ADIMENSIONALIZZAZIONE

Il processo di adimensionalizzazione di una generica grandezza G viene effettuato ponendo la grandezza nella forma:

$$G = G_r G^*$$

ove G_r è un ***valore di riferimento***, ovvero rappresenta l'***unità di misura della grandezza*** (***dimensionale***), e G^* rappresenta la ***misura*** della grandezza stessa (***adimensionale***).

Nel seguito, si supporrà di scegliere opportunamente la quantità in maniera tale che sia G^* = O(1) e cioè in maniera tale che ***la misura risulti di ordine di grandezza unitario.***

Ad es., l'equazione di conservazione della massa è la seguente:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \int_A \rho \, \underline{V} \cdot \underline{n} \, dA = 0 \qquad \boxed{A = \text{sezioni permeabili}}$$

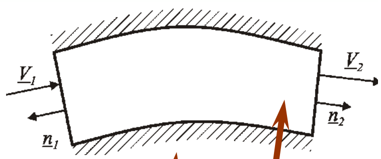
Introducendo le grandezze:

$$\rho = \rho_r \rho^* \; ; \; \mathcal{V} = \mathcal{V}_r \, \mathcal{V}^* \; ; \; t = t_r t^* \; ; \; \underline{V} = V_r \underline{V}^* \; ; \; A = A_r A^*$$

poiché ***le unità di misura sono costanti e le sole misure variabili***, si ha:

$$\frac{\rho_r \mathcal{V}_r}{t_r} \frac{d}{dt^*}\int_{\mathcal{V}^*} \rho^* d\mathcal{V}^* + \rho_r V_r A_r \int_{A^*} \rho^* \underline{V}^* \cdot \underline{n} \, dA^* = 0$$

ADIMENSIONALIZZAZIONE



Il raggruppamento adimensionale:

$$Sr = \frac{\mathcal{V}_r}{t_r V_r A_r} \longrightarrow \frac{\mathcal{V}_r}{V_r A_r t_r} \frac{d}{dt^*}\int_{\mathcal{V}^*} \rho^* d\mathcal{V}^* + \int_{A^*} \rho^* \underline{V}^* \cdot \underline{n} \, dA^* = 0$$

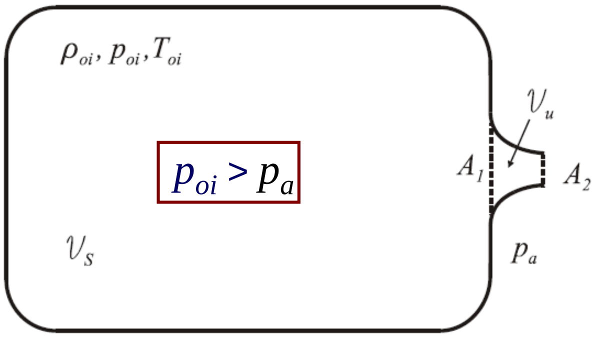
che moltiplica il termine instazionario è chiamato ***numero di Strouhal***. Esso rappresenta l'importanza relativa del termine instazionario rispetto al termine convettivo nell'equazione di conservazione della massa.

Se l'integrale di superficie è esteso a un ***dominio semplicemente connesso*** da cui entra o esce massa (una sola superficie permeabile), poiché entrambi i termini che contengono le grandezze asteriscate sono di O(1), anche il ***numero di Strouhal è di ordine di grandezza unitario*** e non può essere altrimenti perché l'equazione consta di due termini uguali e di segno opposto.

In tal caso, bisognerà tenere conto di tutti e due i termini e, se la scelta delle grandezze di riferimento è stata corretta, il fatto che Sr = O(1) permette, ad esempio, ***la stima del tempo caratteristico del fenomeno in esame***.

Se invece l'integrale di superficie è esteso a ***due diversi domini permeabili***, dei quali in uno entra massa e dall'altro ne esce, e se il numero di Strouhal è sufficientemente basso, ***il termine instazionario potrà essere trascurato rispetto agli altri due termini***.

MOTI QUASI STAZIONARI



Si consideri ora il sistema rappresentato in figura costituito da un ***serbatoio***, in cui è contenuto un ***gas inizialmente alla pressione p_{oi}***, collegato ad un ***ugello convergente***.
In seguito all'apertura di una valvola, l'ugello scaricherà nell'ambiente a p_a.
Nel processo di svuotamento del serbatoio, la pressione al suo interno dal valore iniziale p_{oi} si porterà progressivamente alla p_a.

Si supponga ora per semplicità che, pur essendo p_{oi} senz'altro maggiore di p_a, si abbia: $(p_{oi} - p_a)/p_a \ll 1$.

Come si vedrà, questa ipotesi, unitamente a quella di adiabaticità, consente di ritenere che il moto del fluido nell'ugello risulti ***incompressibile***, per cui ***la velocità iniziale del fluido all'uscita dell'ugello***, con l'ulteriore ipotesi di trascurabilità degli effetti viscosi, ***può essere posta pari a:***

$$V_r = V_i = \sqrt{2(p_{oi} - p_a) / \rho_{oi}}$$

Questa velocità può essere ***assunta come velocità di riferimento*** nel processo di adimensionalizzazione,

Se invece $p_{oi}/p_a \gg 1$, si vedrà che, sempre nelle ipotesi di adiabaticità e reversibilità, la ***velocità del fluido all'uscita dell'ugello*** (cioè la velocità di riferimento) ***è quella sonica*** che risulta pari a:

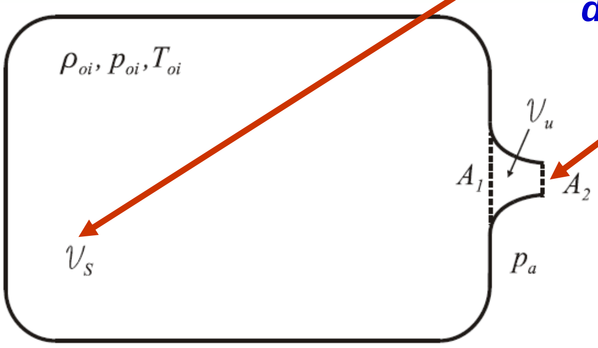
$$V_r = V_u = \sqrt{\frac{2\gamma R T_{oi}}{\gamma + 1}}$$

Scegliendo, opportunamente, anche le altre ***grandezze di riferimento*** per il processo di adimenzionalizzazione, si ottiene:

$$\rho = \rho_{oi}\rho^* \quad ; \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_S \mathcal{V}^* \quad ;$$

$$t = t_r t^* \quad ; \quad \underline{V} = V_r \underline{V}^* \quad ; \quad A = A_2 A^*$$

dove l'***unica grandezza di riferimento non nota a priori è il tempo di riferimento*** t_r.



