

MOTI COMPRESSIBILI CON ATTRITO

Le ipotesi alla base del *moto alla Fanno* sono le seguenti:

- il moto è *quasi unidimensionale* e *quasi stazionario*;
- l'*area della sezione* di passaggio del condotto è *costante*;
- *il fluido non scambia né lavoro né calore* con l'ambiente, cioè il moto è considerato *omoenergetico*;
- gli *effetti delle forze gravitazionali sono trascurabili*;
- le condizioni termofluidodinamiche del fluido cambiano per effetto degli *sforzi viscosi* alla parete (che costituiscono la *forza spingente*).

L'assenza di flussi di lavoro assume l'*assenza di lavoro d'elica*.

L'ipotesi di adiabaticità, assume che il condotto sia termicamente isolato dall'ambiente o, più semplicemente, che *gli scambi di energia alla parete nel modo calore siano, di fatto, trascurabili rispetto all'energia totale convetta*.

La trascurabilità degli effetti gravitazionali è certamente verificata se *il valore del numero di Froude è, in ogni caso, sufficientemente grande*.

L'ultima ipotesi prevede che *il raggruppamento adimensionale L_f/D_e sia almeno di ordine di grandezza unitario* pur essendo il numero di Reynolds elevato per poter mantenere l'assunto di quasi unidimensionalità.

Attenzione: Gli sforzi viscosi alla parete, di fatto, *non lavorano* perché sulla parete, per l'ipotesi del continuo, risulta sempre nulla la velocità del fluido

Per un moto quasi unidimensionale e quasi stazionario, l'ipotesi di costanza dell'area della sezione attraverso la quale passa il fluido, applicata all'equazione di conservazione della massa, comporta che il modulo del flusso di massa G deve essere costante lungo il condotto:

$$\rho_1 V_1 \cancel{A_1} = \rho_2 V_2 \cancel{A_2} \quad \longrightarrow \quad G = \rho V = \text{cost}$$

Scelto un sistema costituito dalla parte di condotto tra le due sezioni **1** e **2**, la proiezione dell'equazione del bilancio della quantità di moto lungo l'asse del condotto, nelle ipotesi fatte, cioè assumendo che la spinta sia dovuta al solo sforzo tangenziale alla parete, esprime il fatto che l'impulso specifico I diminuisce continuamente lungo il condotto:

$$I_1 A_1 \underline{n_1} + I_2 A_2 \underline{n_2} + \underline{S} = \cancel{M \underline{g}} \quad \longrightarrow \quad I_2 - I_1 = -4 \tau_p \frac{L}{D_e} = -4 f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{L}{D_e}$$

La quantità positiva, adimensionale f , detta coefficiente di attrito di Fanning, è definita come:

$$f = \frac{\tau_p}{\rho V^2 / 2}$$

e rappresenta l'importanza relativa della diffusione della parte irreversibile della quantità di moto alla parete (sforzo di attrito), rispetto alla convezione della quantità di moto stessa.

Lo sforzo tangenziale è stato supposto costante sulla parete del condotto, ma, in generale, esso può variare (sul perimetro, o lungo l'asse del condotto) sicché, nella pratica, occorre valutarne sempre il **valor medio**.

Per un **moto incompressibile** ($\rho = cost$), poiché dall'equazione di continuità deriva che anche la velocità V è costante, la variazione dell'impulso specifico risulta uguale alla variazione della sola pressione, ottenendosi quindi:

$$I = p + \rho V^2 \quad \rightarrow \quad I_2 - I_1 = p_2 - p_1 = -\Delta p$$

dove la quantità Δp è intrinsecamente positiva. Per questo, il coefficiente di Darcy in idraulica (disciplina che assume proprio $\rho = cost$) è definito dalla:

$$f' = \frac{\Delta p}{\rho V^2 / 2} \frac{D_e}{L}$$

E' facile verificare che $f' = 4f$.

Il coefficiente d'attrito è in generale funzione del numero di Reynolds Re , della rugosità della superficie interna del condotto ε e del numero di Mach.

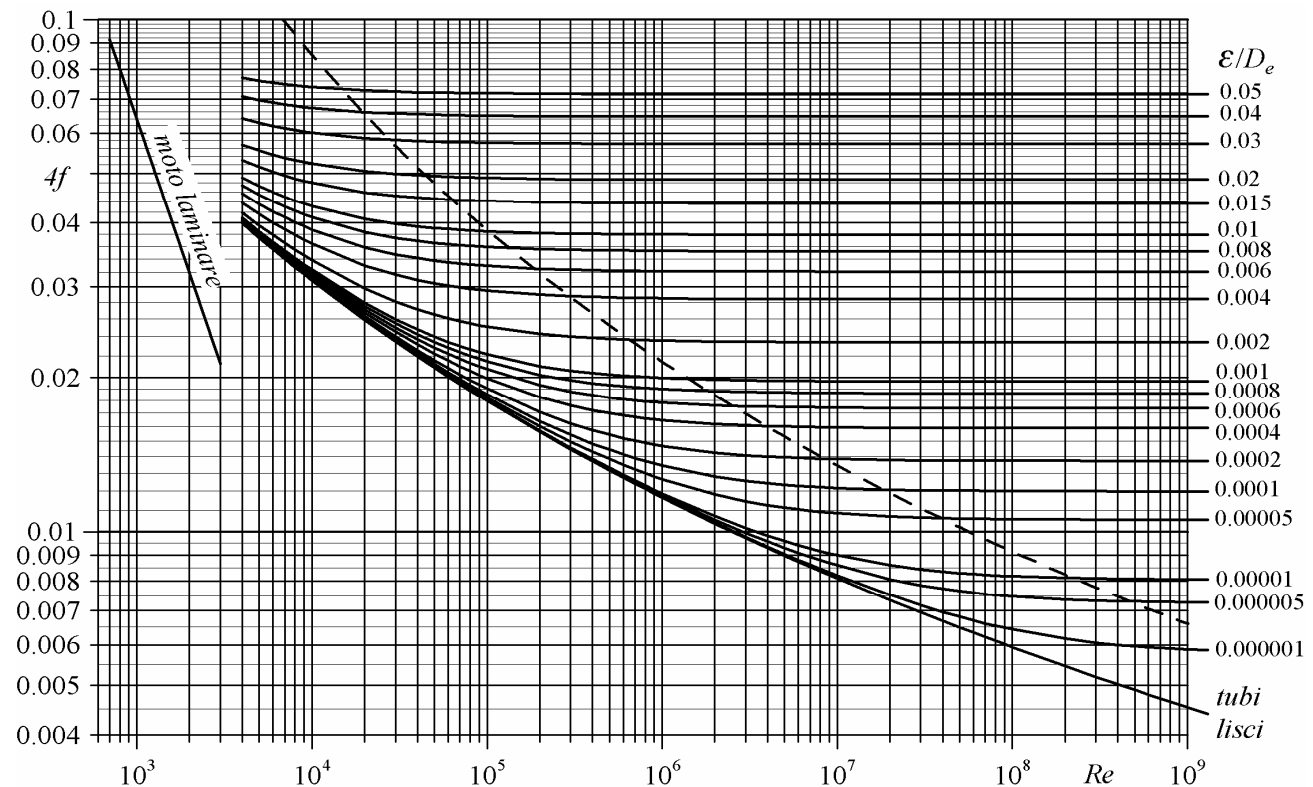
Tuttavia, l'influenza del numero di Mach, in particolare nel caso di moto supersonico, per le sue scarse applicazioni pratiche, non è stata analizzata approfonditamente nella letteratura e, nel seguito, si supporrà comunque ***trascurabile la variazione di f con il numero di Mach stesso***.

In regime turbolento e incompressibile, la relazione universalmente accettata che permette di calcolare il coefficiente d'attrito f è la cosiddetta formula di Colebrook e White:

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.7 D_e} + \frac{2.51}{Re \sqrt{4f}} \right)$$

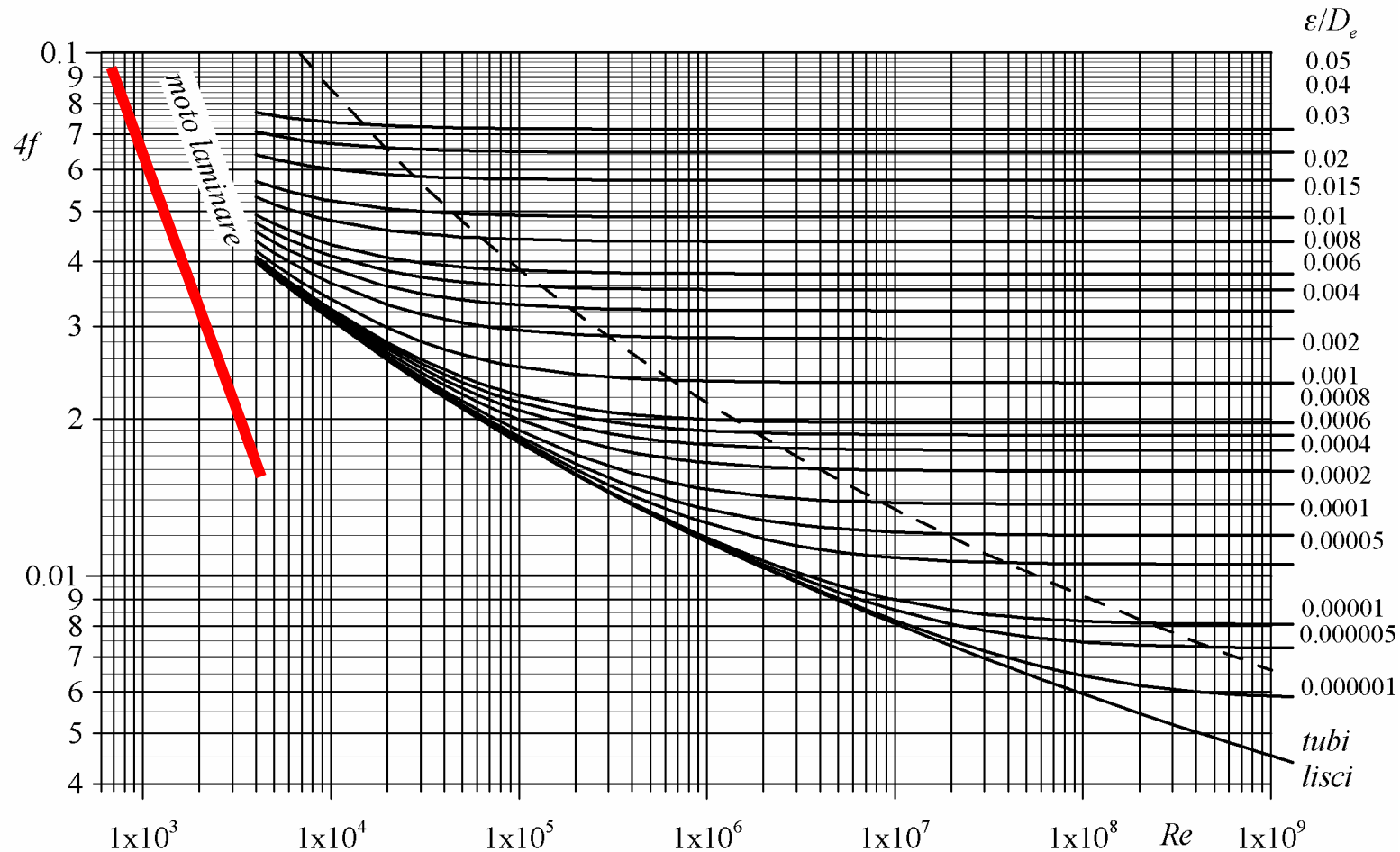
Questa espressione, implicita in f , è rappresentata graficamente insieme con quella valida in regime laminare ($f' = 64/Re$, di scarso interesse in questo contesto) nel cosiddetto abaco di Moody.

Abaco di Moody



Dalla figura si notano *i tre diversi comportamenti*, elencati di seguito:

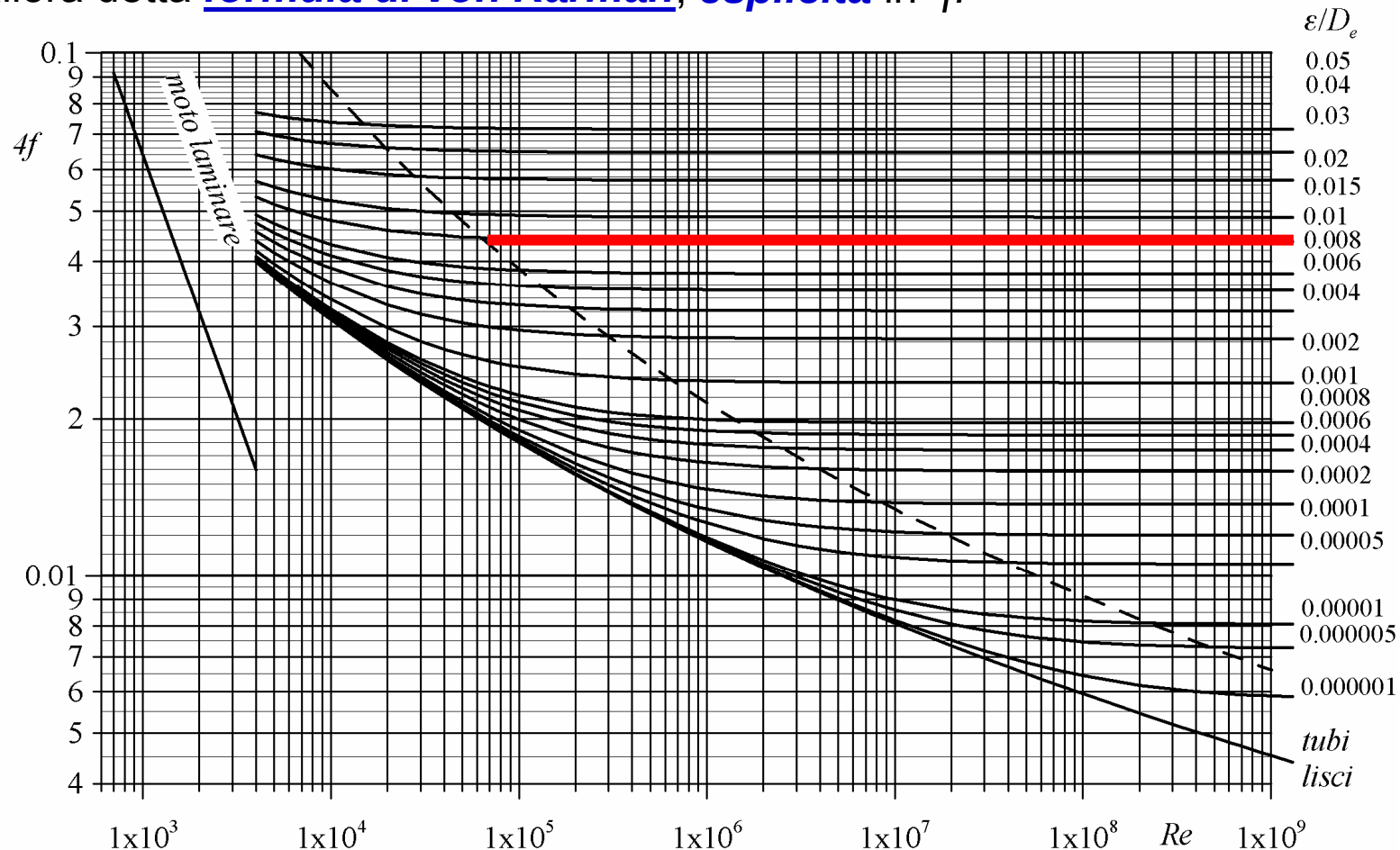
- *in moto laminare* (che in generale si verifica per $Re < 2300$), *il coefficiente di attrito è solo funzione del numero di Reynolds* ($f' = 64/Re$). Come già detto, questo moto è di scarso interesse in questo contesto perchè, oltretutto, non sarebbero valide altre ipotesi.



- ad alti valori del numero di Reynolds e della scabrezza relativa ε/D_e , il coefficiente f risulta funzione solo di ε/D_e (moto completamente turbolento, a destra della linea tratteggiata); la relazione:

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.7D_e} + \frac{2.51}{Re \sqrt{4f}} \right)$$

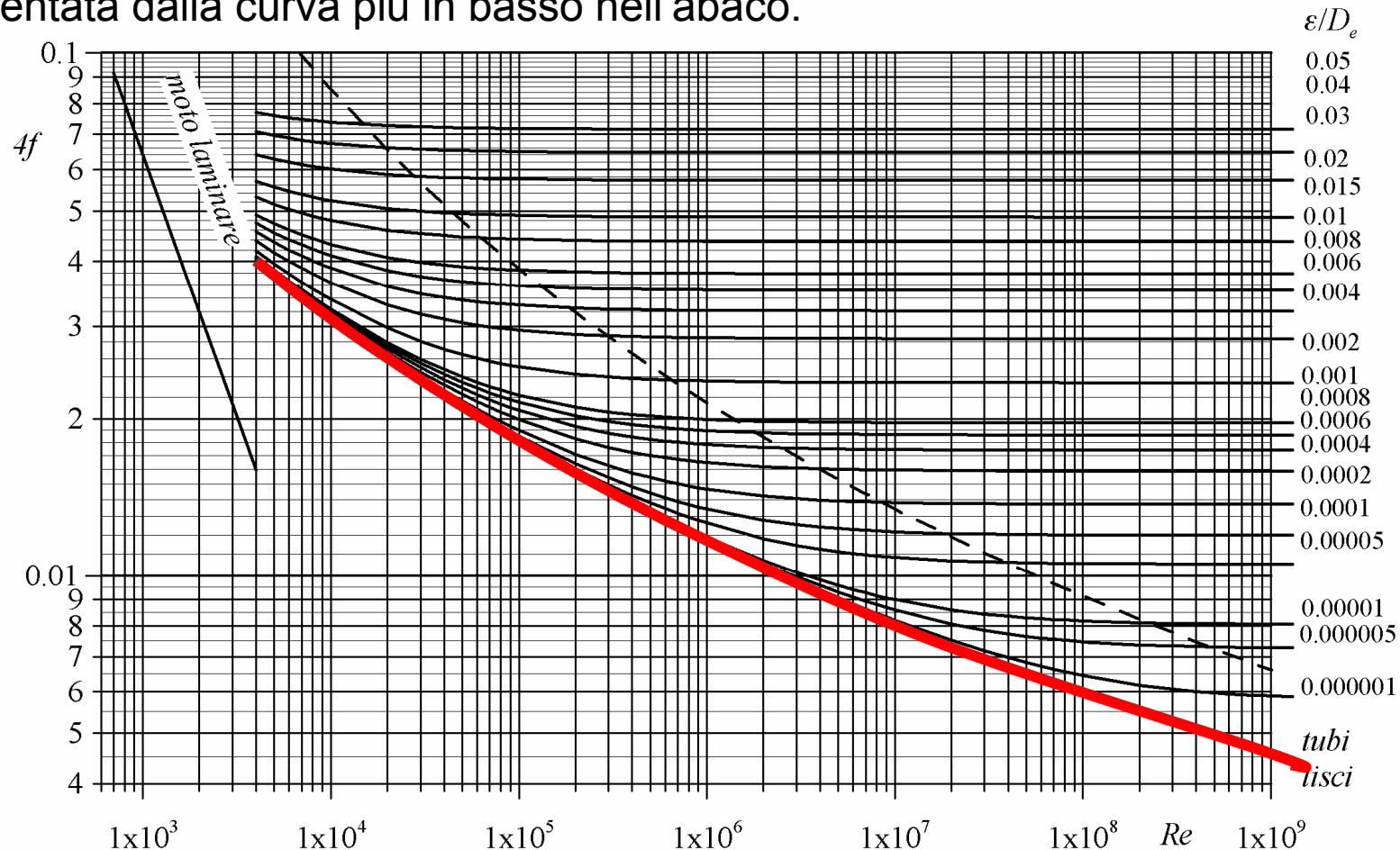
nella quale il secondo termine in parentesi tonda diventa trascurabile, viene allora detta formula di von Karman, esplicita in f .



- a relativamente bassi valori di ε/D_e , e/o di Re , il coefficiente di attrito risulta funzione di entrambe queste quantità.

- Per $\varepsilon/D_e = 0$, la:
$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\cancel{\varepsilon}}{\cancel{3.7D_e}} + \frac{2.51}{Re \sqrt{4f}} \right)$$

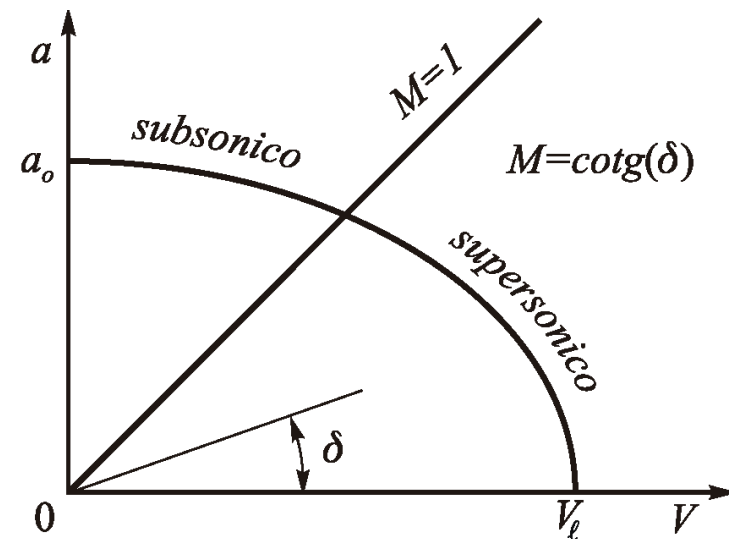
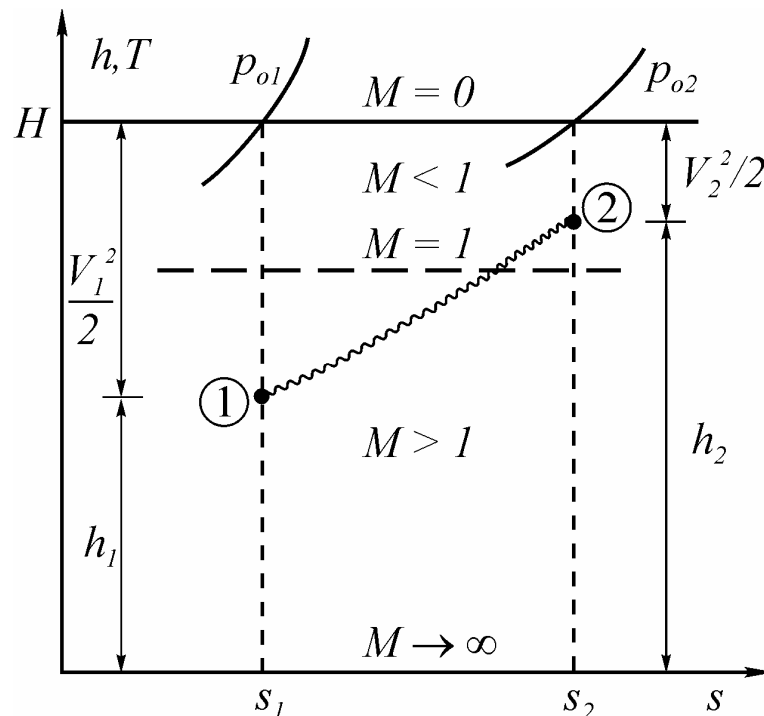
diventa la formula di von Karman-Nikuradse (da altri anche chiamata formula di Prandtl), implicita in f , valida per i cosiddetti **tubi lisci** e rappresentata dalla curva più in basso nell'abaco.



Nelle ipotesi fatte, l'equazione di conservazione dell'energia si riduce alla costanza dell'entalpia di ristagno:

$$\dot{m} \Delta H = \cancel{\dot{Q}} - \cancel{\dot{L}} \quad \rightarrow \quad H = h + V^2/2 = \text{cost}$$

La validità di questa relazione rende applicabili anche a questo moto sia le considerazioni fatte sul piano (h,s) per le onde d'urto, che l'ellisse delle velocità di cui si è già discusso.



È facile intuire che ciascuna coppia di valori G ed H (le due quantità che restano costanti durante il moto) individua un particolare moto alla Fanno.

In termini differenziali le equazioni di bilancio già considerate diventano:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$
$$dI = dp + \rho V dV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e}$$
$$dH = dh + V dV = 0$$

dove la x è la coordinata lungo l'asse del condotto, orientata nel senso del moto del fluido, da cui il **segno meno** che appare nella seconda equazione.

La prima e la terza equazione mostrano che **le variazioni di velocità sono di segno opposto a quelle di densità e di entalpia** (cioè di temperatura).

Per la positività del coefficiente di attrito f , **le variazioni dell'impulso specifico I sono, ovviamente, sempre negative.**

Attenzione: Anche trascurando la variazione di f con M , non è detto che, in moto compressibile, il coefficiente d'attrito rimanga costante lungo il condotto. Infatti, il numero di Reynolds, che può scriversi come $Re = GD_e/\mu(T, p)$, può variare a causa delle variazioni di temperatura lungo il condotto (normalmente, per i gas, la variazione della viscosità con la pressione è debole). Per questo motivo, di seguito, si supporrà sempre che f indichi il **valore medio** del coefficiente d'attrito nel condotto.

LA CURVA DI FANNO

Per meglio comprendere le peculiarità del moto alla Fanno è utile rappresentare la curva che ne descrive i diversi stati termodinamici del fluido sul piano di Gibbs $T - s$.

Quest'ultima, per quanto già detto, rappresenta il luogo dei punti per due prefissati valori di G e H ed è denominata curva di Fanno.

La curva di Fanno può essere agevolmente diagrammata sul piano di Gibbs a partire dall'espressione della sua tangente locale.

In particolare, per il modello di gas perfetto, dalle:

$$h = c_p T$$

e:

$$dH = dh + VdV = 0$$

si ha in particolare:

$$VdV = -dh = -c_p dT$$

che si può anche scrivere nella forma:

$$V^2 dV/V = -\gamma c_v dT$$

Tenendo conto delle:

$$a_L^2 = - v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \gamma RT$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

la:

$$V^2 dV/V = - \gamma c_v dT$$

diventa:

$$c_v \frac{dT}{T} = M^2 R \frac{d\rho}{\rho}$$

L'equazione di Gibbs per un gas più che perfetto si può scrivere nella forma:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$$

per cui, sostituendo la precedente equazione si ottengono le relazioni:

$$ds = (M^2 - 1) R d\rho/\rho = (1 - M^2) R dV/V$$

Per la **positività della quantità** ds queste relazioni legano le variazioni della densità e della velocità al numero di Mach. Ad esempio, per $M < 1$, si ottiene $dV/V > 0$ e $d\rho/\rho < 0$.

Eliminando, poi, la quantità $d\rho / \rho$ tra le:

$$c_v \frac{dT}{T} = M^2 R \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{e} \quad ds = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$$

si ricava, infine, la pendenza della curva che descrive il moto alla Fanno sul piano $T - s$ (**curva di Fanno**):

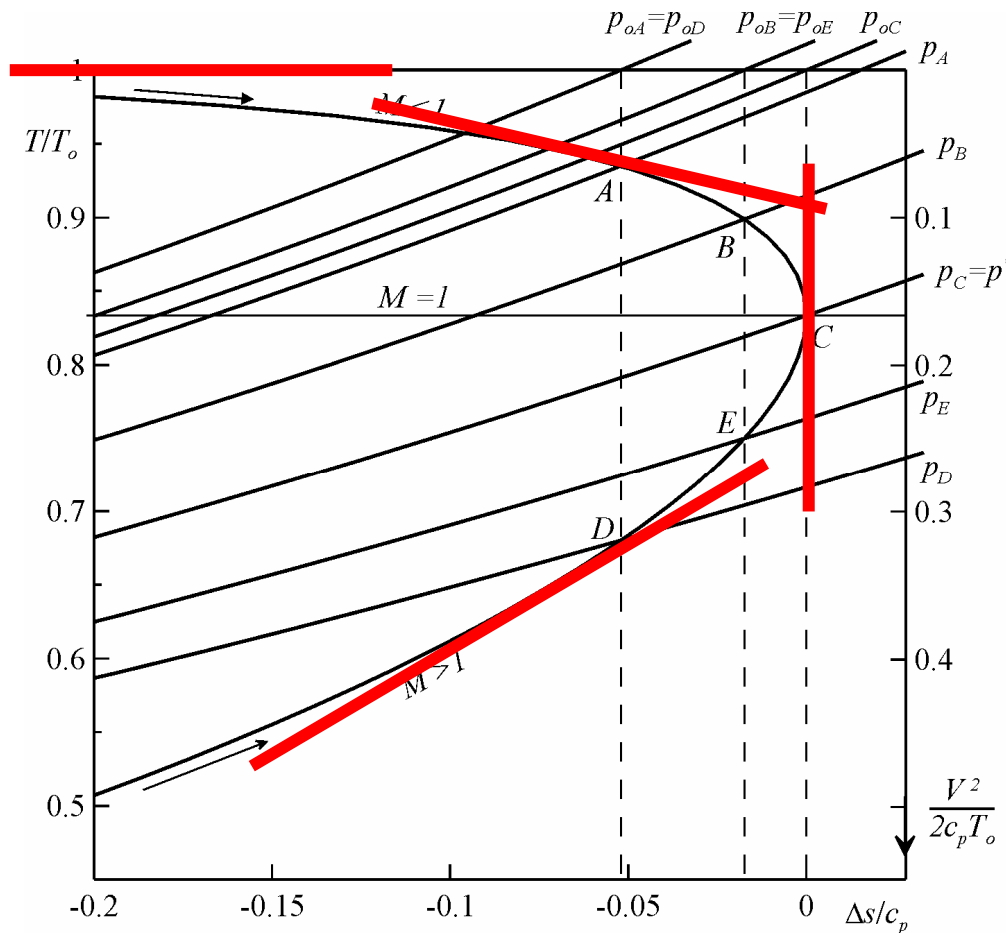
$$\frac{c_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,H} = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

Questa relazione rappresenta un'equazione differenziale nella funzione incognita $T = T(s)$ ed è risolvibile una volta espresso il numero di Mach in funzione della temperatura statica T mediante la:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

La soluzione di quest'equazione, per il caso di $\gamma = 1.4$, è riportata sul piano $T-s$ nel diagramma indicato di seguito, il quale mostra **l'andamento della curva di Fanno**.

- per **moto iposonico** ($M \rightarrow 0$), la tangente è orizzontale e la curva tende, quindi, all'**isoterma** che rappresenta la temperatura di ristagno;
- per **moto subsonico** ($M < 1$), la pendenza della curva risulta sempre **negativa**;
- per $M \rightarrow 1$, si ha: $\frac{c_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,H} \rightarrow \pm \infty$ e cioè nelle condizioni soniche (che si vedrà essere **critiche**), la curva presenta tangente verticale e l'entropia raggiunge un **massimo**;



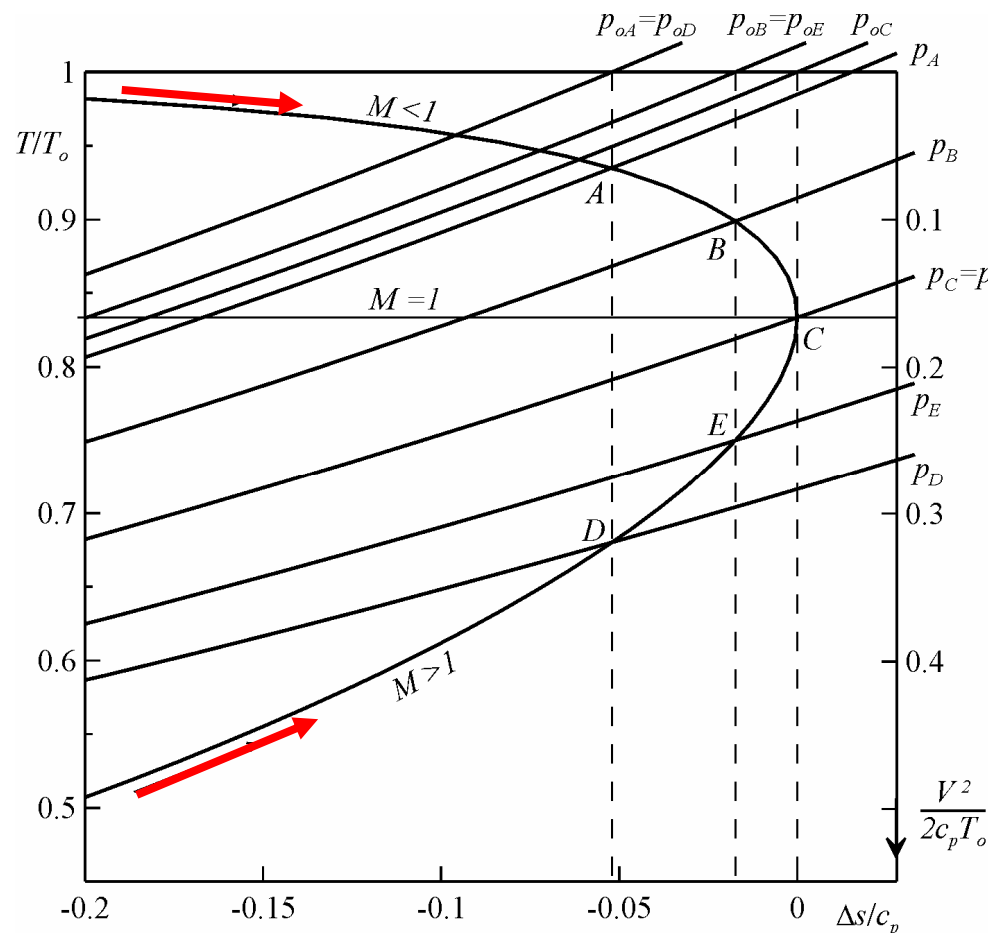
- per **moto supersonico** ($M > 1$), la pendenza della curva risulta sempre **positiva**;
- per **moto ipersonico** ($M \rightarrow \infty$), si ha: $\frac{c_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,H} \rightarrow 1$

che, ricordando la definizione di c_v , comporta che la curva di Fanno deve tendere ad una **isocora** ($\rho = \text{cost}$).

$$\frac{c_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,H} = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

Occorre notare che, per un determinato valore di γ , utilizzando le coordinate adimensionali di figura e la posizione $\Delta s^* = 0$, **la curva di Fanno è unica**.

In coordinate dimensionali, invece, ad ogni coppia di valori G e H corrisponde una particolare curva di Fanno. Ad esempio, è chiaro che, **fissare l'entalpia totale H , significa fissare un determinato valore di T_o** .

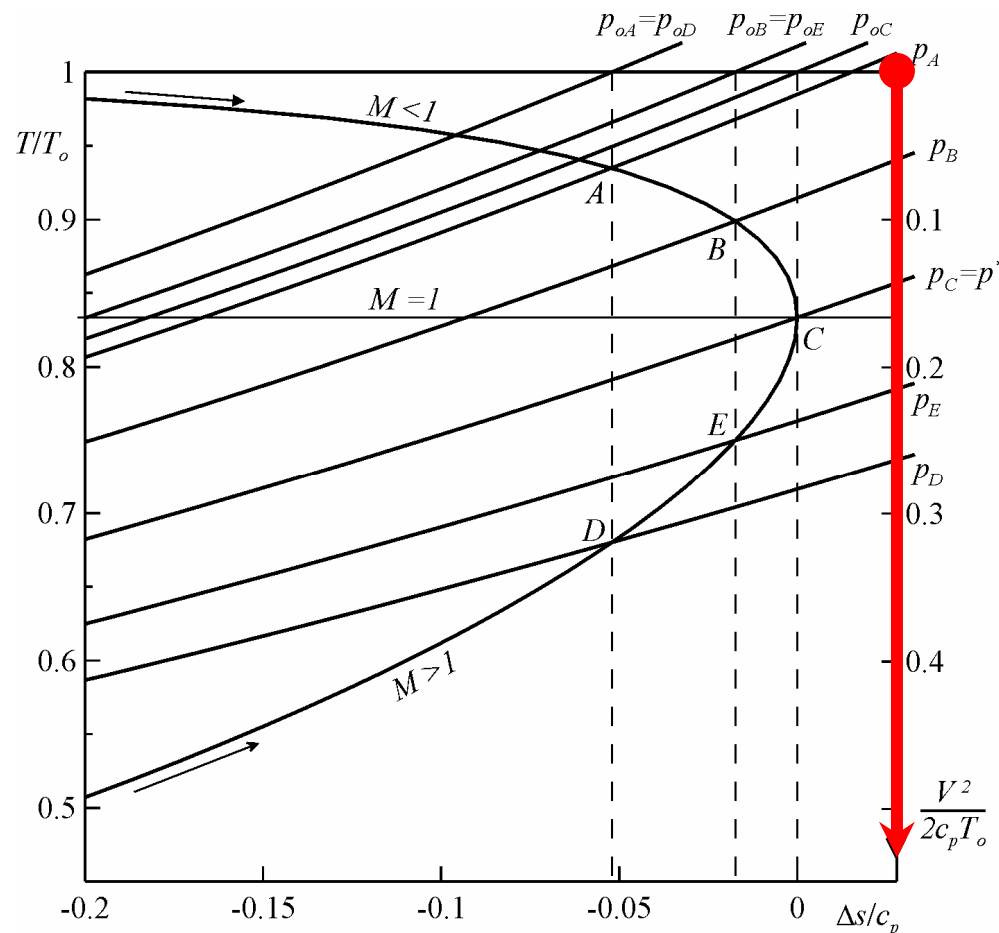


Poiché il moto alla Fanno è adiabatico, le variazioni d'entropia possono essere causate **solo da produzioni interne** al fluido (quindi, positive) e, in particolare, da quelle associate alla presenza degli sforzi viscosi alla parete.

Per il secondo principio della termodinamica sono, quindi, possibili, come mostrato dalle frecce di figura, **solo spostamenti lungo la curva di Fanno verso entropie crescenti**, cioè verso destra, **sia per moto subsonico** (ramo superiore della curva), **che supersonico** (ramo inferiore della curva).

Occorre poi osservare che, nel diagramma, esiste anche un **asse delle ordinate posto a destra ed orientato verso il basso**.

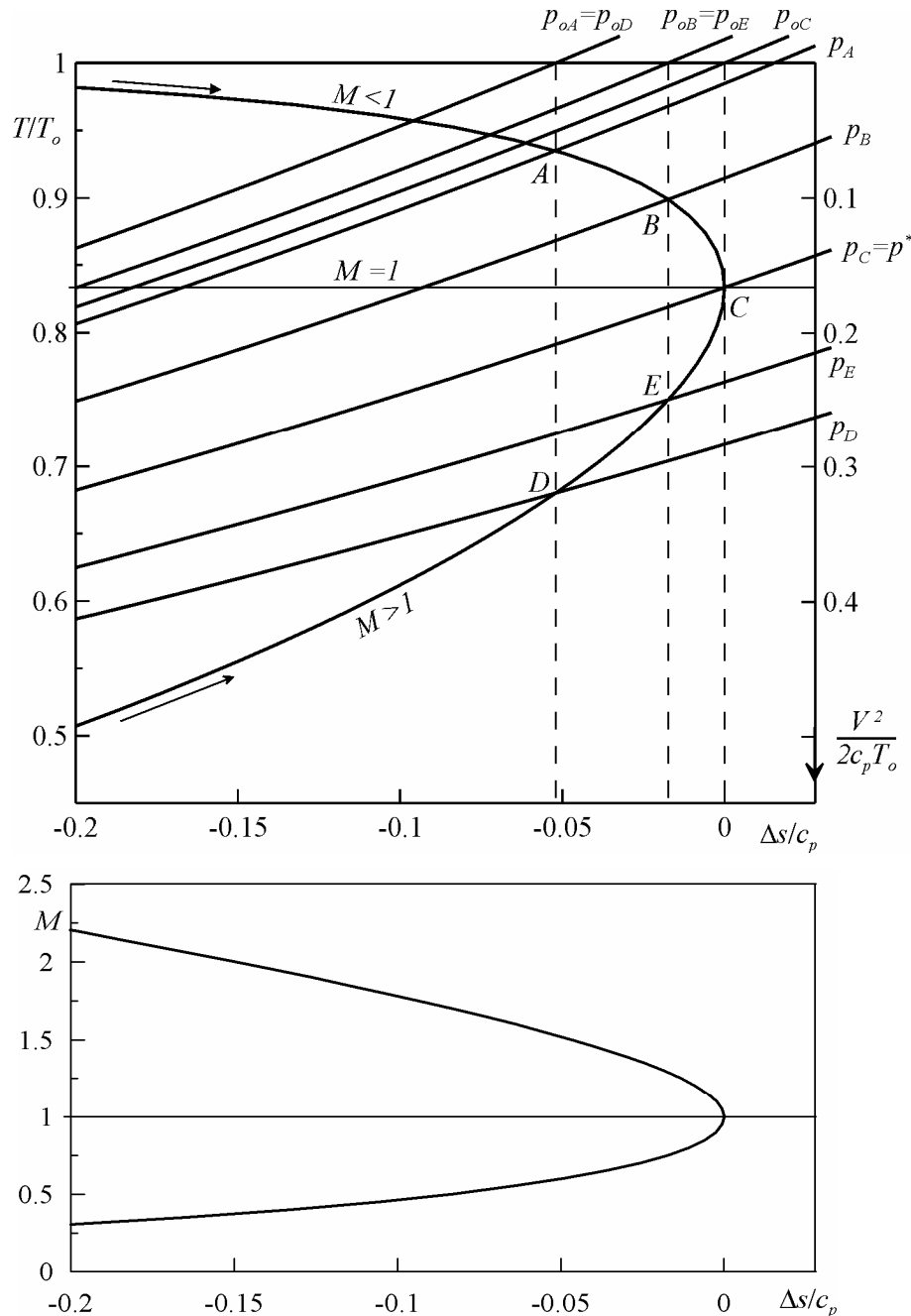
Questo asse indica l'energia cinetica posseduta dal fluido $V^2/2c_pT_o$ adimensionalizzata rispetto all'entalpia di ristagno che, si ricorda, resta costante durante il moto.



Questa quantità $V^2/2c_pT_o$ rappresenta una misura dell'energia cinetica della corrente e risulta direttamente funzione del numero di Mach in quanto si può ricavare:

$$\frac{V^2}{2c_pT_o} = \frac{(\gamma - 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

che, per $M \rightarrow \infty$, dà luogo alla velocità limite $V = V_\ell$ e, per $M = 1$, recupera il valore della velocità critica V^* .



Nel diagramma in basso è stato riportato, in funzione del livello entropico, l'**andamento del numero di Mach** $M = M(\Delta s)$, ponendolo in corrispondenza della curva di Fanno del diagramma in alto.

