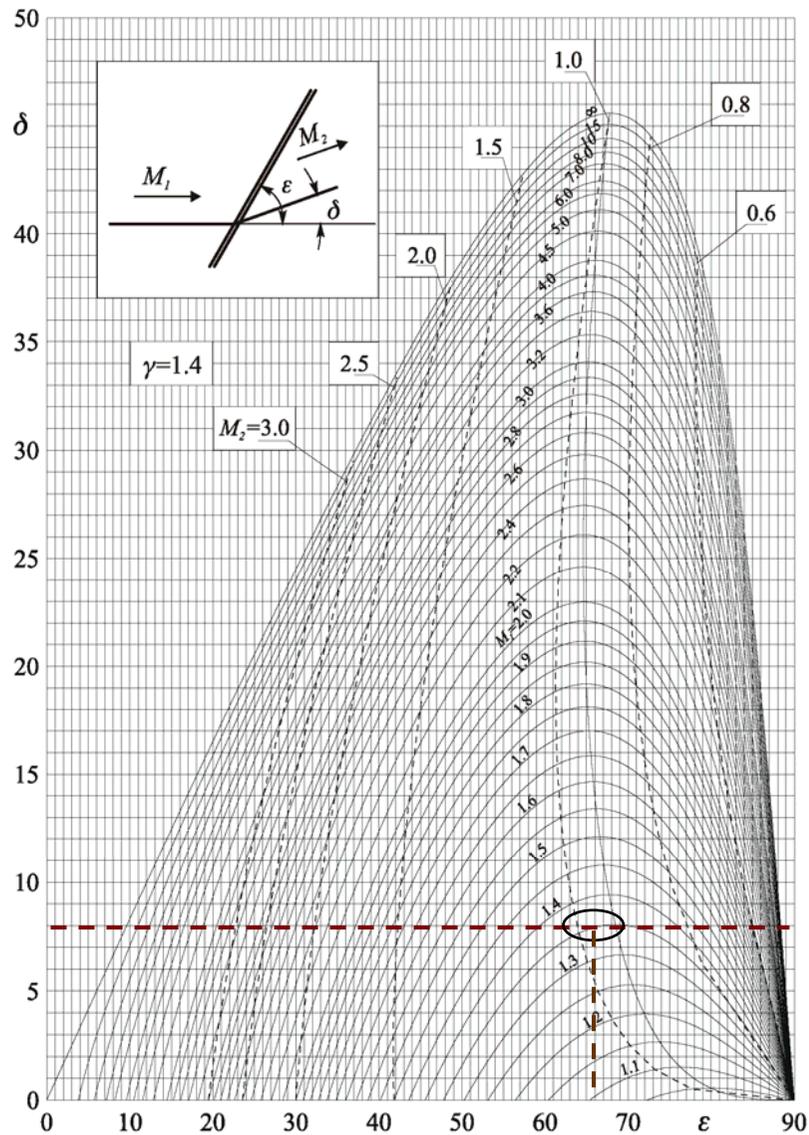


Immagine Schlieren di un flusso supersonico di aria su un cuneo con $M_1 = 1.56$ e $\delta = 20^\circ$ ($> \delta_{max}$). *Si noti l'onda d'urto staccata al vertice.*

Va poi fatto osservare che un corpo definito **tozzo (non affilato)**, in una corrente supersonica, anche nel caso in cui l'angolo di inclinazione delle sue pareti a valle del bordo di attacco risulta minore dell'angolo di deviazione massimo, comporterà senz'altro la presenza di un'onda d'urto staccata dal corpo in quanto l'angolo di deviazione sull'asse risulta maggiore di δ_{max} .

In ogni caso, **se un corpo in regime supersonico deve avere un basso coefficiente di resistenza, è preferibile che il suo bordo di attacco sia quanto più possibile affilato in modo da non generare elevate deviazioni della corrente che lo investe e alte compressioni della stessa in una estesa zona frontale del corpo.** Tale è il caso del bordo di attacco di profili alari degli aerei supersonici.

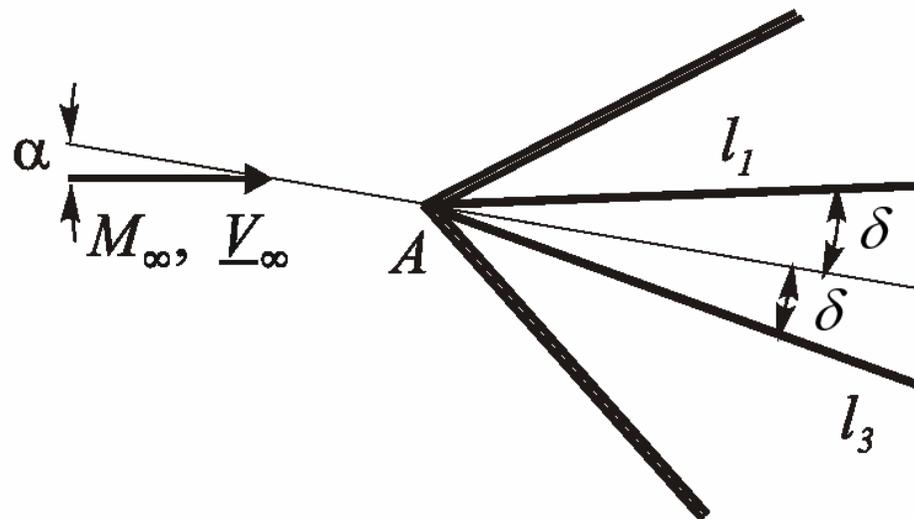




Shadowgraph di un'onda d'urto nel flusso supersonico su un cono smussato, $\delta = 8^\circ$, a $M_1 = 1.36$. *Notare che l'onda d'urto sull'asse risulta ben staccata.*

Si deve infine porre in evidenza che, nel caso di un diedro con angolo di semiapertura δ posto ad un angolo di attacco α rispetto alla direzione della corrente supersonica, se i due angoli di deviazione della corrente (rispettivamente $\delta - \alpha$ per la zona superiore e $\delta + \alpha$ per la zona inferiore) sono entrambi inferiori a δ_{max} , le due soluzioni per i campi di moto superiore ed inferiore sono indipendenti una dall'altra, cioè, a differenza di quanto accade in moto subsonico, i due moti non si influenzano.