Se invece $p_{oi}/p_a >> 1$, si vedrà che, sempre nelle ipotesi di adiabaticità e reversibilità, la ***velocità del fluido all'uscita dell'ugello*** (cioè la velocità di riferimento) ***è quella sonica*** che risulta pari a:

$$V_r = V_u = \sqrt{\frac{2\,\gamma\, RT_{oi}}{\gamma + 1}}$$

Scegliendo, opportunamente, anche le altre ***grandezze di riferimento*** per il processo di adimenzionalizzazione, si ottiene:

$$\rho = \rho_{oi}\rho^* \quad ; \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_s \mathcal{V}^* \quad ;$$
$$t = t_r t^* \quad ; \quad \underline{V} = V_r \underline{V}^* \quad ; \quad A = A_2 A^*$$

dove l'***unica grandezza di riferimento non nota a priori è il tempo di riferimento*** t_r**.**

L'equazione di conservazione della massa ***applicata a tutto il serbatoio*** diventa allora:

$$\frac{\mathcal{V}_s}{t_r V_r A_2}\frac{d}{dt^*}\int_{\mathcal{V}^*}\rho^* d\mathcal{V}^* + \int_{A^*}\rho^* V^* dA^* = 0$$

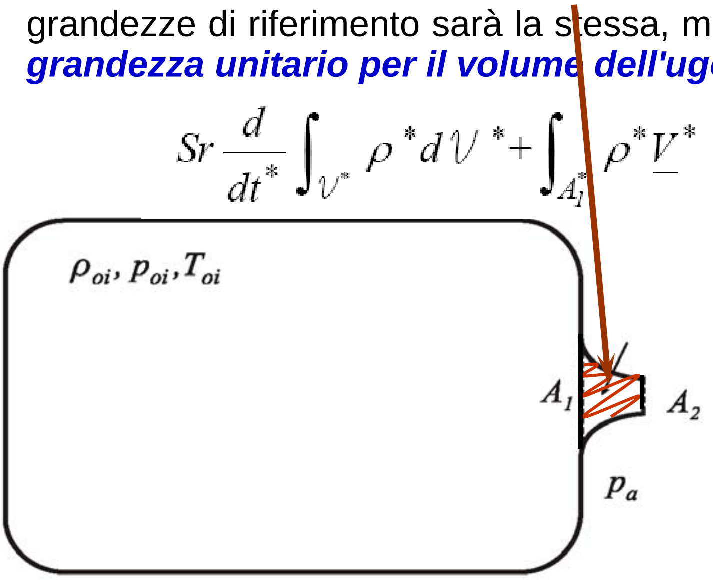
Come già detto, per la scelta delle grandezze di riferimento, il ***numero di Strouhal*** che moltiplica il primo integrale deve risultare di ***ordine di grandezza unitario***. Ciò permette di calcolare il ***tempo di riferimento***, ignoto a priori:

$$t_r = \mathcal{V}_s / V_r A_2$$

Il tempo di riferimento t_r rappresenta, ovviamente, ***una stima del tempo di svuotamento del serbatoio.***

Con riferimento allo stesso caso, se si va ora a considerare come ***volume di controllo quello relativo al solo ugello***, qui indicato con $\mathcal{V}_u$, la scelta delle grandezze di riferimento sarà la stessa, ma ***per avere una misura di ordine di grandezza unitario per il volume dell'ugello*** **dovrà essere** $\mathcal{V} = \mathcal{V}_u \mathcal{V}^*$**.**

$$Sr\frac{d}{dt^*}\int_{\mathcal{V}^*}\rho^* d\mathcal{V}^* + \int_{A_1^*}\rho^* \underline{V}^* \cdot \underline{n}\, dA^* + \int_{A_2^*}\rho^* \underline{V}^* \cdot \underline{n}\, dA^* = 0$$



Come già detto, per la scelta delle grandezze di riferimento, il ***numero di Strouhal*** che moltiplica il primo integrale deve risultare di ***ordine di grandezza unitario***. Ciò permette di calcolare il ***tempo di riferimento***, ignoto a priori:

$$t_r = \mathcal{V}_s \,/\, V_r A_2$$

Il tempo di riferimento t_r rappresenta, ovviamente, ***una stima del tempo di svuotamento del serbatoio***.

Con riferimento allo stesso caso, se si va ora a considerare come ***volume di controllo quello relativo al solo ugello***, qui indicato con $\mathcal{V}_u$, la scelta delle grandezze di riferimento sarà la stessa, ma ***per avere una misura di ordine di grandezza unitario per il volume dell'ugello*** **dovrà essere** $\mathcal{V} = \mathcal{V}_u \mathcal{V}^*$**.**

$$\cancel{Sr \frac{d}{dt^*}\int_{\mathcal{V}^*} \rho^* d\mathcal{V}^*} + \int_{A_1^*} \rho^* \underline{V}^* \cdot \underline{n}\, dA^* + \int_{A_2^*} \rho^* \underline{V}^* \cdot \underline{n}\, dA^* = 0$$

Applicando nuovamente l'equazione di conservazione della massa (che ora sarà costituita da ***tre termini***) e utilizzando, nel calcolo del numero di Strouhal, il tempo di riferimento appena stimato (il fenomeno è sempre lo stesso), si ottiene:

$$Sr = \frac{\mathcal{V}_u}{t_r V_r A_2} = \frac{\mathcal{V}_u}{\mathcal{V}_s}$$

Se il volume dell'ugello è molto piccolo rispetto a quello del serbatoio, sarà: $Sr \ll 1$***, per cui si può trascurare il termine instazionario***.

CONCLUSIONI

È quindi possibile ***in questo ultimo caso*** (e ***non nel precedente*** che includeva nel volume di controllo anche quello del serbatoio) ***trascurare il termine instazionario***, in quanto ***il coefficiente moltiplicativo del termine variabile nel tempo*** (che è di ordine di grandezza unitario) ***risulta trascurabile rispetto all'unità.***

In questo esempio, ***pur essendo lo svuotamento del serbatoio un fenomeno tipicamente instazionario*** (il fluido che esce è uguale a quello che manca nel serbatoio), ***il moto nel solo ugello può essere considerato, istante per istante, come stazionario***.