Tale andamento mostra come **sia per moto subsonico, che supersonico, il fluido muove sempre verso $M = 1$ perché l'entropia del fluido può solo aumentare.**

Il ramo **in alto** della curva di Fanno $T = T(s)$ corrisponde a quello **in basso** della curva $M = M(s)$ e viceversa.

Per condizioni d'ingresso subsoniche, lungo il condotto si realizza sia un **aumento del numero di Mach e della velocità, che una diminuzione della temperatura, della pressione e della densità**.

L'azione degli sforzi viscosi provoca, quindi, un'accelerazione del fluido e, a prima vista, questo comportamento può sembrare quantomeno anomalo.

Occorre peraltro osservare che la:

$$dI = dp + \rho V dV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e}$$

riscritta tenendo conto della:

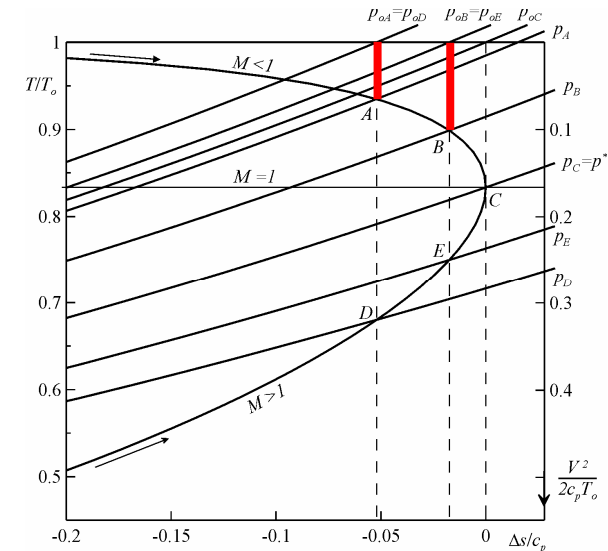
$$G = \rho V = \text{cost}$$

diventa:

$$dI = dp + GdV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e} < 0$$

in cui le quantità dp e dV hanno sempre segni opposti. Evidentemente, la diminuzione dell'impulso può essere associata ad una prevalente **diminuzione della pressione**, ovvero ad una prevalente **diminuzione della velocità**.

In regime subsonico il fenomeno è, invero, governato dalla forte diminuzione della pressione e il conseguente abbassamento della densità del fluido, provoca un aumento della velocità. Dunque, l'effetto causato dalla diminuzione di pressione prevale su quello dovuto all'aumento della velocità.



Sempre in regime subsonico, durante il moto del fluido, ***poiché l'entropia è generata dagli sforzi d'attrito alla parete, essa deve aumentare al crescere della lunghezza del condotto.*** Ciò è vero anche in supersonico.

Evidentemente, ***con un condotto sufficientemente lungo, si può raggiungere il punto di massima entropia, e cioè la condizione sonica.***

In tal caso, ***il moto si strozza*** perché non si può più produrre entropia e, quindi, percorrere ulteriori tratti di condotto.

La situazione è relativamente simile a quella che si realizza in un ugello convergente per pressione ambiente più bassa di quella critica.

Come si vedrà in seguito, ***un ulteriore allungamento del condotto dà luogo ad una diminuzione di G*** , cioè della portata di massa che lo attraversa.

Per un moto alla Fanno, le ***condizioni soniche*** ($M = 1$) possono essere, quindi, considerate come ***condizioni limiti del moto*** e, pertanto, sono anch'esse denominate **condizioni critiche**.

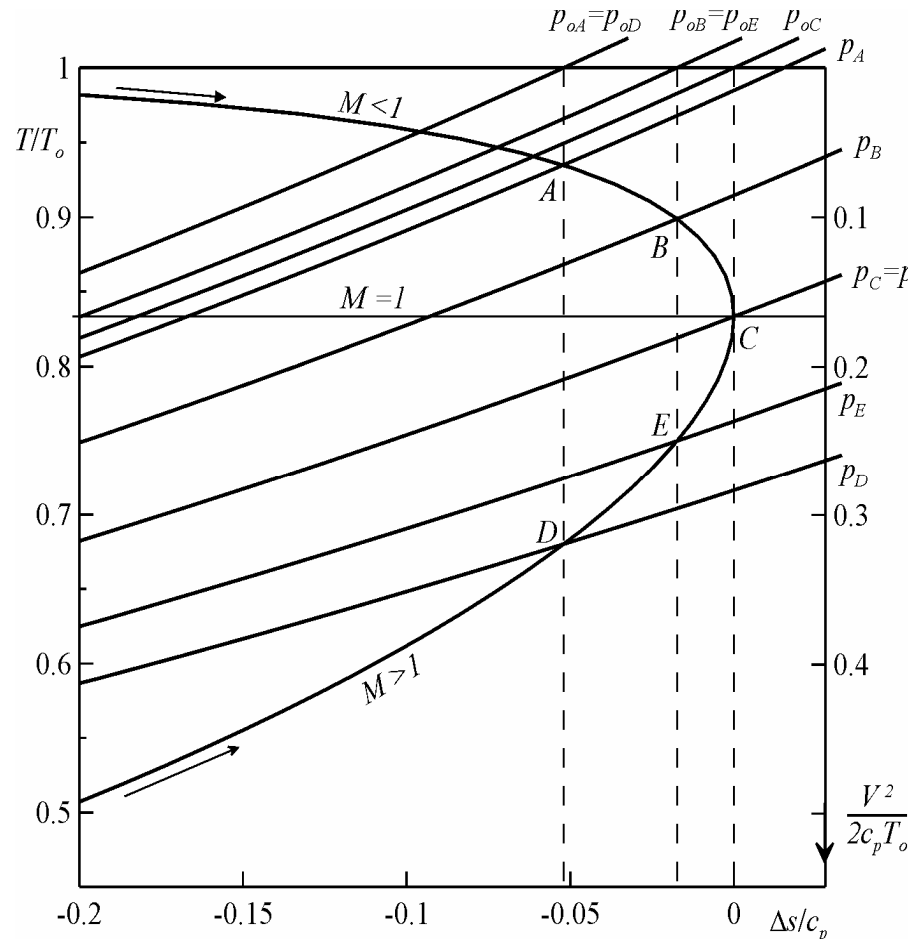
Per quanto detto, in un condotto nel quale si realizzi un moto alla Fanno, poiché le condizioni soniche corrispondono alla massima produzione di entropia possibile, ***se il numero di Mach all'ingresso del condotto è subsonico, esso non potrà mai diventare supersonico ma, al più, sonico, e solo allo sbocco del condotto.***

Per **moto supersonico**, il comportamento del fluido è esattamente opposto a quello in moto subsonico.

Infatti, **lungo il condotto si ha sia diminuzione del numero di Mach e della velocità, che aumento della temperatura, della pressione e della densità.**

Si ricordi l'equazione del bilancio della quantità di moto:

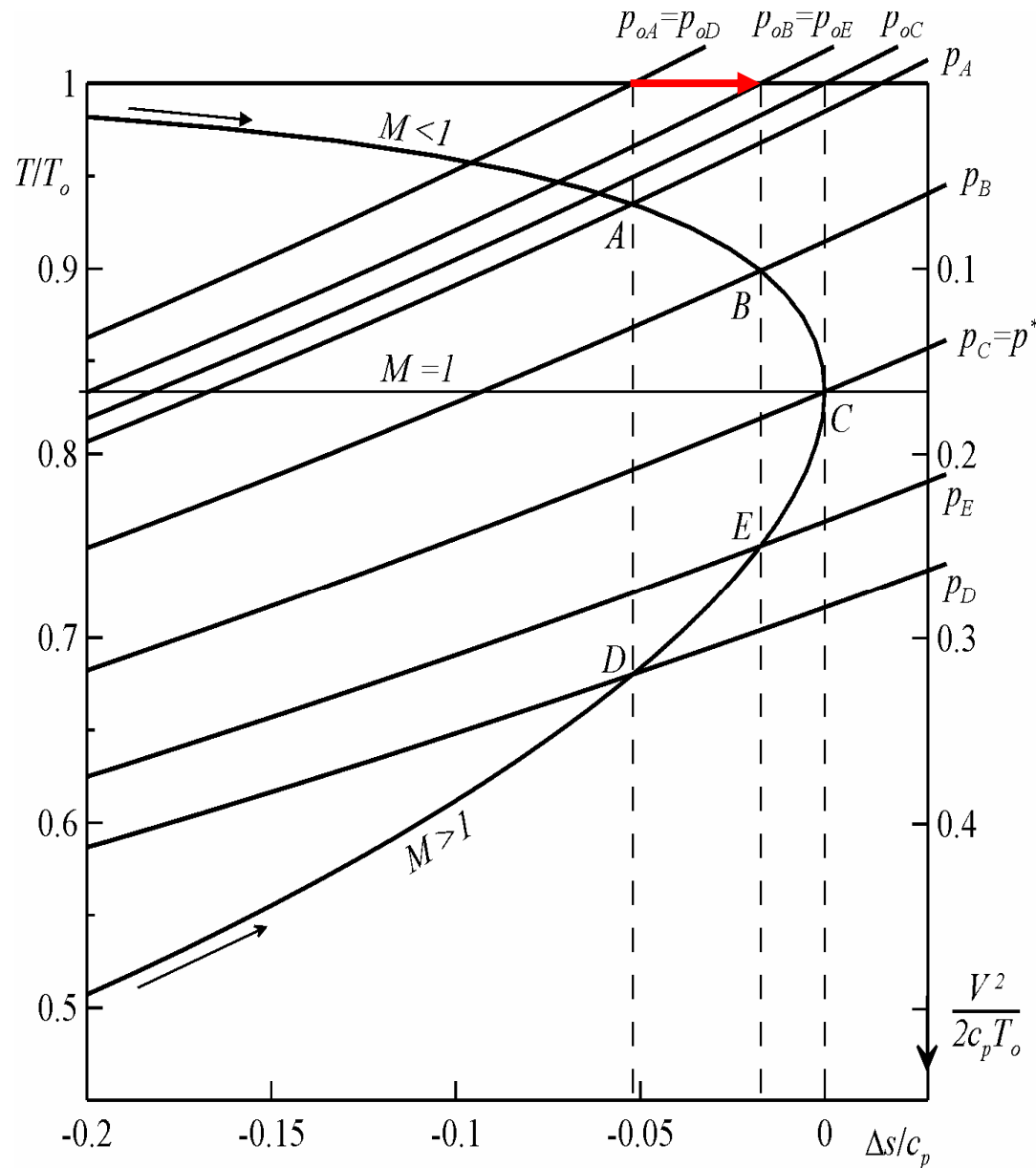
$$dI = dp + \rho V dV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e}$$



Nel moto supersonico, l'effetto dovuto alla diminuzione di velocità prevale, quindi, su quello dovuto all'aumento di pressione.

Anche in questo caso si possono raggiungere le condizioni soniche solo all'uscita del condotto, in altre parole **il moto rimane supersonico lungo tutto il condotto diventando, al meno, sonico nella sezione di uscita.**

E' importante osservare che **quanto detto accade purché, come si vedrà in seguito, non sia presente un'onda d'urto all'interno del condotto stesso.**



Oltre che da considerazioni grafiche sulla figura, il fatto che la **pressione di ristagno deve sempre diminuire** si può dedurre anche dalla:

$$dH = T_o ds + dp_o / \rho_o = 0$$

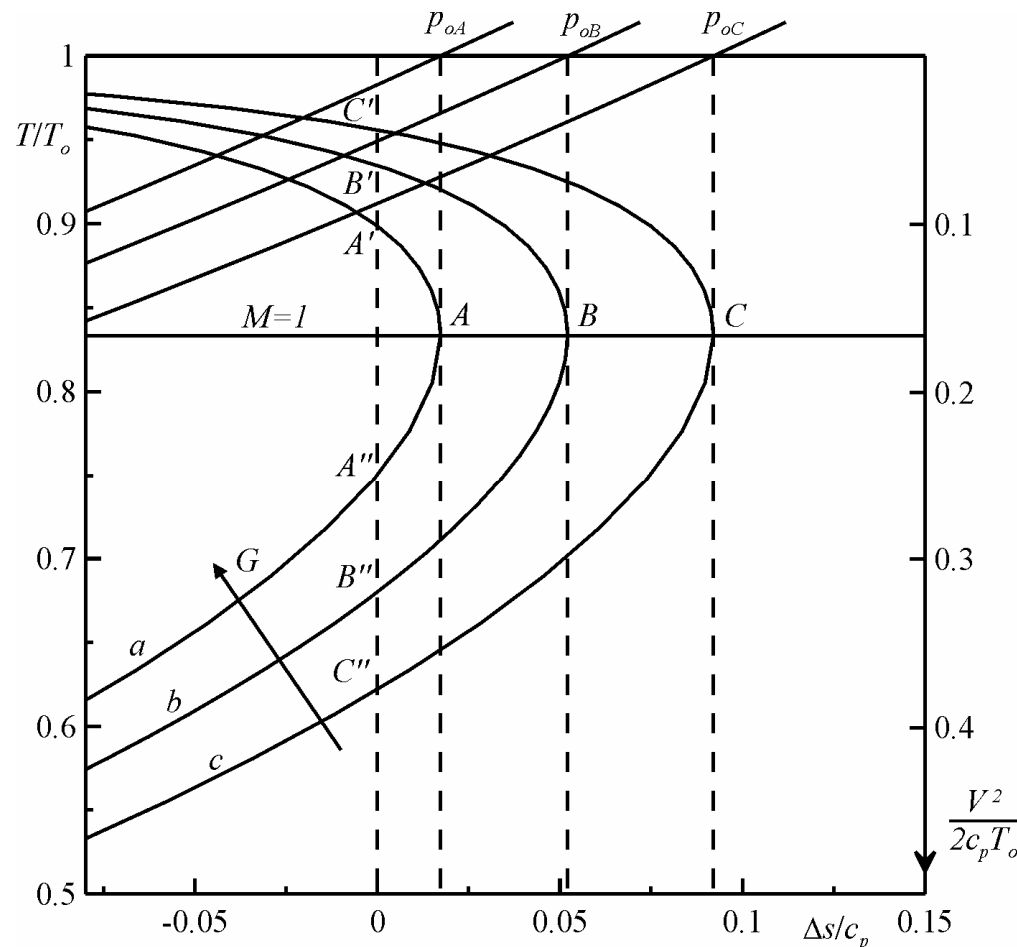
scritta ricordando che **le condizioni statiche hanno la stessa entropia di quelle di ristagno**.

Dalla relazione precedente risulta chiaro che, essendo, in ogni caso, $ds > 0$ deve necessariamente verificarsi $dp_o < 0$, in quanto sia la densità che la temperatura sono positive.

Mantenendo costante l'entalpia totale H e variando il flusso di massa G si ottiene un'**infinità** di curve di Fanno, tre delle quali sono mostrate in figura, da considerare, di fatto, tutte asintotiche alla stessa temperatura di ristagno.

Esistono vari modi per dimostrare che, **più interna è la curva (vale a dire più spostata verso sinistra), più elevato è il flusso di massa G .**

Poiché la temperatura di ristagno (la a_o) è la stessa per le tre curve, dalla:



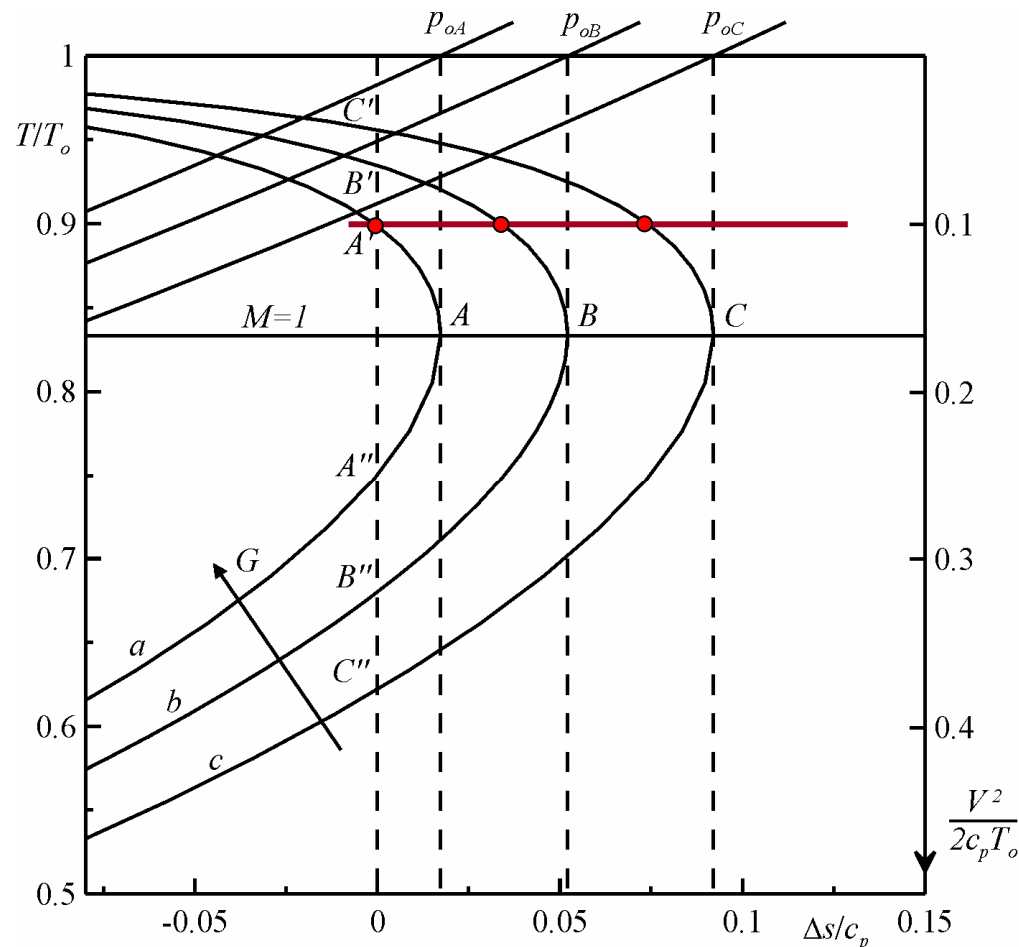
$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

si ha che, in condizioni critiche, il flusso di massa è funzione della sola pressione di ristagno.

Confrontando la pressione di ristagno del punto A con quelle dei punti B e C (tutti caratterizzati da $M = 1$), si verifica rapidamente che **il flusso di massa relativo alla curva a è maggiore di quello relativo alla curva b , che a sua volta è maggiore di quello della c .**

Nella dimostrazione precedente, è stata implicitamente fissata una temperatura di riferimento pari a quella critica (cui corrisponde $M = 1$).

Evidentemente, lo stesso ragionamento si può fare per una qualunque diversa temperatura di riferimento (cioè, anche per $M \neq 1$).

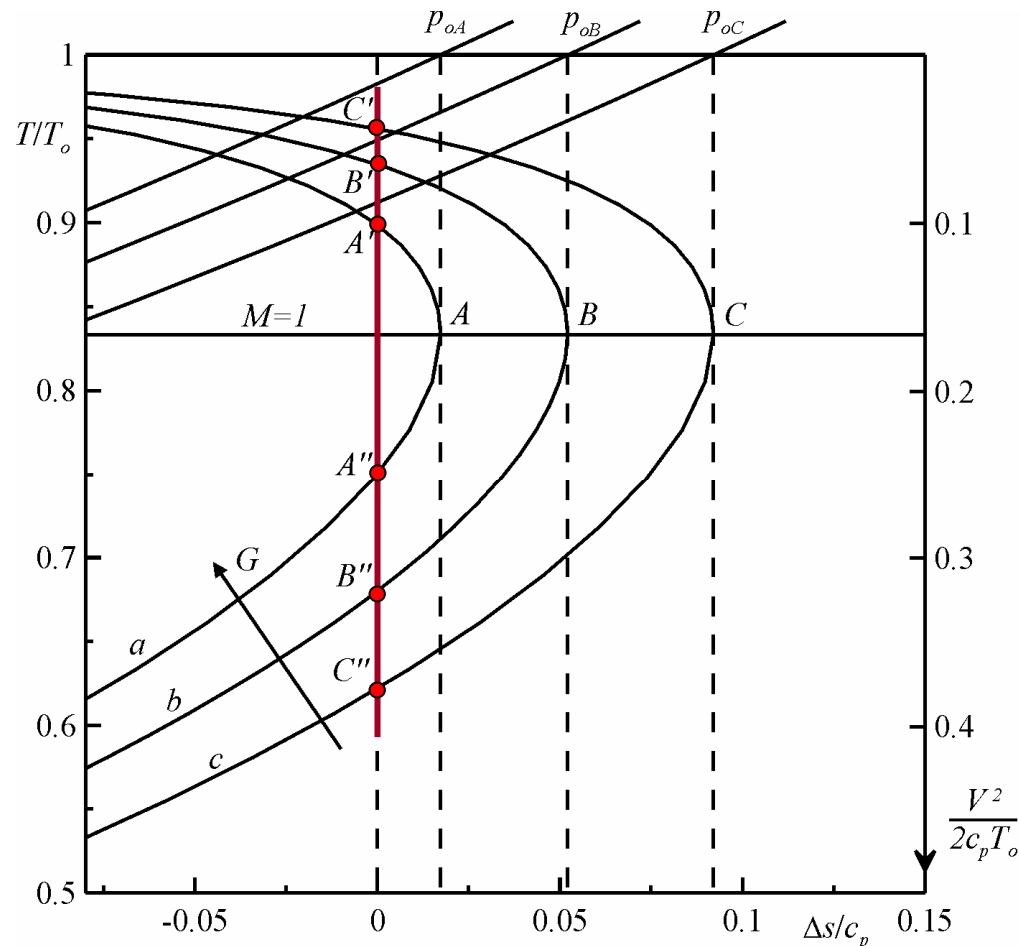


Infatti, ricordando che tre punti aventi la stessa temperatura (cioè allineati in orizzontale), per la:

$$H = h + V^2/2 = \text{cost}$$

hanno anche la stessa velocità (si veda l'ordinata a destra) e che, muovendosi sul piano $T-s$ verso destra, le isocore identificano valori della densità che sono man mano decrescenti, il flusso di massa deve anch'esso decrescere.

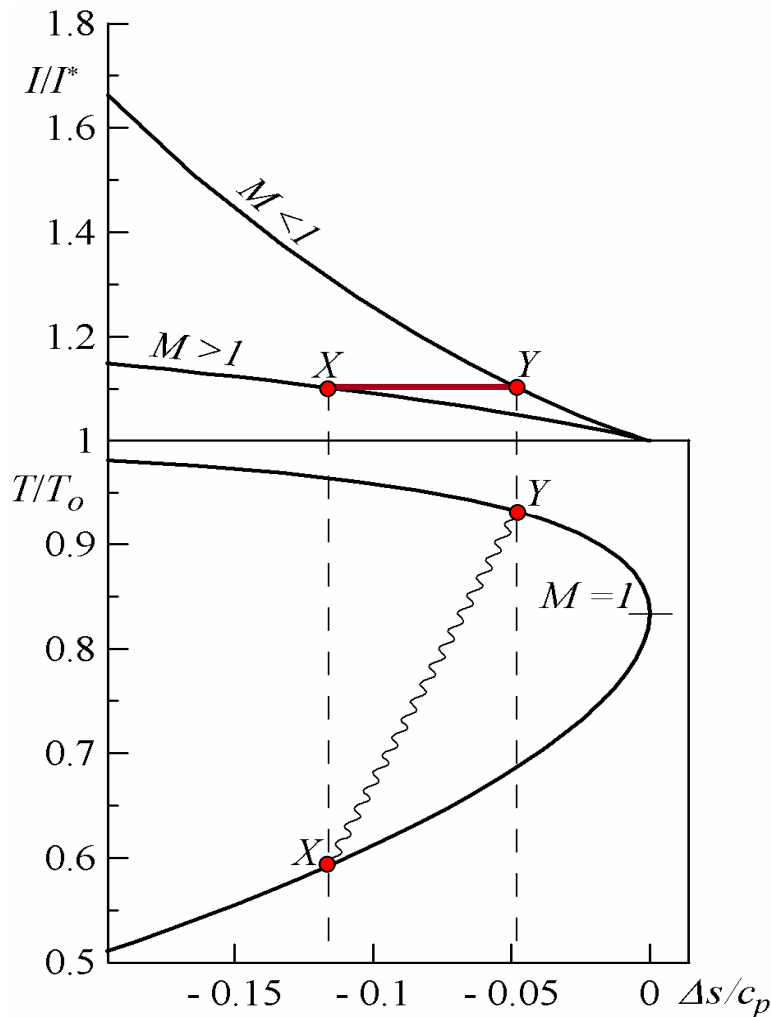
Un ragionamento analogo può anche essere fatto con riferimento ad una fissata entropia (ad esempio, $\Delta s/c_p = 0$) e individuando così i sei punti intersezione con le tre diverse curve di Fanno (A' , B' e C' in regime subsonico e A'' , B'' e C'' in quello supersonico).



In questo caso i sei punti sono tutti relativi alla stessa pressione di ristagno ma a **sei diversi numeri di Mach** e, per la costanza di s e H , possono essere assunti a rappresentare le condizioni termofluidodinamiche del fluido in un **ugello convergente divergente**.

In regime subsonico (risp. supersonico) al punto più in basso A' (risp. più in alto A'') corrisponde un numero di Mach subsonico più (risp. supersonico meno) elevato e, quindi, un fattore di efflusso maggiore.

Attraverso le onde d'urto normali adiabatiche, le tre grandezze G , I e H restano costanti.



Poiché la curva di Fanno è caratterizzata da G e H costanti, se un qualunque punto del suo ramo supersonico rappresenta le condizioni a monte di un'onda d'urto normale, **il punto che fornisce le condizioni a valle dell'onda d'urto deve trovarsi sulla stessa curva di Fanno, sul ramo subsonico e ad un livello entropico maggiore.**

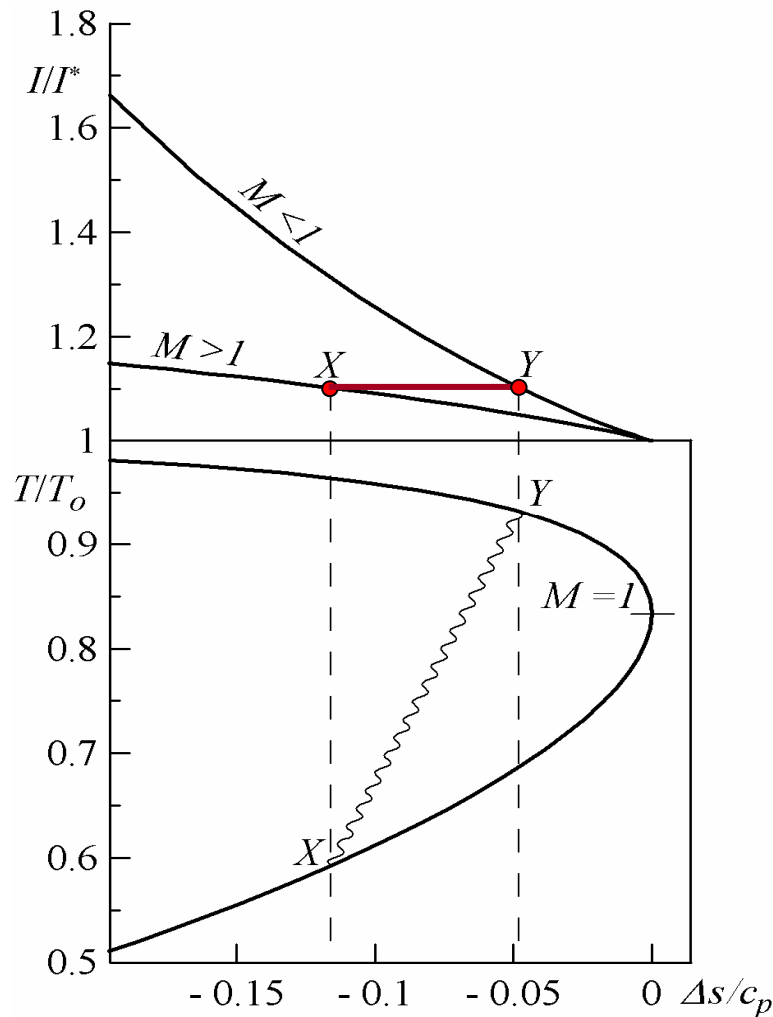
Nel diagramma in basso di figura sono mostrati sul piano di Gibbs i due punti a monte X , e a valle Y , di un onda d'urto normale, che appartengono alla stessa curva di Fanno.

Nella parte superiore della figura sono rappresentate le due curve che mostrano l'andamento dell'impulso specifico I , una relativa al ramo subsonico e l'altra a quello supersonico, in corrispondenza del diagramma in basso.

Per la:

$$dI = dp + \rho V dV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e}$$

le due curve devono decrescere, oltre che coincidere nel punto critico ($M = 1$).



Per la:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

i punti X e Y devono anche avere lo stesso valore dell'impulso specifico I in quanto rappresentativi delle condizioni a monte e a valle dell'onda d'urto.

Quindi, la curva che descrive l'andamento di I per il moto subsonico deve trovarsi tutta al di sopra di quella relativa al moto supersonico.

Man mano che il numero di Mach a monte dell'onda d'urto si avvicina al valore unitario (cioè verso il valore massimo dell'entropia dove le due curve di I/I^* risultano tangenti), l'onda stessa tende a risultare isoentropica e per la:

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

la pressione di ristagno attraverso l'onda stessa non varia.

RAPPORTI CARATTERISTICI PER IL MOTO ALLA FANNO

Proseguendo nello studio del moto alla Fanno è opportuno, a questo punto, ricercare le relazioni che permettono di valutare, **per il modello di gas più che perfetto**, i rapporti caratteristici di tutte le diverse grandezze termofluidodinamiche in funzione del numero di Mach della corrente fluida.

Particolare importanza riveste la quantità $4fL/D_e$ perché, come si vede dalla:

$$I_2 - I_1 = -4 \tau_p \frac{L}{D_e} = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{L}{D_e}$$

a questo raggruppamento è legata la **variazione delle condizioni del fluido lungo il condotto** e quindi, come è stato già accennato in precedenza, questa quantità rappresenta la cosiddetta **forza spingente**.

Dal bilancio della quantità di moto

$$dI = dp + \rho V dV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e}$$

si ricava:

$$\frac{dp}{\rho V^2/2} + \frac{2dV}{V} = -4f \frac{dx}{D_e}$$

Dalla $VdV = -dh = -c_p dT$ ricordando che $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, si ricava:

$$\frac{dT}{T} = - \frac{V^2}{c_p T} \frac{dV}{V} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V}$$

Sostituendo questa relazione insieme alla:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

nella:

$$\frac{dp}{\rho V^2/2} + \frac{2dV}{V} = -4f \frac{dx}{D_e}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho V^2/2} \frac{dp}{p} + \frac{2dV}{V} &= \frac{2a^2}{\gamma V^2} \left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \right) + \frac{2dV}{V} = \\ &= \frac{2}{\gamma M^2} \left(- \frac{dV}{V} - (\gamma - 1) M^2 \frac{dV}{V} \right) + \frac{2dV}{V} = \\ &= \left(2 - \frac{2}{\gamma M^2} - 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{dV}{V} = \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

che, inserita nella

$$\frac{dp}{\rho V^2/2} + \frac{2dV}{V} = -4f \frac{dx}{D_e}$$

dà luogo a

$$\frac{2}{\gamma} \left(\frac{M^2 - 1}{M^2} \right) \frac{dV}{V} = -4f \frac{dx}{D_e}$$

e, tenendo conto della

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

valida per moti omoenergetici, si ottiene infine

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)} \frac{dM^2}{M^2} = -4f \frac{dx}{D_e}$$

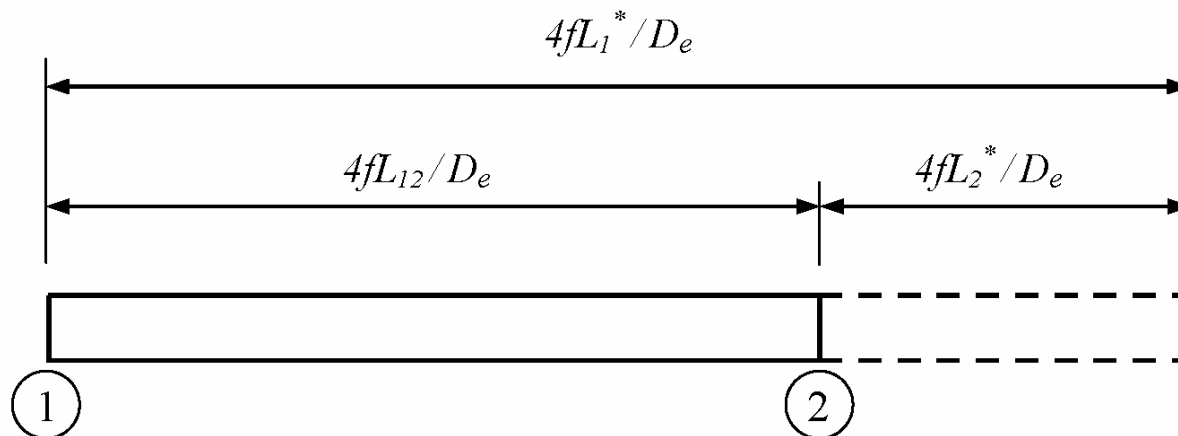
Questa è un'equazione differenziale che, integrata fra due diverse sezioni del condotto **1** e **2**, fornisce la lunghezza adimensionale $4fL_{12}/D_e$ che il fluido deve percorrere per portarsi da M_1 a M_2 , dove L_{12} è la distanza tra le due sezioni.

Un approccio del genere non è molto pratico, perché sarebbe necessario integrare la precedente equazione tra tutte le coppie di stati possibili M_1 ed M_2 , ***purché essi siano entrambi subsonici, o entrambi supersonici.***

Un approccio più conveniente consiste nel far coincidere uno dei due stati, in particolare lo stato 2, con quello critico ($M = 1$). Ciò comporta che la quantità $L_{12} = L^*$ assume il significato di **lunghezza del condotto necessaria a raggiungere le condizioni soniche** a partire da un particolare numero di Mach M (**lunghezza critica**). Infatti, **per ogni curva di Fanno** (in pratica, per ogni coppia di valori G e H), **il punto critico è univocamente determinato**. Come mostrato in figura, **nel caso più generale, per il quale** $L_{12} \neq L^*$, la grandezza L_{12} può essere facilmente determinata dalla:

$$4f \frac{L_{12}}{D_e} = 4f \frac{L_1^*}{D_e} - 4f \frac{L_2^*}{D_e}$$

nella quale le lunghezze L_1^* e L_2^* rappresentano le lunghezze critiche a partire dai numeri di Mach M_1 ed M_2 , rispettivamente.



Integrando, quindi, l'equazione ricavata in precedenza:

$$\frac{M^2 - 1}{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} \frac{dM^2}{M^2} = - 4f \frac{dx}{D_e}$$

fra il generico valore di M e quello critico ($M = 1$), si ottiene la relazione che dà il valore del **rapporto adimensionale $4fL^*/D_e$ in funzione del numero di Mach**:

$$\frac{4fL^*}{D_e} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)$$

Attenzione: Nella relazione precedente anche se l'asterisco è stato apposto al solo simbolo L , esso **deve intendersi riferito a tutto il rapporto $4fL/D_e$** in cui esso appare, rapporto che viene talvolta indicato come **numero di Fanno**.

Lo stesso ragionamento effettuato per la lunghezza adimensionale può essere applicato anche a tutti gli altri rapporti caratteristici.

Pertanto, è conveniente esprimere tutte le grandezze termofluidodinamiche adimensionalizzandole rispetto ai corrispondenti **valori nella condizione critica** ($M = 1$), i quali sono, al solito, indicati con l'**apice asterisco**.

In particolare, dalla:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

e tenendo conto della:

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{a^{*2}}{a_o^2} = \frac{2}{\gamma + 1}$$

si ha il **rapporto caratteristico tra le temperature statiche:**

$$\frac{T}{T^*} = \frac{T}{T_o} \frac{T_o}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

Dall'equazione di conservazione della massa si ottiene invece:

$$G = \rho V = \frac{\gamma p \rho V}{\gamma p} = \gamma p \frac{M}{\sqrt{\gamma R T}}$$

che, per la costanza di G ed utilizzando la relazione appena ottenuta, dà luogo al **rapporto caratteristico tra le pressioni statiche:**

$$\frac{p}{p^*} = \sqrt{\frac{T}{T^*}} \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1}}$$

Dall'equazione di stato dei gas e dalle relazioni appena ottenute si ottengono i **rapporti caratteristici per le velocità e le densità:**

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{p}{p^*} \frac{T^*}{T} = \sqrt{\frac{T^*}{T}} \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}$$

Ricordando la:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

si ottiene il **rapporto tra le pressioni di ristagno:**

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{p_o}{p} \frac{p}{p^*} \frac{p^*}{p_o^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} =$$

$$= \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Ricordando che il moto è omoenergetico e, quindi, $T_o/T_o^* = 1$, la sostituzione di questa relazione nella:

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

fa calcolare la **variazione di entropia** rispetto alle condizioni critiche $\Delta s = s - s^*$:

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left\{ M \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(1 - \gamma)}} \right\}$$

In ogni caso, sostituendo in questa relazione l'espressione per il numero di Mach M ricavata dalla:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

si ottiene la relazione che descrive la **curva di Fanno sul piano di Gibbs** (con la condizione $\Delta s^* = 0$):

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{T_o}{T} - 1 \right) \left(\frac{2T_o}{(\gamma + 1)T} \right)^{\frac{\gamma + 1}{1 - \gamma}} \right]$$

la quale mostra come, **nelle variabili $\Delta s/c_p$ e T/T_o , la curva di Fanno risulta essere unica per ciascun valore di γ .**

Infine, per l'impulso specifico definito come:

$$I = p + \rho V^2 = p(1 + \gamma M^2)$$

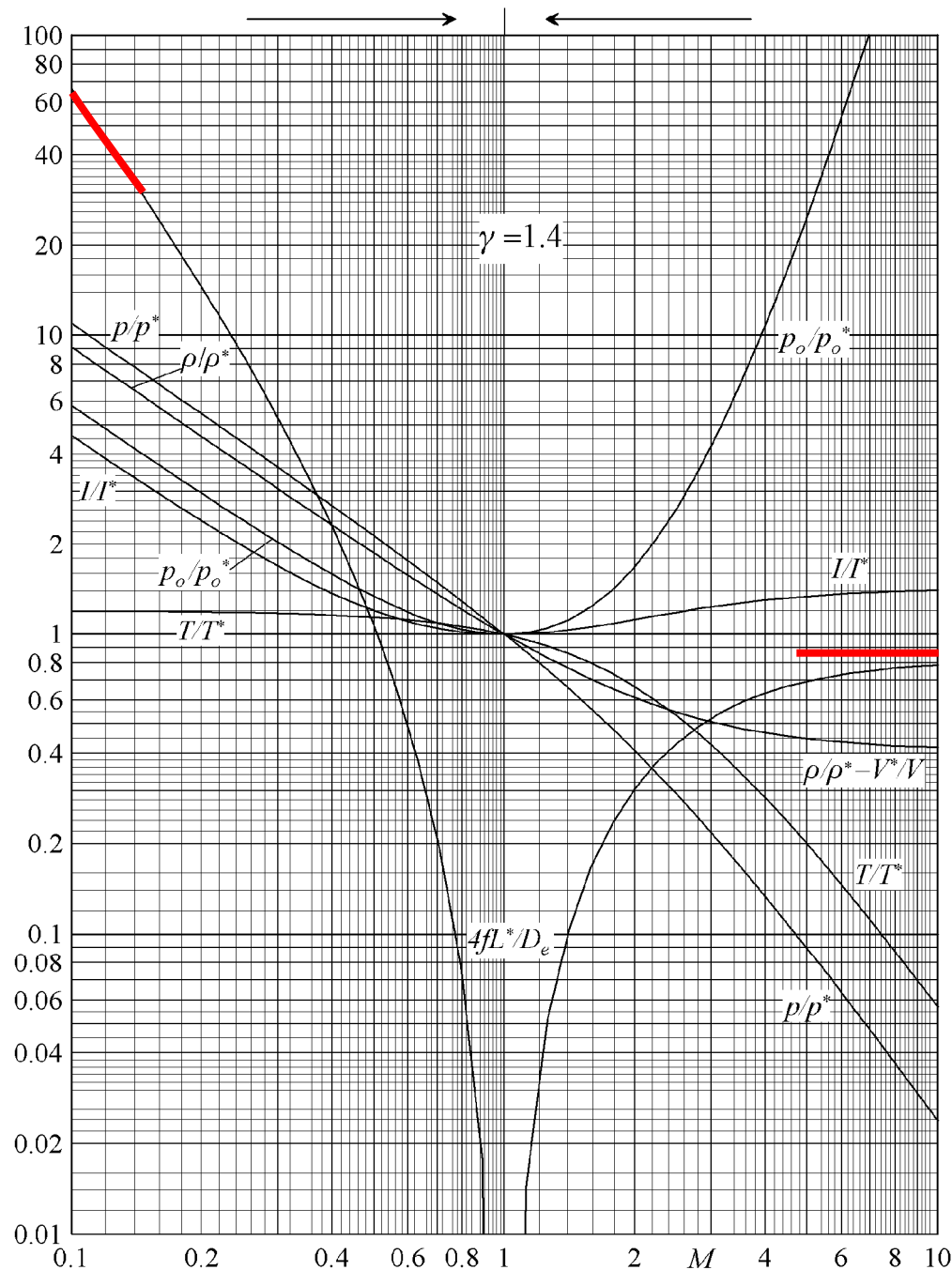
tenendo sempre conto della

$$\frac{p}{p^*} = \sqrt{\frac{T}{T^*}} \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}}$$

si ottiene:

$$\frac{I}{I^*} = \frac{p}{p^*} \frac{1 + \gamma M^2}{\gamma + 1} = \frac{1 + \gamma M^2}{M} \left[2(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) \right]^{-1/2}$$

I diversi rapporti caratteristici per il moto alla Fanno, ricavati in precedenza sono stati diagrammati nella figura che segue per il caso del valore particolare di $\gamma = 1.4$.