Nel caso in cui, invece, la deviazione fosse più elevata (ad es. se $\delta + \alpha$ per $\alpha > 0$ risultasse maggiore dell'angolo δ_{max}), l'onda d'urto si staccerebbe dal diedro ed il campo di moto inferiore influenzerebbe il superiore e viceversa.



LA RELAZIONE DI PRANDTL E LA POLARE D'URTO

Dalla relazione ricavata in precedenza:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left[2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right]^{-1}$$

tenendo conto del fatto che:

$$V_{n1} = V_1 \sin \varepsilon$$

si ottiene l'espressione:

$$\frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 V_{n1}^2 / V_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 V_{n1}^2 / V_1^2}$$

e quindi:

$$V_{n1} V_{n2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_{n1}^2 + \frac{2}{\gamma + 1} a_1^2$$

Ricordando, poi, che:

$$V_1^2 = V_{n1}^2 + V_t^2$$

si ottiene:

$$V_{n1} V_{n2} = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_t^2$$

$$V_{n1} V_{n2} = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_t^2$$

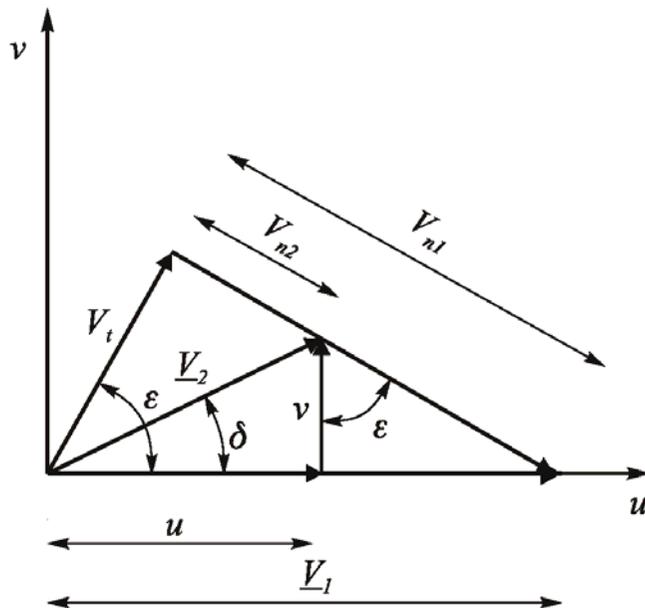
Tenendo presente che la quantità in parentesi è pari ad H e della:

$$V^* = a^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_\ell \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

si ha infine:

$$V_{n1} V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_t^2$$

che rappresenta la **Relazione di Prandtl per un'onda d'urto obliqua.**

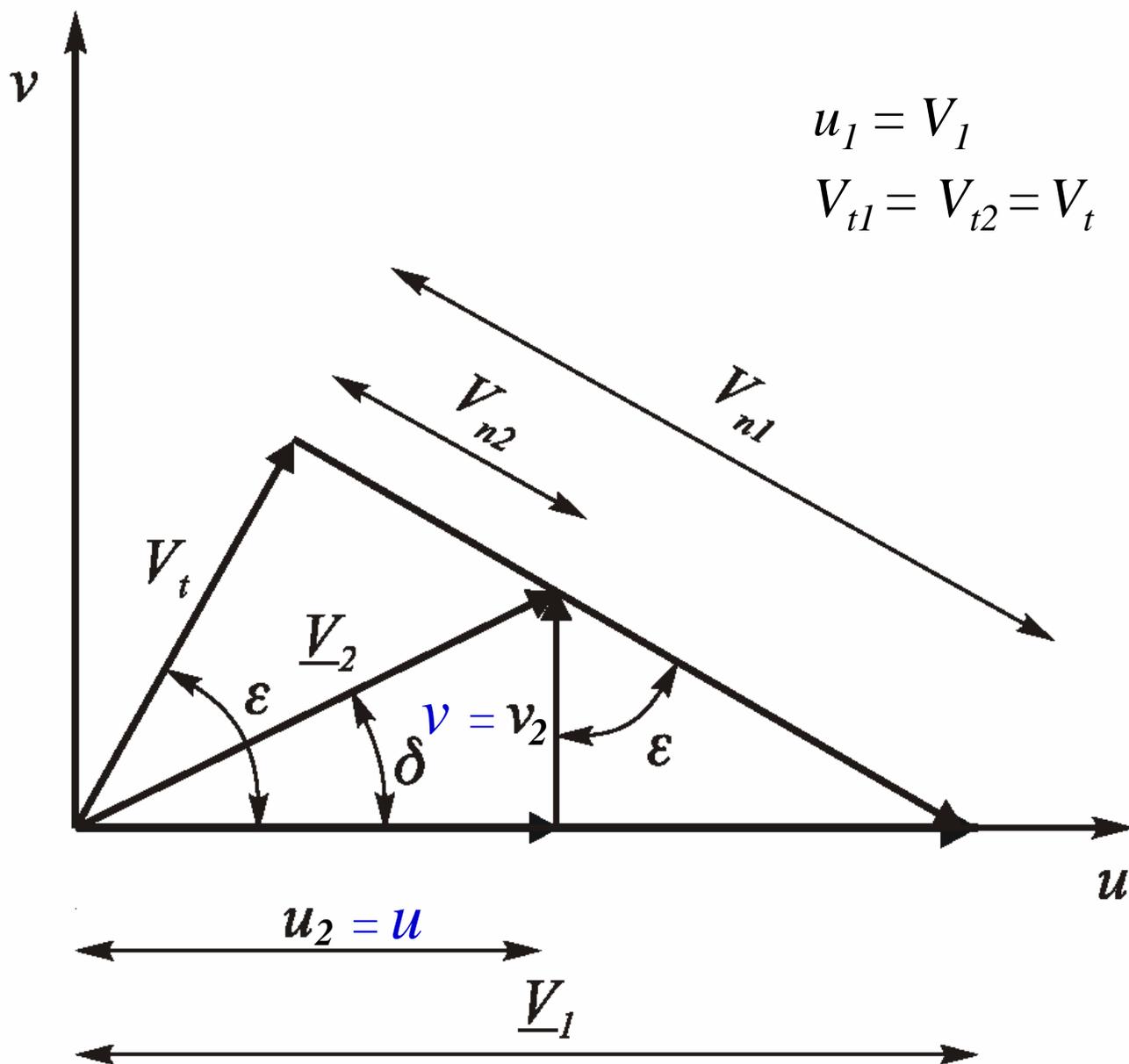


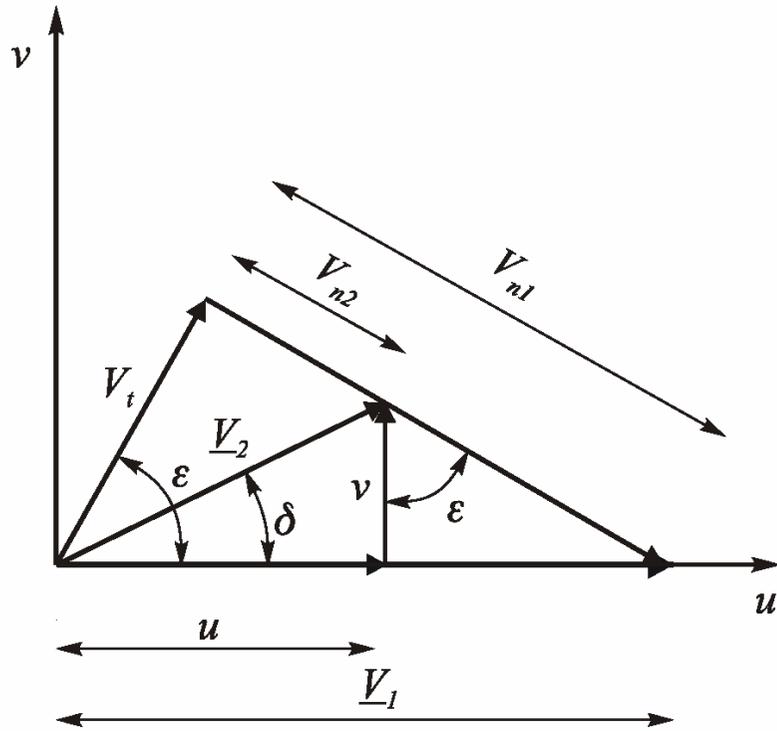
Questa relazione, per $V_t = 0$, coincide con quella già trovata per l'onda d'urto normale.

Nella figura accanto sono state indicate le due velocità a monte ed a valle dell'onda d'urto obliqua e le loro componenti normali e tangenziale. Infatti, per la V_2 sono state indicate le due componenti u , in direzione della V_1 , e v normale ad essa.

Il piano ($u-v$) si chiama **piano odografo.**

Velocità prima e dopo l'onda d'urto sul piano odografo





Con riferimento alla figura si ottiene:

$$V_t = V_1 \cos \varepsilon$$

$$V_{n1} = V_1 \sin \varepsilon$$

$$V_{n2} = V_1 \sin \varepsilon - \frac{v}{\cos \varepsilon}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{V_1 - u}{v}$$

Sostituendo nella relazione di Prandtl:

$$V_{n1} V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_t^2$$

si ottiene:

$$V_1^2 \sin^2 \varepsilon - v V_1 \tan \varepsilon = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_1^2 \cos^2 \varepsilon$$

in cui si possono utilizzare le formule trigonometriche di conversione:

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{\tan^2 \varepsilon}{1 + \tan^2 \varepsilon} = \frac{(V_1 - u)^2}{v^2 + (V_1 - u)^2}$$

$$\cos^2 \varepsilon = 1 - \sin^2 \varepsilon = \frac{v^2}{v^2 + (V_1 - u)^2}$$

Sostituendo allora le relazioni precedenti nella:

$$V_1^2 \sin^2 \varepsilon - vV_1 \tan \varepsilon = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_1^2 \cos^2 \varepsilon$$

si ottiene:

$$v^2 \left(a^{*2} + 2V_1^2 / (\gamma + 1) - V_1 u \right) = (V_1 - u)^2 \left(V_1 u - a^{*2} \right)$$

che risolta in v conduce infine a:

$$v^2 = (V_1 - u)^2 \frac{V_1 u - a^{*2}}{2V_1^2 / (\gamma + 1) - V_1 u + a^{*2}}$$