Si parlerà dunque di ***moto quasi stazionario all'interno dell'ugello***.

In questo caso, occorrerà, beninteso, tenere conto della variabilità delle diverse grandezze termofluidodinamiche nel tempo.

In un moto ***stazionario propriamente detto***, invece, tutte le grandezze termofluidodinamiche resteranno ***assolutamente costanti*** nel tempo.

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELL'EQ. DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \underline{V} d\mathcal{V} + \int_A \rho \underline{V} V_n dA + \int_A p\underline{n}\, dA - \int_A \underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{n}\, dA = \int_{\mathcal{V}} \rho\, \underline{g} d\mathcal{V}$$

Operando in maniera analoga a quanto fatto precedentemente:

$$\frac{\rho_r V_r \mathcal{V}_r}{t_r}\frac{d}{dt^*}\int_{\mathcal{V}^*} \rho^* \underline{V}^* d\mathcal{V}^* + \rho_r V_r^2 A_r \int_{A^*} \rho^* \underline{V}^* V_n^* dA^* +$$

$$+ p_r A_r \int_{A^*} p^* \underline{n}\, dA^* - \tau_r A_r \int_{A^*} \underline{\underline{\tau}}_d^* \cdot \underline{n}\, dA^* =$$

$$= \rho_r g_r \mathcal{V}_r \int_{\mathcal{V}^*} \rho^* \underline{g}^* d\mathcal{V}^*$$

Dove si è assunta inizialmente la stessa A_r per tutti gli integrali di superficie, quando questo non è vero dovranno essere apportate le dovute correzioni.

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELL'EQ. DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{\rho_r V_r \mathcal{V}_r}{t_r}\frac{d}{dt^*}\int_{\mathcal{V}^*} \rho^* \underline{V}^* d\mathcal{V}^* + \rho_r V_r^2 A_r \int_{A^*} \rho^* \underline{V}^* V_n^* dA^* +$$

$$+ p_r A_r \int_{A^*} p^* \underline{n}\, dA^* - \tau_r A_r \int_{A^*} \underline{\underline{\tau}}_d^* \cdot \underline{n}\, dA^* =$$

$$= \rho_r g_r \mathcal{V}_r \int_{\mathcal{V}^*} \rho^* \underline{g}^* d\mathcal{V}^*$$

Dividendo per il termine convettivo di riferimento $\rho_r V_r^2 A_r$ si hanno i seguenti raggruppamenti adimensionali

$$Sr = \frac{\mathcal{V}_r}{t_r V_r A_r} \quad ; \quad Eu = \frac{p_r}{\rho_r V_r^2}$$

$$\frac{f}{2} = \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} \quad ; \quad \frac{1}{Fr} = \frac{g_r \mathcal{V}_r}{V_r^2 A_r}$$

Sr è ancora il *numero di Strouhal*, *Eu* è il *numero di Eulero*, *f* è *il coefficiente di attrito di Fanning* e *Fr* è *il numero di Froude*.

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELL'EQ. DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$Eu = \frac{p_r}{\rho_r V_r^2}$$

Il numero di Eulero rappresenta l'importanza relativa del flusso diffusivo di quantità di moto (nella sua parte reversibile) rispetto al flusso convettivo

$$\frac{f}{2} = \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2}$$

Il coefficiente di attrito rappresenta l'importanza relativa delle forze viscose rispetto a quelle di inerzia *

$$\frac{1}{Fr} = \frac{g_r \mathcal{V}_r}{V_r^2 A_r}$$

Il numero di Froude rappresenta l'importanza relativa delle forze di inerzia rispetto a quelle di massa

* Per semplicità nella determinazione del coefficiente di attrito è stato supposto che le due aree di riferimento, una (la permeabile, e.g. la sezione di passaggio in un condotto) sulla quale è integrata la quantità $\rho \underline{V} V_n$ e l'altra (impermeabile, e.g. le pareti del condotto) sulla quale è integrata la quantità $\underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{n}$ siano dello stesso ordine di grandezza,

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELL'EQ. DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}} \rho \underline{V} d\mathcal{V} + \int_A \rho \underline{V} V_n dA + \int_A p\underline{n}\, dA - \int_A \underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{n}\, dA = \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{g} d\mathcal{V}$$

In un condotto di lunghezza $\mathcal{L}_r$, perimetro $\mathcal{P}_r$ ed area di passaggio A_r, il rapporto tra le forze viscose (presenti essenzialmente sulla superficie laterale del condotto) e le forze d'inerzia (presenti solo sulla superficie permeabile del condotto) risulta pari a:

$$(\mathcal{P}_r \mathcal{L}_r \tau_r)/\left(A_r \rho_r V_r^2\right) = \frac{\mathcal{P}_r \mathcal{L}_r}{A_r} \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = 4\frac{\mathcal{L}_r}{D_r}\frac{f}{2}$$

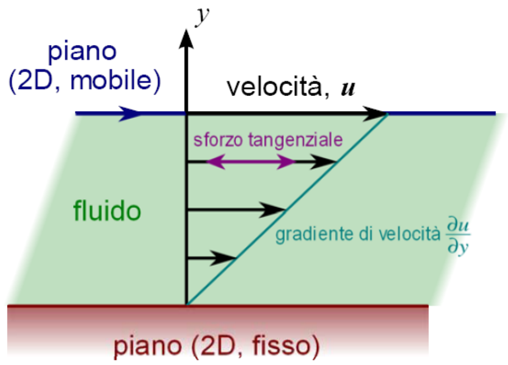
$D_r = 4A_r / \mathcal{P}_r$ — *diametro idraulico* (*o equivalente*) di riferimento della sezione

Ne consegue che ad esempio, per valori del coefficiente di attrito molto bassi, è possibile trascurare gli sforzi viscosi nell'equazione del bilancio della quantità di moto solo se il rapporto $\mathcal{L}_r / D_r$ non risulta molto grande e cioè se il prodotto tra i due resta piccolo.