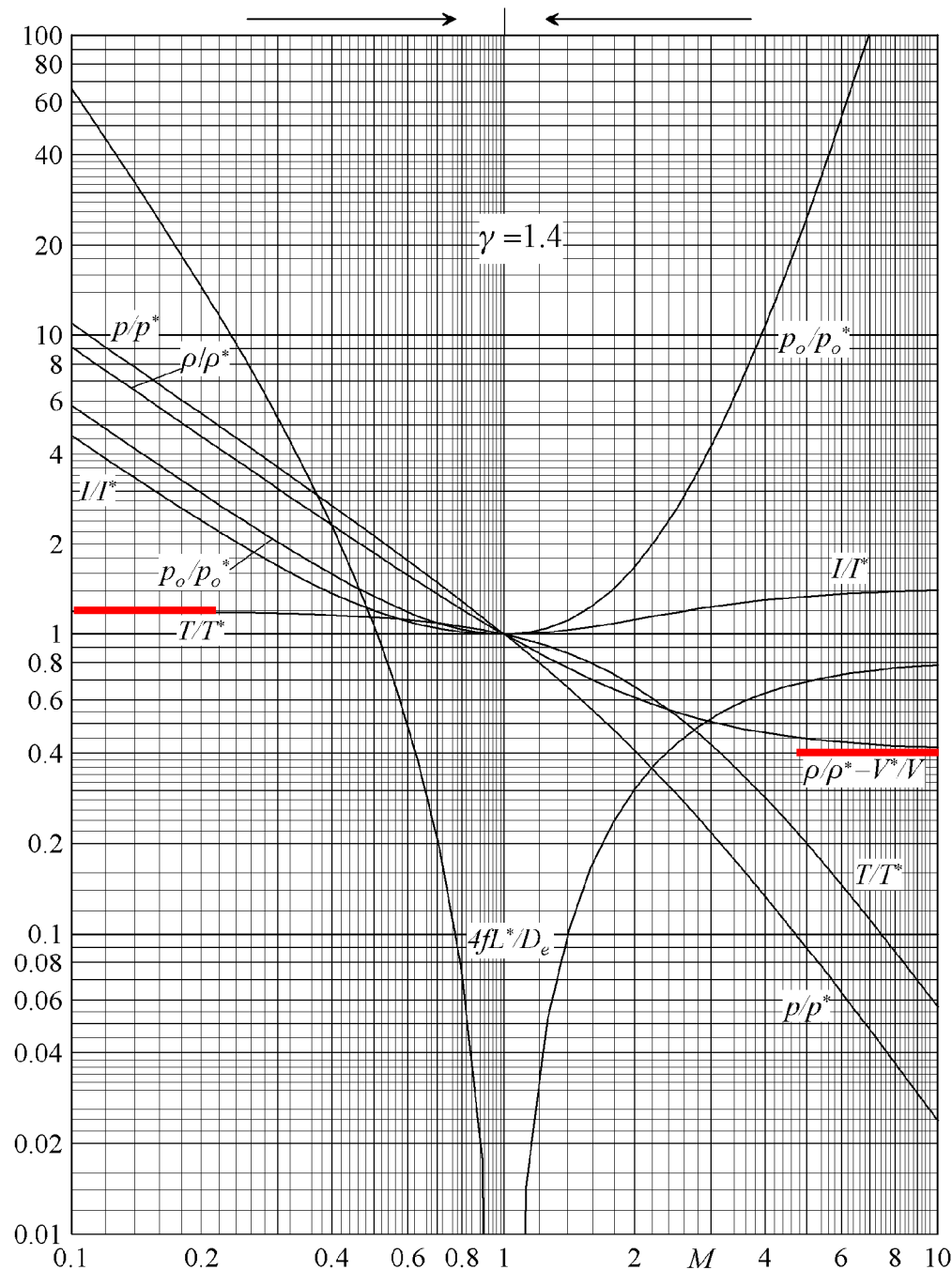


Dall'esame della figura si nota che la quantità $4fL^*/D_e$ **tende ad infinito al tendere del numero Mach a zero**, mentre, **per $M \rightarrow \infty$, raggiunge il valore limite:**

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) - \frac{1}{\gamma}$$

Le perdite d'impulso sono all'incirca proporzionali al quadrato della velocità e sono, quindi, molto elevate in regime supersonico.

Per questo motivo, nelle applicazioni pratiche, è sempre sconsigliabile avere un moto supersonico in presenza di sforzi tangenziali alla parete in condotti a sezione costante qualora ciò non sia strettamente necessario, come ad esempio nella sezione di prova di gallerie supersoniche.



I rapporti p/p^* , $\rho/\rho^* = V^*/V$ e T/T^* sono tutti **funzioni decrescenti del numero di Mach** ma, per $M \rightarrow 0$, mentre i primi due sono illimitati, il rapporto T/T^* tende a $(\gamma + 1)/2$ (si ricordi che la curva di Fanno tende ad un'**isoterma**).

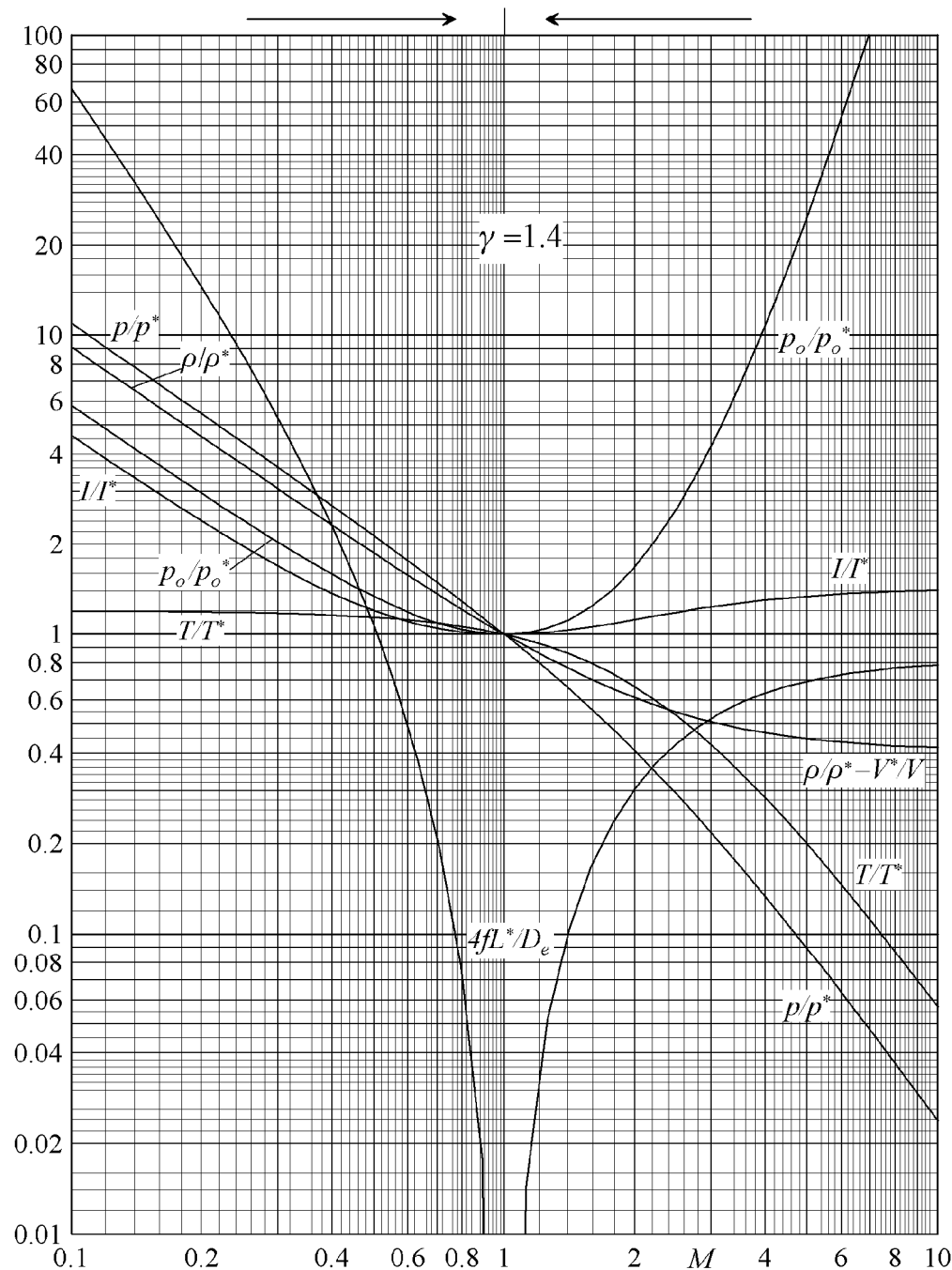
Al tendere di Mach all'infinito, sia p/p^* che T/T^* tendono a zero, mentre ρ/ρ^* tende a:

$$\sqrt{(\gamma - 1)/(\gamma + 1)}$$

(pari a 0.4082 per $\gamma = 1.4$).

Si ricordi che, per $M \rightarrow \infty$, la curva di Fanno tende ad un'**isocora**. Il tendere ad un'isocora della curva è, in effetti, conseguenza del tendere della velocità alla **velocità limite** data dalla:

$$V_\ell = \sqrt{2H}$$



Il **rapporto tra le pressioni di ristagno** p_o/p_o^* ha, invece, un comportamento diverso presentando un **minimo assoluto per** $M = 1$, mentre **tende all'infinito sia per** $M \rightarrow 0$, **che per** $M \rightarrow \infty$.

Ricordando che la portata è pari a:

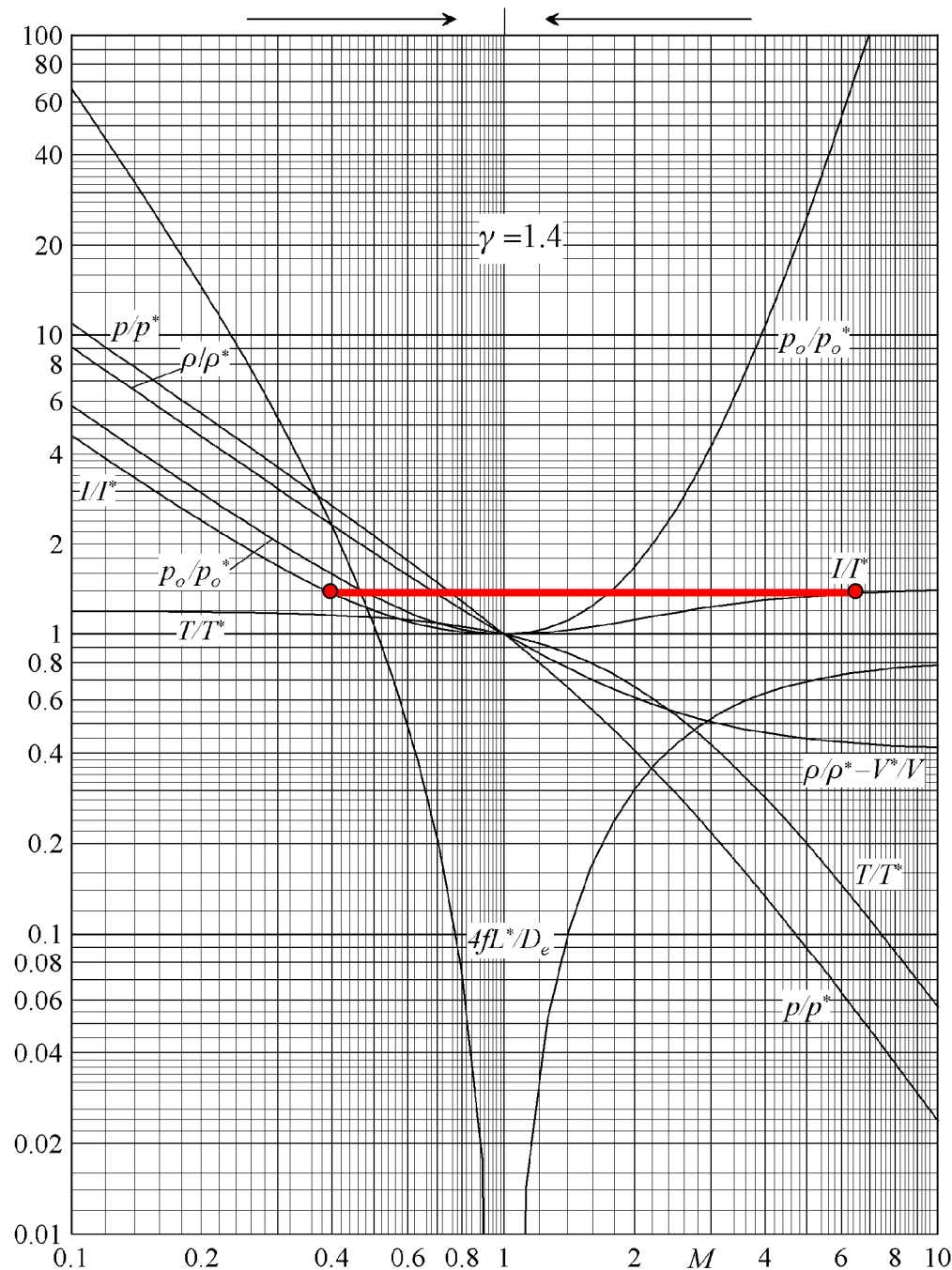
$$\dot{m} = \frac{p_o^* A^*}{a_o} \psi^* = \frac{p_{o1} A_1^*}{a_o} \psi^*$$

dove si sono indicate con il pedice **1** le condizioni nella generica sezione. Evidentemente la A^* è l'area della sezione retta del condotto, mentre si può valutare A_1^* utilizzando la:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

si ha quindi:

$$\frac{p_{o1}}{p_o^*} = \frac{A^*}{A_1^*} = \frac{A_1}{A_1^*}$$



Come la pressione di ristagno, **l'impulso specifico ha un minimo assoluto per $M = 1$** ed è **illimitato per $M \rightarrow 0$** ; esso tende, invece, ad un **limite finito per $M \rightarrow \infty$** raggiungendo il valore:

$$\gamma / \sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Due punti del diagramma di I/I^* allineati in orizzontale rappresentano i valori del numero di Mach a monte M_1 ed a valle M_2 di un'onda d'urto normale.

Dal diagramma si può notare anche che, per $M_1 \rightarrow \infty$, il numero di Mach a valle dell'onda d'urto tende al **valore limite M_ℓ** .

E' importante rilevare che, **di due punti aventi lo stesso valore di I/I^* , quello subsonico ha un valore di $4fL^*/D_e$ maggiore.**

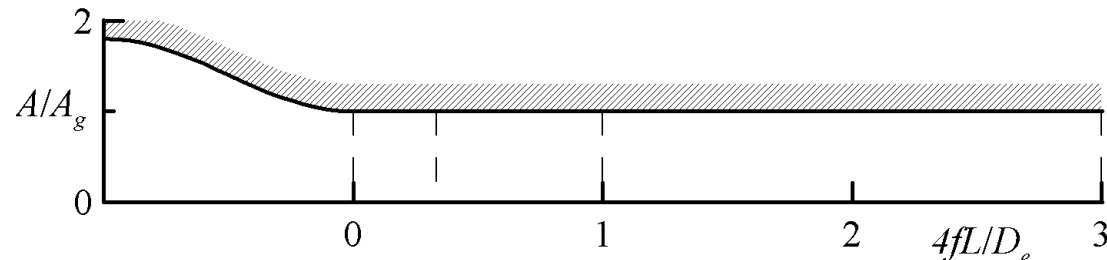
CONDOTTO CON ATTRITO COLLEGATO AD UN SERBATOIO MEDIANTE UN UGELLO CONVERGENTE

Si vuole ora esaminare il sistema, mostrato in basso, composto da un ugello convergente al quale è collegato un condotto adiabatico, a sezione costante e con attrito, in cui il moto del fluido è schematizzabile con il modello di Fanno.

Sull'asse delle ascisse è riportato il rapporto adimensionale $4fL/D_e$ misurato a partire dalla sezione di uscita dell'ugello e, su quello delle ordinate, il rapporto tra l'area della sezione locale e quella della stessa sezione d'uscita.

L'ugello è collegato a monte ad un serbatoio, per cui *il moto nell'ugello risulta senz'altro subsonico* e si può considerare adiabatico isoentropico.

Si deve esplicitamente notare che, generalmente, la lunghezza di un ugello convergente divergente è dello stesso ordine di grandezza del suo diametro d'uscita, così come rappresentato in figura. Invece, poiché la quantità $4f$ è un numero abbastanza piccolo (dell'ordine di 10^{-2}), nella scala adottata, *il condotto a sezione costante, rappresentato nella stessa figura, risulta notevolmente accorciato rispetto alla sua lunghezza reale.*

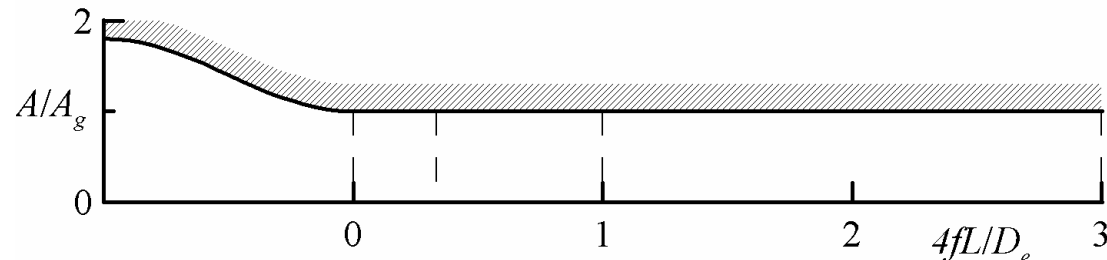


Per $4fL/D_e = 0$, la configurazione coincide con il sistema serbatoio-ugello convergente già considerato. Quindi, la sostanziale differenza nel problema trattato di seguito viene ad essere rappresentata dall'aggiunta del condotto che ha un valore $4fL/D_e > 0$.

Come nel caso dell'ugello convergente, per semplicità, si può supporre che il serbatoio contenga un gas ad una pressione costante $p_o = 1\text{ata}$ e che il condotto scarichi in un ambiente in cui sia possibile far variare la pressione p_a da 1ata in giù.

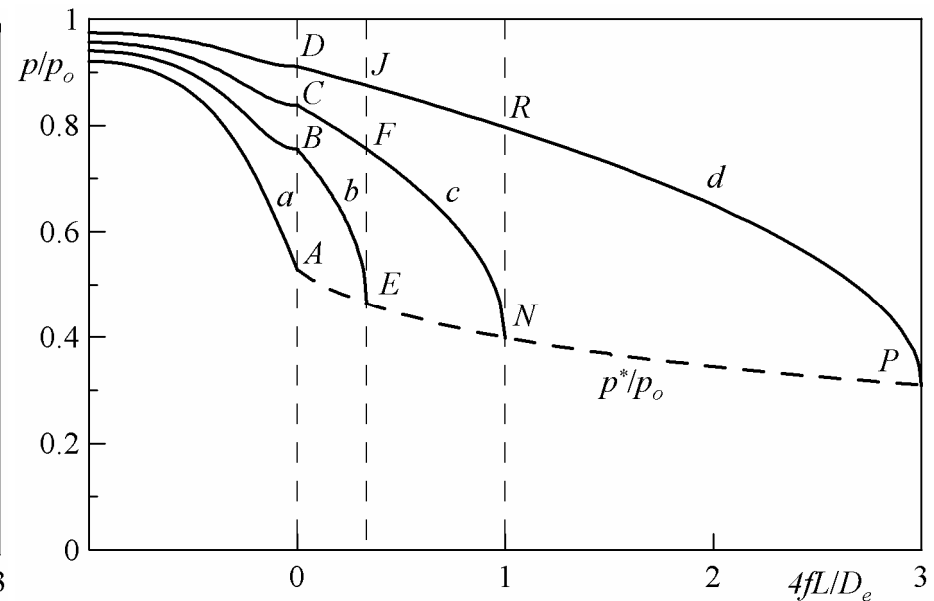
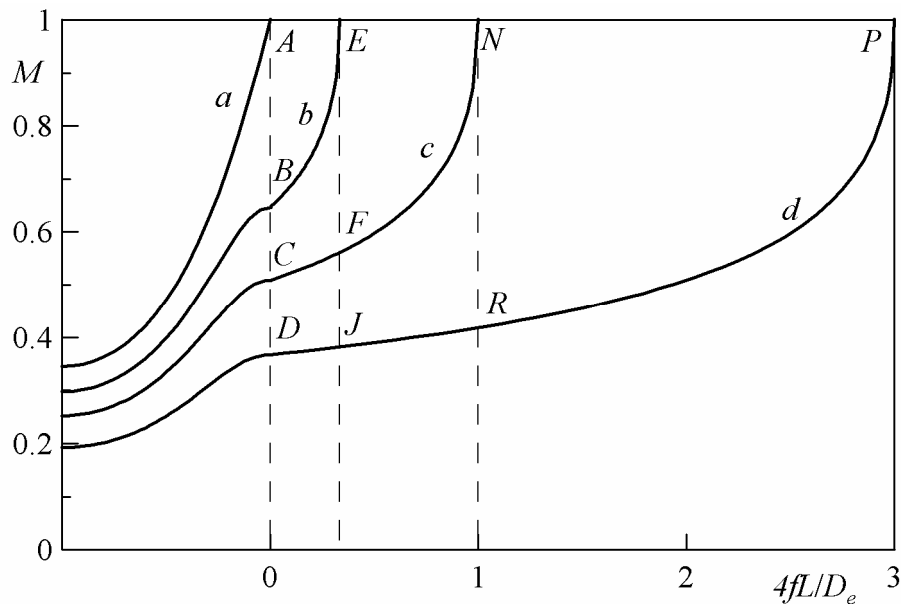
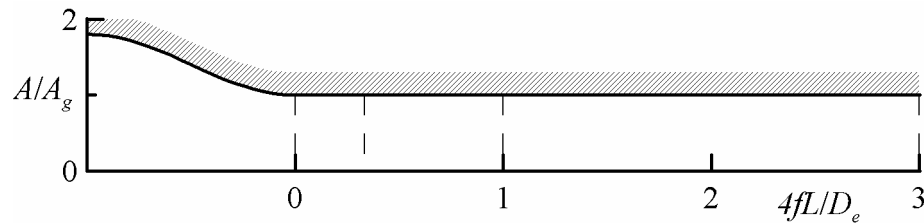
In questo modo, i valori numerici riportati sull'asse delle ordinate del diagramma in basso possono essere direttamente interpretati come valori della pressione in *ata*.

Poiché il moto all'uscita dell'ugello può essere subsonico, o al limite sonico, chiaramente, **nel condotto a sezione costante il fluido può raggiungere al più condizioni soniche e ciò può avvenire solo nella sua sezione d'uscita.**

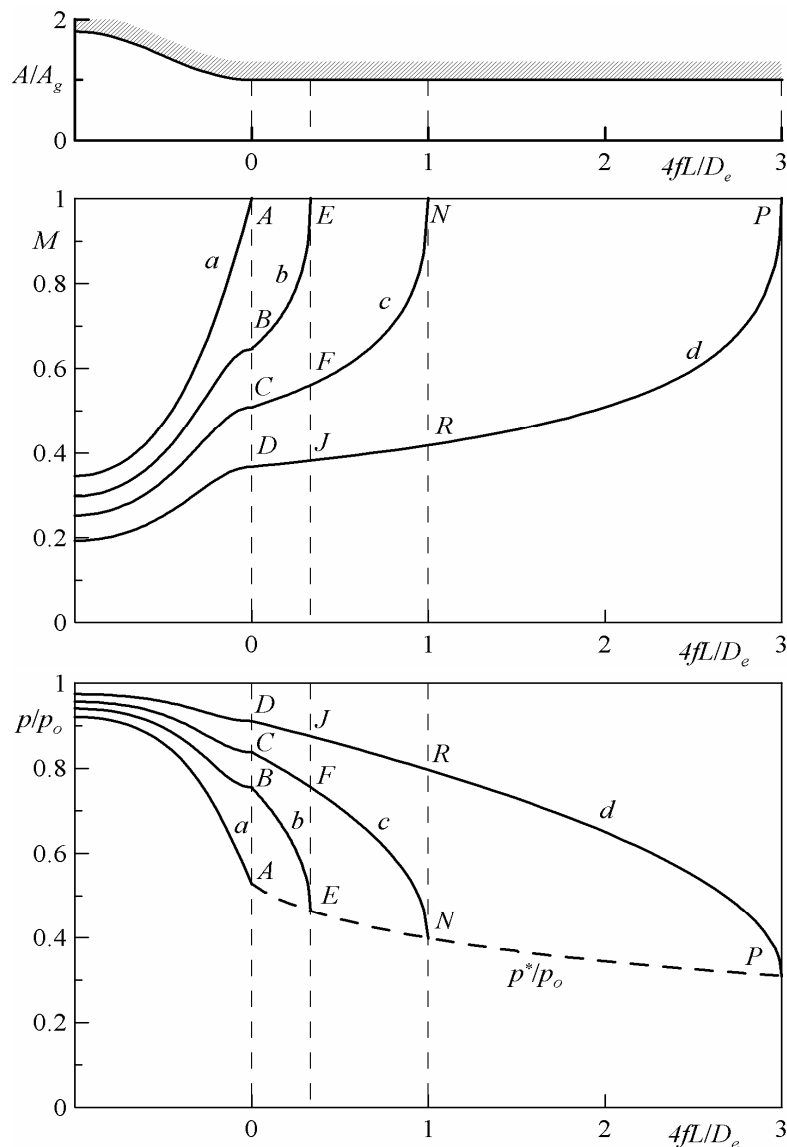


In figura sono riportate le condizioni relative a valori di $4fL/D_e$ pari a 0.0, 0.33, 1.0 e 3.0, sui due piani $M - 4fL/D_e$ e $p/p_o - 4fL/D_e$, supponendo, inizialmente, che la pressione nell'ambiente sia nulla.

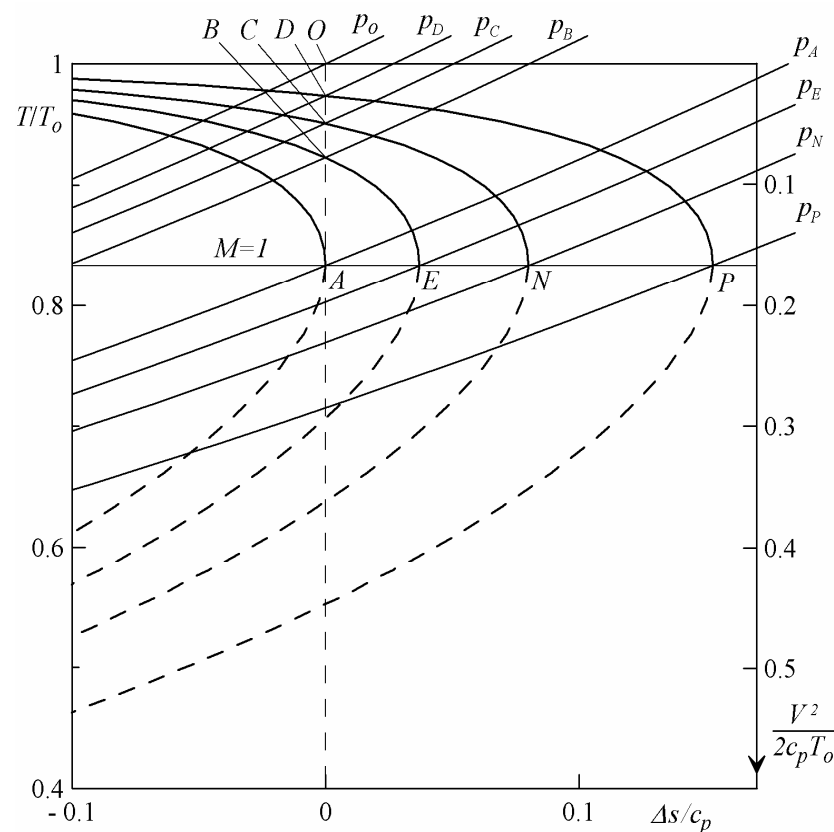
Questa condizione assicura che, per ogni configurazione, **la portata di massa sia massima**, che **il moto sia strozzato** e che **all'uscita del condotto sia presente una corrente sonica seguita da un ventaglio d'espansione** (condizione di Kutta non rispettata).



Queste condizioni di funzionamento sono anche indicate sul **piano di Gibbs**, dove si vedono le **condizioni di ristagno** (T_o e p_o nel serbatoio, punto O), qui supposte costanti. Il ramo supersonico (inferiore) delle curve di Fanno è stato tratteggiato perché, come già detto, non percorribile.



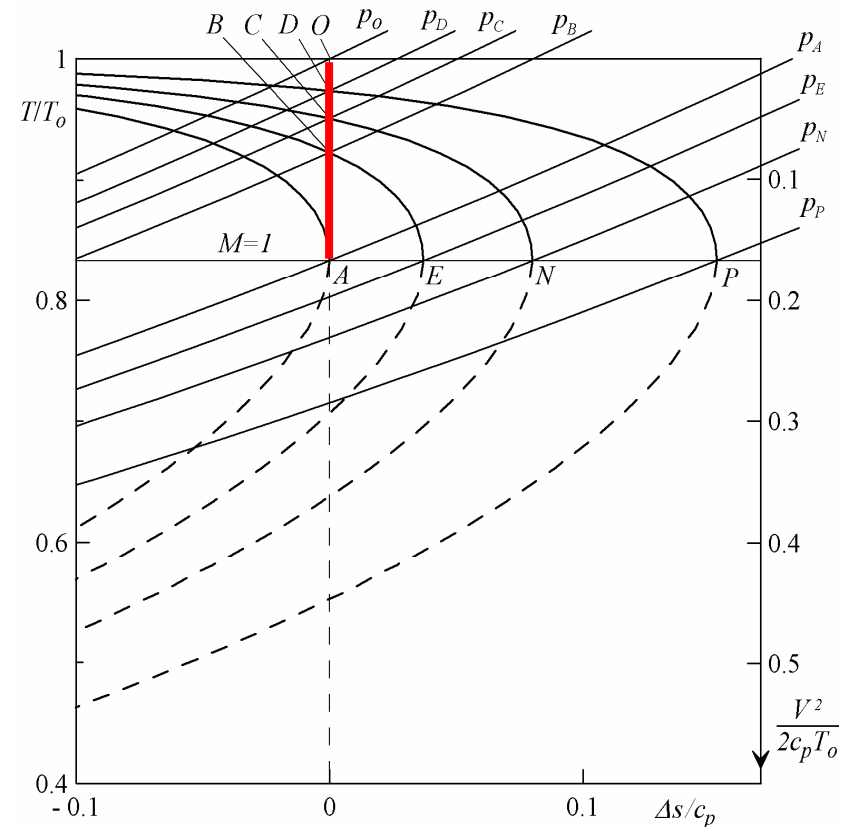
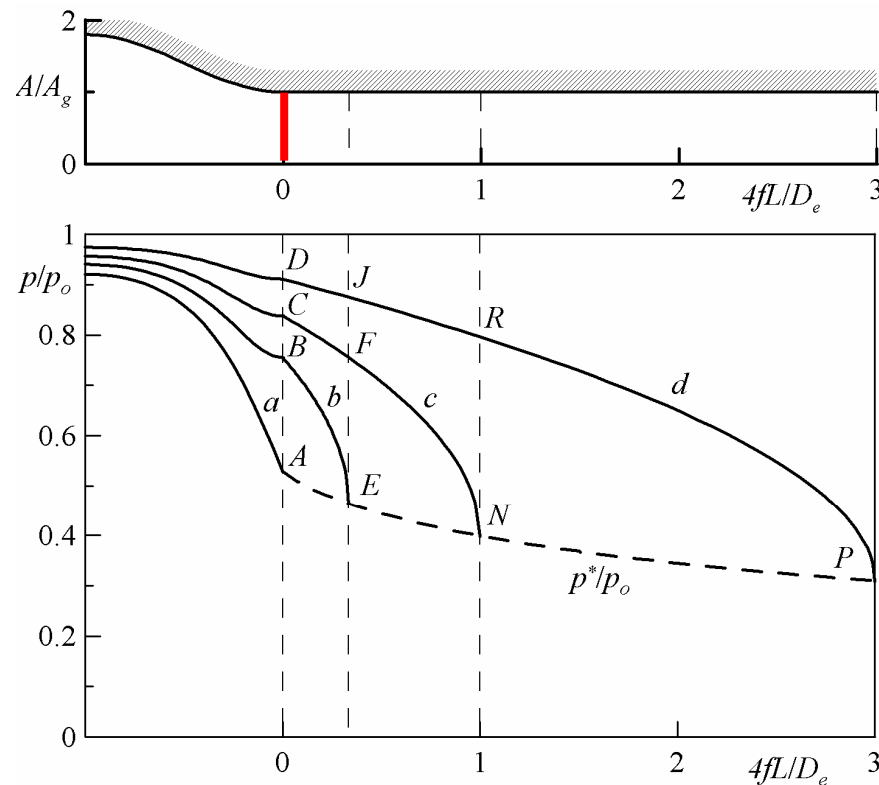
Attenzione: Nel caso degli ugelli la pressione di ristagno è supposta costante. **Nel moto alla Fanno essa diminuisce continuamente**, quindi, **per p_o si intende la pressione nel serbatoio**.



Le curve di funzionamento del tipo **a**, relative a $4fL/D_e = 0$ corrispondono al **solo ugello convergente**. Nel piano T - s , la relativa trasformazione coincide con il segmento verticale che parte dalle condizioni di ristagno O e il cui punto finale in basso A è quello di massima entropia della curva di Fanno più interna.

Poiché all'uscita dell'ugello si hanno le condizioni critiche ($M = 1$), **il flusso di massa sarà massimo** per le condizioni di ristagno (T_o e p_o) prefissate.

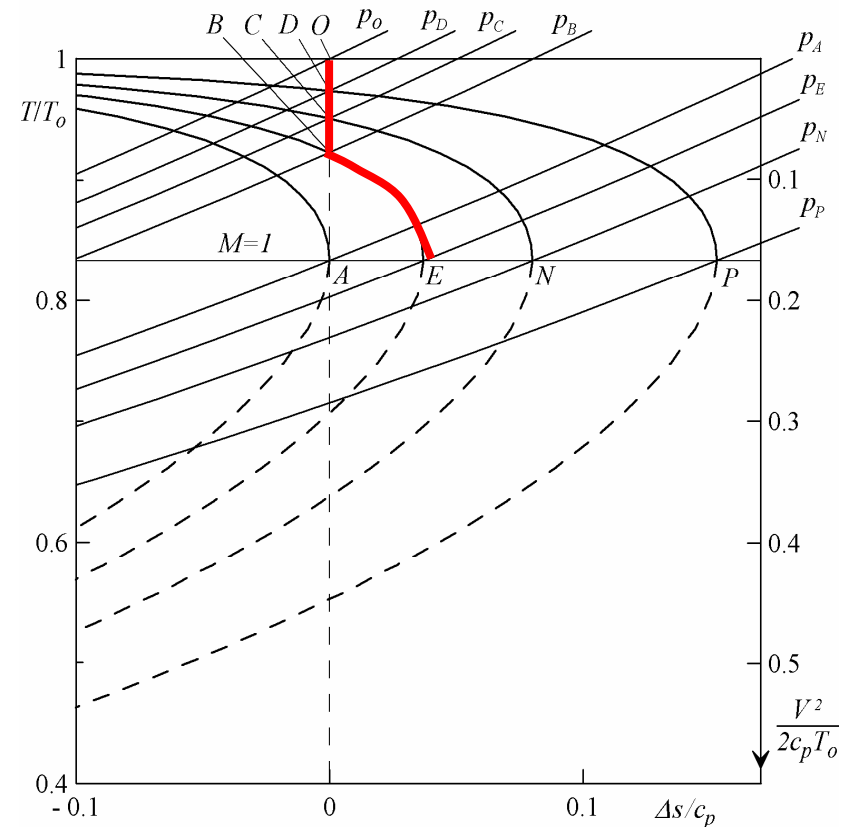
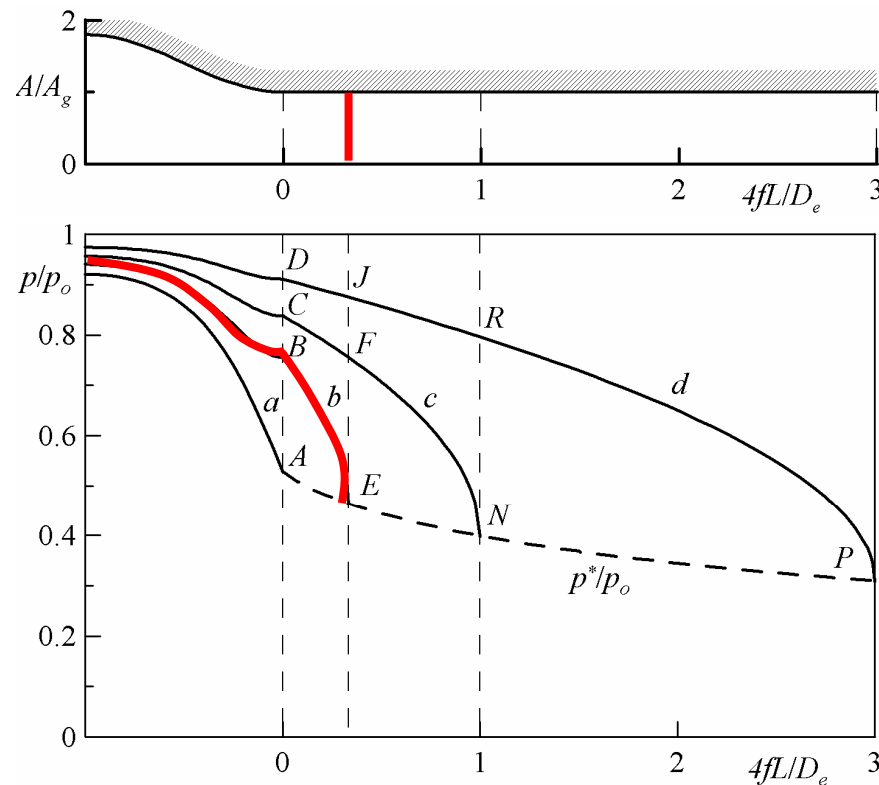
Anche se il fluido non percorre alcun tratto della curva di Fanno che ha la massima entropia in A , la curva è stata riportata per mostrare che **il flusso di massa, in questo caso, è massimo**.



Aggiungendo all'ugello un condotto a sezione costante con attrito, in particolare quello avente $4fL/D_e = 0.33$, **il flusso di massa deve chiaramente diminuire** perché il moto del fluido deve vincere gli sforzi tangenziali alla parete del condotto a sezione costante.

Dover percorrere una certa lunghezza di condotto in presenza d'attrito comporta una **diminuzione del numero di Mach** (un aumento della pressione) **in uscita all'ugello** (ad es., punti *B*) e questo spiega l'andamento delle curve ***b***.

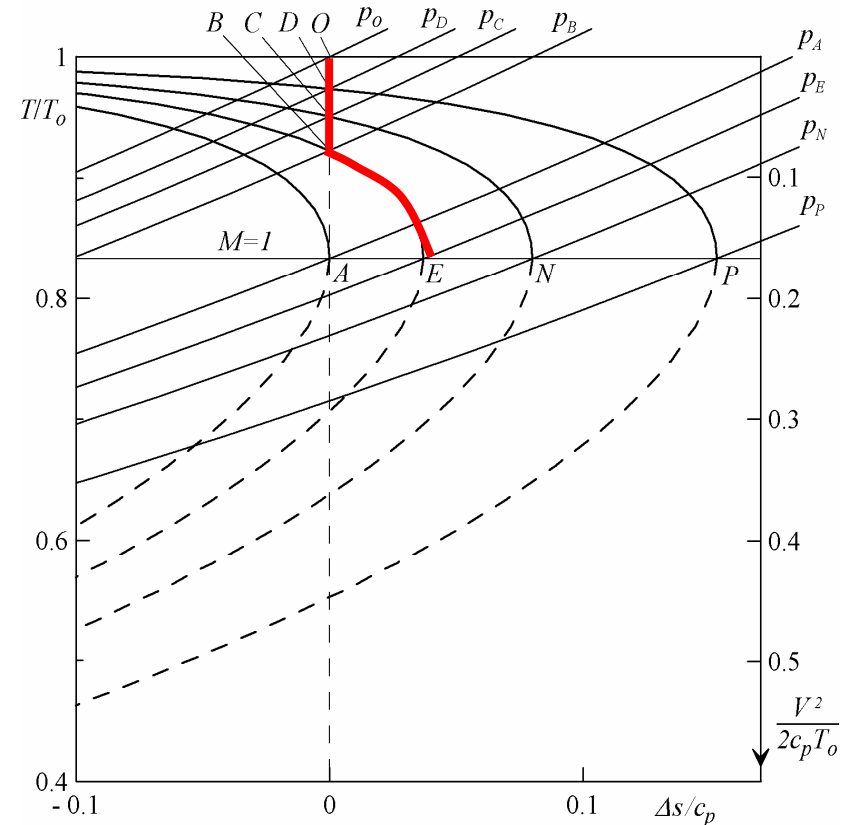
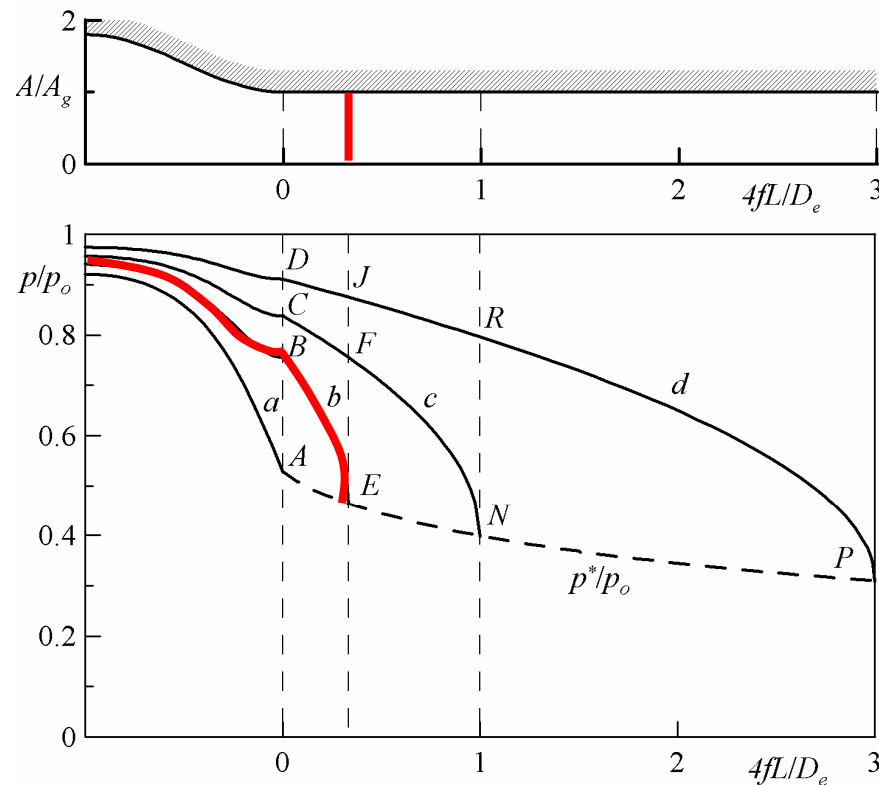
Il fluido entra, quindi, nel condotto con un numero di Mach subsonico e **accelera**, nel contempo, **diminuendo la sua pressione**.