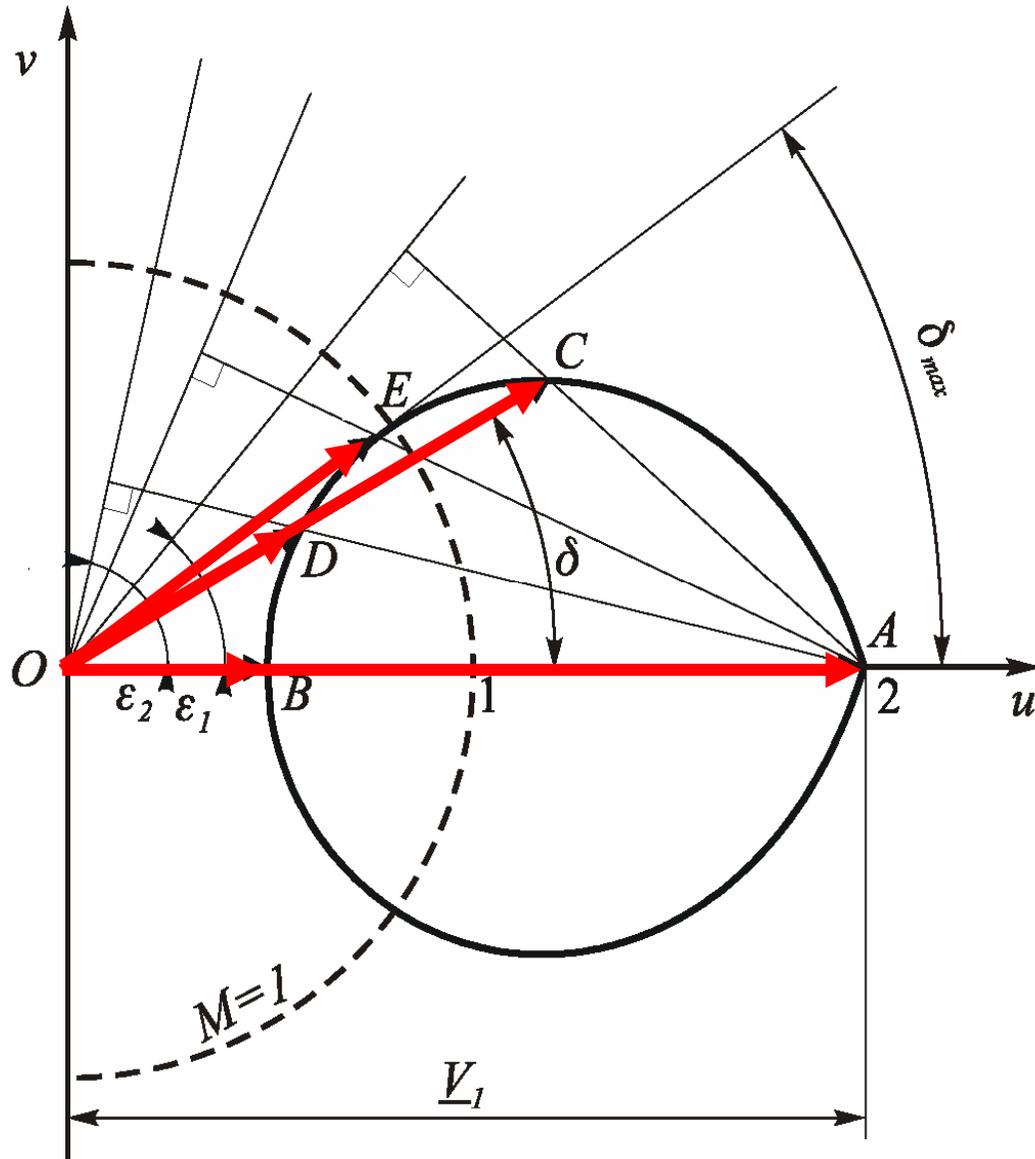
Per ogni valore di a^* e di $V_1 > a^*$, la precedente espressione rappresenta, sul piano odografo ($u-v$), il luogo dei punti a valle dell'onda d'urto obliqua.

Il luogo di punti, sul piano odografo ($u-v$), a valle dell'onda d'urto obliqua, è chiamato curva strofoide, o polare d'urto.

Questo luogo di punti è riportato nella figura seguente.

Curva strofoide

$$v^2 = (V_1 - u)^2 \frac{V_1 u - a^{*2}}{2V_1^2 / (\gamma + 1) - V_1 u + a^{*2}}$$



Come già discusso, per ogni angolo di deviazione δ minore di δ_{max} , ci sono due soluzioni per la \underline{V}_2 :

la **soluzione debole** OC che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo ε_1 ;

la **soluzione forte** OD che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

Nel caso in cui $\delta = 0$, le due soluzioni si riducono a quella relativa all'**onda di Mach** OA ed a quella all'onda d'**urto normale** OB .

Nella figura è stata anche indicata l'**unica soluzione** OE esistente per

$$\delta = \delta_{max}$$

ONDE D'URTO CONICHE

In precedenza sono state analizzate in dettaglio le onde d'urto oblique ed è stato supposto che la fenomenologia fisica fosse *bidimensionale piana*.

Spesso, questa ipotesi non è applicabile. Infatti, in molte applicazioni pratiche, esiste, ad es., *simmetria assiale*, come nella parte prodiera di un aereo, o di un missile, supersonici, o nelle prese d'aria supersoniche con spina conica. E' necessario, pertanto, studiare, sia pure dal solo punto di vista dei risultati, il moto stazionario di una corrente supersonica che investe un *cono ad angolo d'attacco nullo*.

Quest'ultima ipotesi, sebbene sia certamente molto restrittiva, è necessaria in quanto la presenza di un angolo d'attacco diverso da zero provoca *la perdita della simmetria assiale*, cioè della bidimensionalità assialsimmetrica, comportando una notevole complicazione della trattazione.