ADIMENSIONALIZZAZIONE DELL'EQ. DEL BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Ricordando la legge di Newton:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



lo sforzo tangenziale di riferimento può spesso essere scritto come:

$$\tau_r = \frac{\mu_r V_r}{L_r}$$

$$\frac{f}{2} = \frac{\tau_r}{\rho_r V_r^2} = \frac{\mu_r V_r}{\rho_r V_r^2 L_r} = \frac{1}{Re} \quad ; \qquad Re = \frac{\rho_r V_r L_r}{\mu_r}$$

dove *Re* rappresenta il ben noto *numero di Reynolds*

Ovviamente, nei condotti se la quantità $\mathcal{L}_r / (Re\, D_r) << 1$

ancora una volta si possono trascurare le forze viscose.

MOTI QUASI UNIDIMENSIONALI

Nei ***moti quasi unidimensionali*** si ipotizza la ***costanza del valore di tutte le grandezze termofluidodinamiche su ciascuna superficie permeabile appartenente alla superficie esterna che delimita il volume di controllo***.

In generale, nei moti esaminati nel seguito, ***non si terrà conto delle forze di massa*** (in particolare di quelle dovute alla ***gravità***) e, di conseguenza, dell'***energia potenziale gravitazionale***.

Ciò è possibile se ***il numero di Froude è abbastanza elevato***.

$$Fr = \frac{V_r^2}{g_r L_r} >> 1$$

Pur essendo il numero di Froude Fr ***indipendente dalla densità del fluido***, **nel caso di moto di gas** ***e per le situazioni qui di interesse, esso è sufficientemente elevato,*** così che ***si possono trascurare i termini gravitazionali nelle equazioni del bilancio della quantità di moto e dell'energia***.

Ciò è dovuto al fatto che, ***a parità di differenza di pressione***, ***le velocità che si raggiungono nel moto dei gas sono maggiori di quelle raggiungibili nel moto di un liquido,*** a causa della loro minore densità.

MOTI QUASI UNIDIMENSIONALI

Ad esempio, ***nell'ipotesi di moto incompressibile, adiabatico e non viscoso***, come già visto, si può porre $V_r^2 = 2\Delta p_r / \rho_r$, quindi:

$$Fr = \frac{V_r^2}{g_r L_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Fr = \frac{2\Delta p_r}{\rho_r g_r L_r}}$$

e, cioè, ***a parità di altre condizioni*** (in particolare, a parità di differenza di pressione)***, il numero di Froude risulta più alto quando diminuisce la densità, come nel caso del gas.***

Va fatto, comunque, esplicitamente notare che ***esistono molte condizioni di moto di gas in cui i contributi gravitazionali sono determinanti*** (ad es., fenomeni di convezione naturale, moti atmosferici, etc.).

D'altra parte, ***esistono altre condizioni di moto di liquidi per le quali i contributi gravitazionali sono trascurabili*** (ad es., il moto dell'acqua in una turbina Pelton, dove le velocità possono risultare dell'ordine di centinaia di metri al secondo e il numero di Froude diventa, quindi, molto alto).

MOTI QUASI UNIDIMENSIONALI

In generale, per caratterizzare in un punto le condizioni termofluidodinamiche di ***un fluido a tre gradi estensivi di libertà*** sono necessari ***tre parametri***, di cui ***due termodinamici*** (scalari) ed ***uno cinetico*** (vettoriale).

Si vedrà che, ***se il moto è unidimensionale, il parametro cinetico diventa anch'esso uno scalare***, per cui, ad es., la determinazione della ***pressione, della temperatura e del modulo della velocità*** del fluido in un punto (o in una sezione del condotto) caratterizza completamente lo stato termofluido-dinamico del fluido in detto punto (o sezione).

Occorre, peraltro, osservare che ***la scelta dei tre parametri***, ***purché indipendenti tra loro*** (il che comporta che almeno uno abbia un contenuto cinetico), ***non è univoca*** potendosi scegliere tra: la densità, la pressione, la temperatura, l'energia interna, l'entalpia, il flusso di massa, l'entropia, la velocità, l'energia cinetica specifica del fluido, il numero di Mach etc..

Poiché la descrizione è di ***tipo specifico*** (per unità di massa, o di volume, e quindi con due gradi specifici di libertà termodinamici), e poichè si vuole caratterizzare lo stato in un punto, od in una sezione, tutti i suddetti parametri saranno necessariamente o ***intensivi***, o ***specifici***.

DESCRIZIONE INTEGRALE E DIFFERENZIALE

Lo studio del campo di moto di un fluido si può fare con due diversi approcci:

- il ***differenziale*** che utilizza le equazioni del bilancio scritte nel ***volume di controllo elementare*** (ad es., l'intorno infinitesimo di un punto);
- l' ***integrale*** che, invece, utilizza le stesse equazioni per un ***volume finito***.

La ***principale differenza*** tra le due descrizioni consiste nel fatto che, mentre l'approccio differenziale tende a descrivere il comportamento del fluido ***punto per punto*** del campo di moto, quello integrale porta essenzialmente in conto ***sia quanto viene scambiato sulla superficie di controllo*** del sistema studiato ***che, in maniera globale, quanto accade nel volume di controllo.***

Poiché trascura il dettaglio del campo di moto, la ***descrizione integrale è senz'altro più semplice e immediata***. Peraltro, occorre osservare che, non analizzando quanto avviene all'interno del volume di controllo, l'***approccio integrale conduce solo a informazioni di tipo globale***.

Inoltre, ***la sua applicazione può dipendere da dati già noti*** (ad es., sperimentalmente) che occorre dare ***a priori*** per risolvere il problema studiato.

DESCRIZIONE INTEGRALE E DIFFERENZIALE

La ***descrizione integrale*** è particolarmente conveniente nei problemi che studiano il moto di un fluido all'interno di condotti (***fluidodinamica interna***), mentre nei problemi di ***fluidodinamica esterna*** si ricorre quasi sempre alla ***descrizione differenziale***.

E' importante osservare che l'***approccio integrale*** può condurre a risposte abbastanza accurate nel caso in cui il moto all'interno di un condotto può essere considerato ***quasi unidimensionale.***

Si ricorda che, il moto in un condotto si definisce ***quasi unidimensionale*** quando ***ciascun parametro*** del moto (ad es., velocità, temperatura, pressione, etc.) ***può essere considerato costante su ciascuna sezione permeabile normale all'asse del condotto*** (mentre può essere, in generale, variabile da sezione a sezione permeabile).

Generalmente, un moto ***quasi unidimensionale*** viene ad essere, più semplicemente, chiamato moto ***unidimensionale***.