Poiché la pressione ambiente è nulla, anche ora si raggiunge la condizione critica all'uscita del condotto (punti E) e si avrà $L = L^*$.

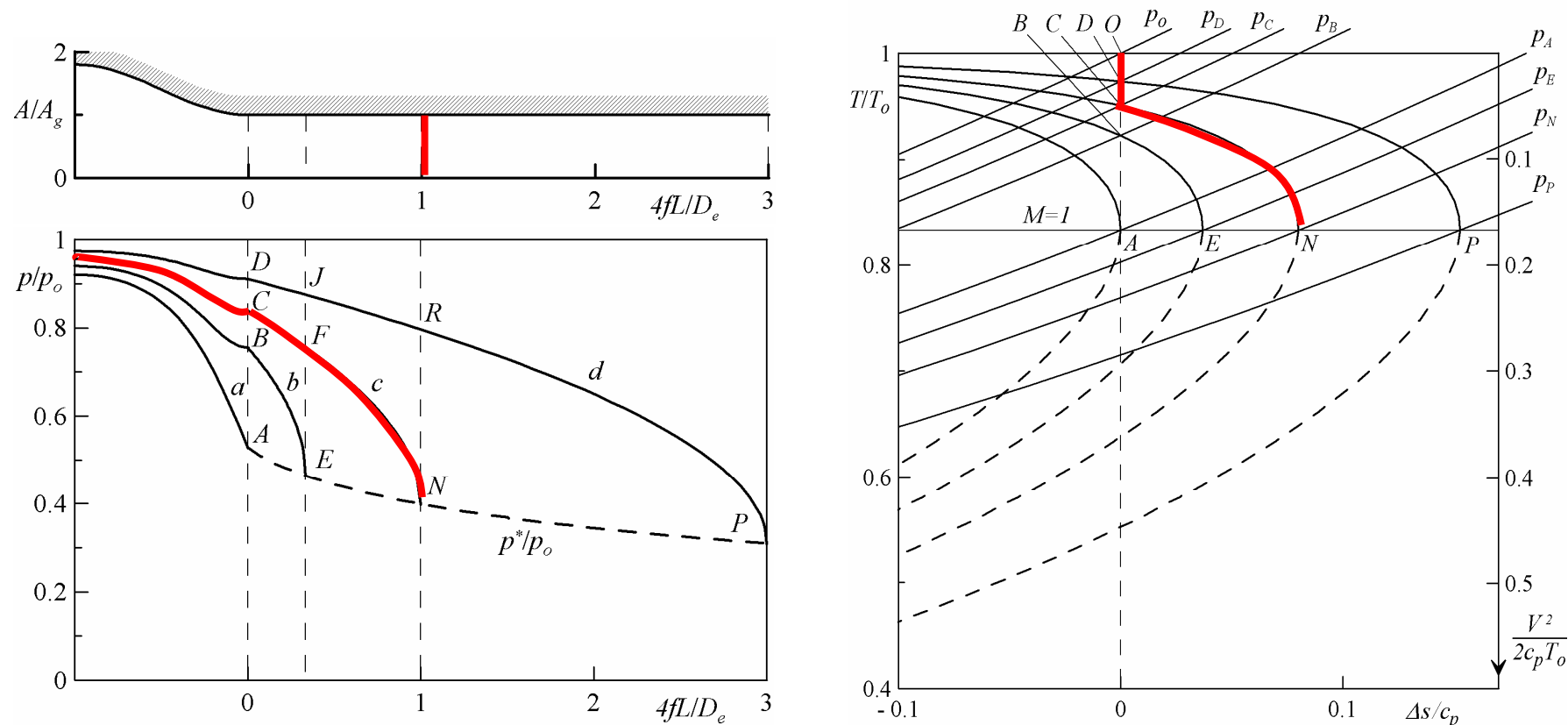
Se si volesse allungare il condotto a sezione costante (ad es. fino a $4fL/D_e = 1$) **senza variare il flusso di massa** (e, quindi, il numero di Mach in uscita all'ugello), ciò non sarebbe possibile perché il fluido raggiungerebbe le condizioni soniche sempre nella sezione corrispondente al punto E, cioè in una **sezione posta prima di quella di uscita del condotto**. Ciò non è possibile perché non consentirebbe al fluido di procedere lungo il condotto.

Ne consegue che **le condizioni soniche si possono raggiungere solo nella sezione d'uscita del condotto**.



L'allungamento del condotto a $4fL/D_e = 1$ porta a un'ulteriore diminuzione del numero di Mach all'uscita dell'ugello (del flusso di massa) rispetto a quanto avveniva prima ($4fL/D_e = 0.33$), per consentire **una maggiore produzione d'entropia** e una maggiore espansione del fluido fino alla sezione finale del condotto cioè, in definitiva, un maggiore valore del numero di Fanno $4fL^*/D_e$.

In questo caso, la curva di funzionamento sul piano T - s sarà su una curva di Fanno più esterna (con il massimo nel punto N), relativa a un flusso di massa minore e ad una più bassa pressione critica allo sbocco del condotto, $p_N < p_E$.

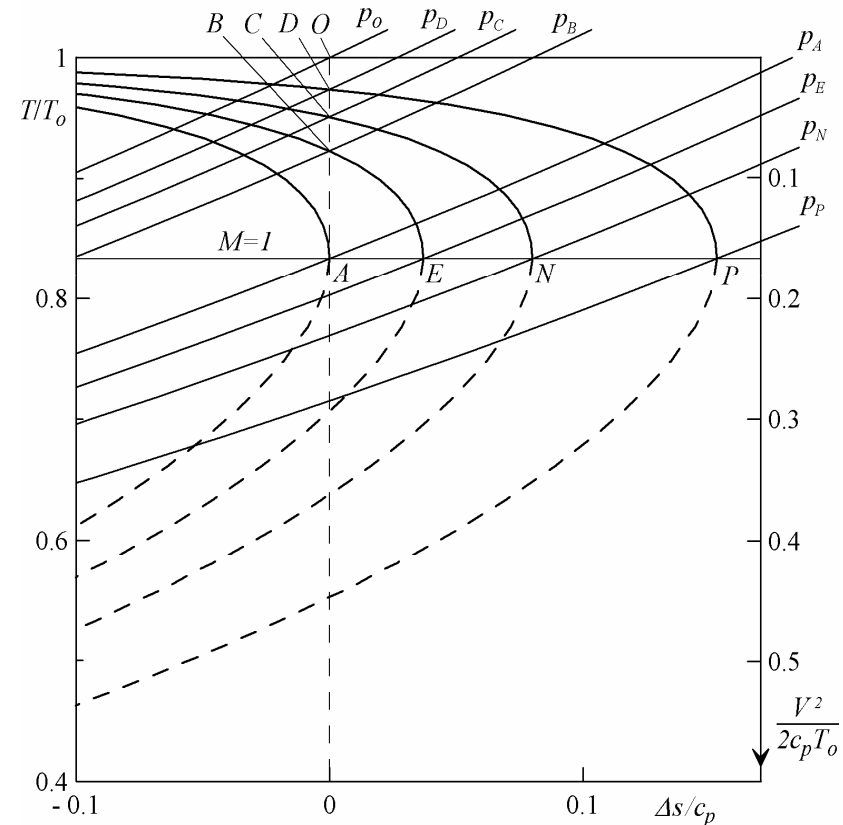
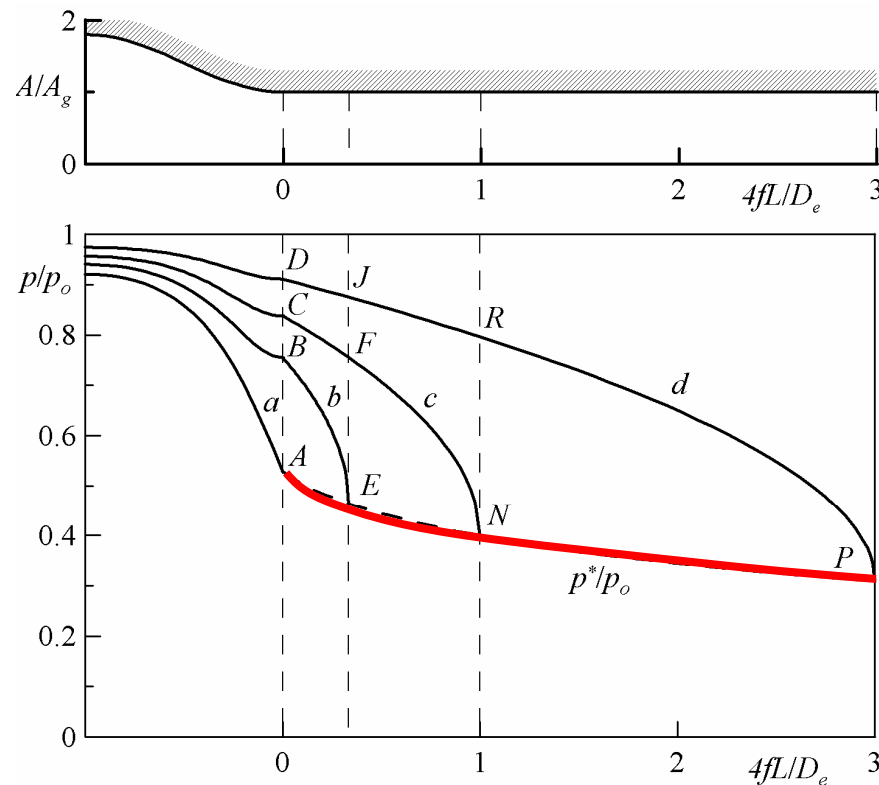


Come intuibile, **successivi allungamenti** del conducono a **comportamenti analoghi**. In particolare, nel diagramma $p/p_o - 4fL/D_e$ è mostrata anche **l'evoluzione del rapporto p^*/p_o all'aumentare di $4fL^*/D_e$ (curva tratteggiata)**.

Questa evoluzione è rappresentata dalla curva decrescente che passa per i diversi punti critici A , E , N e P , tutti caratterizzati da condizioni soniche.

La diminuzione di p^*/p_o si rileva anche sul piano $T-s$, ove le isobare del punto critico vanno verso destra al diminuire del valore del flusso di massa G .

Per questo regime, **la p^* rappresenta**, ovviamente, **la pressione più bassa nel condotto**, che viene raggiunta, in particolare, nella sua sezione d'uscita.

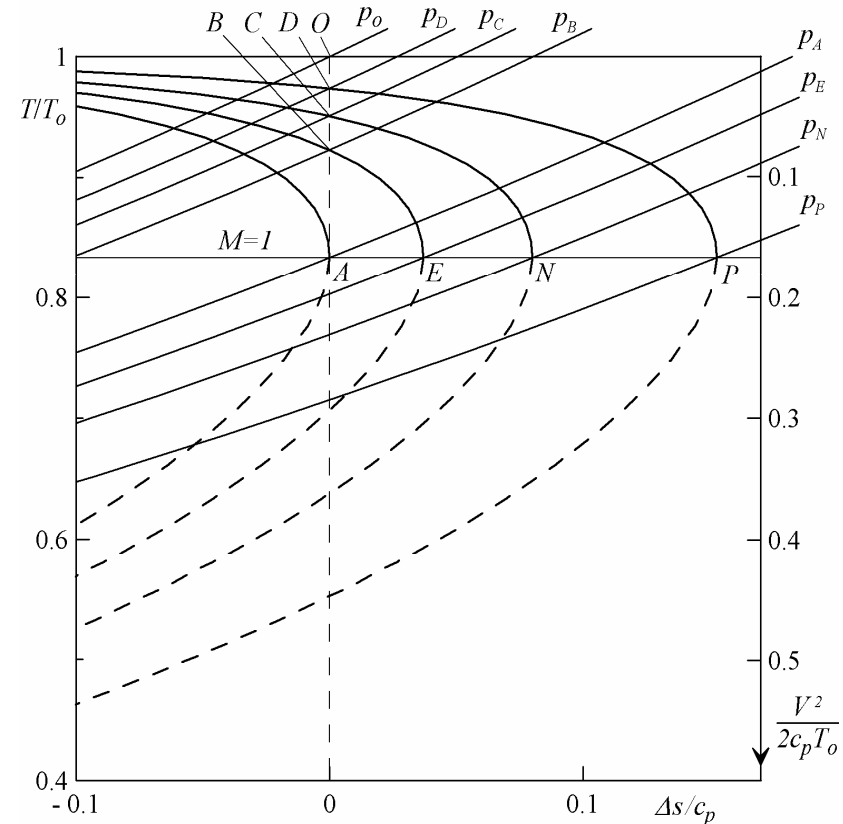
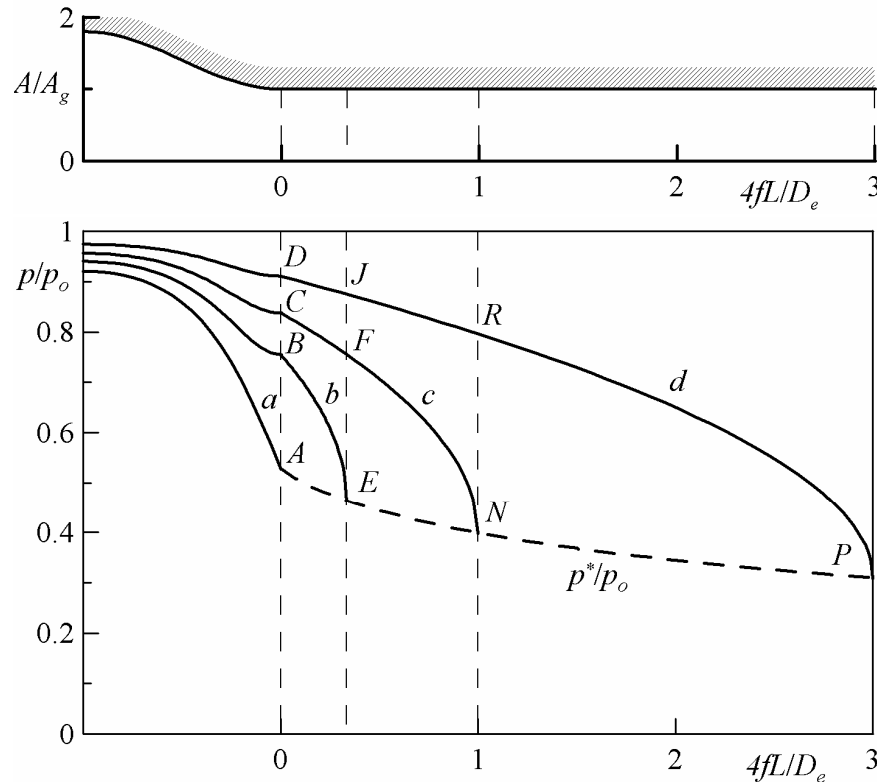


Attenzione: Il fatto che sul piano di Gibbs le isobare devono spostarsi verso destra al diminuire del valore della pressione, è facilmente verificabile mediante la relazione:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

assumendo una temperatura costante.

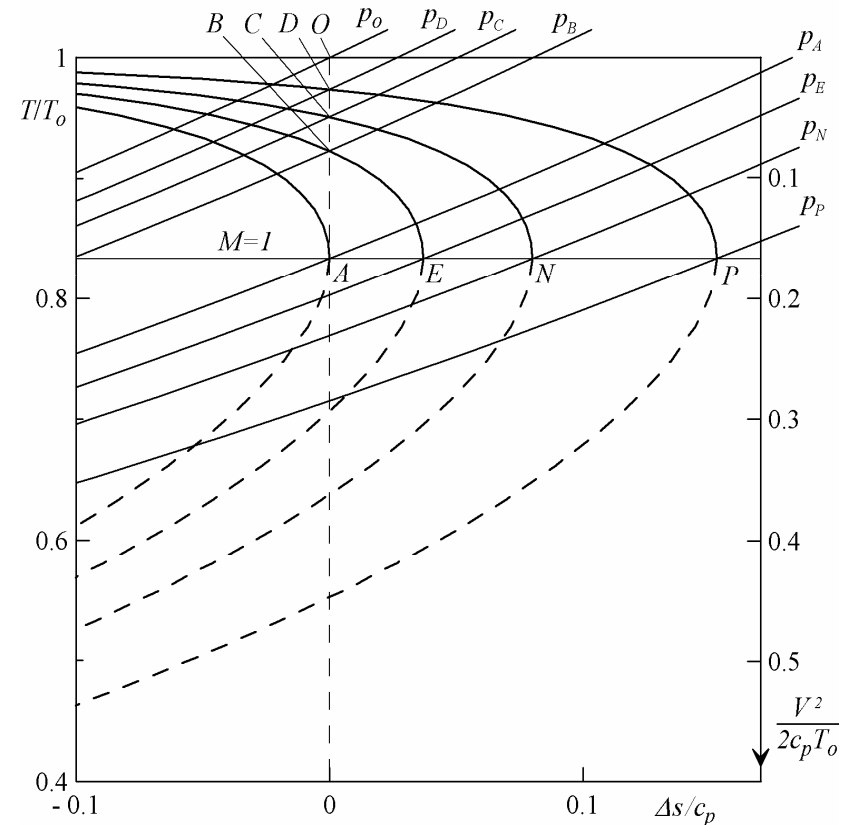
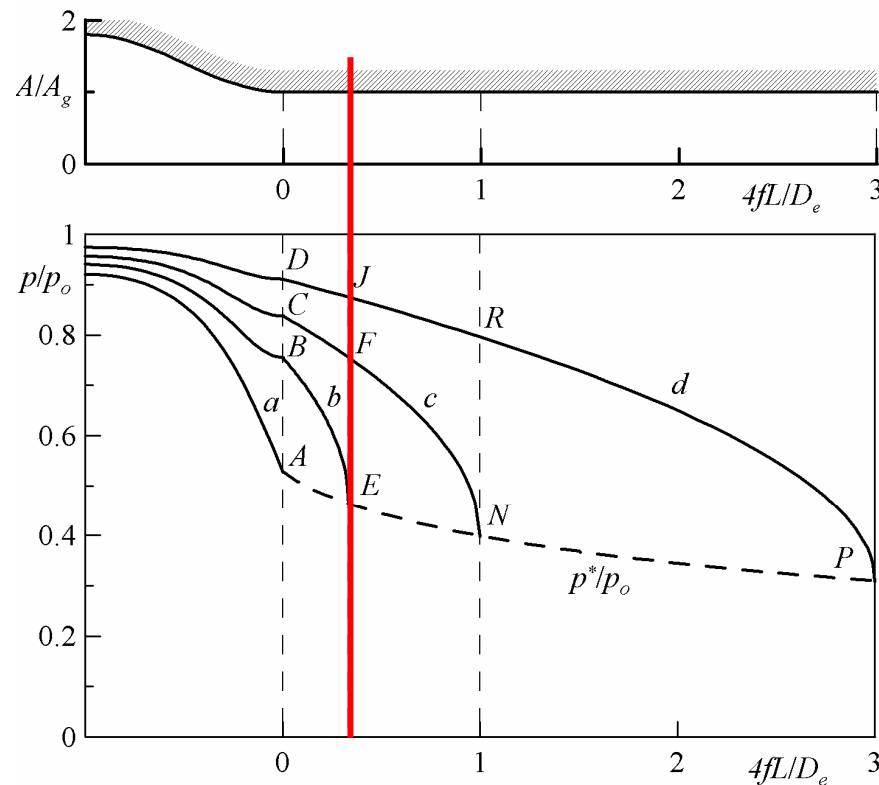
Questi diagrammi si possono utilizzare anche per studiare il caso del sistema ugello più condotto a sezione costante quando **il condotto ha una certa lunghezza e varia la pressione ambiente p_a** .



Si supponga in particolare, che la lunghezza adimensionale del condotto sia fissata al valore $4fL/D_e = 0.33$. È chiaro che **punti del tipo E, F e J rappresentano ancora condizioni di funzionamento del sistema.**

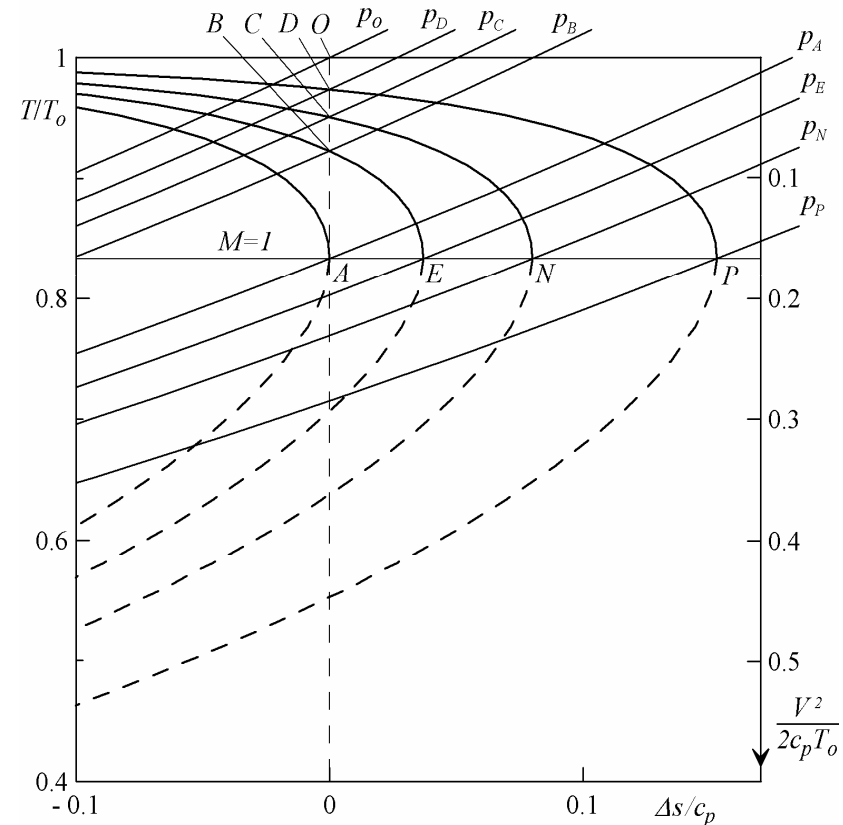
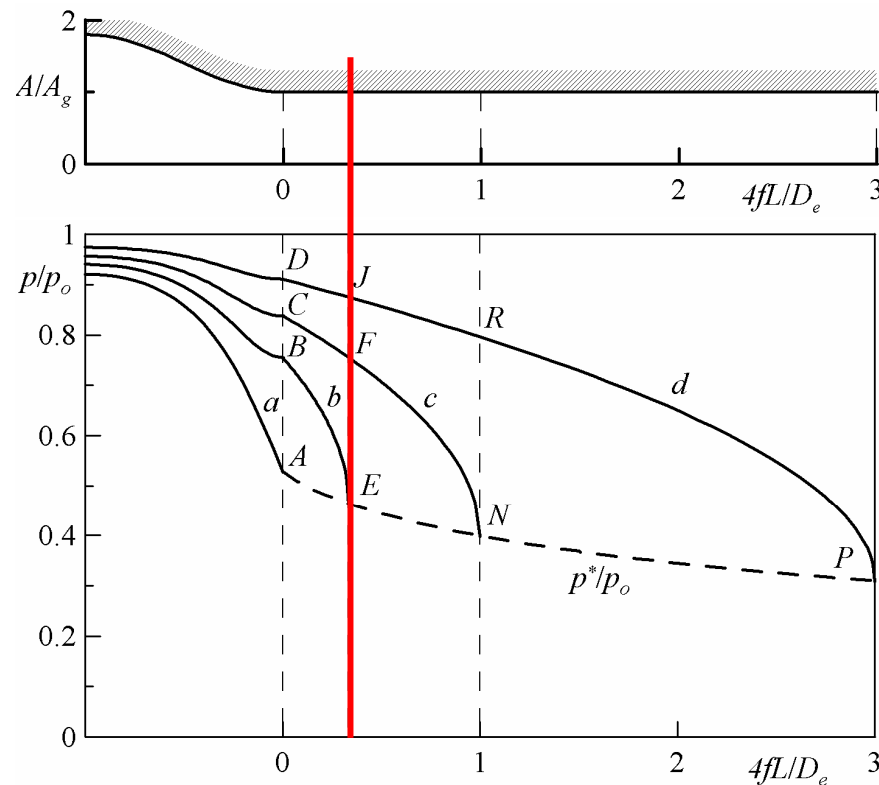
In particolare, il punto *E* corrisponde alle condizioni di strozzamento ($M = 1$ all'uscita) già viste e le curve del tipo **b** rappresentano il funzionamento del sistema, quando la pressione ambiente p_a è tale che $p_a/p_o \leq p_E/p_o$.

Nel caso in cui si verifichi $p_a/p_o < p_E/p_o$, all'uscita del condotto, non viene rispettata la condizione di Kutta ed è presente un ventaglio d'espansione.



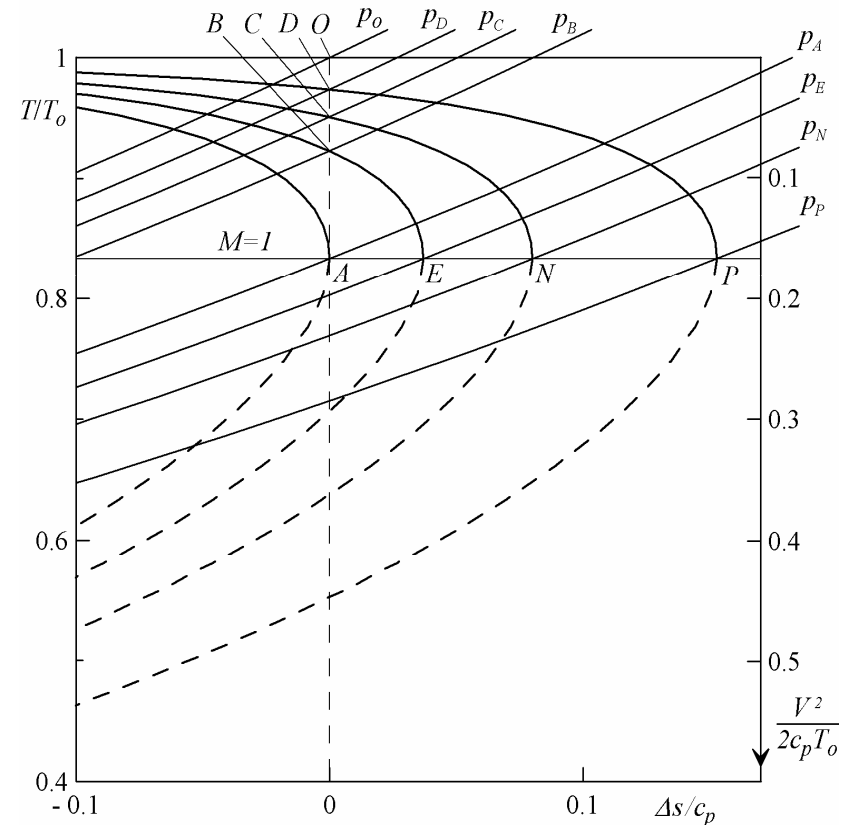
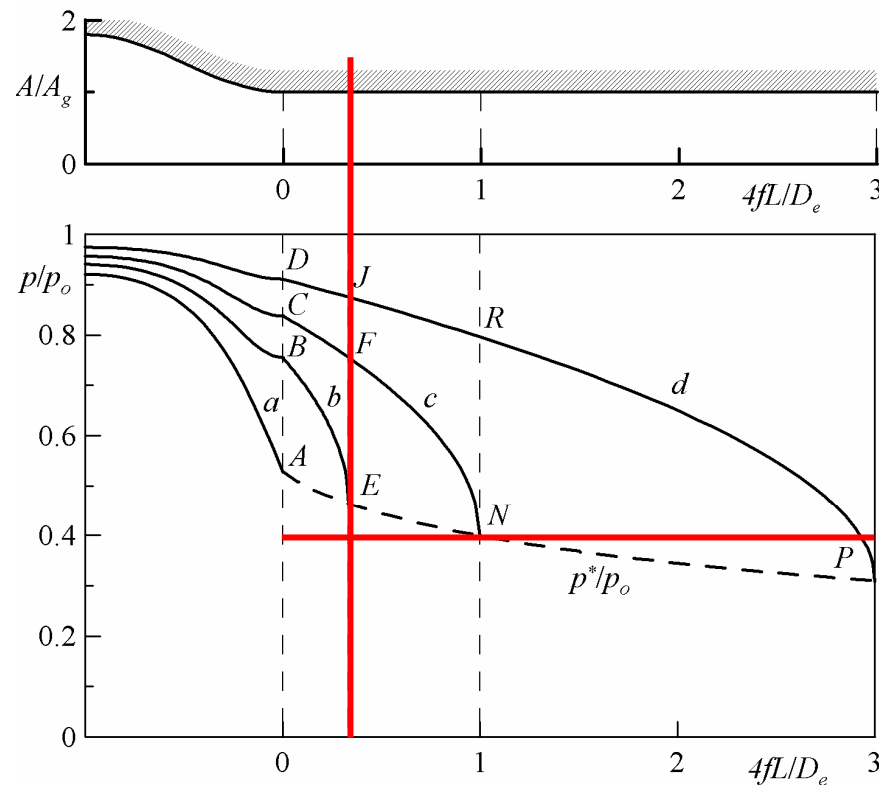
Curve del tipo *c* (o *d*), cui corrispondono punti del tipo *F* (o *J*), indicano, invece, condizioni di **funzionamento subsonico** all'uscita del condotto per le quali si rispetta la condizione di Kutta $p_a/p_o = p_F/p_o$ (ovvero $p_a/p_o = p_J/p_o$).

Naturalmente, man mano che la pressione ambiente sale a partire dal valore p_E , il flusso di massa G (e quindi la portata di massa) diminuisce sino ad annullarsi per $p_a/p_o = 1$. Ciò è facilmente deducibile anche sul piano T - s nel quale la curva di Fanno di funzionamento si sposta sempre più verso destra e il punto che rappresenta le condizioni all'uscita del condotto tende a muovere **verso l'alto (e verso sinistra)**, perché il numero di Mach in uscita diventa sempre più basso.



Ad esempio, notando che nel diagramma $p/p_o-4fL/D_e$ risulta $p_F \cong p_B$, è possibile determinare la posizione di F sul piano $T-s$ come intersezione dell'isobara p_B con la curva di Fanno che nel piano $T-s$ passa per il punto C e ha il suo massimo dell'entropia nel punto N .

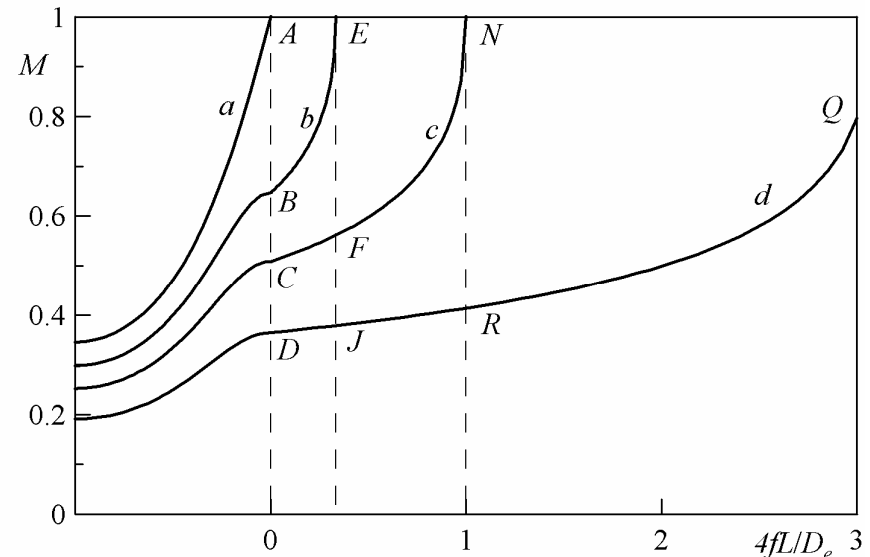
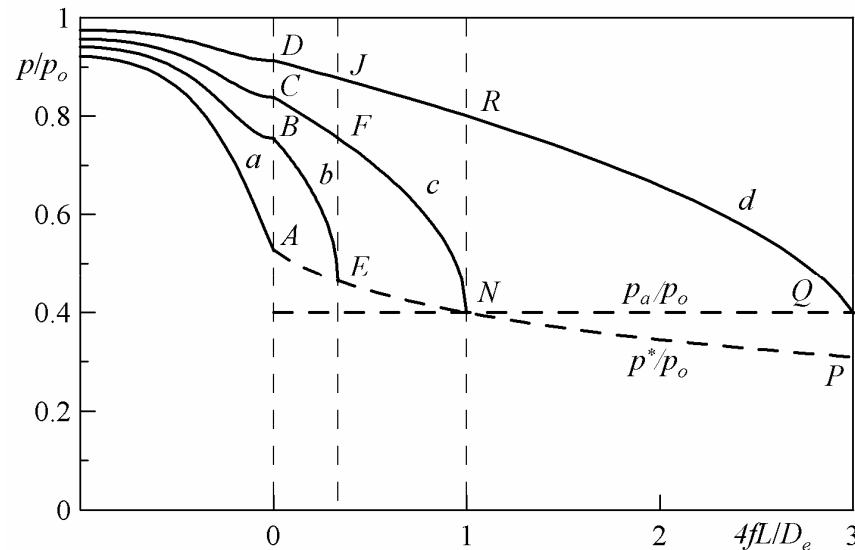
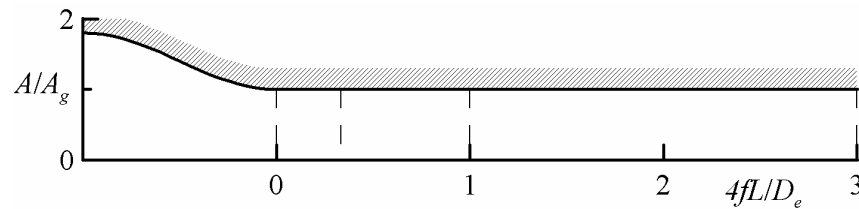
Si vuole ora analizzare il funzionamento dello stesso sistema supponendo che **la pressione ambiente sia fissata**, ad esempio, al valore di quella del punto N , e che **la lunghezza del condotto vada via via aumentando**.



Chiaramente, le curve c coincidono con quelle già viste con l'unica differenza che all'uscita del condotto non si può più avere il ventaglio d'espansione, perché la p_N è esattamente uguale alla pressione ambiente.

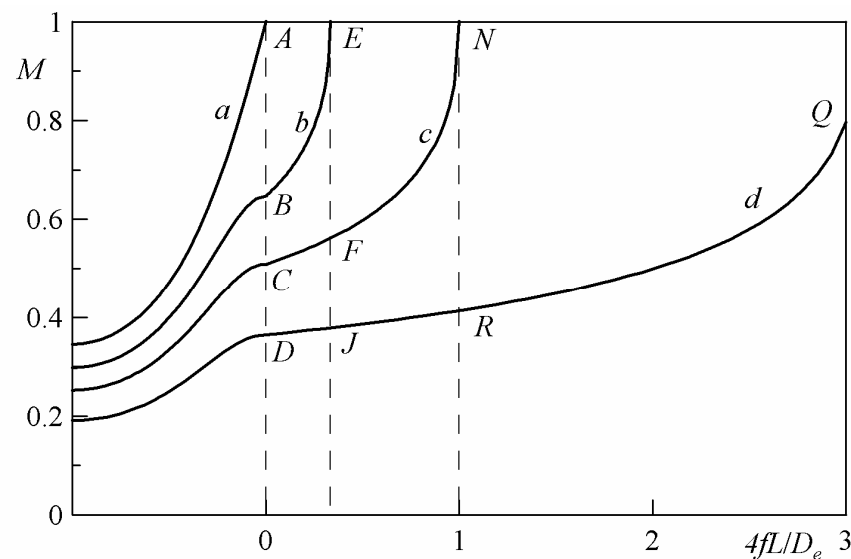
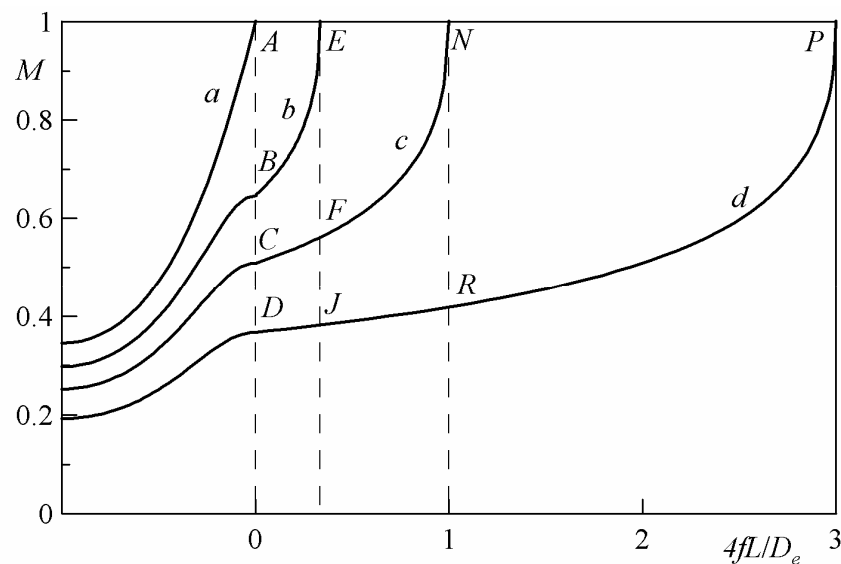
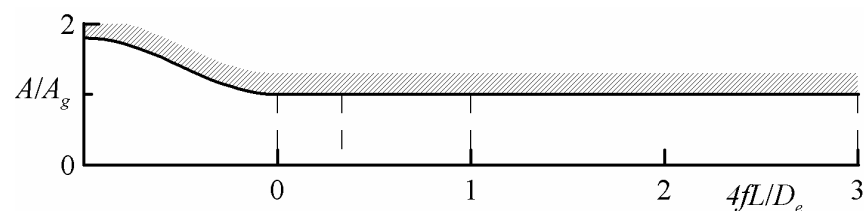
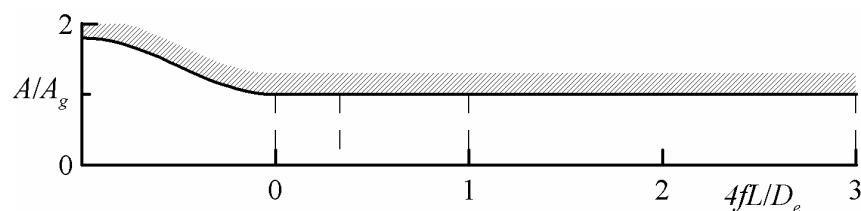
Anche le curve a e b restano uguali. Infatti, poiché la pressione ambiente è inferiore a quella dei punti A e E , in entrambi i casi, il moto è strozzato all'uscita del condotto ($M = 1$) e il fluido raggiunge la pressione ambiente attraverso un ventaglio d'espansione.

Invece, allungando il condotto sino a $4fL/D_e = 3$, il moto non è più strozzato, perché la pressione critica per il condotto più lungo risulta minore della pressione ambiente $p_a = p_N = p_Q$. Il moto, quindi, non può più essere sonico all'uscita del condotto e, pertanto, viene ad essere rispettata la condizione di Kutta.



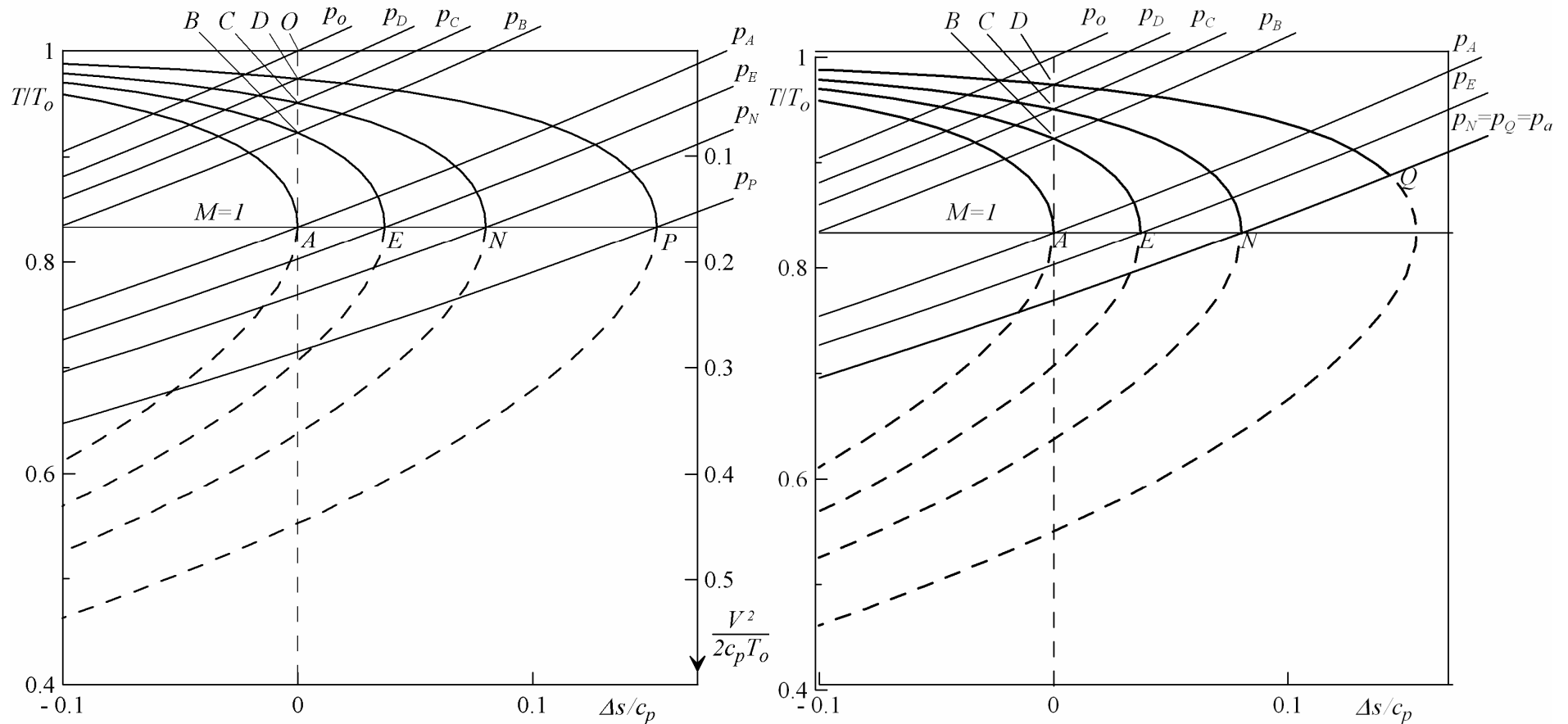
Ovviamente, le curve indicate con la lettera ***d*** nel diagramma a destra sono diverse dalle corrispondenti curve ***d*** del diagramma a sinistra relative al caso precedente.