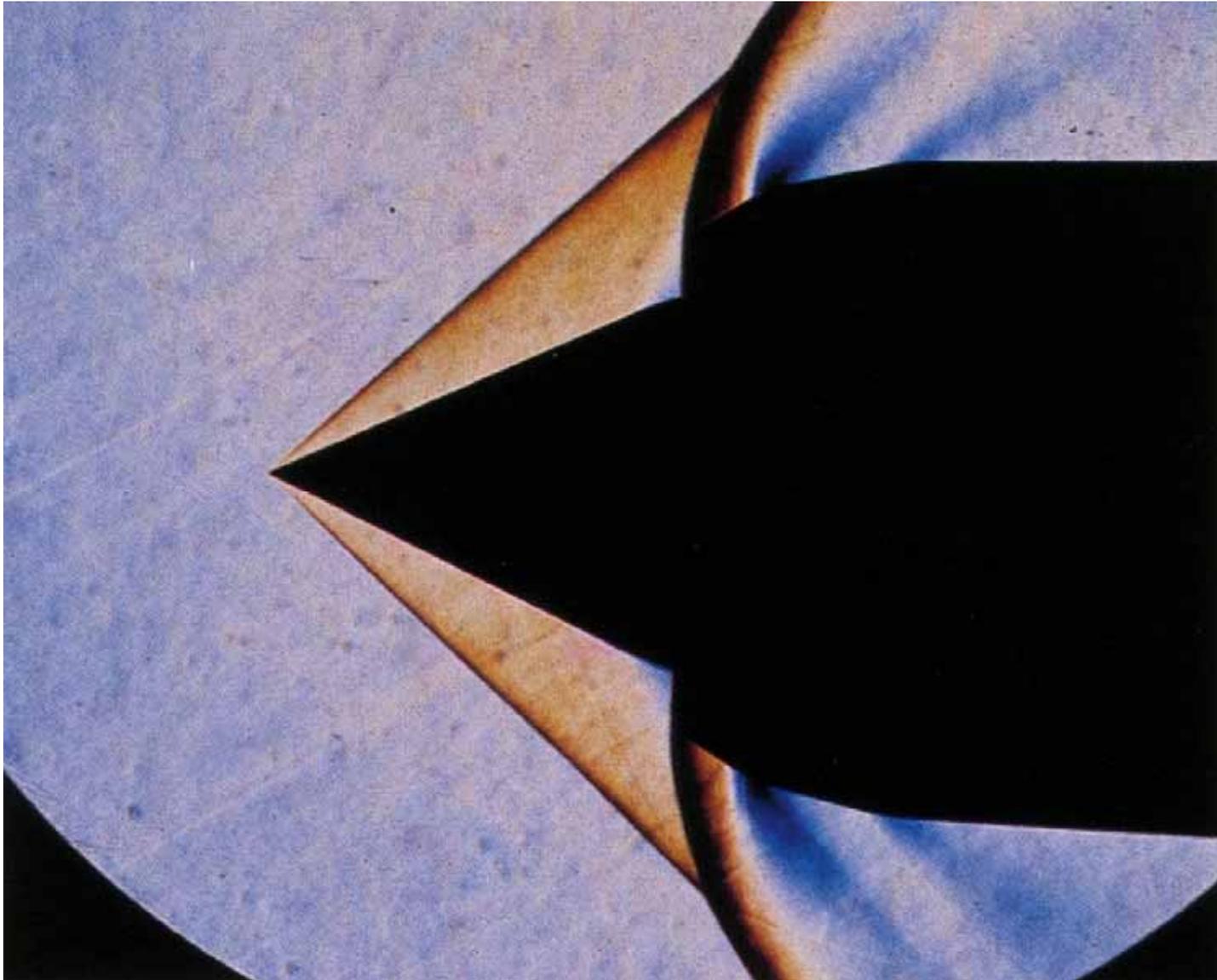
Per studiare il campo di moto generato da una corrente supersonica che investe un cono *indefinito* ad angolo d'incidenza nullo, si devono risolvere le equazioni di bilancio locali sfruttando le semplificazioni che derivano dall'ipotesi di *assialsimmetria*.

In questa trattazione, si ignoreranno le sottigliezze analitiche discutendo in dettaglio solo le *ipotesi* ed i *risultati* dell'analisi.

ONDA D'URTO CONICA IN UNA PRESA D'ARIA (AIR INLET)

$$M = 2$$

$$\delta = 24^\circ$$



ONDE D'URTO CONICHE

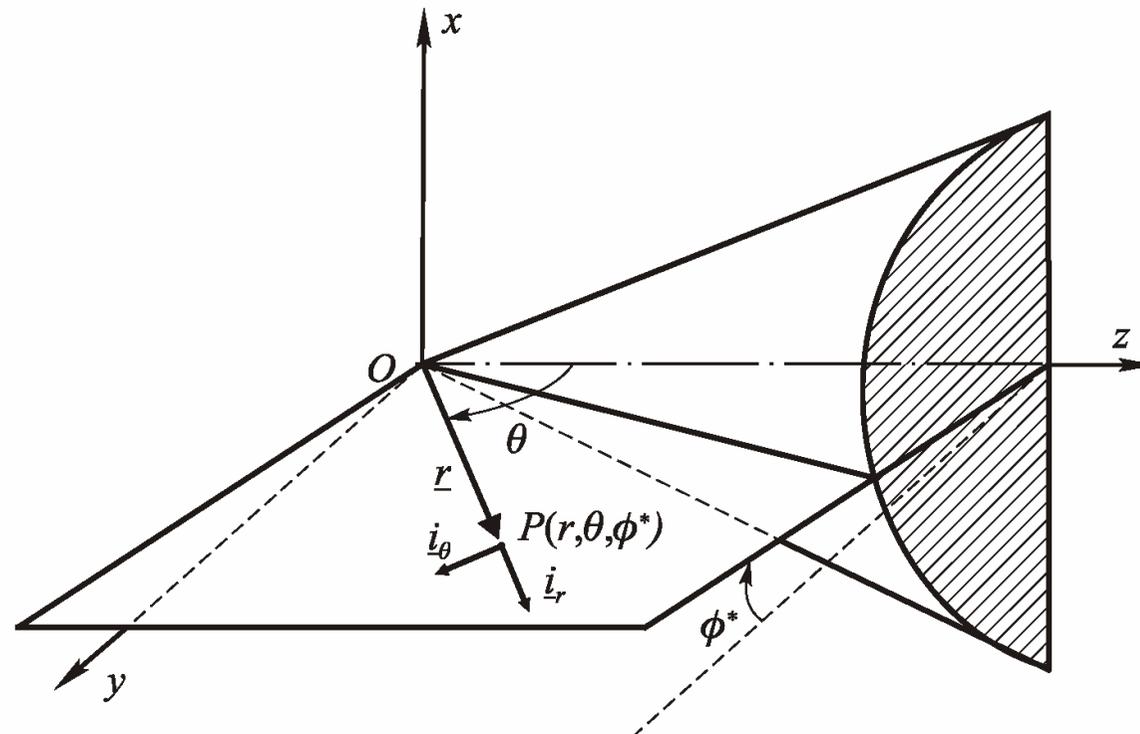
Le ipotesi che si formulano per le onde coniche semplici sono le seguenti:

- ***Il campo di moto è simmetrico rispetto all'asse del cono.***
Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
 - ***il primo*** è che ***la proiezione del campo di moto su un piano che comprende l'asse del cono non è influenzata dalla scelta del piano stesso*** e cioè, in un sistema di riferimento di tipo cilindrico, è ***indipendente dalla coordinata azimutale***;
 - ***il secondo*** è che, se si applicasse il ***bilancio del momento della quantità di moto*** prima e dopo l'onda d'urto, la ***componente normale*** a questo piano del vettore velocità risulterebbe ***identicamente nulla***.

- ***Oltre ad essere omoenergetico, il moto è omoentropico*** (ad entropia costante) sia ***prima*** che ***dopo*** l'onda d'urto ***pur essendo diversa l'entropia prima e dopo l'urto***. Ovviamente, affinché sia verificata quest'ipotesi, ***è necessario che l'onda d'urto sia conica e attaccata al vertice del cono***.

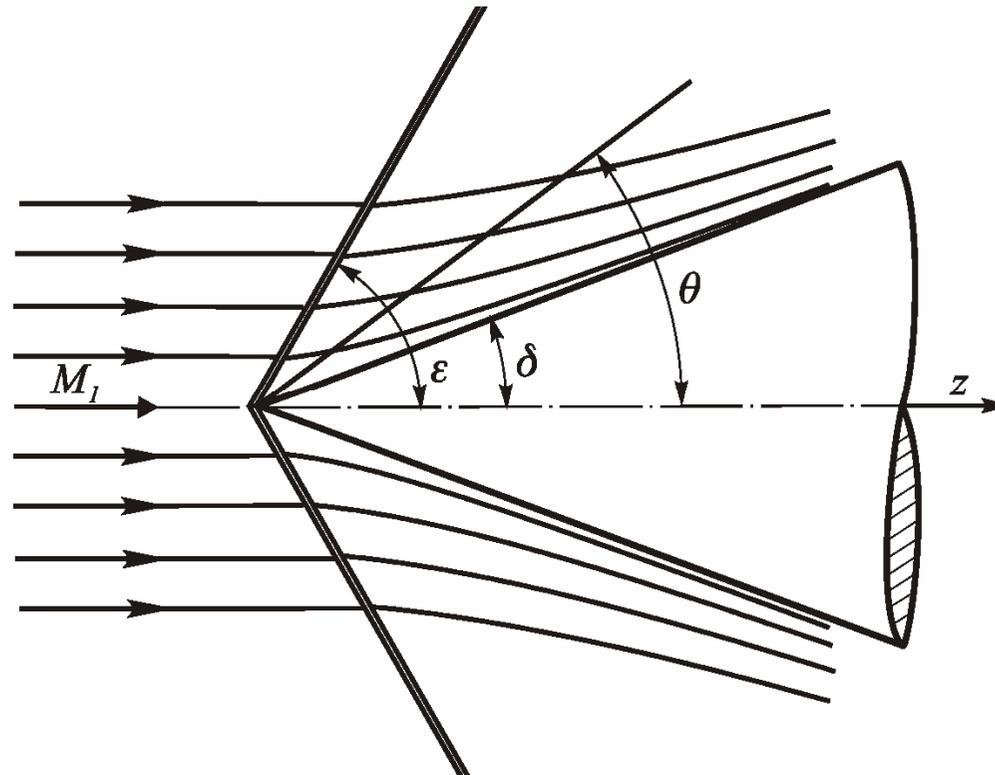
- Essendo supposto il cono indefinito, poiché non esiste alcuna lunghezza caratteristica rispetto alla quale adimensionalizzare, le restanti due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come rapporto fra le stesse.

Quest'ipotesi è equivalente a dire che, se si considera un sistema di riferimento di tipo sferico, come quello mostrato in figura, tutte le grandezze termofluidodinamiche devono essere funzione della sola variabile θ . Ciò rinforza l'ipotesi che l'onda d'urto debba essere conica e attaccata al vertice del cono.