IPOTESI PER MOTI QUASI UNIDIMENSIONALI

Affinchè sia verificata ***l'ipotesi di quasi unidimensionalità***, deve aversi:

$Re >> 1$; $\quad \frac{1}{A}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 << 1$ (Fig. 1) ; $\quad \frac{\Delta}{R} << 1$ (Fig. 2)

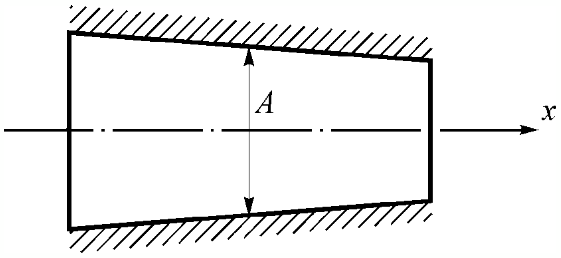


Fig. 1

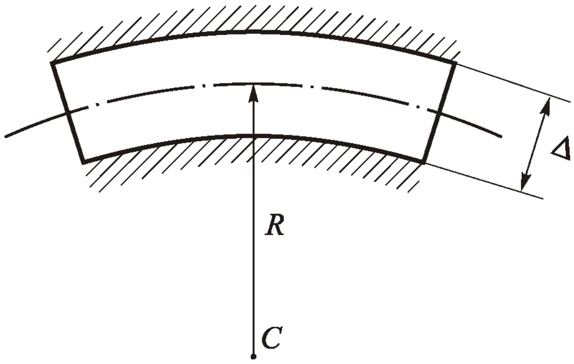
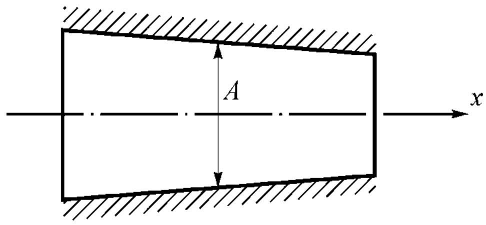


Fig. 2

La ***prima condizione*** garantisce che la zona in prossimità della parete, dove la velocità si deve necessariamente annullare per l'ipotesi del continuo, sia di estensione trascurabile rispetto a tutta la sezione del condotto.

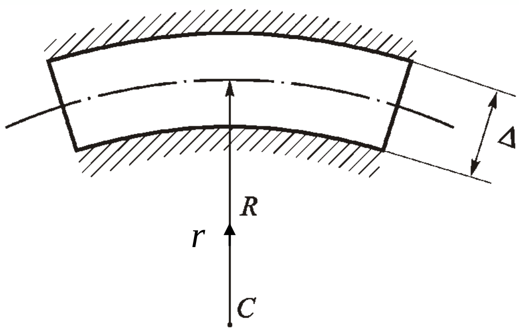


$$\frac{1}{A}\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 << 1$$

La ***seconda condizione*** garantisce una ***variazione dell'area della sezione molto graduale*** e, quindi, il poter considerare il vettore velocità praticamente ***costante anche vettorialmente*** in ciascuna sezione retta del condotto.

La ***terza condizione*** invece, ricordando l'equilibrio della particella in direzione radiale:

$$\Delta p/\Delta \approx \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R} = \rho \frac{V^2}{R}$$



e approssimando la derivata con il corrispondente rapporto incrementale, diventa:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \cong 2\frac{\Delta}{R} << 1$$

Condizione la quale soddisfa la condizione che la ***variazione della pressione statica nella generica sezione del condotto sia trascurabile rispetto al valore della pressione dinamica nella sezione stessa.***

MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

Nel seguito, non si parlerà più di moto ***quasi unidimensionale e quasi stazionario*** ma, più semplicemente, di ***moto unidimensionale e stazionario.***

In definitiva, ***l'applicazione del modello di moto unidimensionale e stazionario in un condotto*** prevede che sia soddisfatta la seguente coppia di ipotesi:

- ***Trascurabilità del termine instazionario***, cioè quello che è relativo alla variazione nel tempo della generica grandezza estensiva G nel volume di controllo $\mathcal{V}$;

- ***Costanza del valore di tutte le grandezze termofluidodinamiche (tutti i parametri) su ciascuna superficie permeabile normale all'asse del condotto appartenente alla superficie esterna che delimita il volume di controllo*** (mentre queste stesse grandezze possono, generalmente, variare da una sezione ad un'altra sezione permeabile).

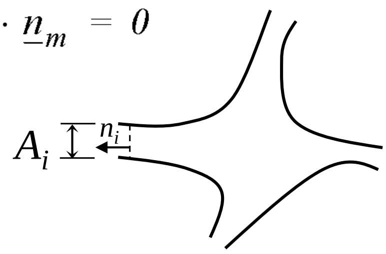
CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV} + \int_D \rho\, \underline{V} \cdot \underline{n}\, dD = 0$$

Ricordando che ***il termine instazionario deve annullarsi***, e indicando con A_i ($i = 1,2, .., m$) ***l'area di ciascuna superficie permeabile di*** D (considerata piana per semplicità) sulla quale si verifica la costanza dei parametri, con n_i ***il versore della normale da essa uscente*** e l'equazione di conservazione della massa diventa:

$$\int_D \rho\, \underline{V} \cdot \underline{n}\, dA = \int_{A_1} \rho\, \underline{V} \cdot \underline{n}\, dA + \int_{A_2} \rho\, \underline{V} \cdot \underline{n}\, dA + \ldots + \int_{A_m} \rho\, \underline{V} \cdot \underline{n}\, dA =$$

$$= \rho_1 A_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 + \rho_2 A_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 + \ldots + \rho_m A_m \underline{V}_m \cdot \underline{n}_m = 0$$



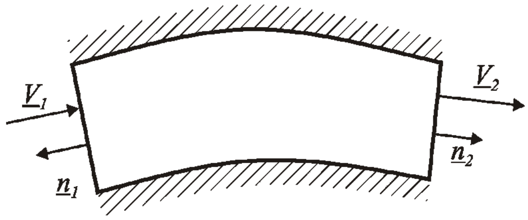
Ovvero, ***più semplicemente***:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \rho_i A_i\, \underline{V}_i \cdot \underline{n}_i = 0}$$

CONSERVAZIONE DELLA MASSA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

Se, in particolare, il sistema di controllo è una ***porzione di condotto*** e su ciascuna delle ***due uniche superfici permeabili*** della superficie di controllo del sistema (e necessariamente solo su ciascuna di esse) ***è ipotizzabile sia la costanza (vettoriale) della velocità che della densità***, la formula precedente diventa:

due sole superfici permeabili



$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i A_i \underline{V}_i \cdot \underline{n}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho_1 A_1 \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 + \rho_2 A_2 \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = 0}$$

Se inoltre, come in figura, ***ciascuna superficie è ortogonale al corrispondente vettore velocità*** si ha:

$$\underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 = -V_1 \qquad \boxed{\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2} \qquad \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = V_2$$

e, cioè, la cosiddetta ***portata di massa*** $\dot{m} = \rho VA$ ***risulta costante.***

Va fatto esplicitamente notare che ***nel moto stazionario*** di un fluido in un condotto ***è comunque sempre verificata la costanza della portata*** attraverso ciascuna sezione permeabile del condotto di area A.