Ciò può essere, in particolare, rilevato dalle curve relative agli andamenti del numero di Mach nei due casi riportate qui in basso.



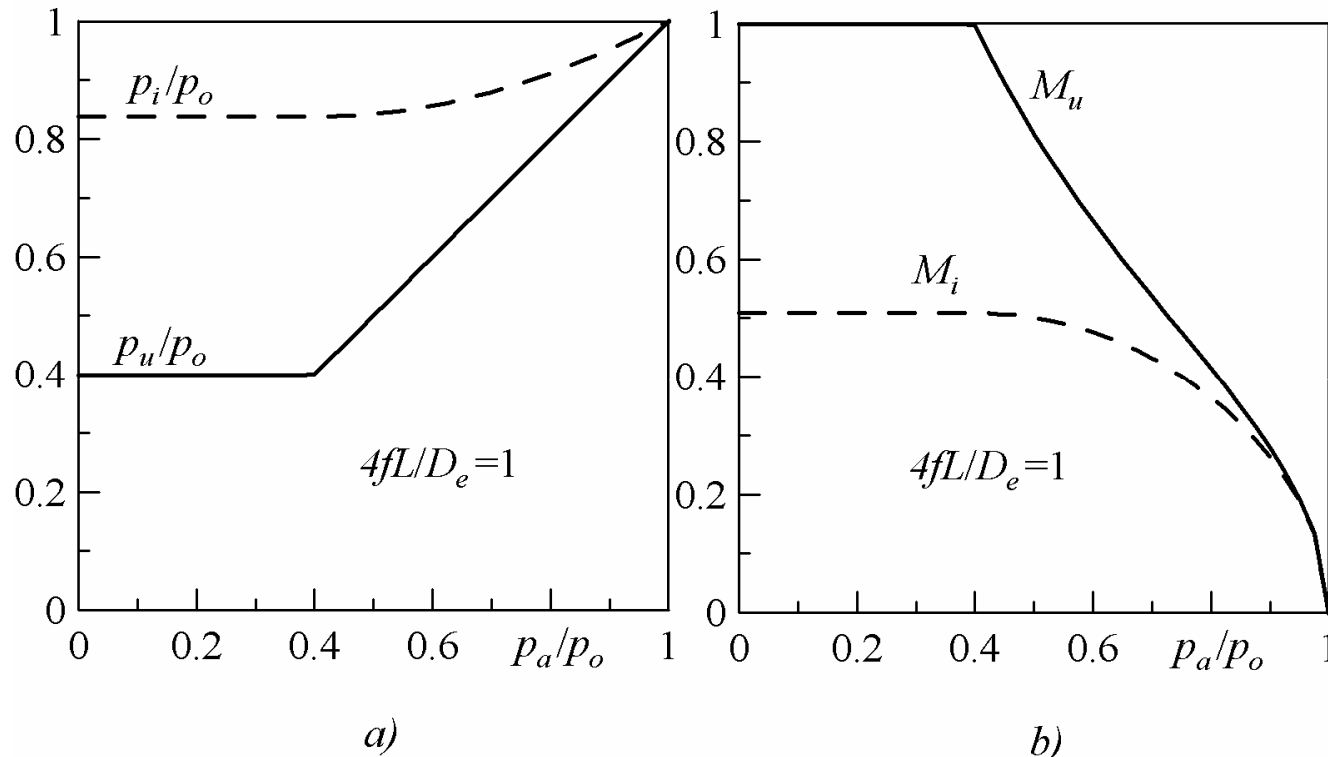
Nel piano $T - s$ questi effetti sono più facilmente comprensibili, poiché si nota immediatamente che la pressione ambiente, coincidente per ipotesi con la pressione nel punto N (diagramma a destra), è maggiore della pressione critica corrispondente al valore di $4fL^*/D_e = 3$.

La curva relativa alla pressione ambiente interseca nel punto Q una curva di Fanno più esterna (più a destra) di quella relativa al punto P del diagramma a sinistra (caso precedente), nel ramo subsonico.



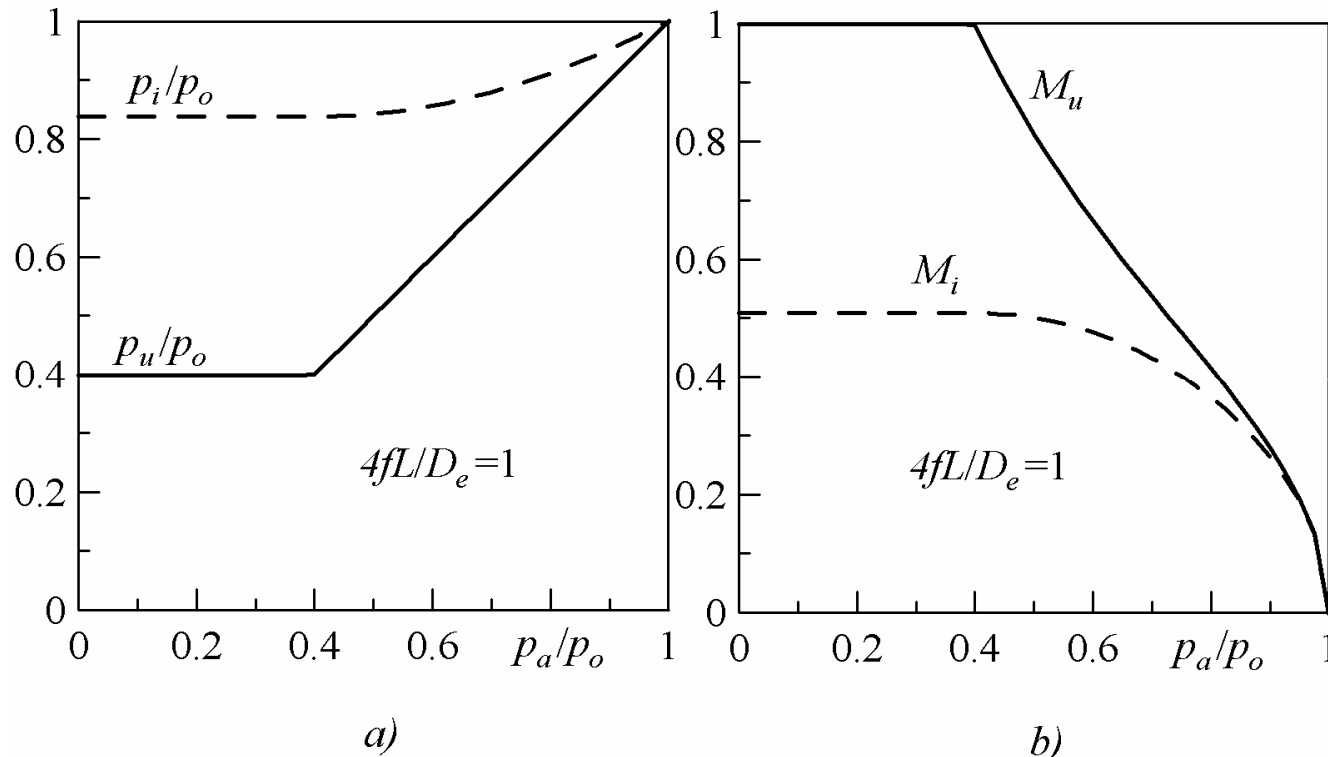
Dato un valore del parametro adimensionale $4fL/D_e$, è interessante analizzare il **comportamento della pressione e del numero di Mach sia nella sezione d'ingresso** del condotto (che coincide con quella all'uscita dell'ugello), che in **quella di uscita**, al variare della pressione ambiente.

La curva a tratto continuo riportata in figura **a)** (le curve di figura sono, in particolare, relative al caso specifico di $4fL/D_e = 1$ e $\gamma = 1.4$) rappresenta il rapporto tra la pressione all'uscita del condotto p_u e la pressione di ristagno nel serbatoio p_o in funzione della pressione ambiente p_a , anch'essa adimensionalizzata mediante la p_o .



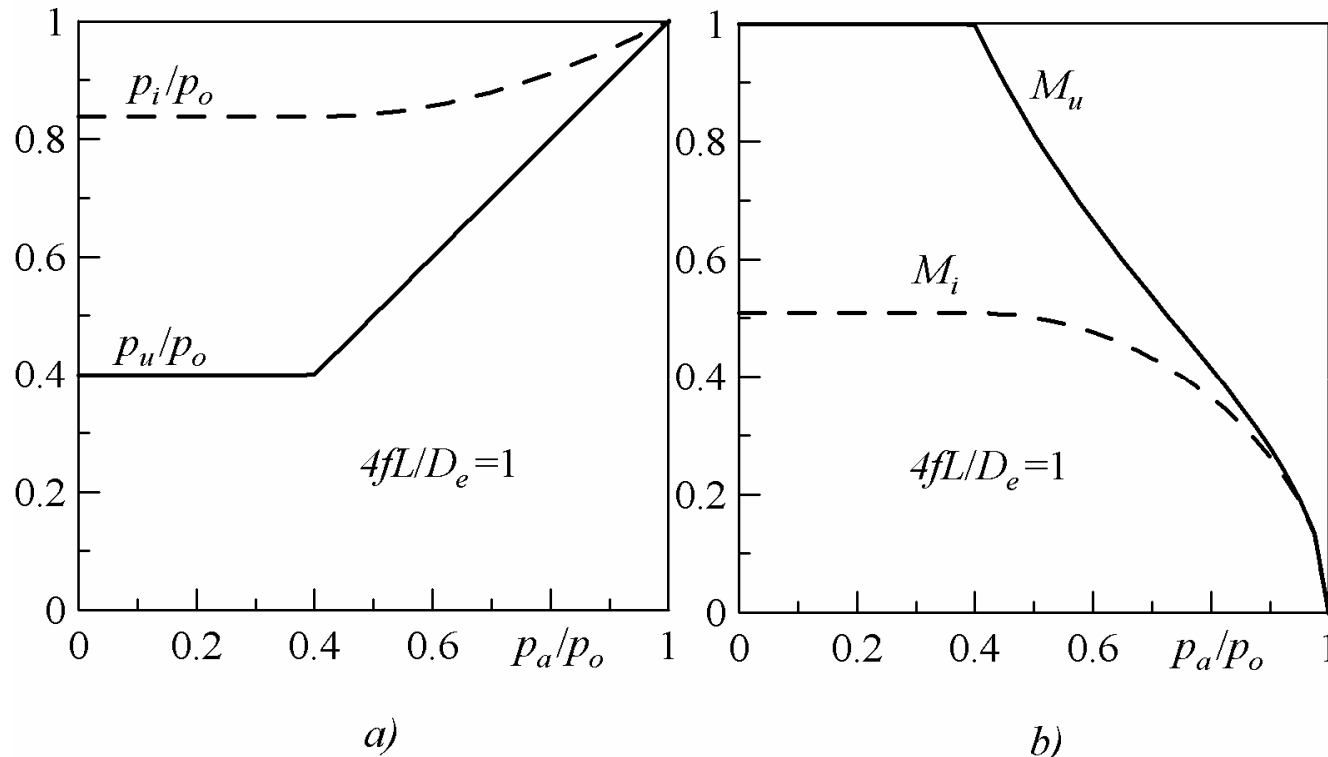
Quando la pressione ambiente è uguale a quella di ristagno, il rapporto p_u/p_o è, chiaramente, pari a uno. Una lieve diminuzione della pressione ambiente provoca un uguale abbassamento della pressione in uscita ($p_u/p_o = p_a/p_o$), poiché **deve essere rispettata la condizione di Kutta**. Questo comportamento si riscontra **fino al raggiungimento delle condizioni critiche** (soniche) all'uscita del condotto ($p_a/p_o \approx 0.4$).

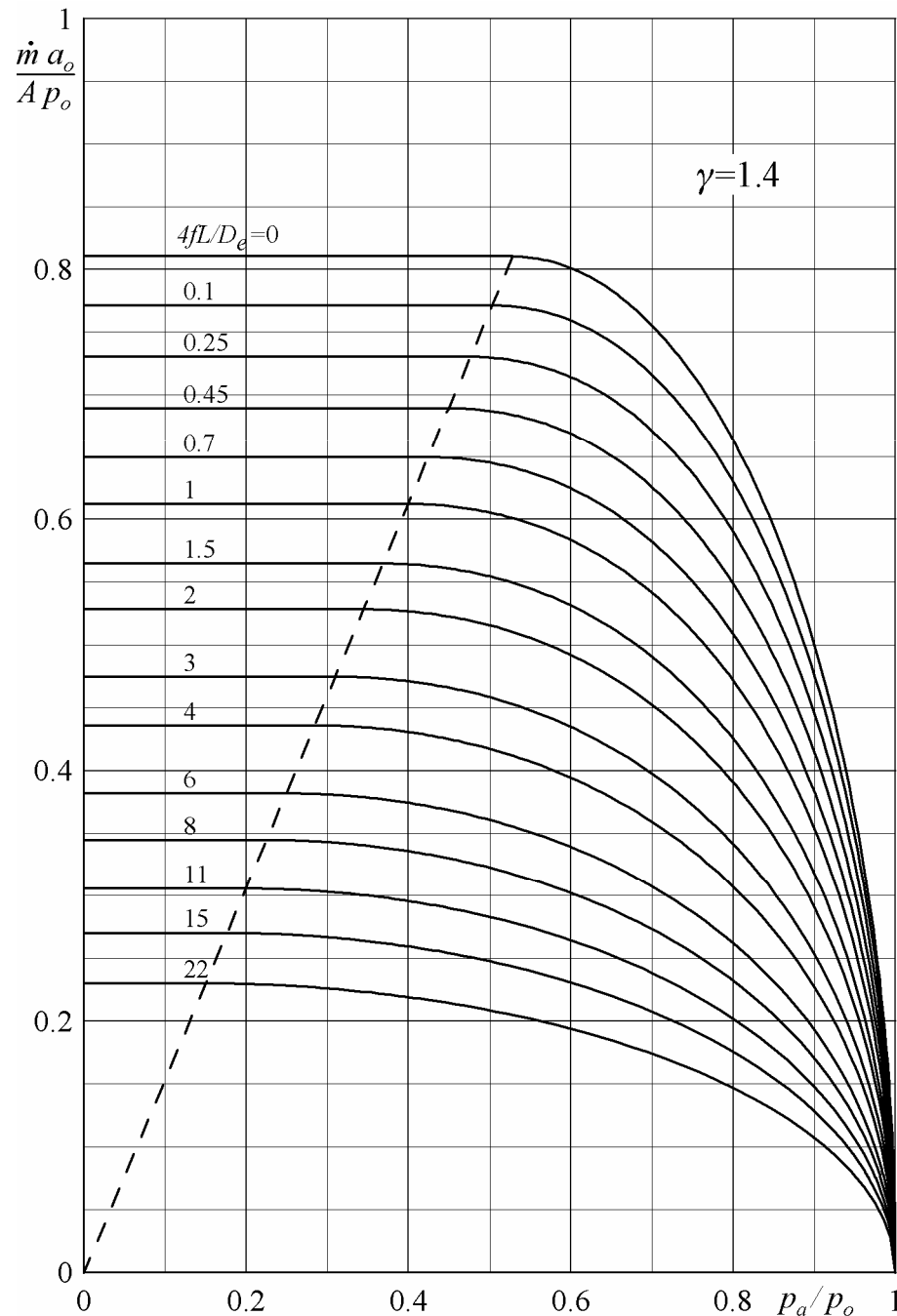
Un ulteriore abbassamento della pressione ambiente provoca lo **strozzamento** del sistema e la pressione all'uscita del condotto resta costante. Il rapporto fra la pressione all'ingresso del condotto e la pressione di ristagno nel serbatoio (curva tratteggiata di figura **a**) mostra un analogo comportamento.



Per pressioni ambiente inferiori alla pressione critica, nel condotto con moto alla Fanno **il moto si strozza** e p_i/p_o rimane costante, mentre, all'aumentare della p_a a partire da circa $0.4 p_o$, la pressione all'ingresso del condotto p_i cresce con legge non lineare fino a raggiungere la pressione di ristagno quando $p_a/p_o = 1$.

Nella figura **b)**, sempre per $4fL/D_e = 1$ e $\gamma = 1.4$, sono, invece, riportati i due numeri di Mach all'ingresso M_i (curva tratteggiata), e all'uscita M_u (curva continua), del condotto in funzione di p_a/p_o . Entrambi sono costanti per p_a minore, o uguale, alla pressione critica ($p_a/p_o \leq 0.4$), in particolare $M_u = 1$ e $M_u \approx 0.51$, e, per $p_a > 0.4 p_o$, decrescono fino ad annullarsi, per pressione ambiente uguale a quella di ristagno.





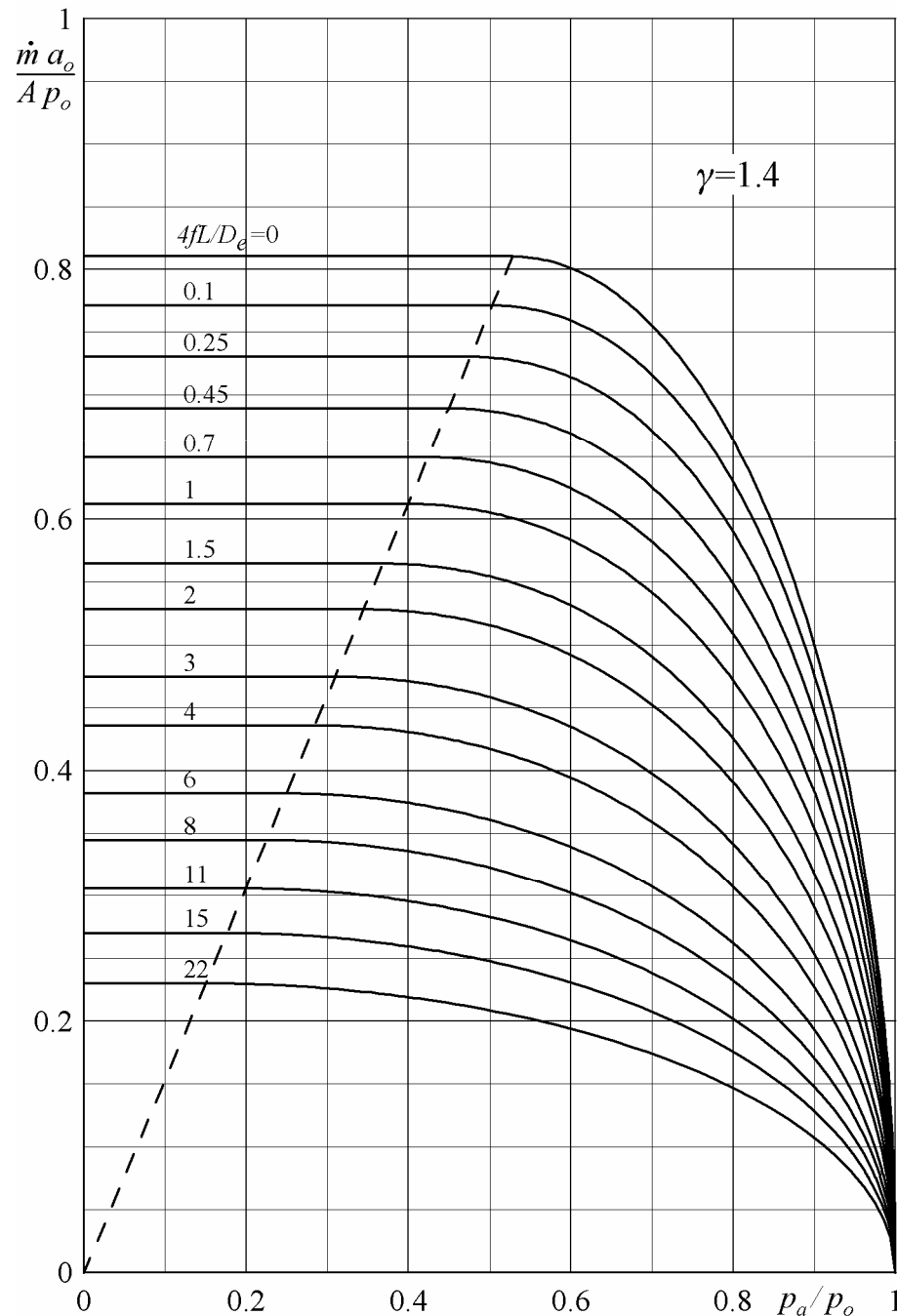
La famiglia di curve riportata in figura mostra, per il caso di $\gamma = 1.4$, l'andamento della **portata di massa adimensionalizzata**, che fluisce attraverso condotti, con moto alla Fanno collegati ad un serbatoio mediante un ugello convergente, in funzione del rapporto tra la pressione ambiente e quella di ristagno, per diversi valori del parametro adimensionale $4fL/D_e$.

Le quantità p_o e a_o rappresentano la **pressione e la velocità del suono nel serbatoio** (di ristagno).

In ogni caso, per il modello di moto considerato, poiché H è costante, la a_o non varia.

In pratica, sull'asse delle ordinate è riportato il **fattore d'efflusso** già definito per gli ugelli:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \psi$$

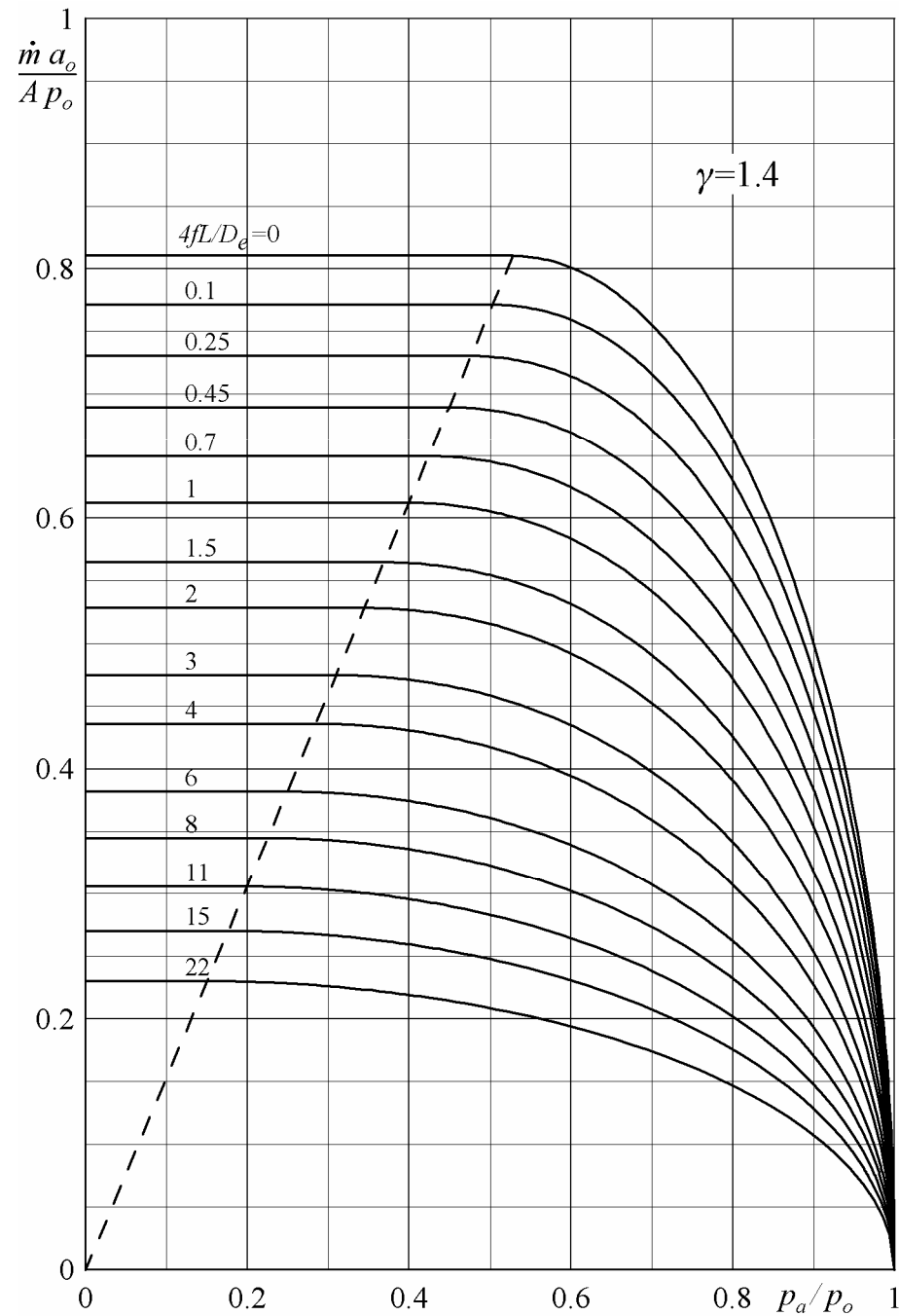


All'aumentare del numero di Fanno $4fL/D_e$, il moto strozza per pressioni ambiente via via più basse e questo giustifica la **diminuzione della lunghezza del tratto orizzontale a portata costante**.

Questo comportamento può essere anche riconosciuto dall'andamento crescente della linea tratteggiata (che divide ciascun diagramma in due parti).

Essa è rappresentativa proprio del luogo dei massimi valori della pressione ambiente che si possono raggiungere quando si ha la condizione critica ($M = 1$) all'uscita del condotto.

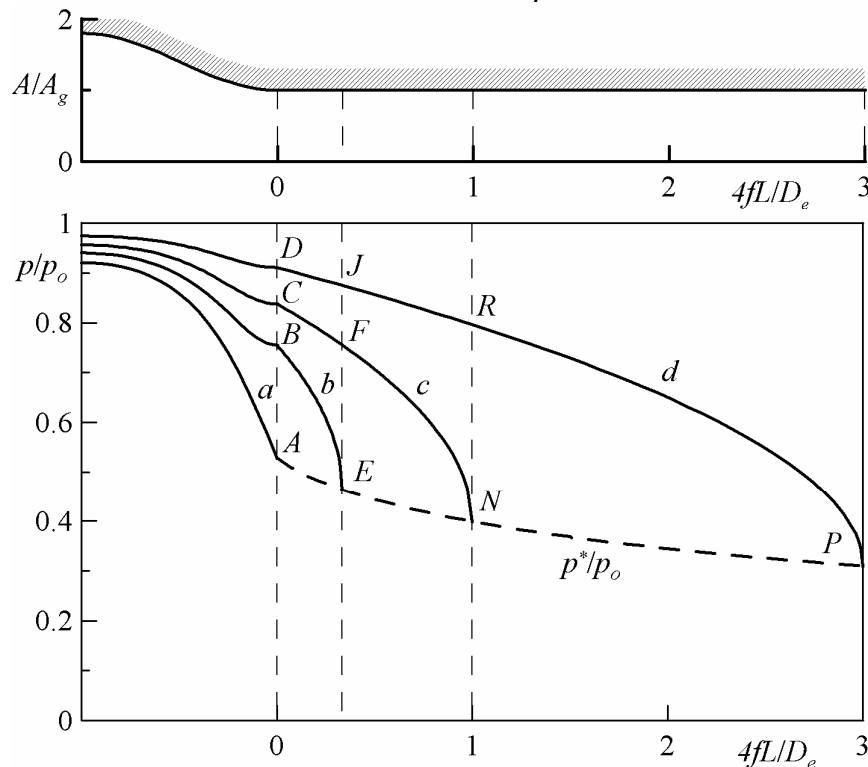
All'aumentare di $4fL/D_e$, la diminuzione della portata di massa è giustificata dall'aumento dell'importanza relativa degli effetti degli sforzi tangenziali alla parete.



Si noti ad esempio che, per $4fL/D_e = 1$, il valore critico della pressione ambiente è pari a circa $0.4 p_o$ e la portata massima è di poco superiore a circa il 75% della portata massima per il solo ugello convergente.

La determinazione della curva di funzionamento del sistema ugello convergente più condotto è abbastanza semplice nell'ipotesi per la quale il moto è strozzato, mentre **risulta leggermente più complessa nel caso in cui deve essere soddisfatta la condizione di Kutta.**

Ad esempio, con riferimento al diagramma in basso, per determinare le condizioni termofluidodinamiche nei punti C e N (la sezione d'uscita è sempre critica per tutti i valori di p_a/p_o inferiori a quello relativo al punto N) si deve semplicemente entrare nelle tabelle del moto alla Fanno con il rapporto $4fL/D_e$ (che nella fattispecie è quello critico $4fL^*/D_e$) e ricavare i rapporti p_1/p^* , T_1/T^* , r_1/r^* , p_{o1}/p_o^* e il numero di Mach M_1 nella sezione d'ingresso del condotto.



Una volta noto il M_1 , si possono utilizzare le relazioni del moto isoentropico (nell'ugello) per la determinazione delle condizioni termofluidodinamiche nella sezione **1**, a partire da quelle note di ristagno.

Da queste condizioni e dai rapporti ricavati in precedenza si possono poi facilmente calcolare le condizioni critiche (nel punto N); ad esempio:

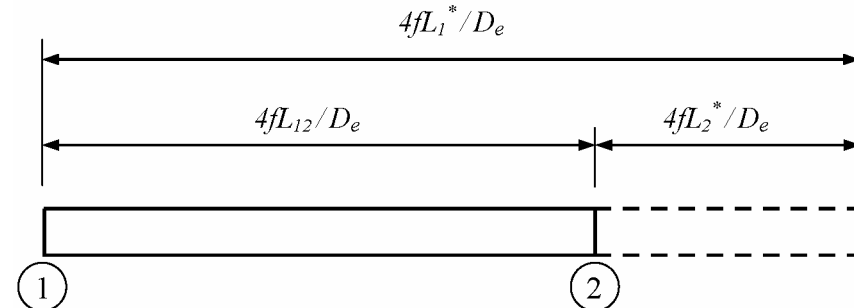
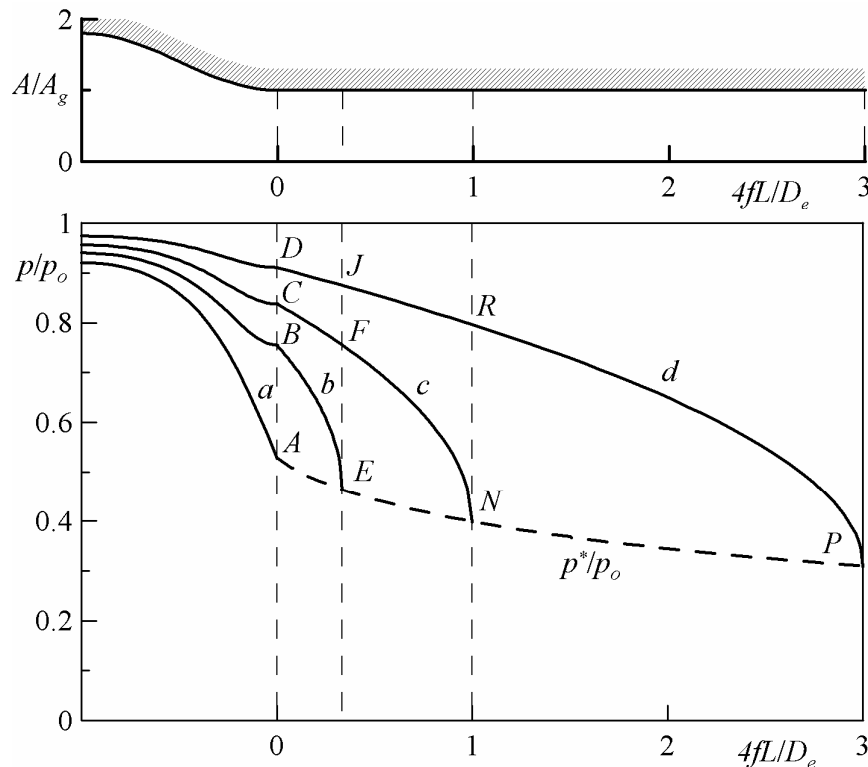
$$p_N/p_{o1} = p^*/p_{o1} = p^*/p_1 \times p_1/p_{o1}$$

Se il moto non è strozzato all'uscita (sezione 2) del condotto (ad es. punto R), si è nelle condizioni della figura a destra con $M_2 < 1$ e si procede per iterazioni.

Si assegna inizialmente un numero di Mach $M_2 < 1$ all'uscita del condotto e con questo entrare nelle tabelle del moto alla Fanno ricavando i rapporti $4fL_2^*/D_e$ e p_2/p^* . Poiché $4fL_{12}/D_e$ è noto, il valore di $4fL_1^*/D_e$ si ricava utilizzando la:

$$4f \frac{L_{12}}{D_e} = 4f \frac{L_1^*}{D_e} - 4f \frac{L_2^*}{D_e}$$

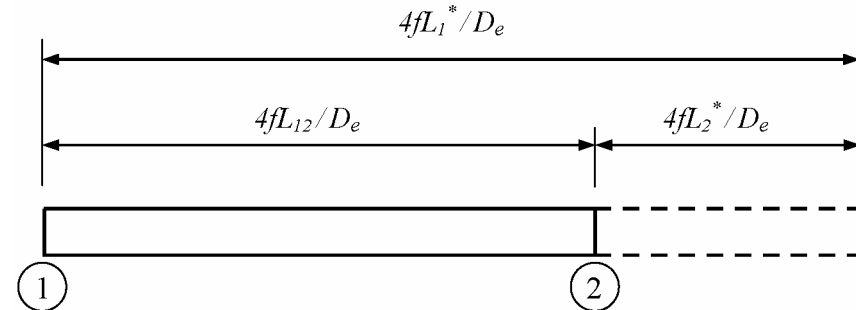
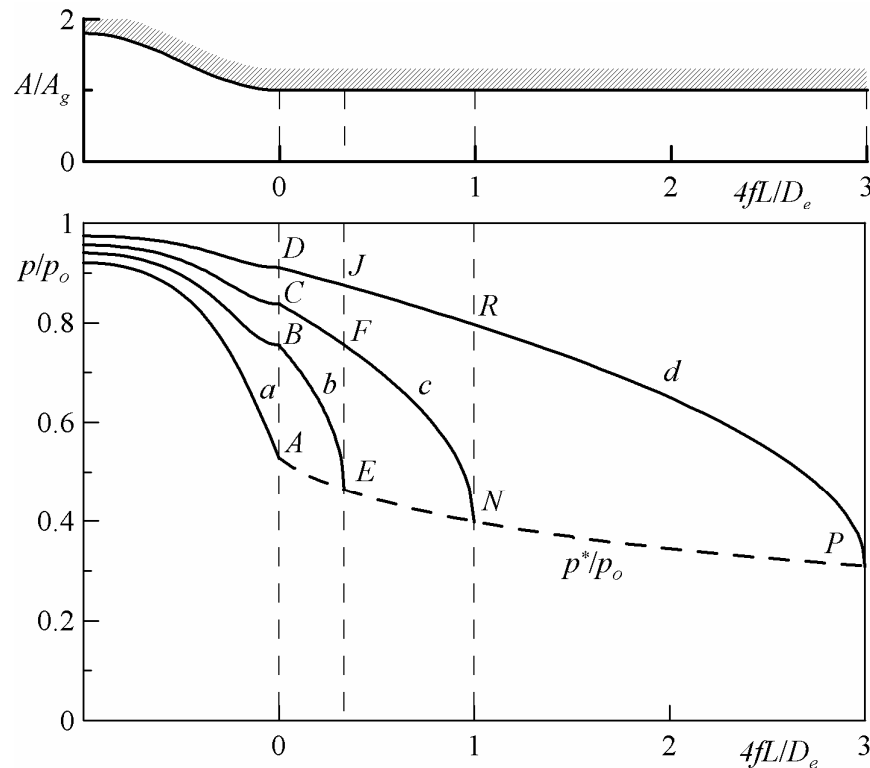
A partire da questo rapporto, si possono determinare tutti i rapporti caratteristici del moto alla Fanno all'inizio del condotto, e cioè p_1/p^* e il numero di Mach M_1 .



Utilizzando, poi, le tabelle del moto isoentropico e con una **catena di rapporti** si ottiene:

$$p_2 = \frac{p_2}{p^*} \frac{p^*}{p_1} \frac{p_1}{p_{o1}} p_{o1}$$

Il confronto tra la pressione all'uscita p_2 , così calcolata, con quella effettivamente esistente nell'ambiente permette, qualora necessario, di scegliere un nuovo valore di tentativo per M_2 e di iterare il procedimento.



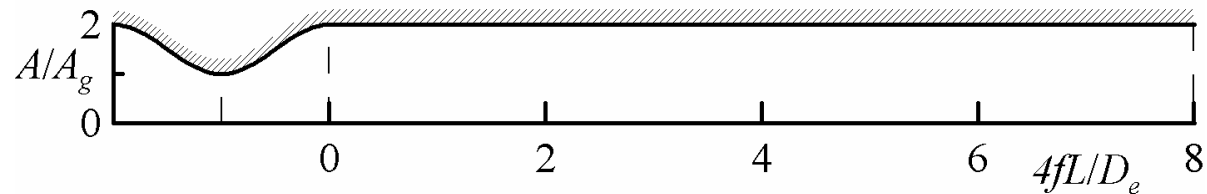
CONDOTTO CON ATTRITO COLLEGATO A UN SERBATOIO MEDIANTE UN UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE

Consideriamo ora il sistema costituito da un *ugello convergente divergente collegato ad un condotto adiabatico a sezione costante*, in presenza d'attrito, così come rappresentato in figura.

Occorre osservare che, per le condizioni $4fL/D_e = 0$, il sistema viene a coincidere con quello costituito dal solo ugello convergente divergente, già esaminato in precedenza.

Come nel caso illustrato nel paragrafo precedente, per semplicità di ragionamento si può continuare a supporre che il serbatoio contenga un gas ad una pressione costante $p_o = 1ata$ e che il condotto scarichi in un ambiente in cui sia possibile far variare la pressione p_a da $1ata$ in giù.

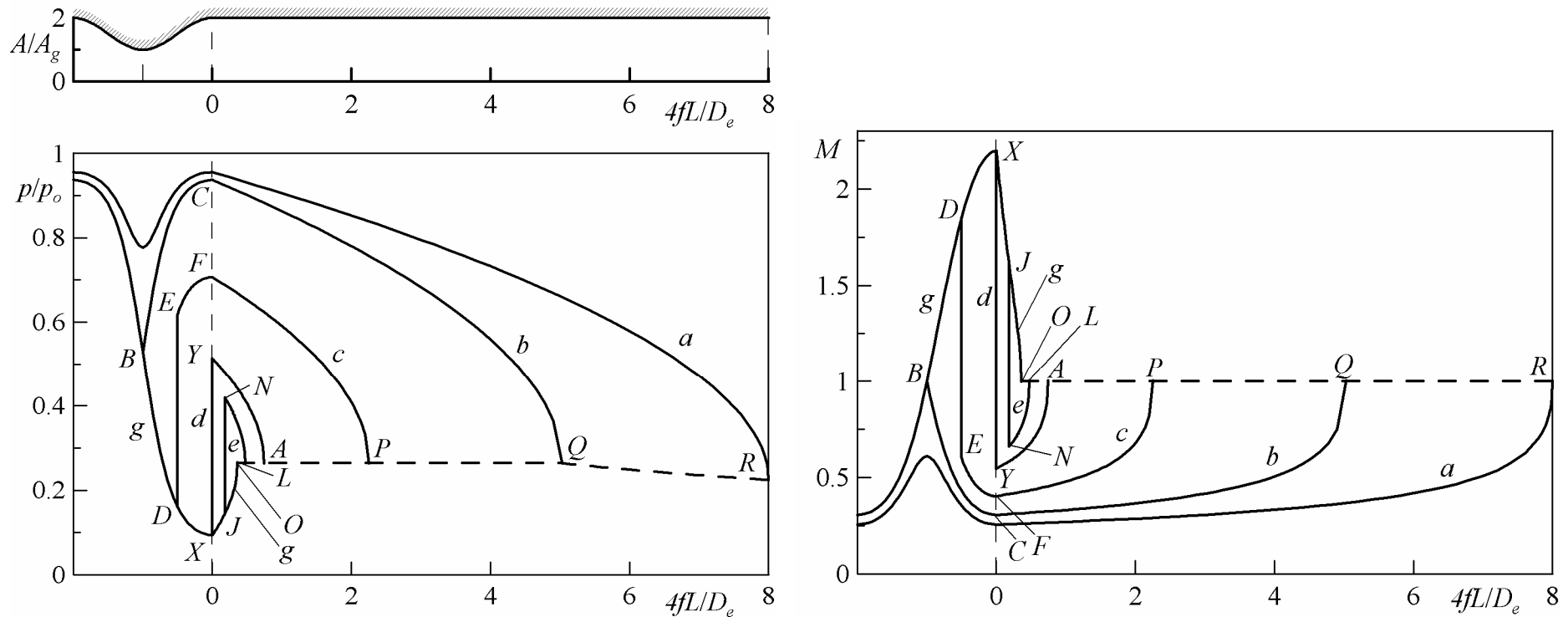
Per le figure riportate di seguito, occorre notare che, per motivi grafici, le dimensioni dell'ugello non sono state rappresentate nelle stesse scale.



In figura sono mostrate alcune curve caratteristiche relative al sistema ugello-condotto alla Fanno **supponendo ancora, inizialmente, che la pressione ambiente è nulla.**

Nei due diagrammi riportati sono indicate alcune possibili modalità di funzionamento nei piani $M-4fL/D_e$ e $p/p_o-4fL/D_e$.