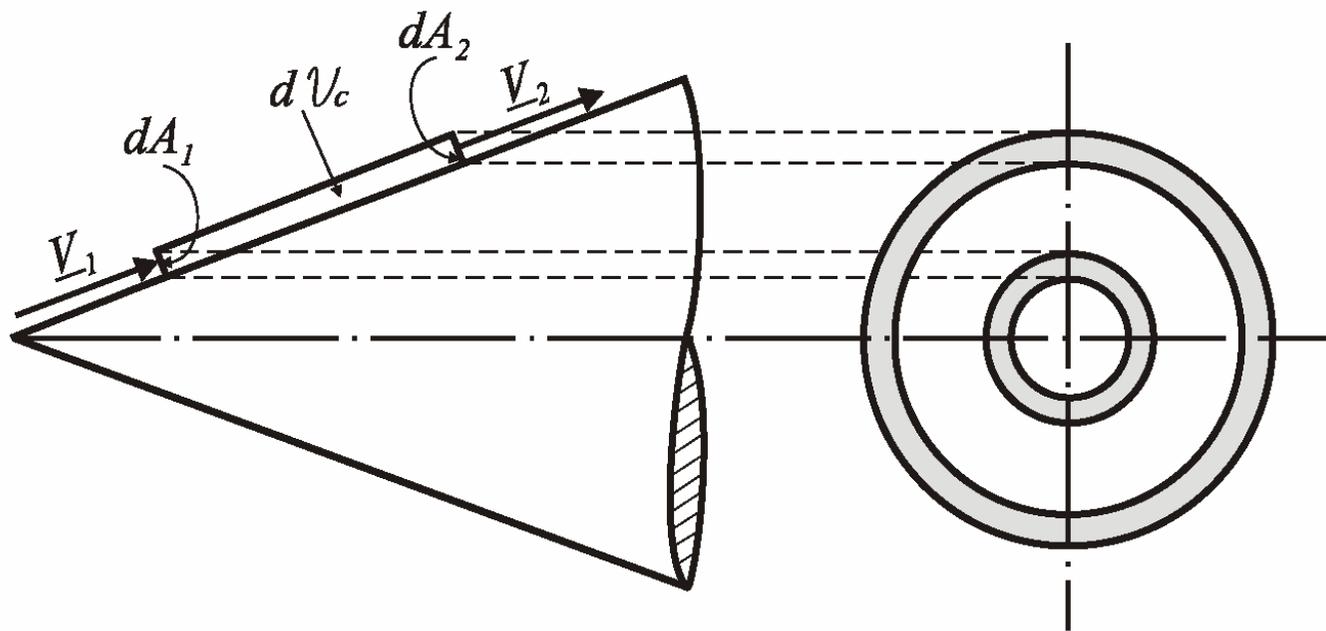
A differenza di quanto avviene per il diedro (per il quale **le linee di corrente sono dritte e parallele alla superficie del diedro**), per il cono **le linee di corrente**, come mostrato dalla figura, **sono convergenti**.

Il fatto che le linee di corrente convergono, e che, di conseguenza, la deviazione a valle dell'onda d'urto deve essere minore di δ , può essere spiegato dimostrando che esse non possono né essere parallele tra loro, né divergere.



Per dimostrare che le linee di corrente non possono essere parallele tra loro, si consideri il volume di controllo rappresentato a sinistra nella figura, nel quale il fluido entri dalla sezione di area dA_1 e ne esca da quella di area dA_2 (avente la stessa altezza) e si supponga, per assurdo, che il fluido stesso si muova parallelamente alla generatrice del cono.

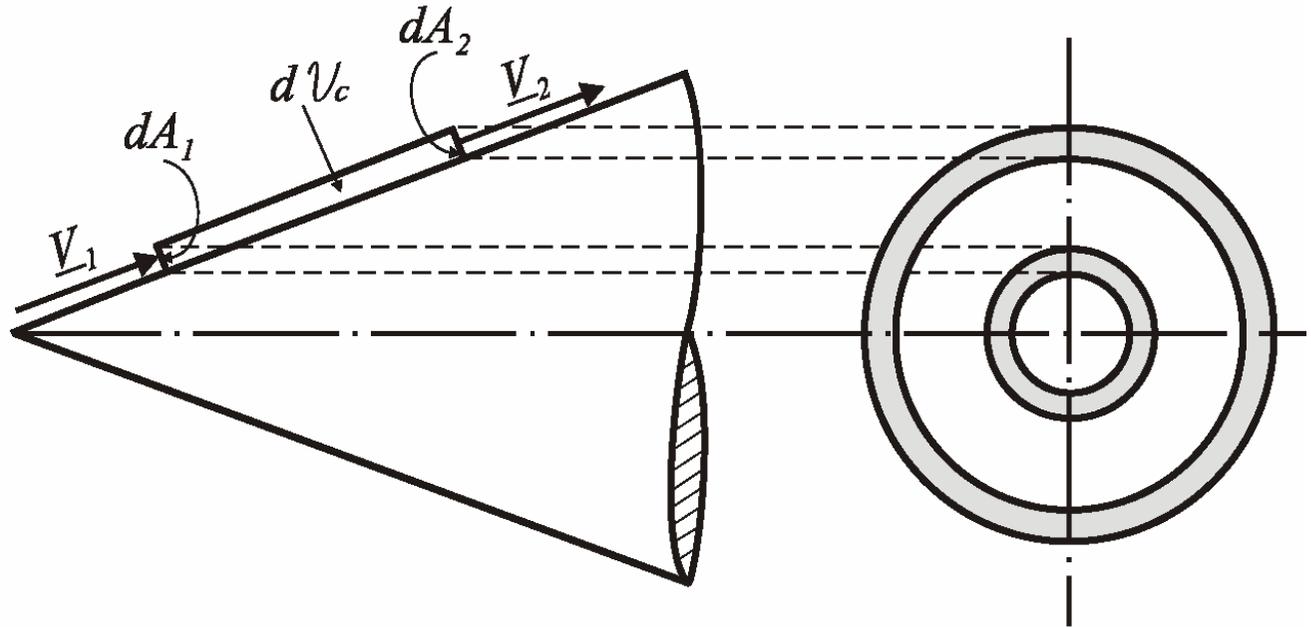
Come si deduce dalla vista laterale a destra, l'area dA_2 è maggiore di dA_1 .



Per la:

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

supersonico (ma a subsonico), un aumento di area comporta una diminuzione della p



Se ora si fa riferimento a questo tubo di flusso elementare è facile convincersi che M **creocerebbe** all'aumentare dello spazio percorso a partire dall'onda il che risulterebbe in contrasto con la terza ipotesi, perché comporterebbe, un **continuo aumento del numero di Mach sulla superficie del cono**.