Però, l'eguaglianza precedente è esprimibile solo su quelle superfici per ciascuna delle quali si ipotizza la costanza sia di ρ che di $\underline{V}$ (***moto unidimensionale***).

Se detta relazione è applicabile ad una qualunque sezione retta del condotto (di area A) si può ovviamente scrivere, sezione per sezione:

$$\dot{m} = \rho VA = GA = cost$$

relazione che può essere anche espressa nella forma:

$$\ell n(\rho VA) = \ell n\,\rho + \ell n\,V + \ell n\,A = \ell n(cost)$$

Differenziando la relazione precedente, si ottiene:

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0}$$

che rappresenta l'***equazione della conservazione della massa in forma differenziale*** per un condotto nel quale un moto stazionario può essere considerato ***unidimensionale in qualunque sezione retta dello stesso.***

BILANCIO DELLA QUANTITA' DI MOTO PER MOTI UNIMENSIONALI STAZIONARI

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int_V \rho \underline{V} dV} + \int_D \rho \underline{V} V_n dD + \int_D p\,\underline{n}\, dD - \int_D \underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{n}\, dD = \int_V \rho\, \underline{g} dV$$

Particolarizzando per il modello di moto in esame, l'equazione del bilancio della quantità di moto diventa (le A_i ***sono sempre le superfici permeabili***):

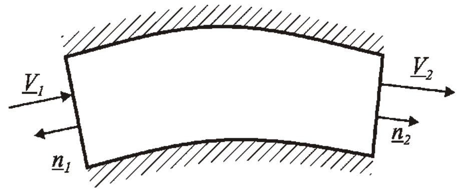
$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} A_i\left(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_i\right) + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}}$$

avendo tenuto presente che:

- ***il termine instazionario si annulla*** per il modello di moto in esame;
- la quantità $\underline{S}$ rappresenta l'***integrale di tutti gli sforzi superficiali*** (p e τ_d, parte dissipativa e non, cioè sforzi viscosi e non) ***sulle superfici impermeabili del sistema***; essa rappresenta pertanto la ***spinta totale del fluido su dette superfici*** (in quanto è positiva al primo membro);
- la quantità $\mathcal{M}$ è la ***massa totale*** del sistema presente nel volume di controllo e, quindi, $\mathcal{M}g$ rappresenta la ***forza peso*** agente sul fluido;

- ***su tutte le superfici permeabili A_i, i termini relativi agli sforzi viscosi sono stati ritenuti nulli***;
Infatti, la ***componente tangenziale*** degli sforzi viscosi sulle superfici permeabili è identicamente nulla per l'ipotesi di unidimensionalità;
Va fatto poi notare che, per trascurare la ***componente normale*** su dette superfici, deve anche essere ***trascurabile il termine che rappresenta la parte dissipativa della componente normale dello sforzo viscoso***.
Ciò è sempre vero per ***moto incompressibile***, o è ipotizzabile se la ***velocità del fluido varia debolmente nella sua stessa direzione*** (come accade in un moto quasi unidimensionale)

$$\sum_{i=1}^{m} A_i\left(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_i\right) + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$



Se il condotto ha due sole superfici permeabili, si ha:

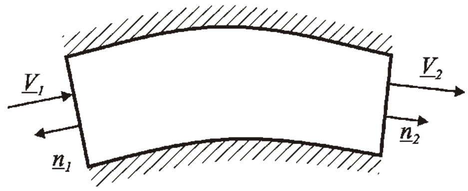
$$\boxed{\dot{m}\left(\underline{V}_2 - \underline{V}_1\right) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}}$$

Se inoltre ***ciascuna delle due superfici permeabili è ortogonale al vettore velocità***, si ha:

$$\left(p_1 + \rho_1 V_1^2\right) A_1 \underline{n}_1 + \left(p_2 + \rho_2 V_2^2\right) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$

$$\left(p_1 + \rho_1 V_1^2\right) A_1 \underline{n}_1 + \left(p_2 + \rho_2 V_2^2\right) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$

Introducendo la quantità:



$$\boxed{I = p + \rho V^2}$$

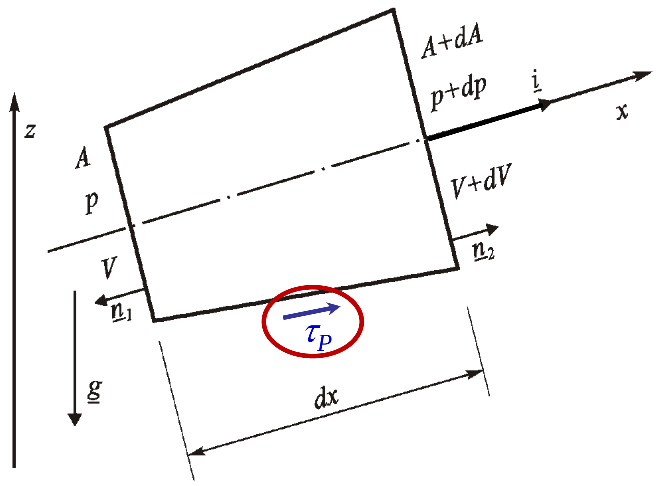
che viene detta ***impulso specifico***, si può ricavare l'ulteriore forma:

$$\boxed{I_1 A_1 \underline{n}_1 + I_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}}$$

L'impulso specifico rappresenta il flusso di quantità di moto nelle sue parti convettiva (ρV^2, o macroscopica) e ***diffusiva*** (p, o microscopica) ***reversibile*** (non dissipativa).