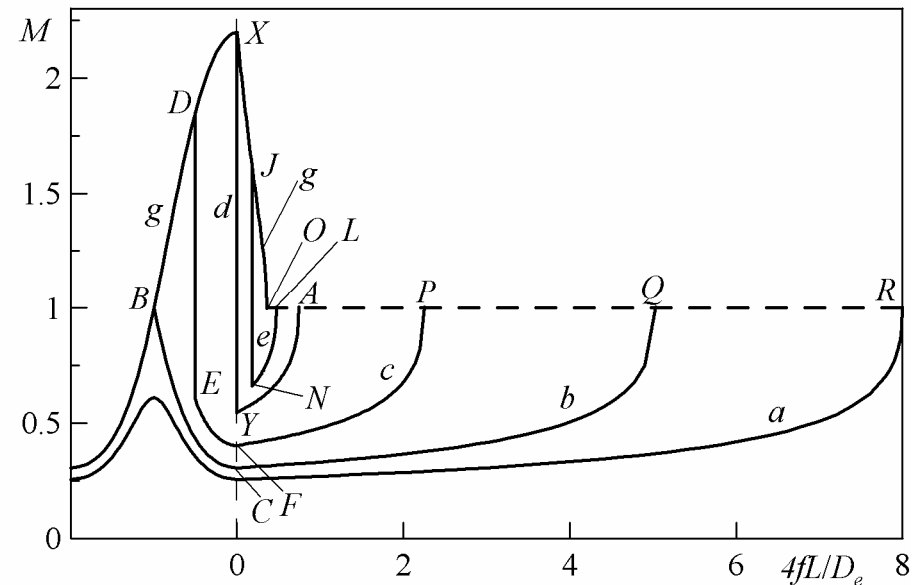
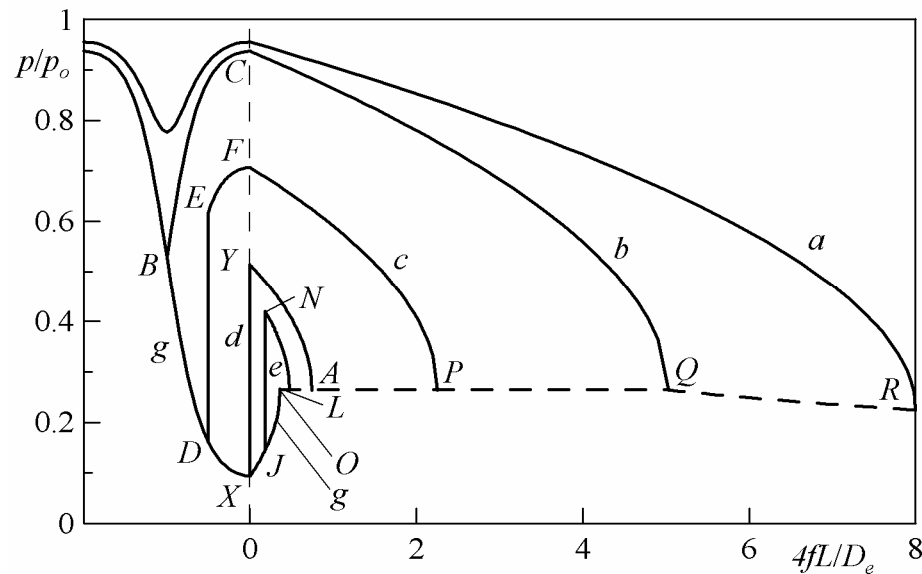
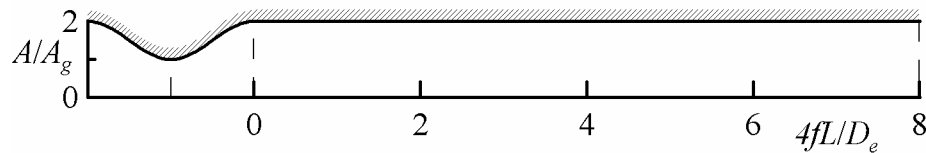
In particolare, i suddetti diagrammi, **nella loro parte riguardante il solo ugello, sono, chiaramente, del tutto simili a quelli già rappresentati in precedenza** (in riferimento alle condizioni di funzionamento degli ugelli convergenti divergenti) e sono riconoscibili in essi i **tre rapporti critici di pressione** r_1 (punto C), r_2 (punto Y) e r_3 (punto X), di cui si è già discusso.



Le curve caratteristiche del tipo **a** sono relative ad un regime interamente subsonico tranne che allo sbocco del condotto dove si raggiunge $M = 1$.

Esse si riscontrano per bassi valori della pressione ambiente ed elevati valori del rapporto $4fL/D_e$, che richiedono bassi valori del numero di Mach nella sezione d'ingresso del condotto. Quindi, queste curve presentano le stesse condizioni di funzionamento descritte nel caso di ugello solo convergente.

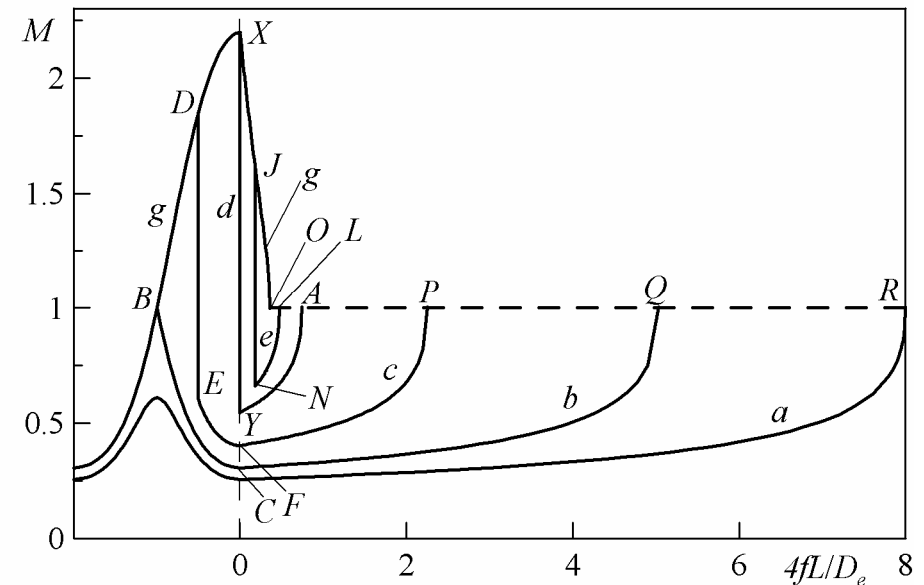
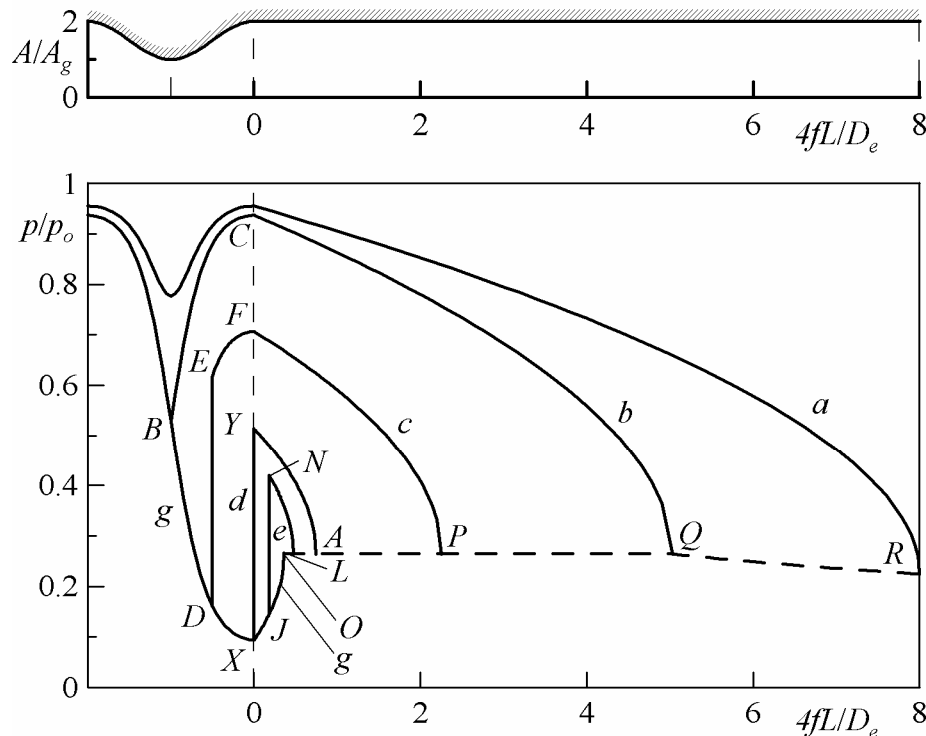
Si ricordi che **un ugello convergente divergente con regime alla Venturi, si comporta come un ugello solo convergente con la stessa area d'uscita.**



Ad esempio, per $4fL/D_e = 8$ e $p_R/p_o < p_a/p_o < 1$, **al diminuire della pressione p_a all'uscita del condotto, il flusso di massa aumenta** (perché aumenta il numero di Mach subsonico nella gola dell'ugello) e, al limite, si raggiungono le condizioni soniche nella sezione d'uscita del condotto (punto R).

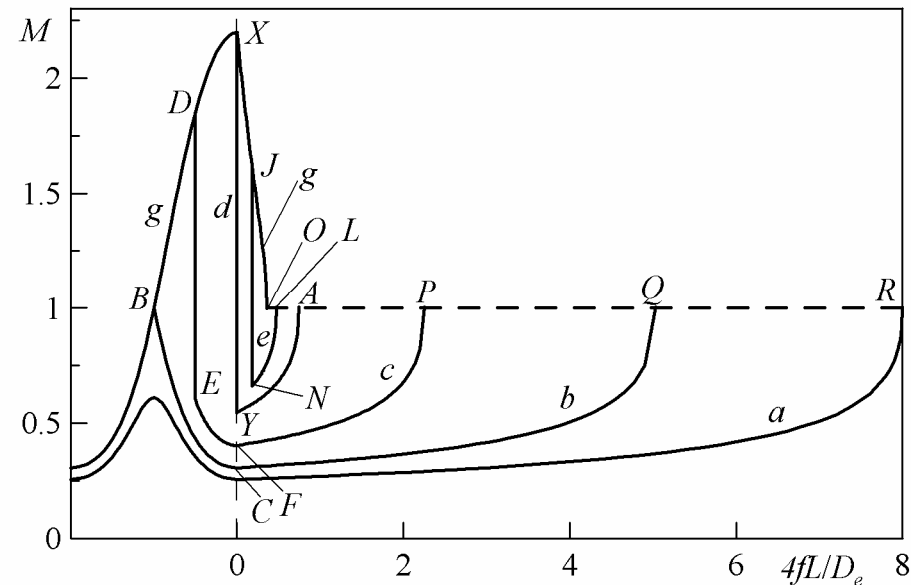
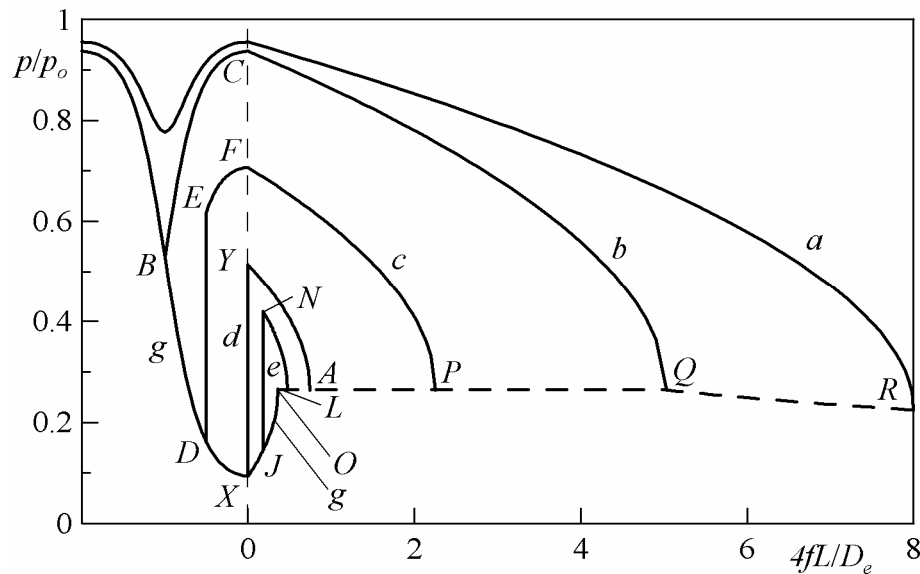
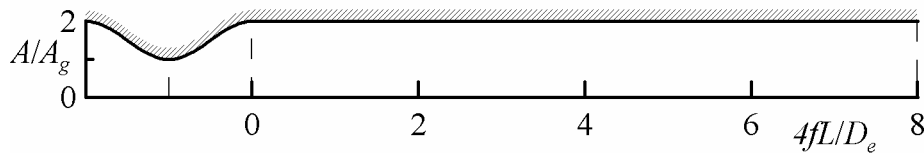
Per successive diminuzioni della pressione all'uscita, non si riscontra alcuna variazione del flusso di massa, né della pressione lungo il sistema, che risulta, pertanto, strozzato con un ventaglio d'espansione all'uscita del condotto.

Il comportamento complessivo del sistema è, quindi, del tutto simile al caso in cui a monte del condotto esiste un **ugello semplicemente convergente**.



Diminuendo la lunghezza del condotto, si può verificare la situazione per cui, per bassi valori della pressione ambiente, **si raggiunge per la prima volta $M = 1$ anche nella gola dell'ugello** (curve **b** che passano per il punto sonico **B** e per il punto caratteristico **C** corrispondente al rapporto r_1), oltre che, beninteso, all'uscita del condotto (punto **Q**).

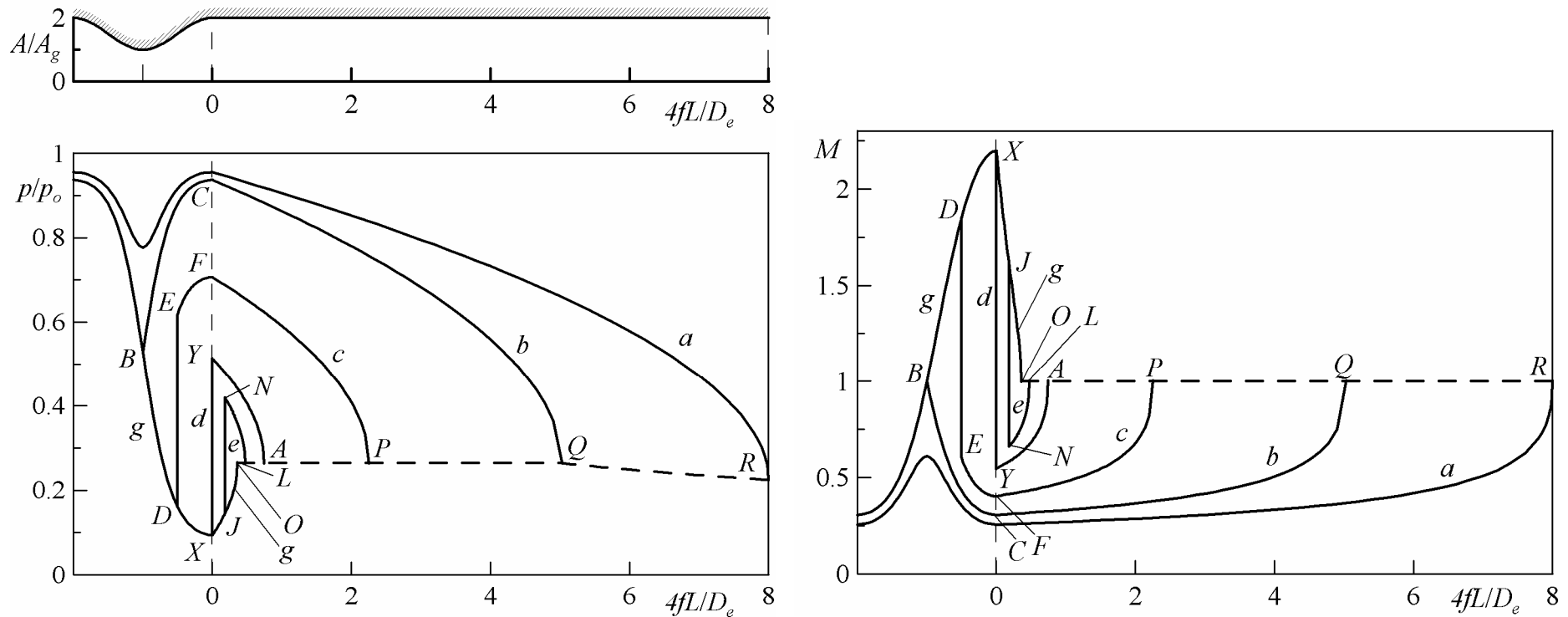
Due delle rimanenti curve caratteristiche diagrammate in figura riguardano gli altri due punti caratteristici di funzionamento dell'ugello convergente divergente e sono le curve **d**, relative al funzionamento con **onda d'urto nella sezione d'uscita** dell'ugello (punto **Y** corrispondente a r_2), e le curve **g**, relative al **funzionamento corretto** dell'ugello (punto **X** corrispondente a r_3).



Le altre curve caratteristiche mostrate in figura sono quelle di tipo *c*, che riguardano il funzionamento del sistema con un'onda d'urto normale nel divergente, e quelle di tipo *e*, che riguardano il funzionamento con un'onda d'urto normale nel condotto a sezione costante in cui si ha il moto alla Fanno.

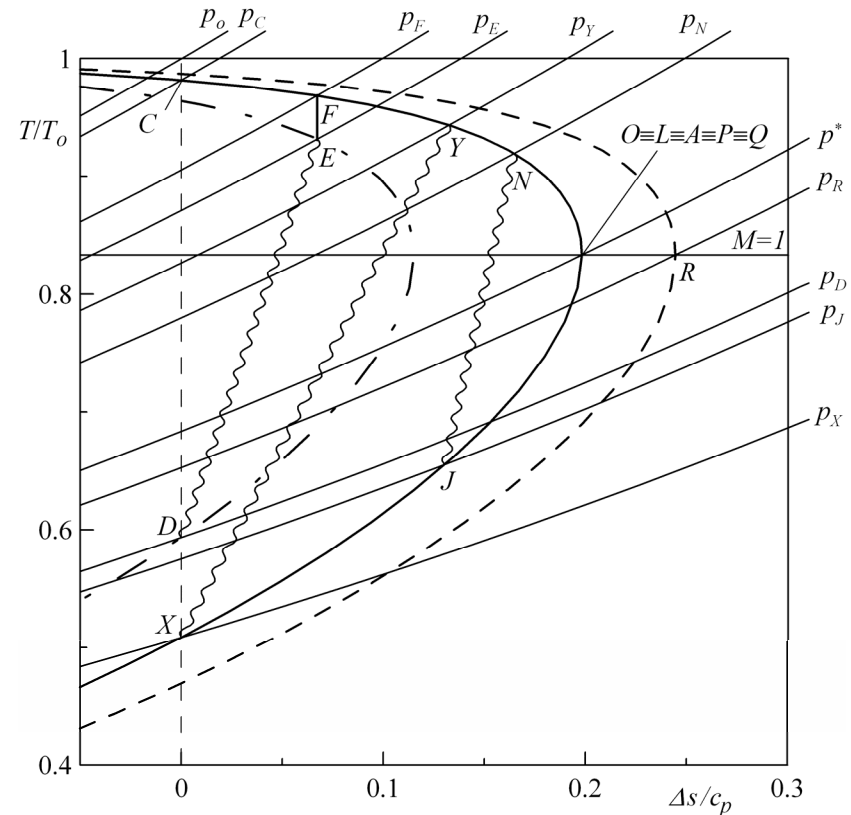
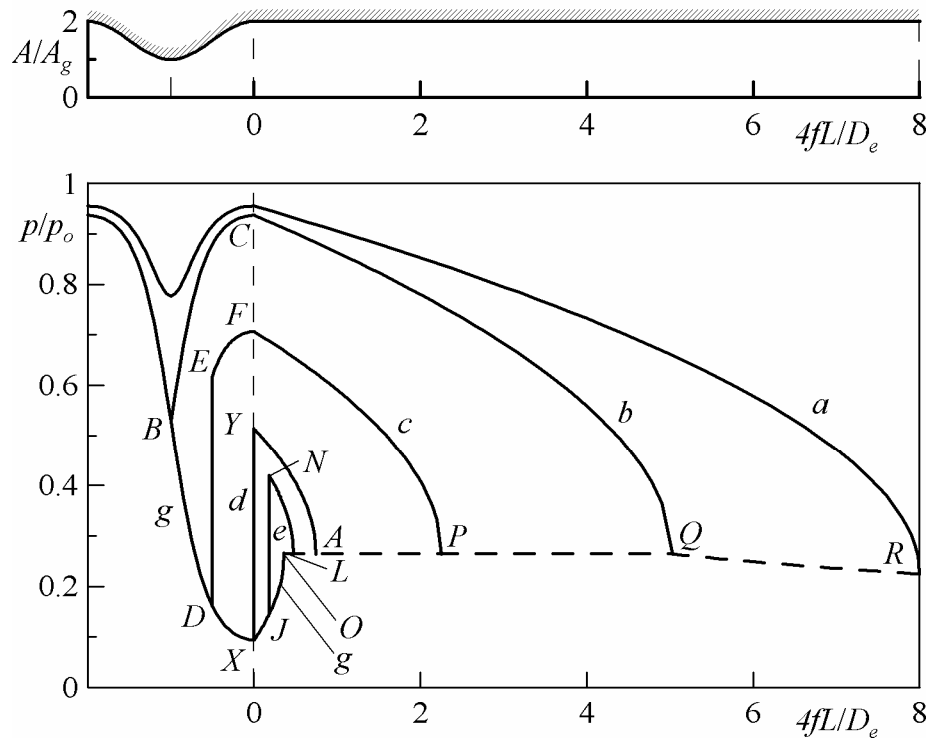
Da quanto detto è possibile dedurre che esistono **tre valori peculiari della lunghezza critica** del condotto (in effetti, tre valori del rapporto $4fL^*/D_e$) corrispondenti ai punti Q, A e O, che derivano da **funzionamenti con rapporti nella sezione d'uscita dell'ugello pari nell'ordine a r_1 , r_2 e r_3 e $M = 1$ allo sbocco del condotto.**

Questi tre valori sono nel seguito rispettivamente **indicati con L_1^* , L_2^* e L_3^* .**



E' interessante notare che per pressione di ristagno costante e valori del rapporto di pressione nella sezione d'uscita dell'ugello inferiori, o uguali, al rapporto r_1 , la portata, cioè il **flusso di massa G** , all'uscita dell'ugello è **costante**, perché il fluido passa sempre per lo stato sonico indicato dal punto B .

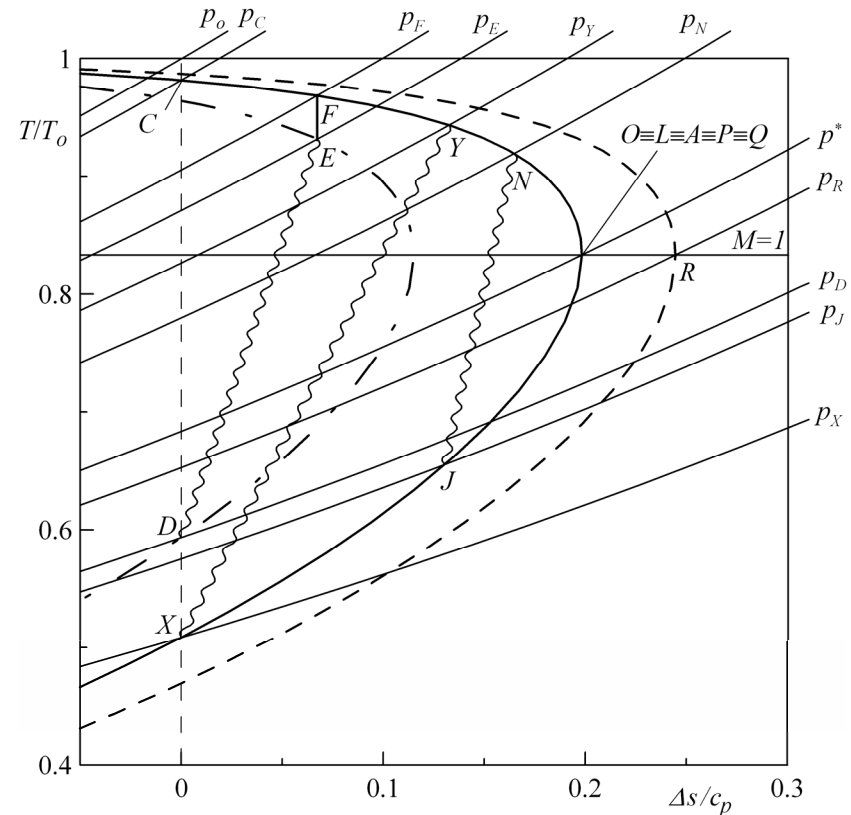
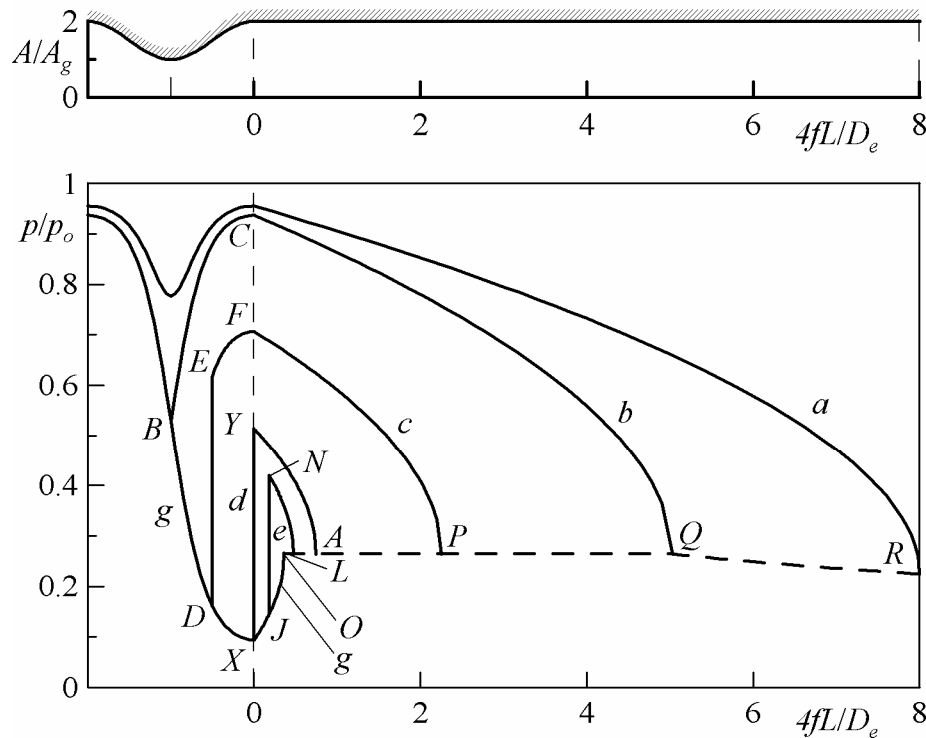
Poiché anche **l'entalpia totale H è costante**, tutti i possibili punti di funzionamento compresi fra i punti C e X (compresi quelli che seguono a valle sulle curve che da essi si dipartono) **si devono trovare sulla stessa curva di Fanno** e anche la pressione che si raggiunge per $M = 1$ (critica, relativa ai punti O, L, A, P , e Q) deve restare la stessa.



Per meglio comprendere questa situazione, si può utilizzare il piano T - s .

Come appena detto, in particolare i punti C , Y , X , rispettivamente coincidenti con i rapporti caratteristici r_1 , r_2 , r_3 , si trovano tutti sulla stessa curva di Fanno e, più specificamente, i punti C e Y sono entrambi sul ramo subsonico, mentre il punto X si trova su quello supersonico.

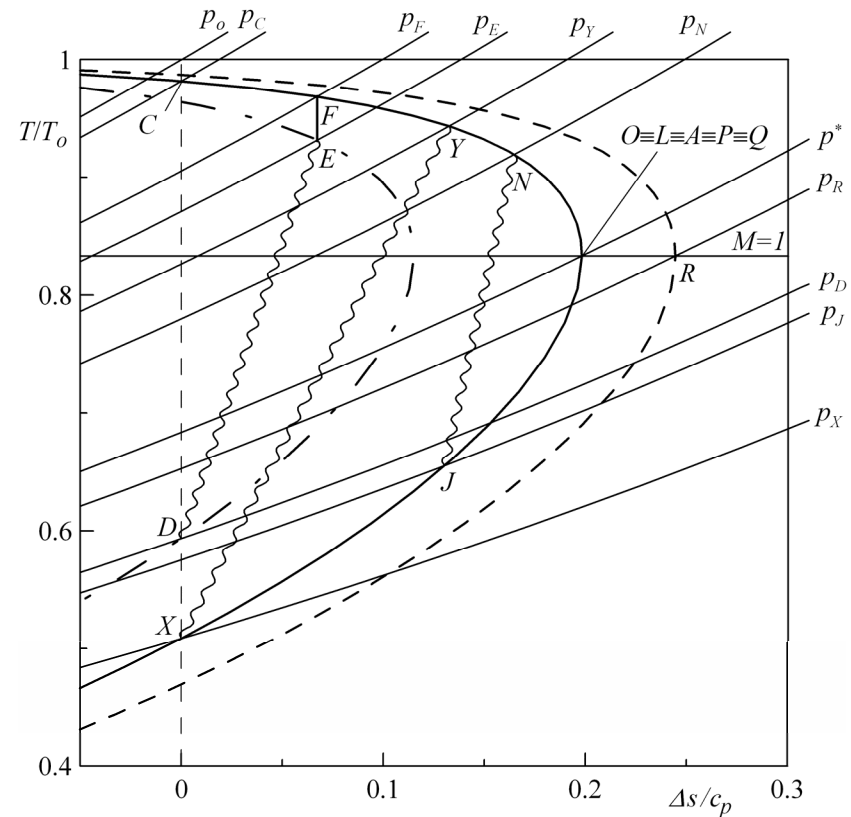
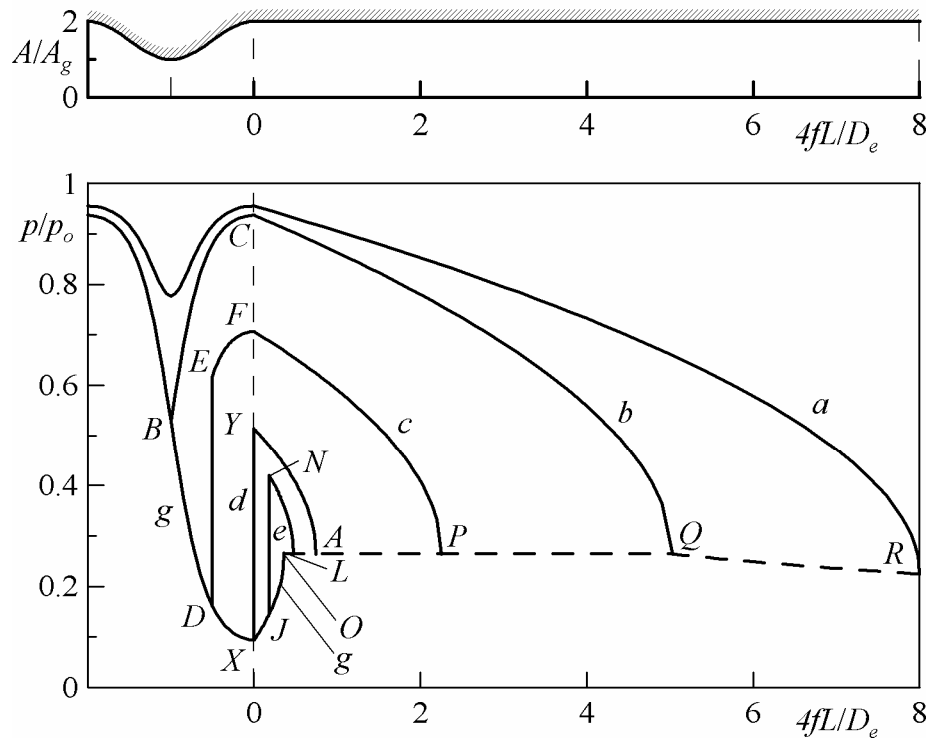
Poiché l'entropia del punto Y è maggiore di quella relativa al punto C , lo spazio percorribile, partendo da Y fino a raggiungere le condizioni critiche, è inferiore rispetto a quello percorribile a partire dal punto C stesso.

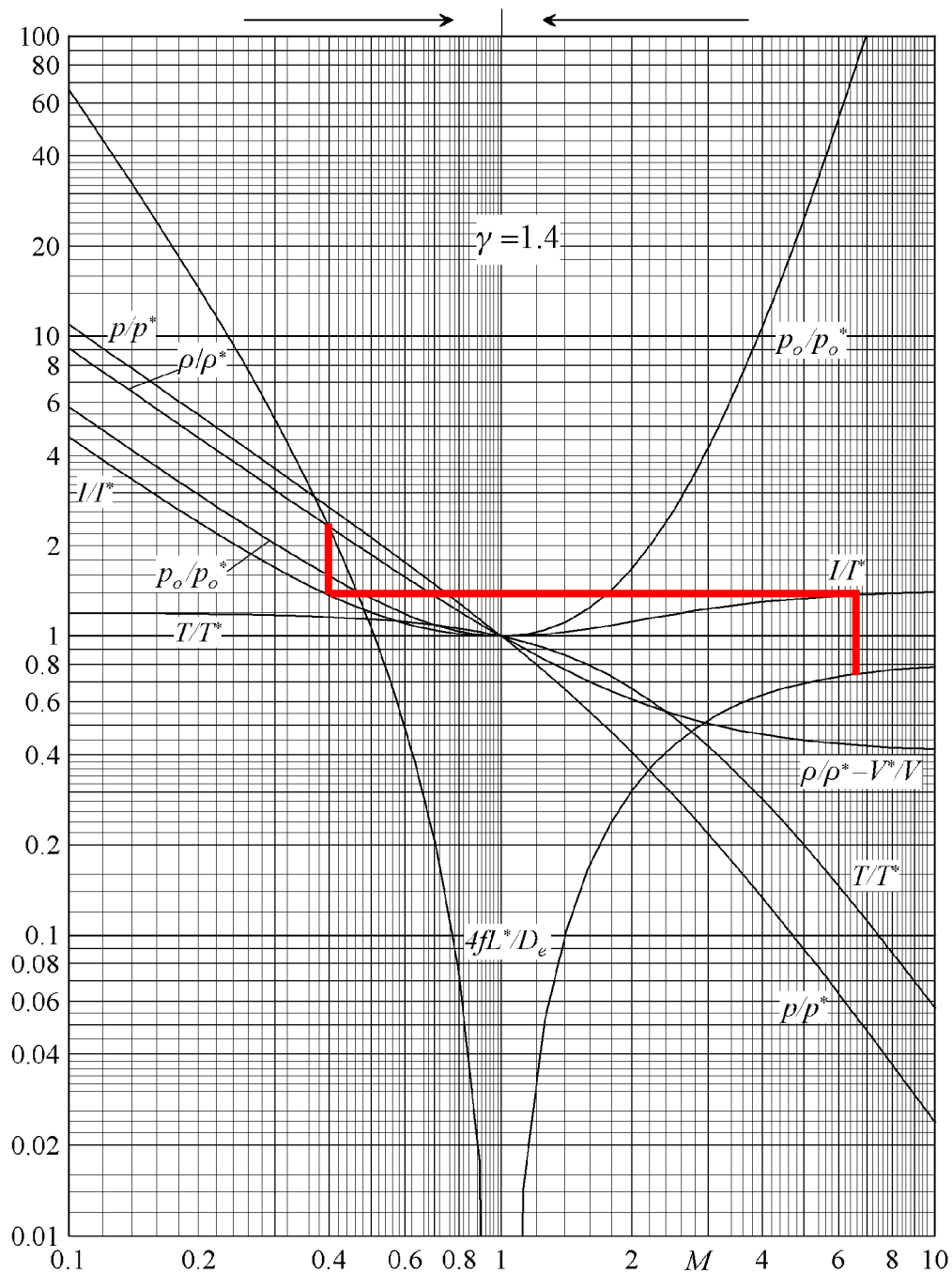


Infatti, seguendo una curva tutta subsonica partendo dal punto C, dopo aver percorso un tratto di condotto, il fluido passa per lo stato indicato dal punto Y.

Questo spiega la maggiore lunghezza del tratto L_1^* (punto Q) rispetto a quello L_2^* (punto A).

Come già detto in precedenza, in regime supersonico, ovvero a partire dal punto X, la lunghezza che porta alle condizioni critiche è ancora inferiore in virtù della maggiore rilevanza delle perdite di carico.





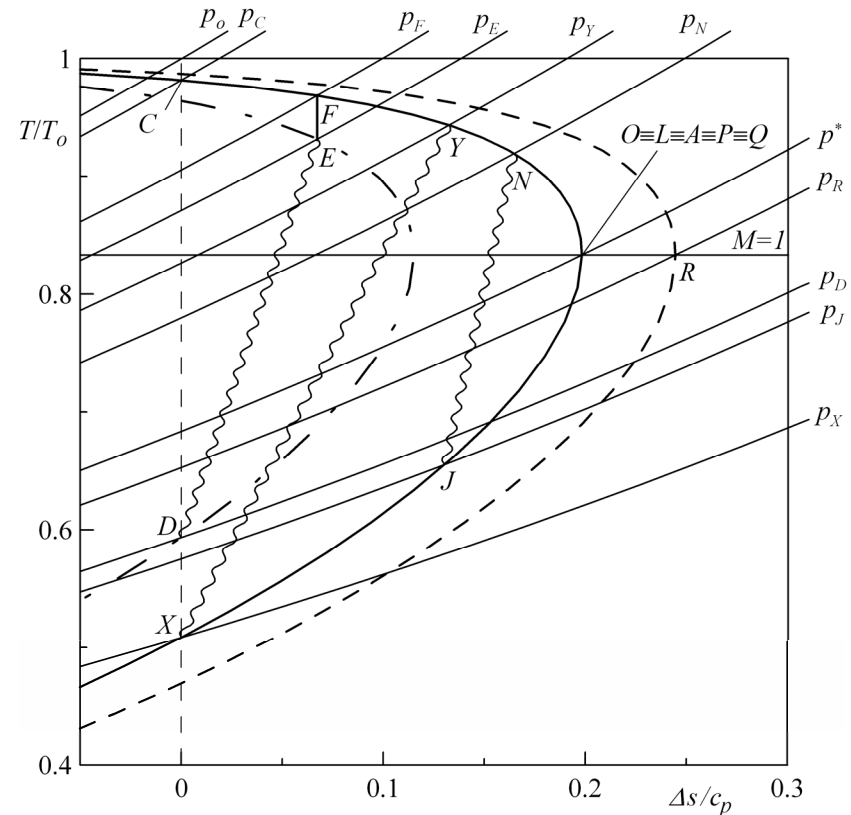
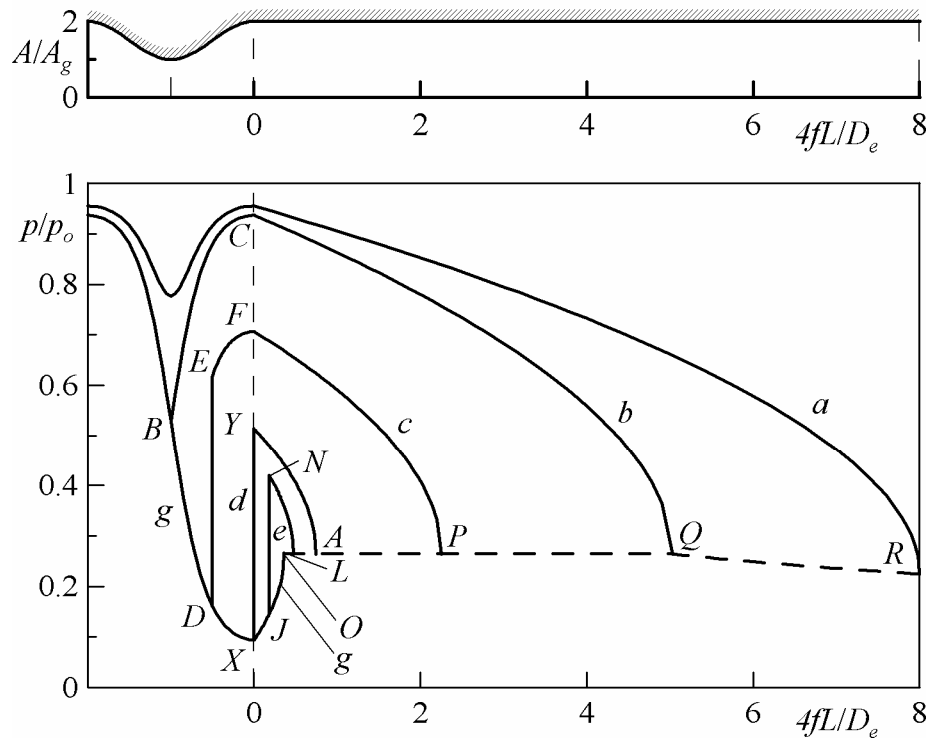
Questa circostanza è, infatti, facilmente riscontrabile nella figura a lato, dove i due punti corrispondenti a X e Y sono due punti che hanno lo stesso impulso specifico e due diversi numeri di Mach, supersonico e subsonico rispettivamente.

Dalla figura si nota che **a parità d'impulso specifico, il punto relativo al numero di Mach subsonico ha un valore di $4fL^*/D_e$ maggiore.**

Il funzionamento con onda d'urto nel divergente è leggermente più complesso sul piano T - s . Il **punto D a monte dell'onda** si trova alla **stessa entropia dei punti C e X , ma a una pressione maggiore di quella del punto X** (in particolare, ad un'area della sezione minore e ad un numero di Mach minore).

Evidentemente per questo punto passa **una curva di Fanno relativa ad un flusso di massa maggiore** (la portata che attraversa il sistema è la stessa, mentre l'area della sezione in cui avviene l'onda d'urto è minore di quella della sezione d'uscita).