A maggior ragione le linee di corrente **non possono divergere** tra loro, altrimenti anche l'altezza del tubo di flusso aumenterebbe comportando un conseguente maggior aumento di area. Dunque le linee di corrente devono per forza essere **convergenti** per mantenere sulla superficie del cono le stesse condizioni di pressione e di numero di Mach.

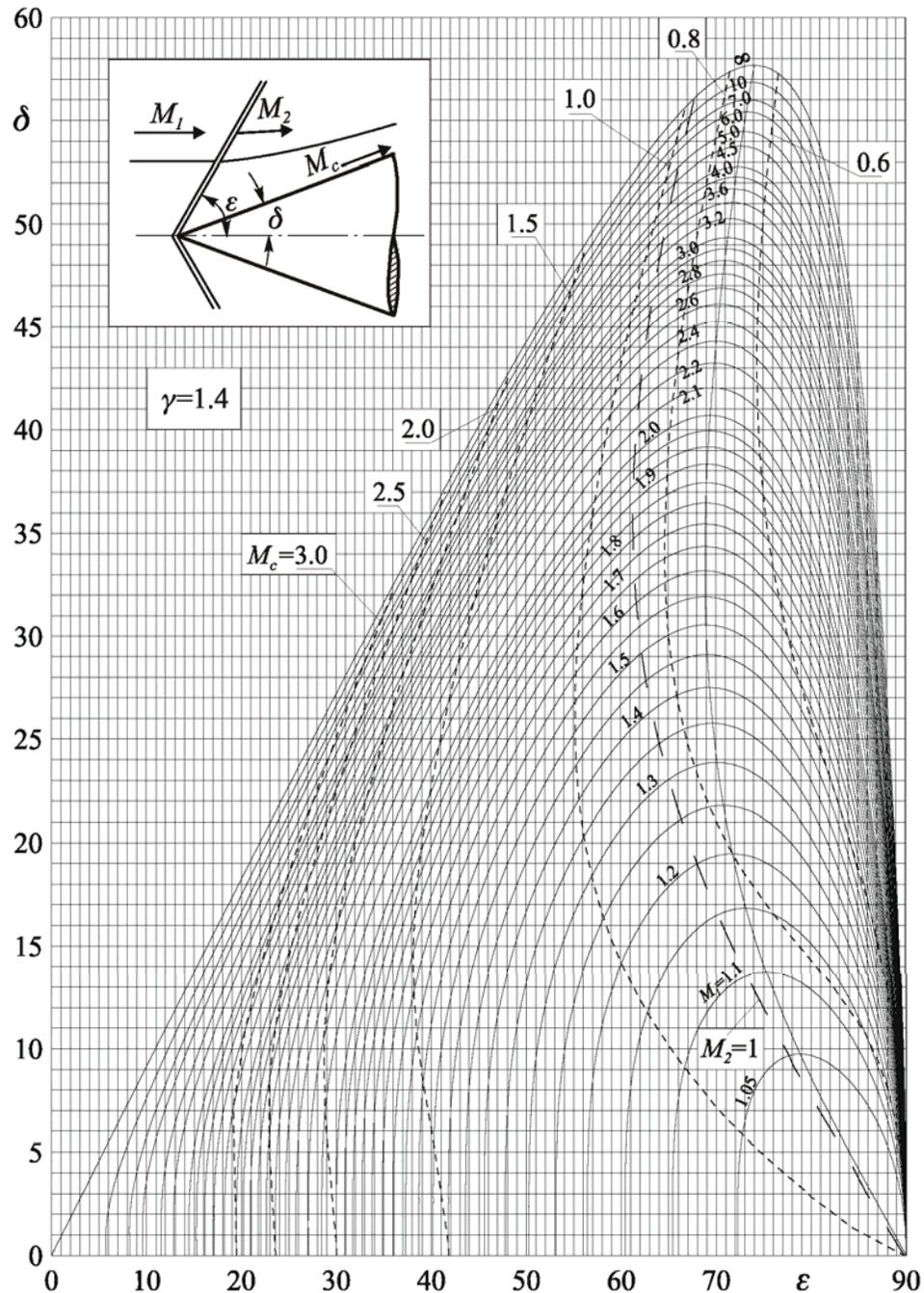
Per il teorema di Crocco, l'ipotesi di omoentropicità implica ***l'irrotazionalità del campo di moto a valle dell'onda.***

Esplicitando questa condizione ed il bilancio di massa locale in coordinate sferiche, si giunge ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che prende il nome di ***equazione di Taylor-Maccoll.***

I risultati dell'integrazione numerica dell'equazione di Taylor-Maccoll sono presentati di seguito sotto forma di diagrammi, per il caso particolare di $\gamma = 1.4$.

In queste figure è stato diagrammato il ***semiangolo del cono δ*** (***angolo di deviazione finale della corrente***) in funzione dell'***angolo d'inclinazione dell'onda d'urto ε*** per diversi valori del numero di Mach a monte dell'onda M_1 .

Questi diagrammi sono equivalenti a quelli per le onde d'urto oblique piane e tutti i commenti già fatti per le onde bidimensionali piane valgono, evidentemente, anche per le onde d'urto coniche.



L'angolo δ rappresenta il semi-angolo del cono.

Ciascuna curva a tratto intero del diagramma si riferisce ad un determinato valore del numero di Mach.

Anche in questo caso il valore di ϵ può variare tra μ e 90° .

Per un dato numero di Mach, al crescere del valore di δ , **si hanno tre possibilità: due soluzioni** con valori distinti dell'angolo di inclinazione dell'onda d'urto ϵ ; **una sola soluzione** (all'apice della curva corrispondente al particolare numero di Mach); **nessuna soluzione**.