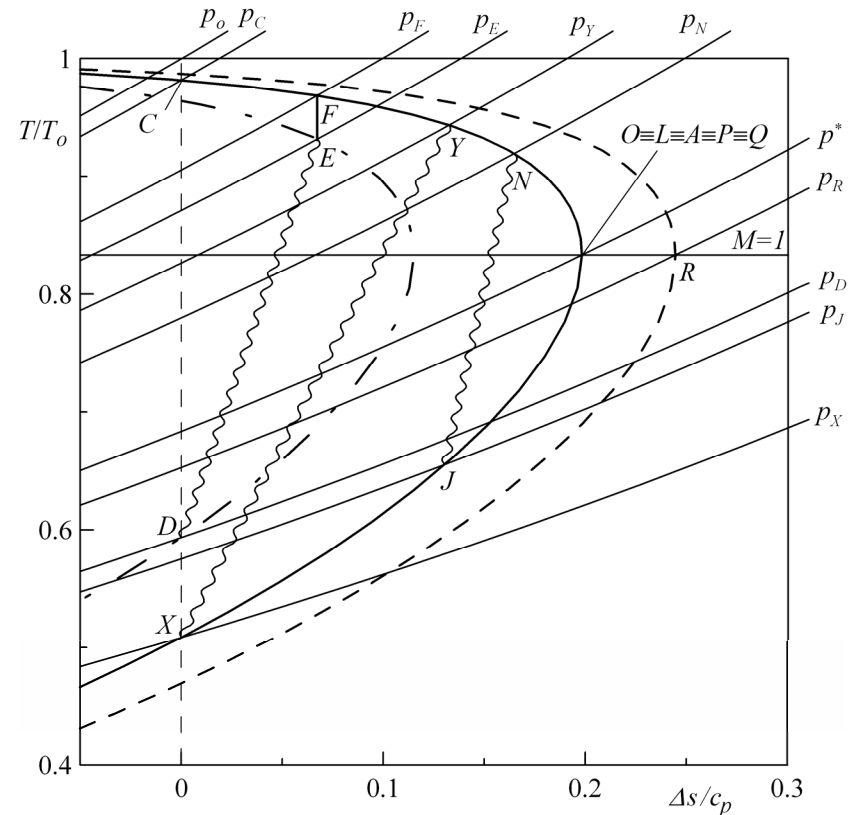
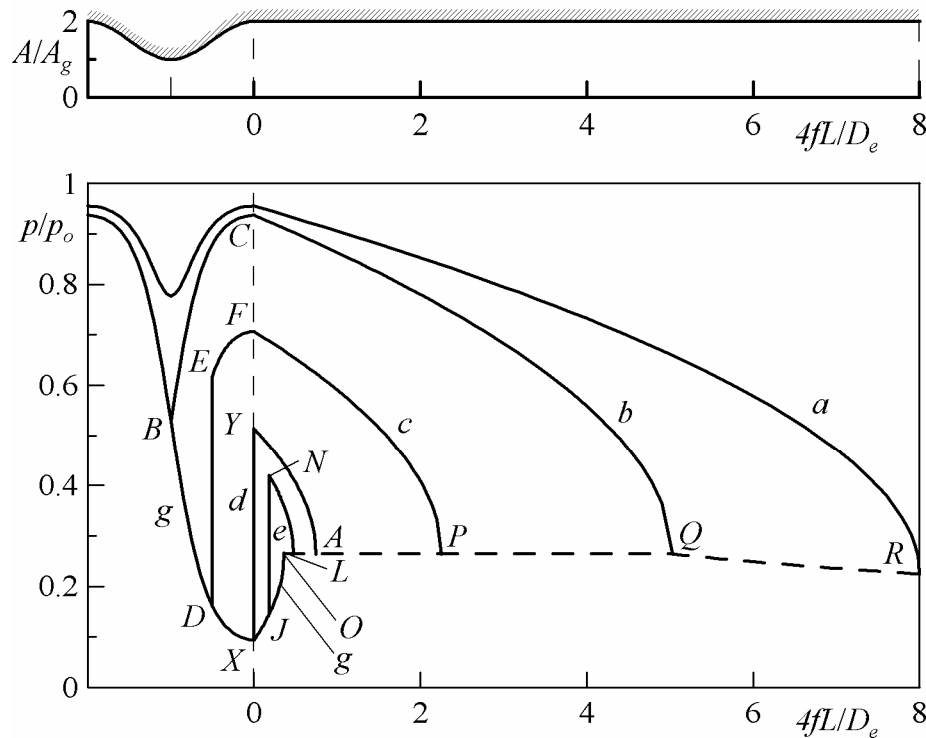
Su questa stessa curva deve trovarsi, oltre che il punto D , anche il punto E a valle dell'onda.



La produzione di entropia dovuta a quest'onda, per il minore valore del numero di Mach a monte, è minore di quella dovuta all'onda d'urto posizionata all'uscita dell'ugello, cioè l'entropia del punto E deve essere minore di quella del punto Y .

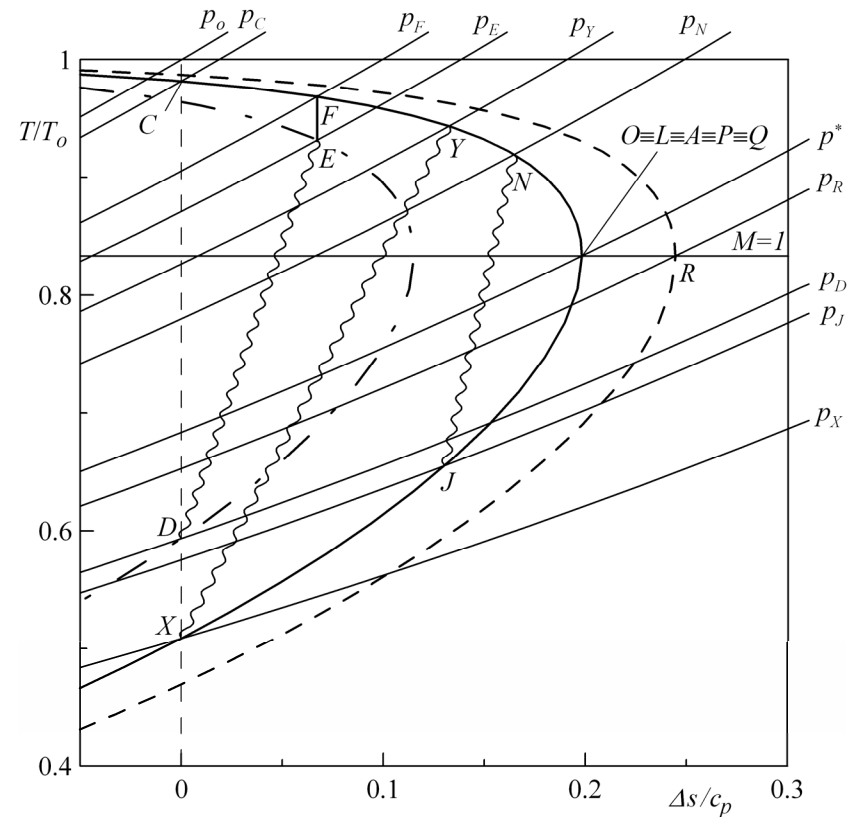
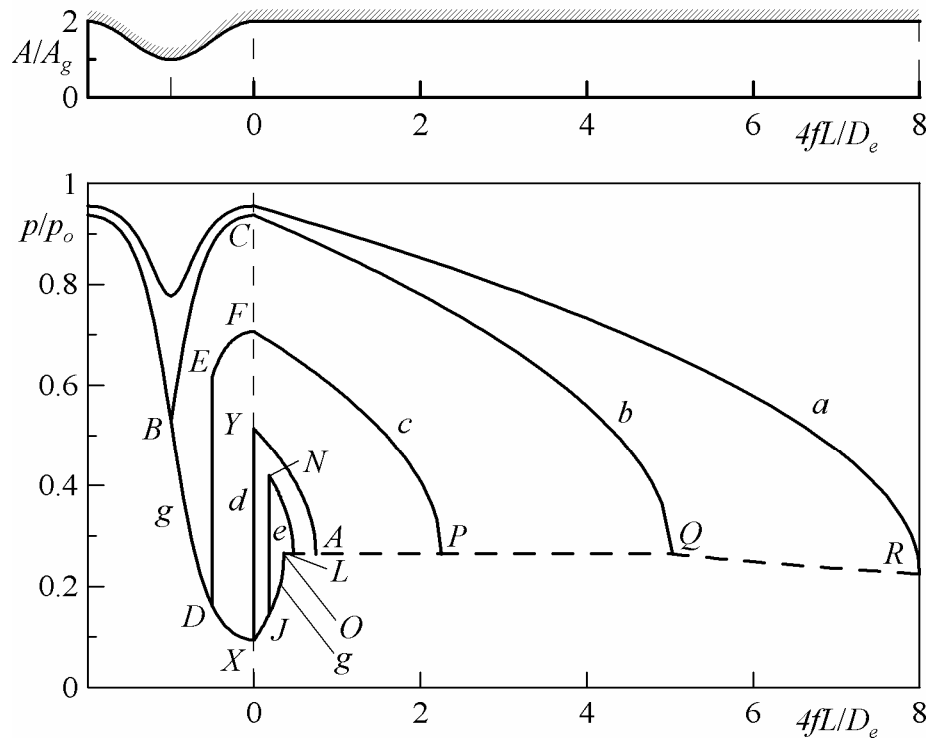
La trasformazione che segue nell'ugello è isoentropica, e il punto F deve avere la stessa entropia del punto E a una pressione più elevata perché le condizioni del punto E sono subsoniche e, a valle, la sezione aumenta.

Anche il punto F deve trovarsi sulla curva di Fanno che passa per i punti C e X , poiché sia la portata di massa che l'entalpia totale sono le stesse di quelle di C e X e la sezione di passaggio del fluido è ancora quella all'uscita dell'ugello.



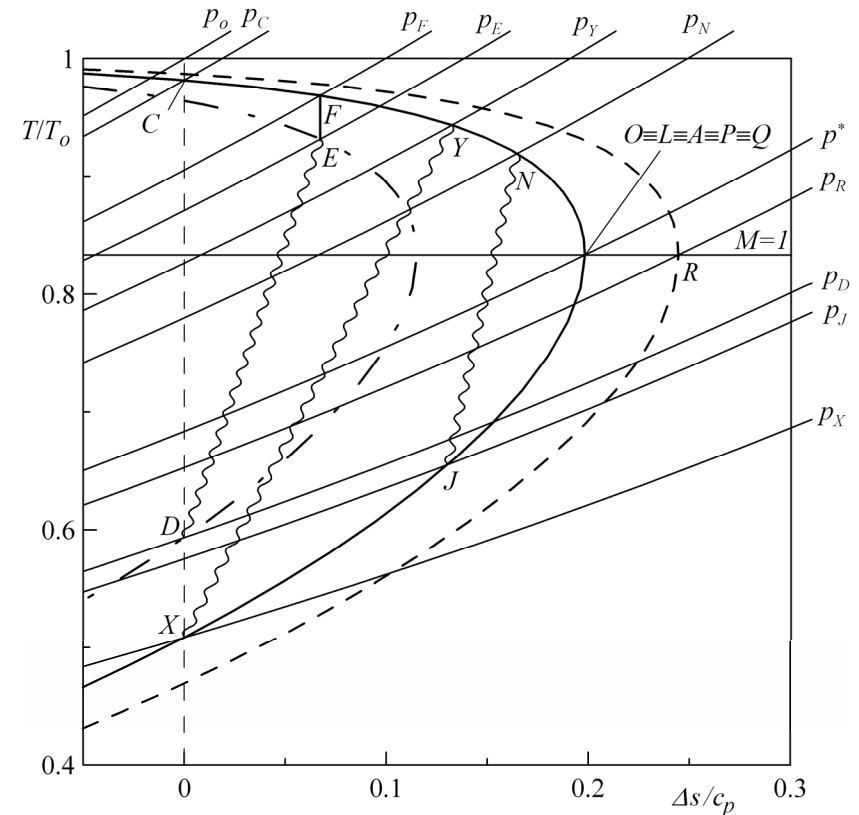
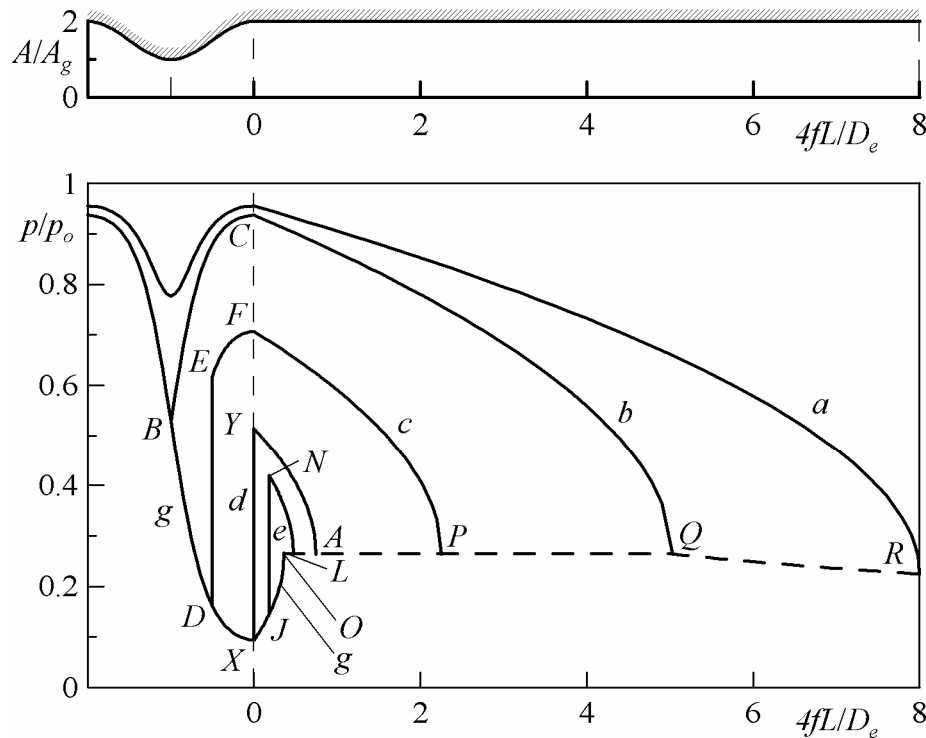
L'ultima tipologia di curva, non ancora esaminata, prevede un'onda d'urto nel condotto alla Fanno (curva *e*). In questo caso la trasformazione del fluido segue un primo tratto sul ramo supersonico della curva di Fanno sino al punto *J* e, successivamente, un'onda d'urto ne provoca il passaggio al ramo subsonico (punto *N*).

Poiché il punto *N* si trova ad un'entropia maggiore di quella del punto *Y* ($M_J < M_X$ e quindi si ha $M_N > M_Y$), **la lunghezza che porta alle condizioni critiche sarà inferiore rispetto a quella relativa al punto *Y*.**



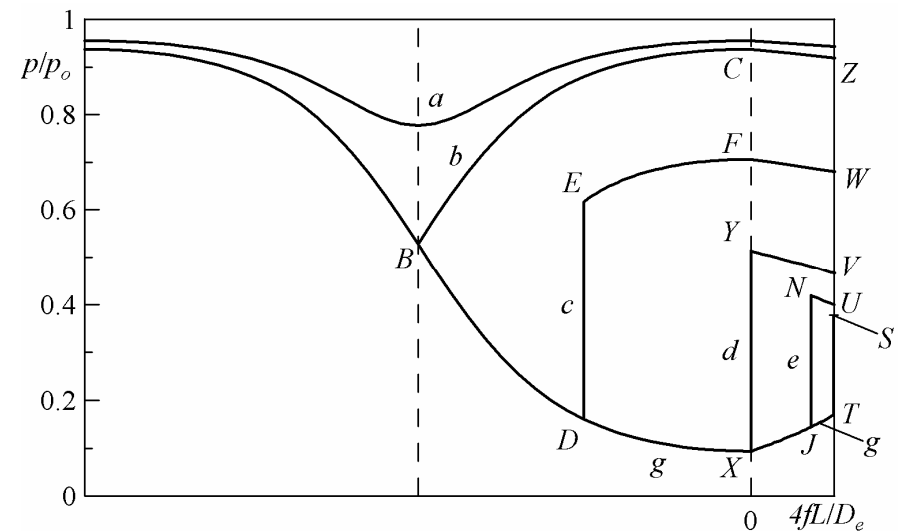
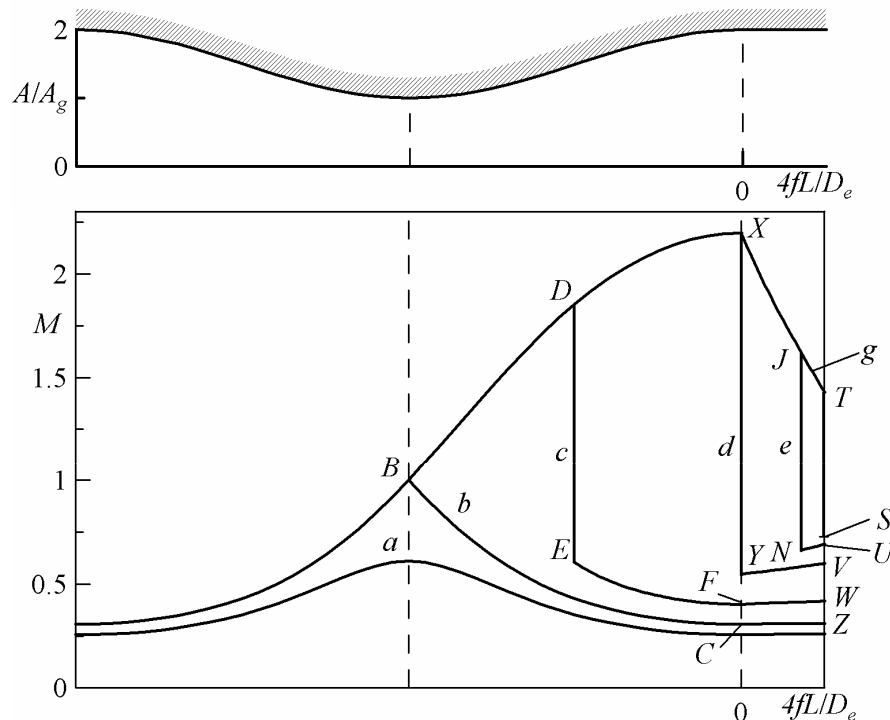
Per determinare i diversi punti caratteristici si possono usare le tabelle del moto alla Fanno. Ad esempio, noto lo stato del punto C , si entra nelle tabelle con il numero di Mach M_C e si individuano i rapporti $4fL_C^*/D_e$, p_C/p^* , T_C/T^* , ρ_C/ρ^* e p_{oC}/p_o^* che permettono di determinare le proprietà termofluidodinamiche del punto critico, il quale, nel caso in esame, è rappresentato dal punto Q .

Lo stesso procedimento si può applicare per determinare i punti P , A e O , partendo dai valori di M_F , M_Y e M_X rispettivamente, anche se hanno lo stesso stato del punto Q . Per questi punti, cambia la sola quantità $4fL^*/D_e$. La determinazione dei due punti J e N è un po più complessa e sarà affrontata poi.



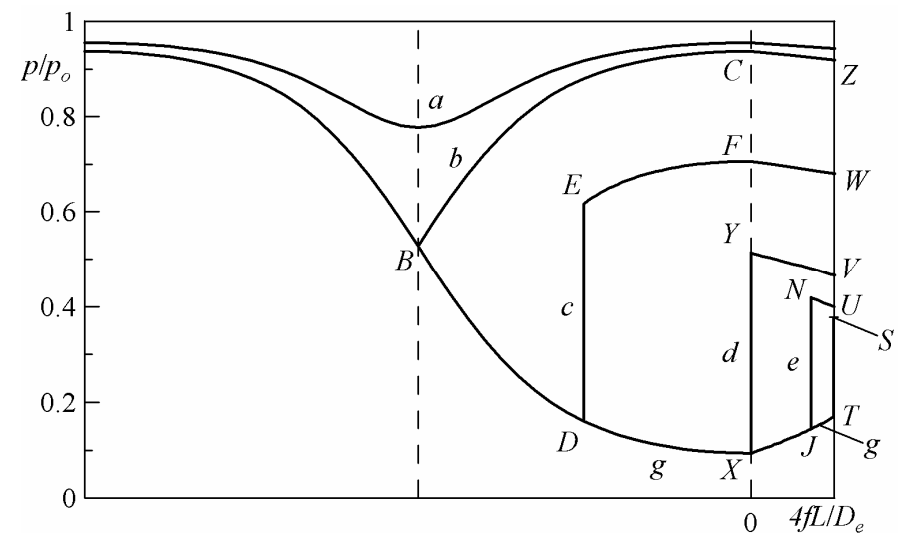
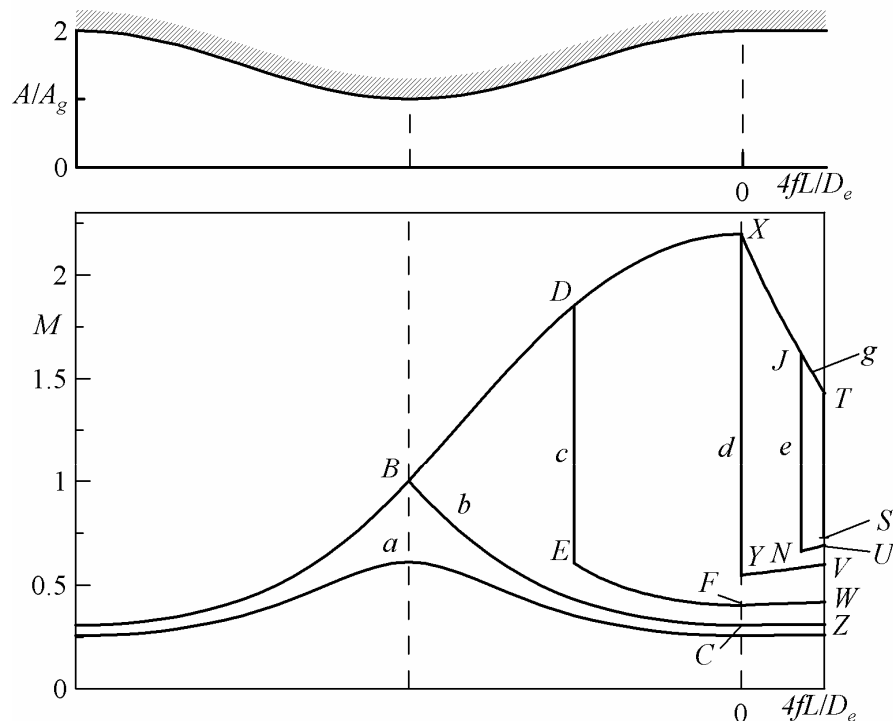
Si supponga, ora, che il condotto abbia una lunghezza minore di quella critica supersonica L_3^* , per cui il condotto appare molto corto per quanto già detto. Poi si supponga che la pressione ambiente possa variare dal valore nullo fino a quello di ristagno. Per $p_a < p_T$, il fluido segue la curva supersonica ***g*** fino al punto *T* e, all'uscita del condotto, un ventaglio d'espansione fa adattare la pressione nella sezione d'uscita del condotto a quella ambiente.

Questo tipo di funzionamento (**sottoespanso**) si realizza fino a che la pressione ambiente non raggiunge proprio quella relativa al punto *T*, cui corrisponde, invece, un funzionamento che si potrebbe definire, in pratica, **corretto** in analogia a quanto affermato per un ugello convergente divergente.



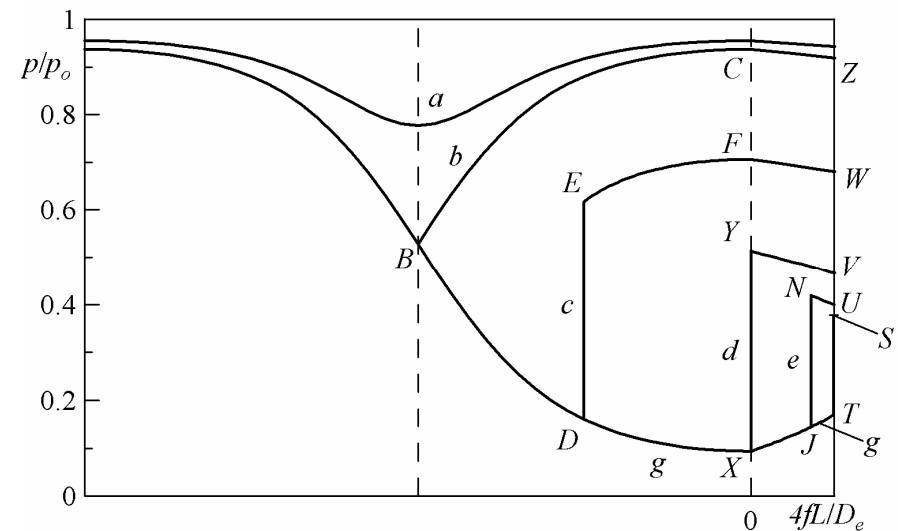
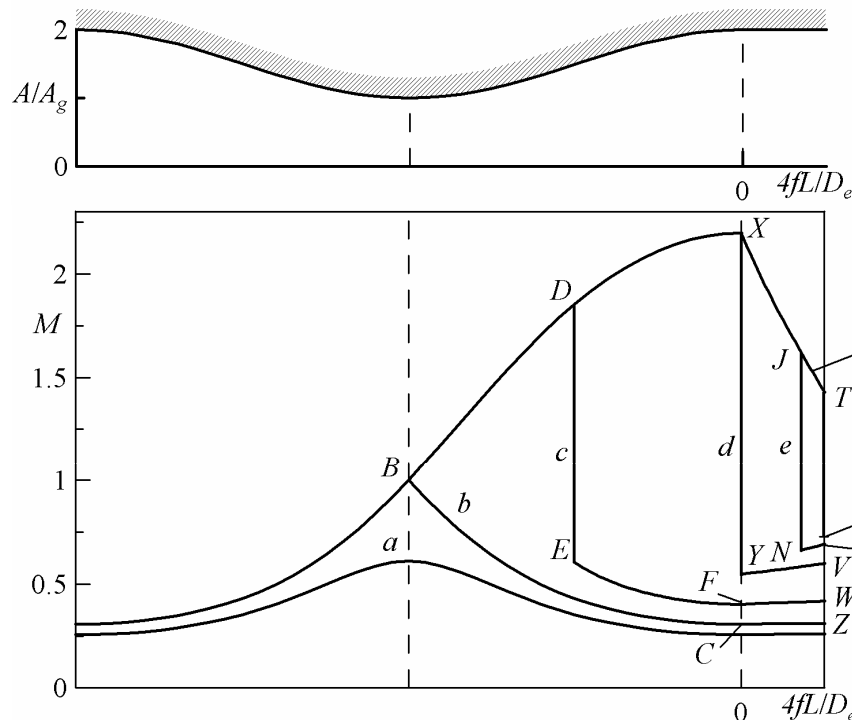
Se la pressione ambiente è compresa fra quella relativa al punto T e quella del punto S (punto corrispondente alle condizioni a valle di un'onda d'urto normale posta nella sezione d'uscita del condotto), si genera un'onda d'urto obliqua all'uscita del condotto (funzionamento **sovraespanso**), così come avviene all'uscita di ugelli supersonici e con le modalità già descritte dettagliatamente.

Quando la pressione ambiente coincide proprio con quella del punto S , l'onda d'urto nella sezione d'uscita del condotto diventa normale e, per successivi aumenti di p_a , entra nel condotto a sezione costante (ad esempio curva e che passa per i punti X, J, N e U).



Se la pressione ambiente è uguale a quella del punto V, l'onda si dispone all'ingresso del condotto (ovvero, all'uscita dell'ugello, curva XYV) e per pressioni ambiente ancora crescenti risale il tratto divergente dell'ugello (ad esempio curva c che passa per i punti D, E, F e W). Quando, poi, la p_a raggiunge il valore relativo al punto Z, ***l'onda si porta nella sezione di gola dell'ugello dove degenera in un'onda di Mach***.

Successivi aumenti della pressione ambiente danno moto subsonico in tutto il sistema, e il comportamento è simile a quello descritto nel caso in cui il condotto a sezione costante è collegato ad un ***ugello solo convergente*** per il quale non è mai raggiunta la condizione $M = 1$, né nell'ugello, né all'uscita del condotto.

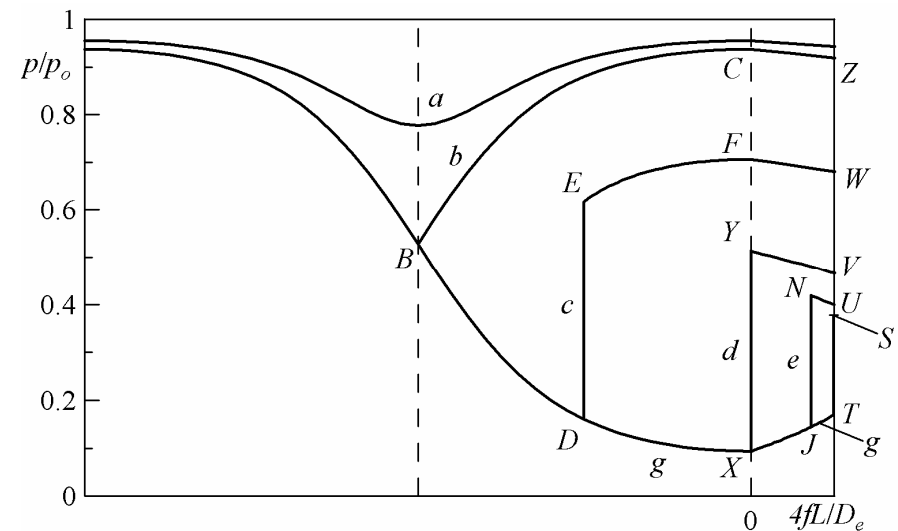
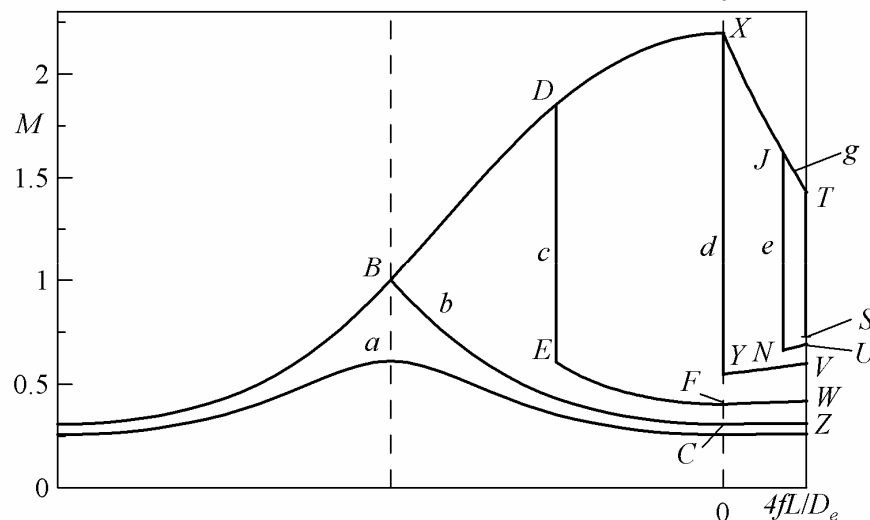
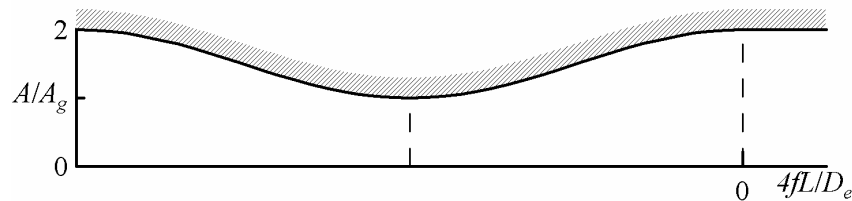


Per pressioni ambiente inferiori a quella del punto S , $p_a < p_S$, il moto all'uscita del condotto è **supersonico**, e non si rispetta la condizione di Kutta (salvo che per $p_a = p_T$) mentre, per valori di $p_a > p_S$, il moto è **subsonico** e si rispetta la condizione di Kutta. **Nel primo caso, determinare il funzionamento è diretto.**

Noto M_X , si determinano i rapporti $4fL_X^*/D_e$, p_X/p^* , T_X/T^* , ρ_X/ρ^* e p_{0X}/p_0^* e, conoscendo il rapporto $4fL_{XT}/D_e$, si calcola per differenza il valore di $4fL_T^*/D_e$.

Saputo questo rapporto, dalle tabelle del moto alla Fanno, si calcolano i rapporti caratteristici e il numero di Mach del punto T .

Valutate le condizioni del punto T , è poi facile stabilire la tipologia delle eventuali onde (d'espansione, o d'urto oblique) all'uscita del condotto.



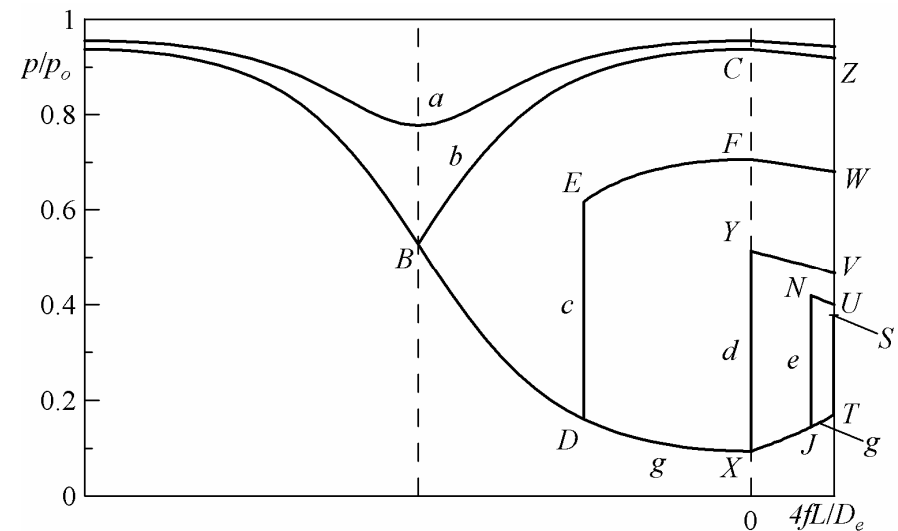
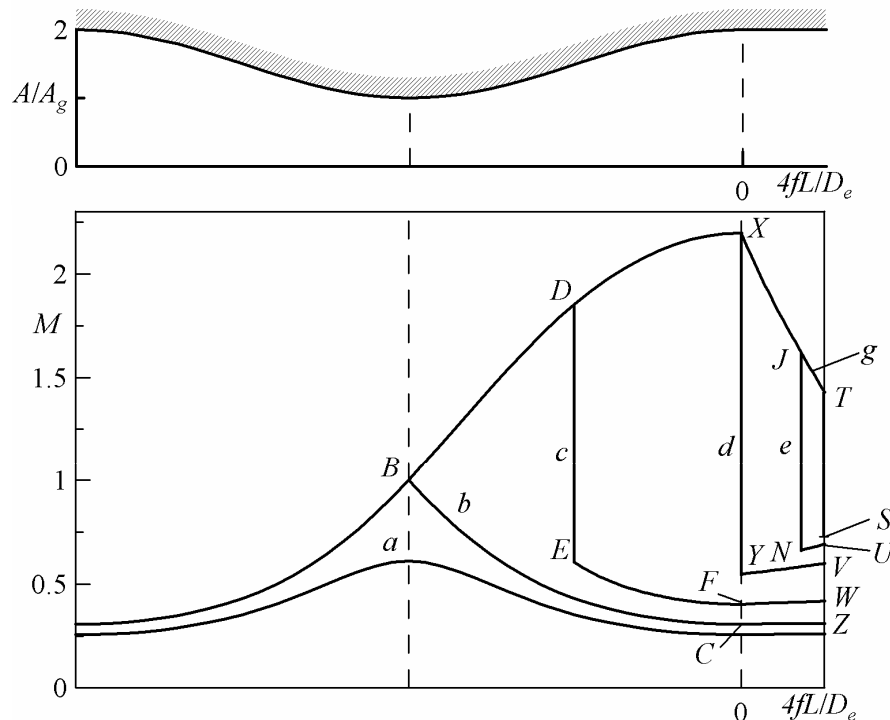
Se la pressione ambiente è compresa fra i punti S e V si deve determinare la posizione dell'onda d'urto all'interno del condotto **procedendo per tentativi**.

Si assegna una posizione dell'onda d'urto nel condotto di Fanno (ad esempio quella indicata dalla curva $XJNU$). Dal valore del numero di Mach nella sezione X si determinano i rapporti $4fL_X^*/D_e$, p_X/p^* e p_X/p_o .

Una volta valutata la quantità $4fL_{XJ}/D_e$, si può ricavare il nuovo rapporto $4fL_J^*/D_e$.

Con questo valore, entrando nelle tabelle del moto alla Fanno, si determina M_J .

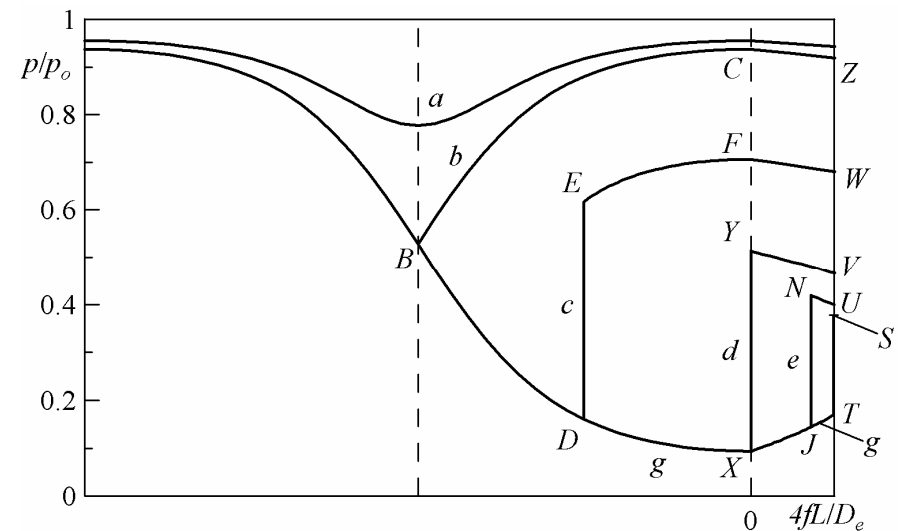
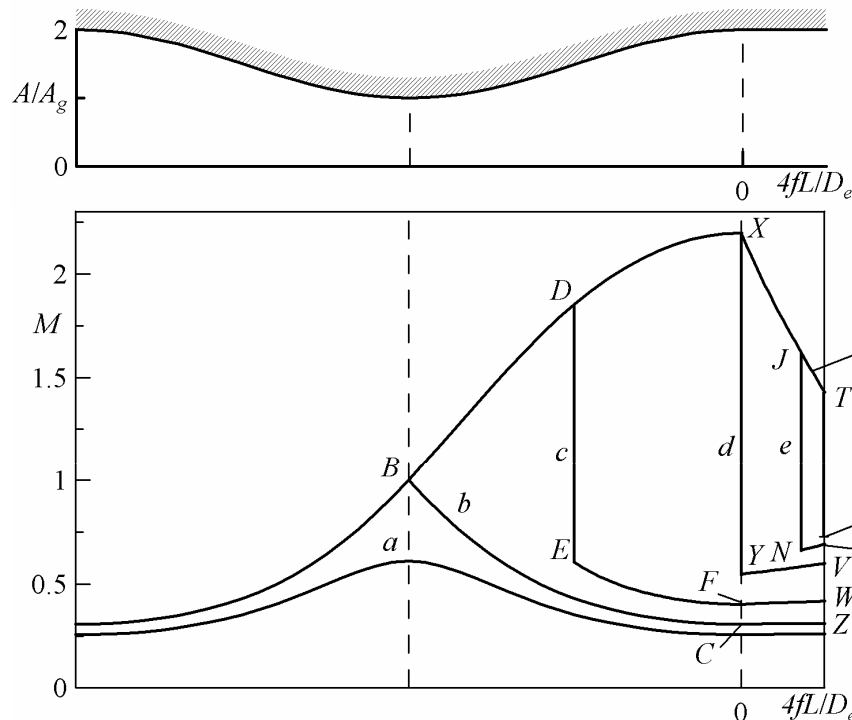
Noto il numero di Mach prima dell'onda e utilizzando le tabelle dell'onda d'urto, si determina M_N e, quindi dalle tabelle del moto alla Fanno, p_N/p^* e $4fL_N^*/D_e$.



Si determina quindi il rapporto $4fL_U^*/D_e$, che permette di conoscere le condizioni del moto all'uscita del condotto ed, in particolare, il rapporto $p_U/p^* = p'_a/p^*$.
Con una catena di rapporti si può calcolare la pressione all'uscita:

$$p'_a = \frac{p'_a}{p^*} \frac{p^*}{p_X} \frac{p_X}{p_o} p_o$$

che confrontata con la p_a permette di scegliere un nuovo valore di tentativo per la posizione dell'onda d'urto e di iterare il procedimento.



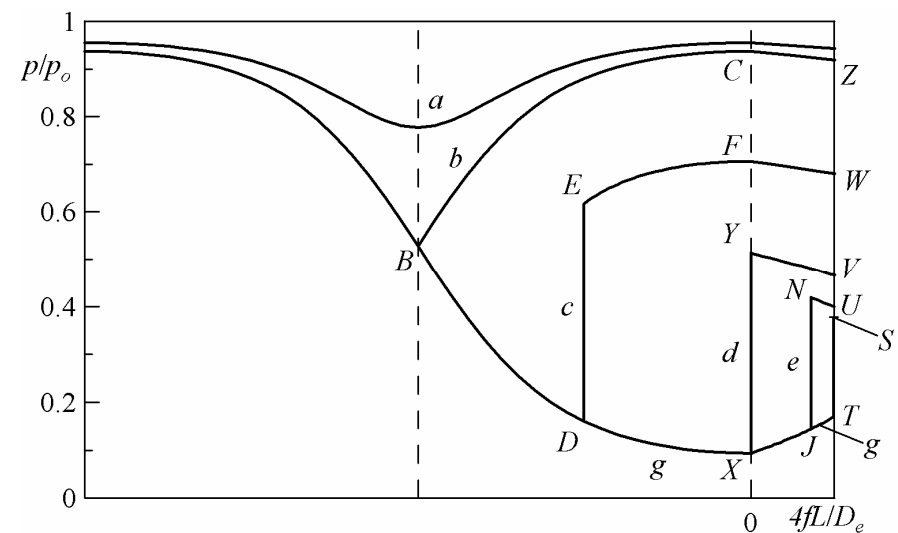
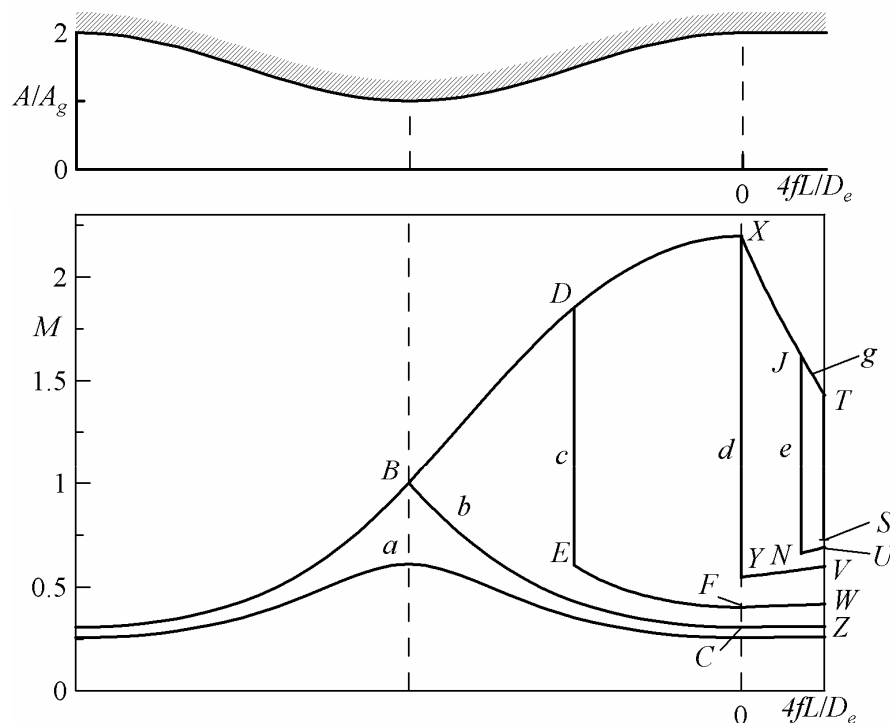
Se la pressione è compresa fra quelle dei punti V e Z , si deve determinare prima la pressione critica p^* che, come già affermato, non varia in questo intervallo (i punti all'uscita del condotto appartengono tutti alla stessa curva di Fanno) e che può essere calcolata, ad es., a partire dal punto C .

Una volta noto il rapporto p_a/p^* , dalle tabelle del moto alla Fanno si ricavano il numero di Mach all'uscita del condotto ed il relativo rapporto $4fL^*/D_e$.

Quindi, il problema è, di fatto, risolto perché si può risalire mediante la:

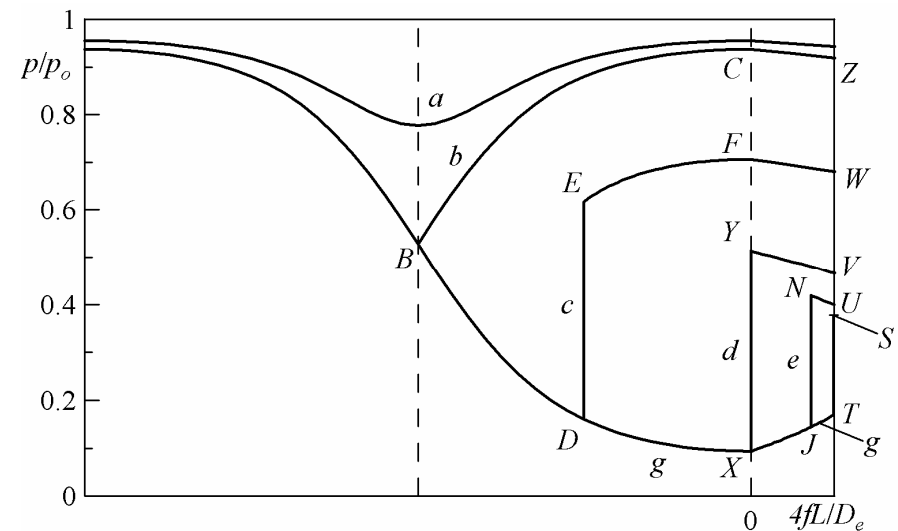
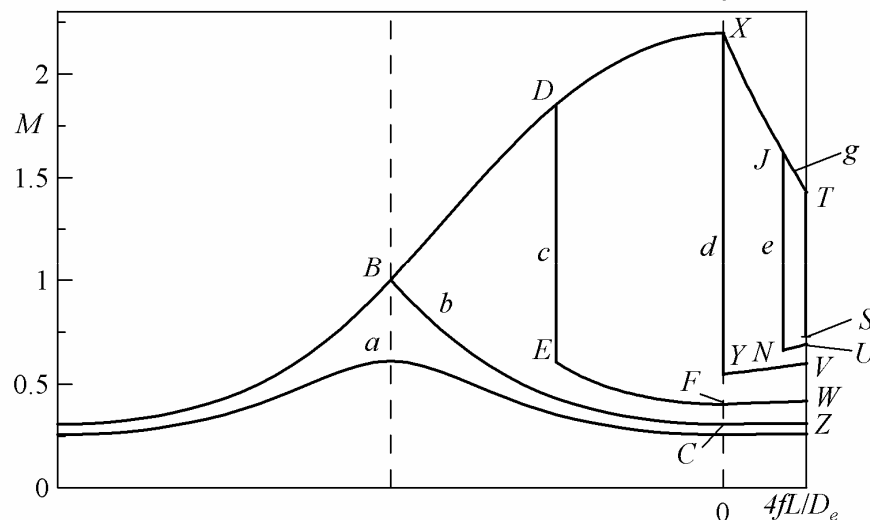
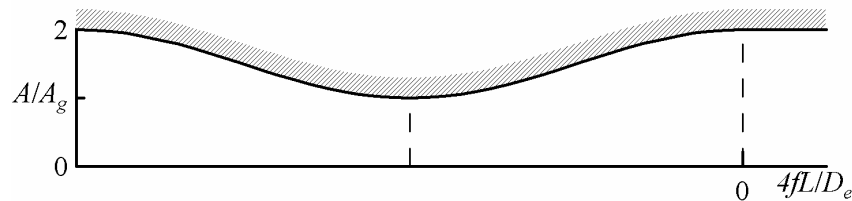
$$4f \frac{L_{12}}{D_e} = 4f \frac{L_1^*}{D_e} - 4f \frac{L_2^*}{D_e}$$

al numero di Mach all'uscita dell'ugello e così via.



Dal grafico a destra si identificano ***cinque diversi regimi di funzionamento***:

- Per $p_Z < p_a < p_o$, il funzionamento del sistema è tutto subsonico.
- Per $p_V < p_a < p_Z$, si verifica un'onda d'urto normale nel divergente.
- Per $p_S < p_a < p_V$, si ha un'onda d'urto normale nel condotto a sezione costante.
- Per $p_T < p_a < p_S$, si genera un'onda d'urto obliqua allo sbocco del condotto.
- Infine, per $0 < p_a < p_T$, si ha un ventaglio d'espansione allo sbocco del condotto.

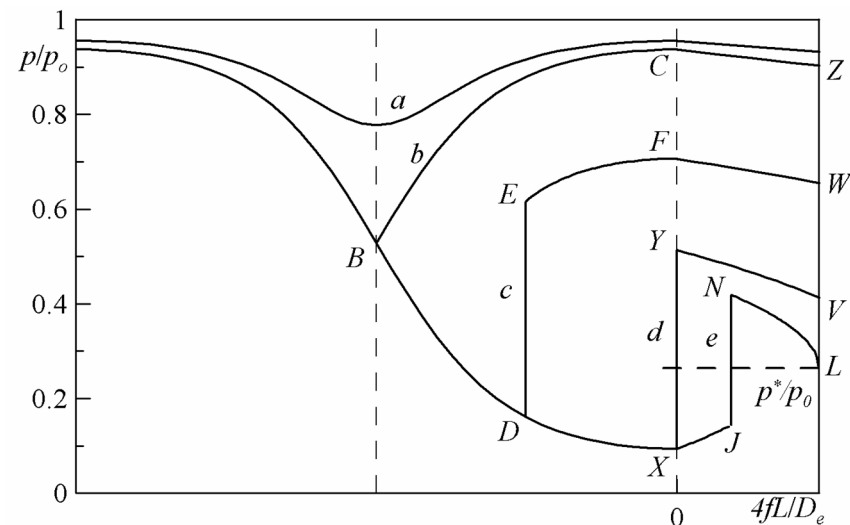
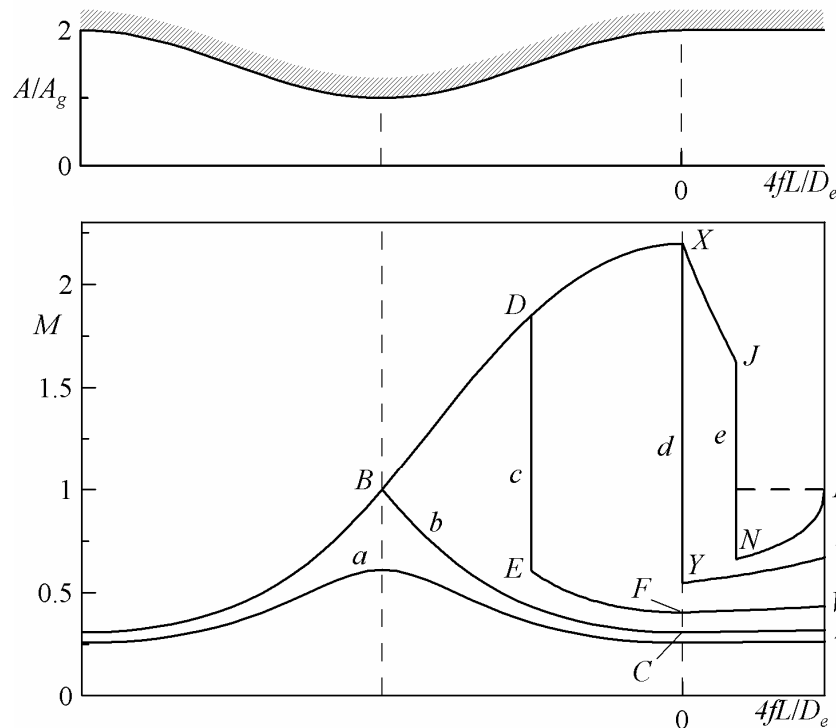


Si supponga un condotto con una lunghezza maggiore di quella critica supersonica e minore di quella critica con onda d'urto all'uscita dell'ugello ($L_3^* < L < L_2^*$).

Diversamente da quanto avveniva prima, in questo caso **non si può più avere un efflusso supersonico nella sezione d'uscita del condotto** e, quindi, la presenza, ivi, di onde d'urto oblique.

Infatti, se la pressione ambiente è inferiore a quella critica, il fluido segue la curva supersonica $BDXJNL$ con un'onda d'urto nel condotto (da J a N) e il tratto subsonico che, partendo da N , conduce alle condizioni critiche (punto L).

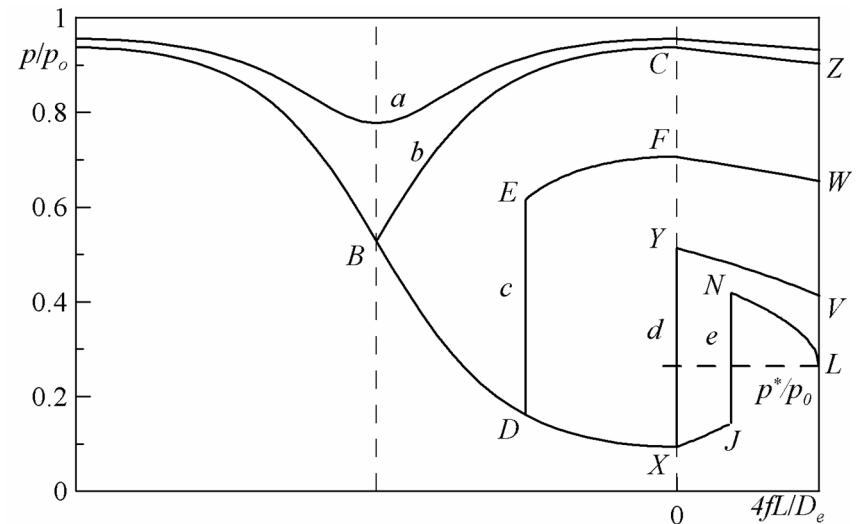
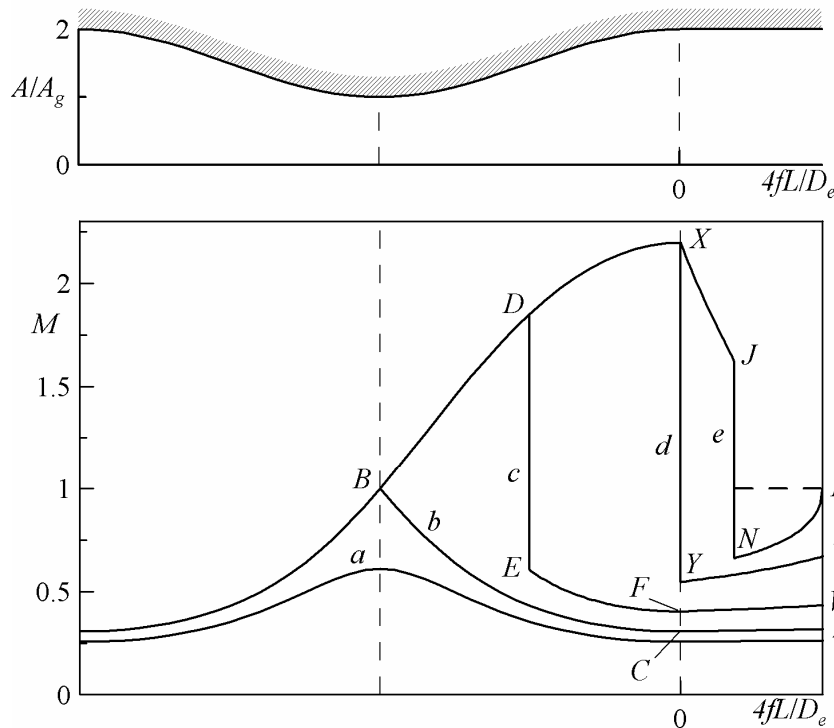
Infine, un ventaglio d'espansione adatta la pressione al di fuori del condotto.



Per pressione ambiente crescente, l'onda d'urto prima risale il condotto portandosi fino alla sezione d'uscita dell'ugello (per $p_a = p_V$) e, in seguito, risale il divergente dell'ugello.

Quando la p_a è uguale al valore della pressione nel punto Z, l'onda si porta nella gola dell'ugello dove degenera in un'onda di Mach.

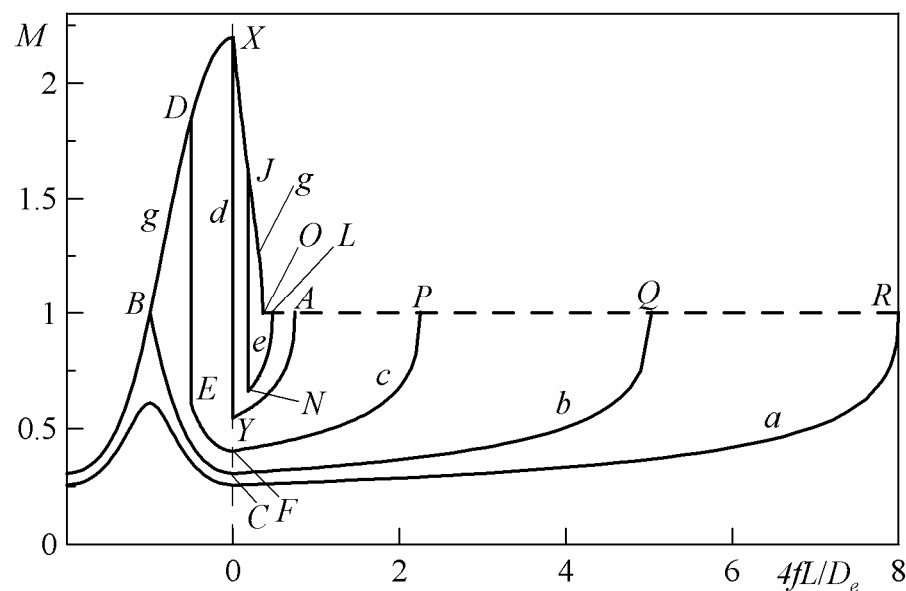
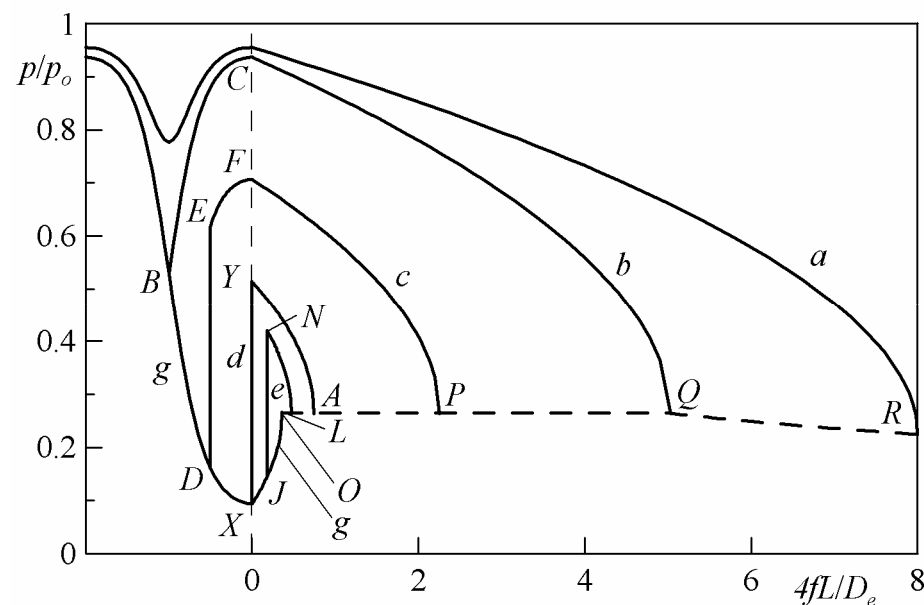
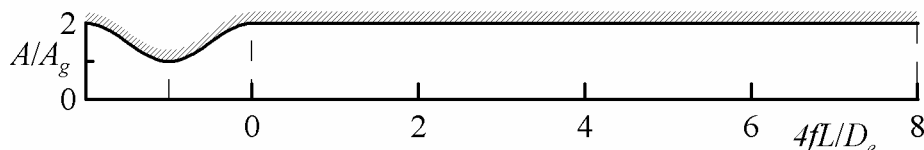
Un successivo aumento della pressione ambiente provoca, come nel caso precedente, un moto subsonico in tutto il sistema.



Analogamente, se la lunghezza del condotto è compresa fra quella critica con onda d'urto nella sezione d'uscita dell'ugello e quella critica relativa a moto tutto subsonico ma strozzato nella gola dell'ugello ($L_2^* < L < L_1^*$), rispetto al caso precedente, non si può più avere un'onda d'urto nel condotto.

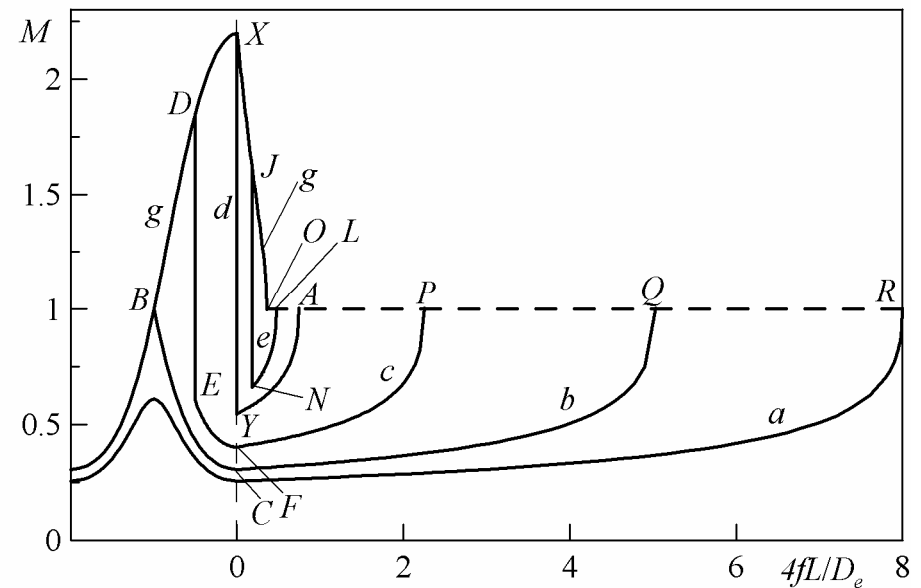
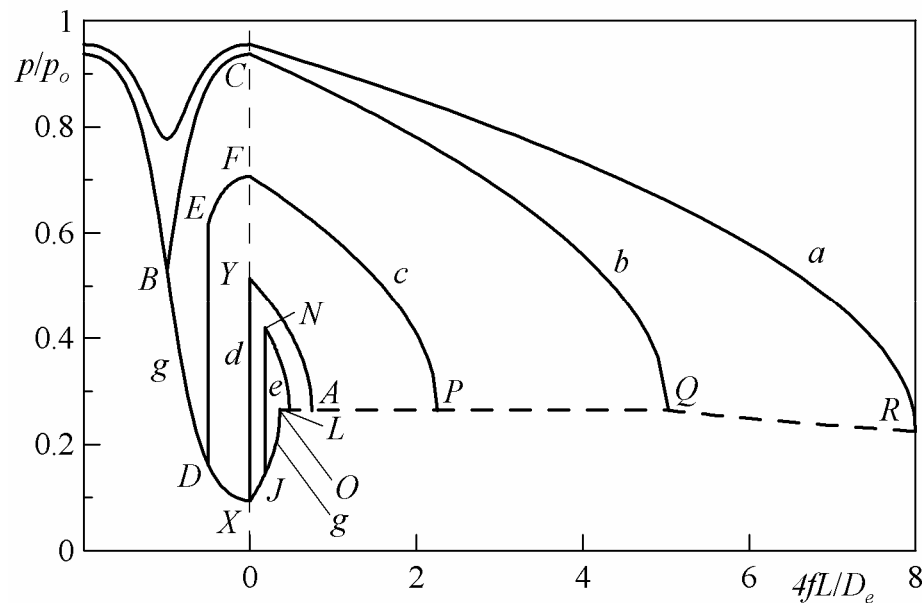
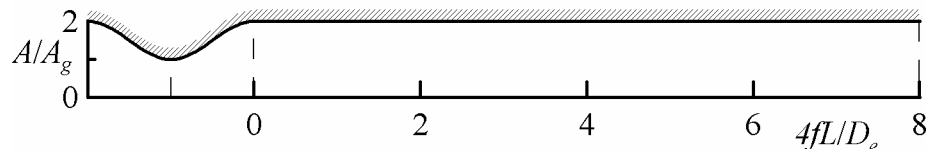
Infatti, se la pressione ambiente è inferiore a quella critica, il moto si strozza anche all'uscita del condotto e nel funzionamento si genera un'onda d'urto nel divergente dell'ugello (seguendo, ad esempio, la curva *BDEFP*).

All'aumentare della pressione ambiente, l'onda d'urto prima risale nel divergente dell'ugello sino alla gola e un ulteriore aumento della pressione provoca moto subsonico in tutto il sistema.



Infine, se la lunghezza del condotto risulta maggiore di quella critica relativa a un moto tutto subsonico ma strozzato nella gola dell'ugello ($L > L_1^*$), come già detto in precedenza, il comportamento è analogo a quello che si ha nel sistema descritto nel caso di un condotto con attrito collegato ad un serbatoio mediante un ugello semplicemente convergente.

Il fatto che l'ugello sia convergente divergente non ha alcuna influenza sul moto che si stabilisce a valle.



MOTO ISOTERMO

Quasi tutti i testi di gasdinamica introducono questo tipo di moto sostenendo che esso modella con buona accuratezza il moto dei gas nei **metanodotti**.

Essendo questi ultimi generalmente interrati, **la temperatura della loro parete è quasi costante**, il che permetterebbe di ipotizzare una temperatura del gas anch'essa costante. Ciò, tuttavia, non risulta verosimile perché, come si vedrà poi, **la temperatura di riferimento negli scambi termici**, che potrebbero essere qui importanti, **è la temperatura di parete adiabatica del fluido e non quella statica**.

Di fatto, il moto che meglio modella questa situazione è quello alla Fanno.

Comunque, il **moto isoterma è governato dalle seguenti equazioni**:

$$G = \rho V = \text{cost}$$
$$I_2 - I_1 = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{L}{D_e}$$
$$T = \text{cost}$$

Le prime due coincidono con l'equazione di conservazione della massa e del bilancio della quantità di moto del moto alla Fanno, mentre la terza è la **nuova equazione di conservazione dell'energia** che, per un gas almeno perfetto, si può scrivere come:

$$h = \text{cost}$$

Le **forme differenziali delle equazioni** scritte in precedenza sono rispettivamente:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$dI = dp + \rho V dV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e}$$

$$dT = dh = 0$$

La prima conduce ancora alla relazione già ricavata in precedenza per il moto di Fanno:

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{dV}{V}$$

e, dall'equazione di stato per un gas perfetto e dalle:

$$M = \frac{V}{a_L} \quad ; \quad a_L^2 = - v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \gamma RT$$

tenendo conto che il processo è isoterma, si ottiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} = - \frac{dV}{V} = - \frac{dM}{M}$$

L'equazione del bilancio della quantità di moto:

$$dI = dp + \rho V dV = -4f \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{dx}{D_e}$$

può essere ancora scritta nella stessa forma derivata per il moto alla Fanno:

$$\frac{dp}{\rho V^2} + \frac{dV}{V} = -2f \frac{dx}{D_e}$$

per cui, sostituendo in essa la

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V} = -\frac{dM}{M}$$

si ricava:

$$dp \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\rho V^2} \right) = 2f \frac{dx}{D_e}$$

la quale mostra che dp/dx **tende all'infinito per:**

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\rho V^2}$$

e, quindi, **quando la velocità del fluido raggiunge il valore:**

$$V = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \frac{a}{\sqrt{\gamma}} \quad \rightarrow \quad M = 1/\sqrt{\gamma}$$

$$V = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \frac{a}{\sqrt{\gamma}} \quad \rightarrow \quad M = 1/\sqrt{\gamma}$$

cioè quando ***il numero di Mach riferito alla velocità del suono newtoniana, e non alla laplaciana, assume valore unitario.***

È chiaro che, avendo ipotizzato il moto isoterma, la velocità newtoniana (calcolata a temperatura costante) viene ad assumere un ruolo fondamentale in questo modello di moto.

Le condizioni indicate dalla precedente relazione sono quelle per le quali il moto si strozza ($dp/dx \rightarrow \infty$). Quindi, nel moto isoterma ***il valore del numero di Mach:***

$$M = 1/\sqrt{\gamma}$$

assume il ruolo che ha il valore unitario nel moto alla Fanno e rappresenta ***le (nuove) condizioni critiche.***

Sostituendo la:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V} = -\frac{dM}{M}$$

nella:

$$dp \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\rho V^2} \right) = 2f \frac{dx}{D_e}$$

si ottiene la relazione:

$$\frac{dM}{M} \frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} = \frac{2f}{D_e} dx$$

$$\frac{dM}{M} \frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} = \frac{2f}{D_e} dx$$

che indica un aumento del numero di Mach lungo il condotto per $M < 1/\sqrt{\gamma}$ e una diminuzione dello stesso per $M > 1/\sqrt{\gamma}$.

Anche questa relazione mostra che **la condizione:**

$$M = 1/\sqrt{\gamma}$$

corrisponde allo strozzamento del moto perché, per tale valore del numero di Mach, **la quantità dM/dx tende all'infinito**.

Attenzione: Solo limitatamente a questa sezione sarà utilizzato l'apice asterisco per indicare lo stato del fluido relativo a:

$$M = 1/\sqrt{\gamma}$$

e non, come fatto sinora, quelle per $M = 1$.

Ad esempio, **M^* non è la quantità già definita dalla relazione:**

$$M^* = \frac{V}{a^*}$$

bensì, in questo contesto, si ha:

$$M^* = 1/\sqrt{\gamma}$$

e ancora:

$$p^* = p (M = 1/\sqrt{\gamma})$$

Con questa notazione, la:

$$G = \rho V = \text{cost}$$

conduce a:

$$\rho^* M^* = \rho M$$

e, quindi, si può pervenire ai due rapporti caratteristici tra le densità e le velocità:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} = \frac{V^*}{V}$$

Sostituendo in questa relazione l'equazione di stato per gas perfetti e tenendo conto della costanza della temperatura, si ottiene la medesima espressione per il rapporto tra le pressioni statiche:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\sqrt{\gamma} M}$$

Le ultime due relazioni ricavate sono, ovviamente, consistenti con il fatto che il moto è isoterma cioè, che la temperatura statica non varia, $T/T^* = 1$.

Tenendo conto delle:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\sqrt{\gamma M}} \quad ; \quad p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

il rapporto tra la generica pressione di ristagno e quella per $M^* = 1/\sqrt{\gamma}$ risulta pari a:

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} \left[\left(\frac{2\gamma}{3\gamma - 1} \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

L'integrazione della

$$\frac{dM}{M} \frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} = \frac{2f}{D_e} dx$$

tra $M^* = 1/\sqrt{\gamma}$ e M conduce a:

$$\frac{4fL^*}{D_e} = \frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} + \ln(\gamma M^2)$$

che si annulla per $M^* = 1/\sqrt{\gamma}$ e nella quale L^* **ha, ovviamente, il significato di lunghezza necessaria per raggiungere il Mach critico a partire dalla sezione nella quale si ha un determinato valore del numero di Mach M .**

Si ricordi che la temperatura di ristagno T_o è data da:

$$T_o = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Dunque, in questo moto, **la temperatura di ristagno cambia solo per la variazione del numero di Mach in quanto la T è costante per definizione.**

La variazione di T_o , a sua volta, può essere dovuta solo ad uno scambio di calore con l'ambiente perché il fluido non scambia lavoro.

Differenziando la precedente relazione e tenendo conto della costanza della temperatura statica, si ha la relazione:

$$dT_o = (\gamma - 1) T M dM$$

che, sostituita nell'equazione di conservazione dell'energia:

$$h_2 + V_2^2 / 2 + gz_2 + \ell = h_1 + V_1^2 / 2 + gz_1 + q$$

scritta in forma differenziale e ricordando che:

$$c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$$

dà luogo a:

$$dq = c_p dT_o = \gamma R T M dM$$

dove q rappresenta sempre l'energia scambiata nel modo calore dall'unità di massa del fluido.

Sostituendo la:

$$\frac{dM}{M} \frac{1 - \gamma M^2}{\gamma M^2} = \frac{2f}{D_e} dx$$

nella:

$$dq = c_p dT_o = \gamma R T M dM$$

si ottiene infine:

$$dq = \frac{2f \gamma^2 R T M^4}{D_e (1 - \gamma M^2)} dx$$

Per la positività di f , questa relazione mostra che il segno di dq dipende dal valore di M e che, per $M \rightarrow 1/\sqrt{\gamma}$, la quantità $dq/dx \rightarrow \pm \infty$, così come avviene per la quantità dp/dx .

Poiché la precedente relazione indica che $dq/dx > 0$ per $M < 1/\sqrt{\gamma}$ e viceversa, la:

$$dq = c_p dT_o = \gamma R T M dM$$

impone che **il moto si deve muovere, in ogni caso, verso $M = 1/\sqrt{\gamma}$** . Ciò testimonia, ancora una volta, che questo valore del numero di Mach rappresenta quello critico.

Per quanto riguarda l'**applicabilità del modello di moto isoterma a situazioni in cui la temperatura di parete del condotto è costante**, come nel caso dei metanodotti, occorre innanzi tutto osservare che, in correnti **non iposoniche** ($M > 0.2-0.3$), il **flusso termico convettivo** (quantità di calore scambiata per unità di superficie e per unità di tempo per convezione) **da una corrente ad una parete** è governato dalla legge di Newton così modificata:

$$\dot{q} = \alpha(T_p - T_{pa})$$

dove α è il **coefficiente di scambio termico convettivo** (non va confuso con il coefficiente di diffusività termica), T_p la **temperatura di parete** e T_{pa} la **temperatura di parete adiabatica** (temperatura alla quale si trova la parete quando $\dot{q} = 0$). Quest'ultima è ricavabile dalla relazione:

$$T_{pa} = T + r \frac{V^2}{2c_p} = T \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

nella quale la quantità adimensionale r è chiamata **fattore di recupero**.

Questa relazione mostra che, **quando r ha valore unitario, la temperatura di parete adiabatica coincide con quella di ristagno**. Inoltre, **per un moto iposonico** ($M \ll 1$), **la temperatura di parete adiabatica e quella statica coincidono** per cui si recupera la classica legge di Newton sulla convezione.

Il fattore di recupero r è soprattutto funzione del numero di Prandtl e, in moto turbolento quale quello che s'incontra nei metanodotti, r può essere posto in sostanza uguale alla **radice cubica del numero di Prandtl**.

Per il metano a temperatura ambiente T_a , il numero di Prandtl risulta pari a circa 0.73 per cui si ricava: $r = 0.90$.

Tenendo conto del fatto che (sempre per il metano a T_a) $\gamma = 1.30$, il numero di Mach critico per il moto isoterma risulta uguale a $M^* = 1/\sqrt{\gamma} = 0.877$.

Si consideri un metanodotto la cui temperatura di parete T_p sia pari a 293K. Qualora inizialmente la corrente si trovasse in regime iposonico, si otterrebbe:

$$T_o \cong T \cong T_p = 293K$$

Se, poi, la corrente dovesse raggiungere il numero di Mach critico, $M^* = 0.877$, a questo valore del numero di Mach, **ipotizzando che esso sia raggiunto con un moto isoterma**, e cioè sempre con $T = 293K$, si otterrebbe:

$$T_o = 293 \left[1 + 0.15 \times (0.877)^2 \right] = 326.8K$$

$$T_{pa} = 293 \left[1 + 0.15 \times 0.9 \times (0.877)^2 \right] = 323.4K$$

La conclusione sarebbe che in prossimità di M^* , ***pur essendo la temperatura di parete adiabatica del fluido superiore di circa 30K alla temperatura di parete ($T_p = 293K$)***, la relazione:

$$dq = \frac{2f \gamma^2 R T M^4}{D_e (1 - \gamma M^2)} dx$$

e, comunque, l'aumento della T_o ***prevederebbero che il calore debba fluire dalla parete al fluido***. E' chiaro che tutto ciò risulta non verosimile.

Se, per le stesse condizioni iniziali, si utilizzasse, invece, il modello di Fanno che prevede $T_o = T_p = 293K = \text{cost}$, per lo stesso numero di Mach si otterrebbe:

$$T = 293 / [1 + 0.15 \times (0.877)^2] = 262.7K$$

$$T_{pa} = 262.7 [1 + 0.15 \times 0.9 \times (0.877)^2] = 290.0K$$

cioè ***la temperatura di parete adiabatica, a quest'elevato valore di M , sarebbe inferiore di soli 3 gradi a quella della parete del condotto***.

Questa piccola differenza di temperatura, in base alla:

$$\dot{q} = \alpha(T_p - T_{pa})$$

potrebbe ampiamente giustificare l'ipotesi di adiabaticità che è necessario formulare per poter applicare il moto alla Fanno al caso dei metanodotti.

D'altronde, il numero di Eckert:

$$Ec = \frac{V_r^2}{c_{pr} \Delta T_r}$$

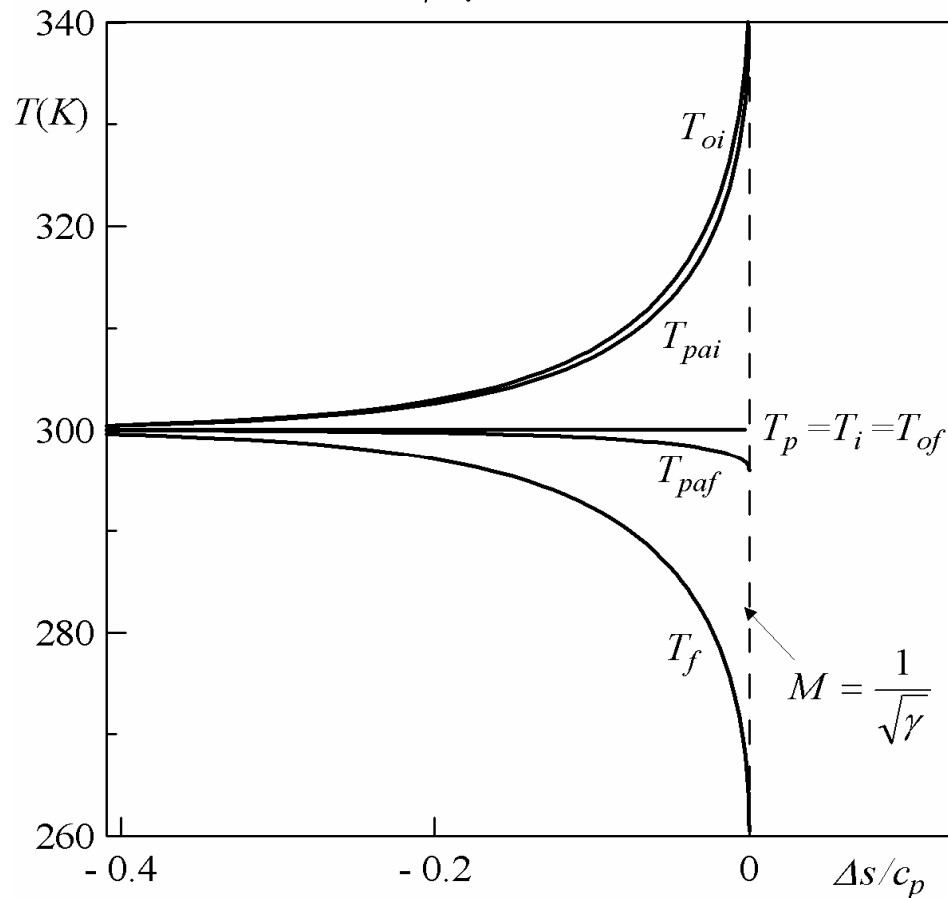
risulterebbe molto grande (perché ΔT_r è molto piccolo).

Questo fatto consentirebbe senz'altro di trascurare il flusso termico alla parete nella:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(u + \frac{V^2}{2} + |\underline{g}|z \right) dV + \int_D \rho \left(u + \frac{V^2}{2} + |\underline{g}|z \right) V_n dD + \\ + \int_D \underline{J}_q \cdot \underline{n} dD + \int_D p V_n dD - \int_D \left(\underline{\tau}_d \cdot \underline{V} \right) \cdot \underline{n} dD = 0 \end{aligned}$$

Quanto sopra riportato è tanto più vero a più bassi numeri di Mach come deducibile dalla figura, in cui, per il caso particolare di $T_p = 300K$, sono stati riportati gli andamenti delle temperature statiche, di ristagno e di parete adiabatica per i due tipi di moto fino a $M^* = 1/\sqrt{\gamma}$, sempre nel caso del metano.

Nella figura il pedice *i* si riferisce al moto isoterma e quello *f* al moto alla Fanno; inoltre, la variazione d'entropia è stata valutata a partire dallo stato per il quale $M^* = 1/\sqrt{\gamma}$.



Dalla figura si nota che la T_{paf} è molto più vicina alla temperatura costante di parete T_p che non la T_{pai} .

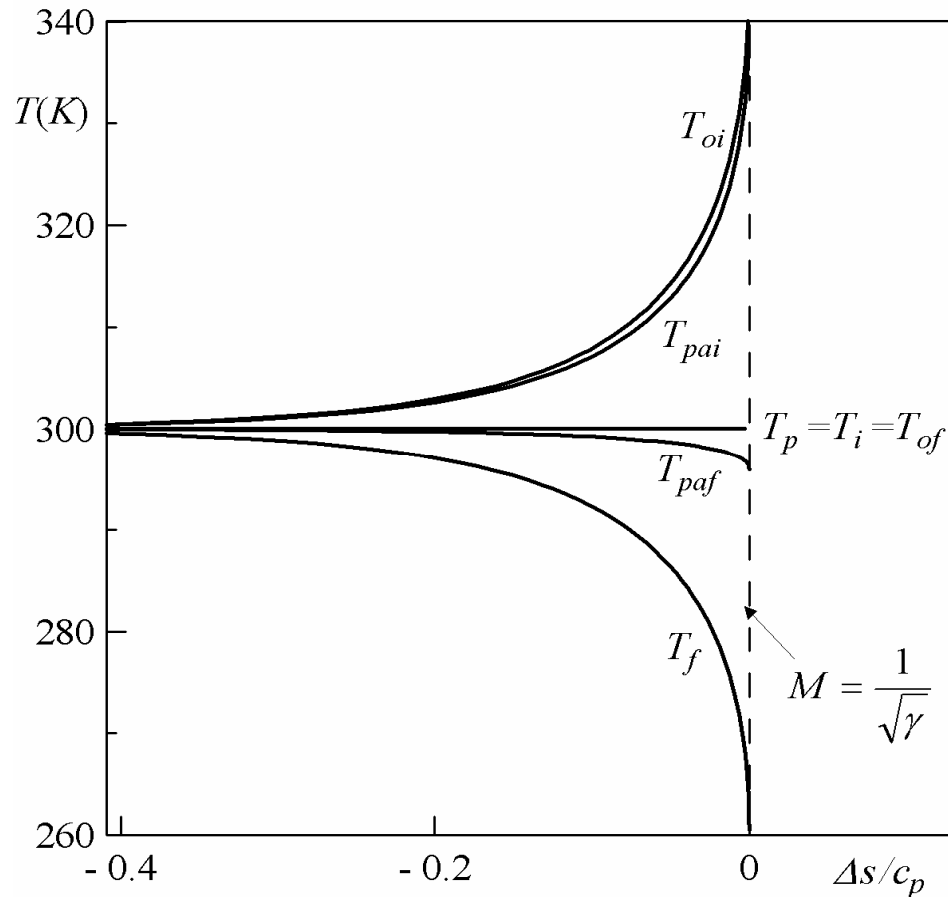
La figura mostra, inoltre, che nel moto isoterma la T_{oi} aumenta (cioè il fluido dovrebbe ricevere energia dalla parete), mentre la condizione $T_{pai} > T_p$ conduce, per la

$$\dot{q} = \alpha(T_p - T_{pa})$$

ad un flusso termico orientato dal fluido alla parete.

Si può concludere che, poiché lo scambio termico è legato alla temperatura di parete adiabatica T_{pa} e, poiché quest'ultima è molto prossima a quella di ristagno (per i gas Pr è d'ordine di grandezza unitario), il moto compressibile in un condotto a temperatura di parete costante è sicuramente meglio approssimato dal modello di moto alla Fanno, piuttosto che da quello isoterma.

Occorre anche esplicitamente osservare che, nei metanodotti, non si raggiungono numeri di Mach prossimi a $1/\sqrt{\gamma}$, ma decisamente più bassi.



La figura mostra che, anche a numeri di Mach inferiori (e cioè muovendosi verso sinistra), **il modello di moto di Fanno risulta migliore.**

Infine, va, comunque, rilevato che, se il numero di Mach alla fine del condotto (prima dell'utilizzazione, o di un'altra stazione di pompaggio) non è molto elevato (cioè, $M_2 < 0.2$), **i due modelli di moto conducono in pratica agli stessi risultati.**

Questo è, certamente, il motivo che ha consentito la sopravvivenza del moto isoterma per il passato.