Più propriamente, l'impulso specifico I è il ***modulo della componente vettoriale del flusso di quantità di moto*** (nelle sue due parti dette) che attraversa la superficie di normale $\underline{n}$ avente la stessa direzione (ma non necessariamente lo stesso verso) di $\underline{V}$.

Si consideri, ora, il ***tratto elementare di condotto*** rappresentato nella figura a lato, delimitato da due sezioni permeabili normali all'asse x e di ***lunghezza infinitesima*** dx, per cui il tratto stesso può essere praticamente considerato ***diritto***. Applicando la:



$$\dot{m}\left(\underline{V}_2 - \underline{V}_1\right) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = \mathcal{M}\underline{g}$$

e ***proiettandola lungo la direzione dell'asse del condotto*** x, si ottiene:

$$-\dot{m}V + \dot{m}\left(V + dV\right) - pA + \left(p + dp\right)\left(A + dA\right) + dS_x = \rho\, A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

La spinta elementare dS_x, nelle sue ***due parti dissipativa e non***, vale:

$$dS_x = -pdA + \tau_p P\, dx$$

dove P è il ***perimetro della superficie permeabile*** e τ_P è lo ***sforzo tangenziale alla parete impermeabile***, supposto anch'esso ***unidimensionale***.

$$-\dot{m}V + \dot{m}(V + dV) - pA + (p + dp)(A + dA) + dS_x = \rho\, A dx \underline{g} \cdot \underline{i}$$

$$dS_x = -\cancel{pdA} + \tau_p P\, dx$$

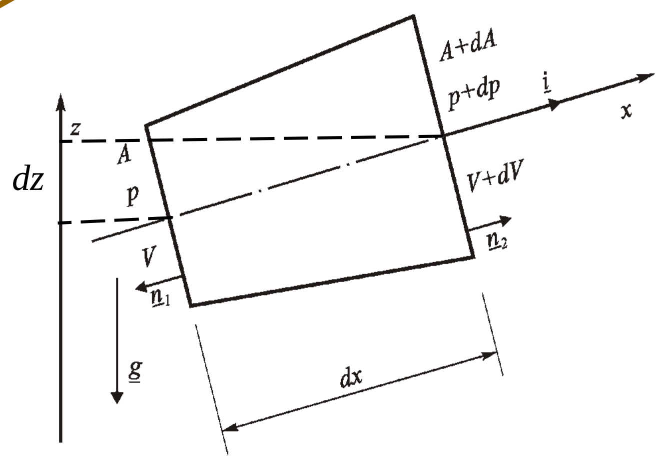
Tenendo presente che:

$$\underline{g} \cdot \underline{i} dx = dx \underline{g} \cdot \underline{i} = -g dz$$

e trascurando i differenziali di ordine superiore al primo, si ottiene:

$$\dot{m} dV + A dp + \rho\, g A dz + \tau_p P\, dx = 0$$

Ovvero, dividendo per l'area A e introducendo il ***diametro idraulico o equivalente*** ($D_e = 4A/P$) si ha infine:



$$\boxed{dp + \rho V dV + \rho\, g dz + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} = 0}$$

che rappresenta l'***equazione del bilancio della quantità di moto in forma differenziale*** per un condotto nel quale il moto, oltre che ***stazionario***, può essere considerato ***unidimensionale su ciascuna sezione retta***.

Nel caso in cui lo sforzo tangenziale alla parete τ_p sia trascurabile ($\tau_p = 0$, ***moto non viscoso***, e cioè quando $Re \to \infty$), l'equazione precedente diventa la cosiddetta ***equazione di Bernoulli in forma differenziale***:

$$dp + \rho V dV + \rho\, g dz + 4\tau_p \frac{dx}{D_e} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{dp + \rho\, V dV + \rho\, g dz = 0}$$

che, integrata, dà luogo all'***equazione di Bernoulli per moti stazionari, non viscosi, compressibili:***

$$\boxed{\int \frac{dp}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost}$$

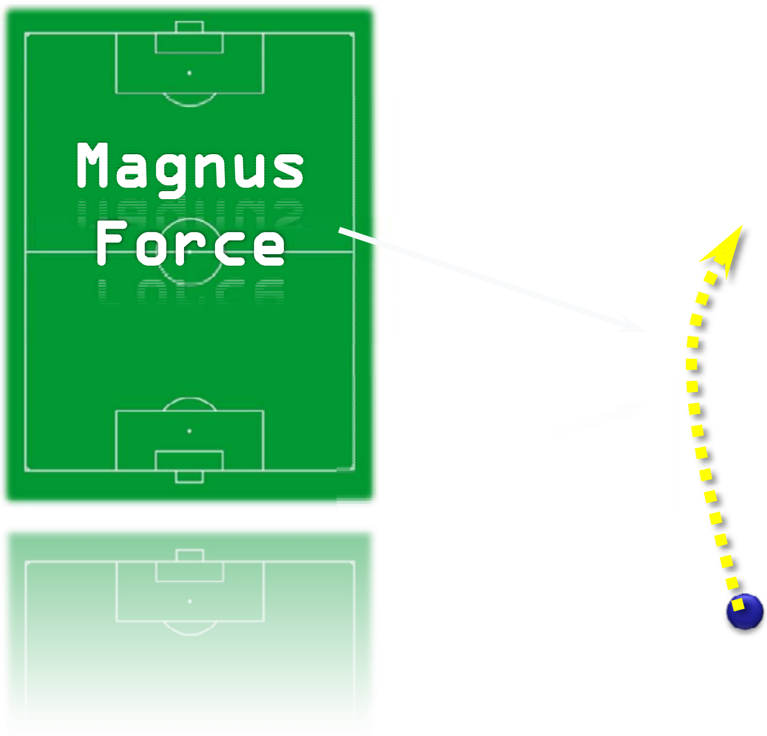
Per un moto in cui siano trascurabili le variazioni di densità, e cioè ***per un moto incompressibile*** ($\rho = cost$), si ha infine:

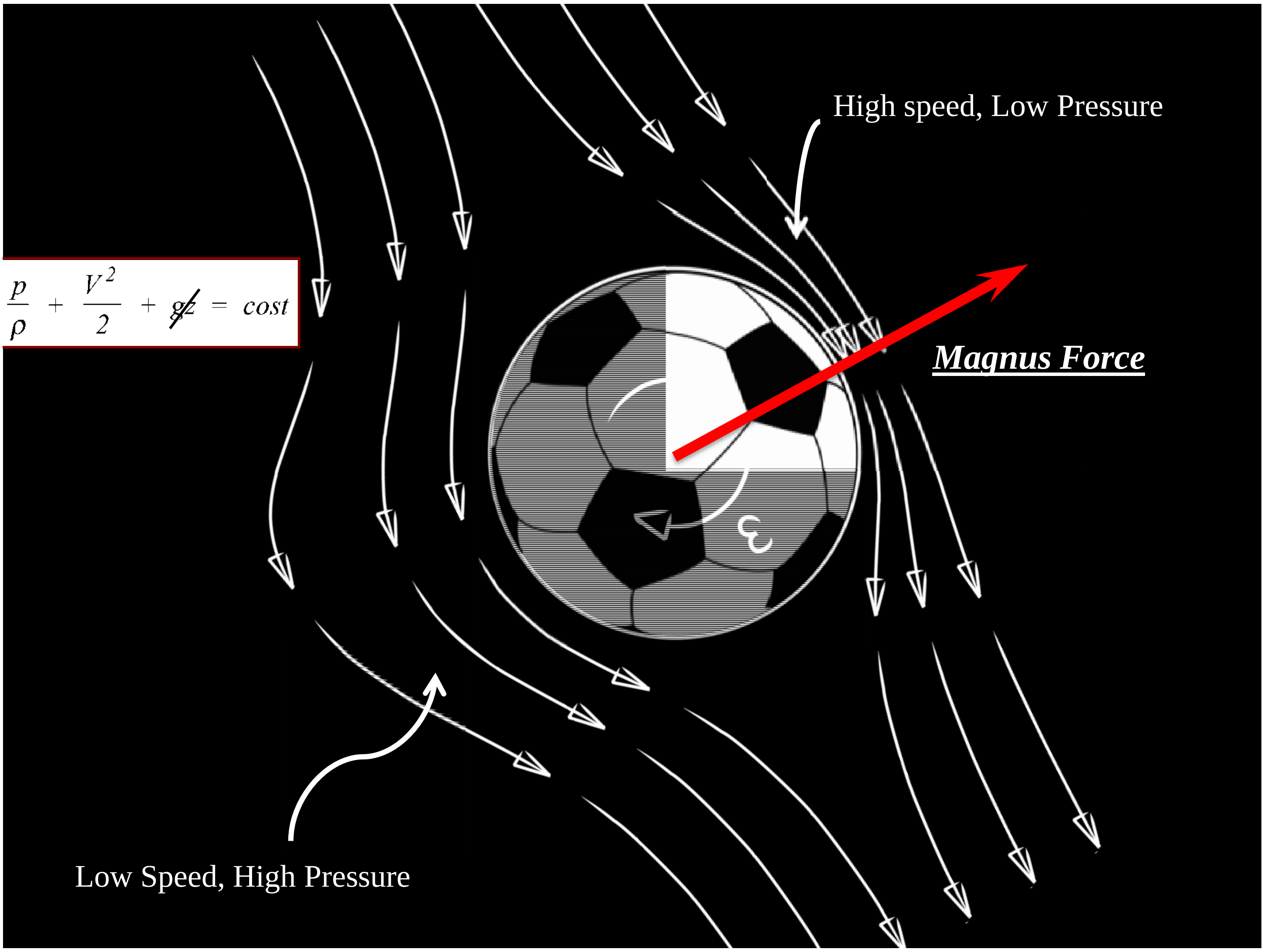
$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cost}$$

che rappresenta l'***equazione di Bernoulli per moti stazionari, non viscosi, incompressibili***.

Purché siano rispettate le ipotesi fatte, le equazioni precedenti sono applicabili anche quando il moto non è proprio unidimensionale, ad esempio lungo una linea di corrente.

Il calcio d'angolo di Maradona





CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

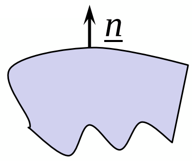
Con procedimento analogo agli altri due casi precedenti:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \rho_i V_{ni} A_i \left(h_i + \frac{V_i^2}{2} + g z_i \right) + \int_D \underline{J}_q \cdot \underline{n}\, dD - \int_D \left(\underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{V} \right) \cdot \underline{n}\, dD = 0}$$

- Questa equazione è valida se, e solo se, ***il moto è stazionario*** rispetto ad un sistema di riferimento inerziale ed è ***unidimensionale*** su ciascuna delle superfici permeabili del sistema;
- ***l'integrale relativo al flusso di energia nel modo calore deve essere esteso a tutte le superfici del sistema, permeabili e non***, in quanto, pur essendo la temperatura costante su ciascuna superficie permeabile, sono consentiti gradienti di temperatura (e quindi flussi di calore) in direzione normale alla superficie. Essi saranno comunque deboli, e quindi trascurabili, per la debole variazione di area. Poiché la normale $\underline{n}$ è orientata verso l'ambiente, ***l'integrando risulta positivo se è anch'esso diretto verso l'ambiente*** (flusso termico uscente);
- ***il secondo integrale è diverso da zero, a condizione che la velocità della superficie di controllo sia diversa da zero*** (potenza d'elica).

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i V_{ni} A_i \left(h_i + \frac{V_i^2}{2} + g z_i \right) + \int_D \underline{J}_q \cdot \underline{n}\, dD - \int_D \left(\underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{V} \right) \cdot \underline{n}\, dD = 0$$

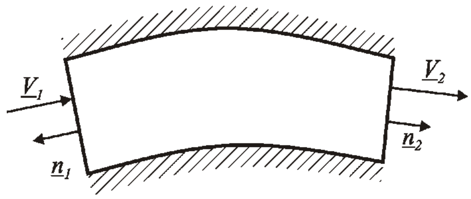


Ponendo:

$$\int_D \underline{J}_q \cdot \underline{n}\, dD = -\dot{Q} \quad ; \quad \int_D \left(\underline{\underline{\tau}}_d \cdot \underline{V} \right) \cdot \underline{n}\, dD = -\dot{L}$$

Calore positivo se entrante — *Lavoro positivo se uscente*

e, se il volume di controllo è un condotto con due sole superfici permeabili, si ottiene infine:



$$\boxed{\dot{m} \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 \right) + \dot{L} = \dot{m} \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 \right) + \dot{Q}}$$

che rappresenta l'***equazione di conservazione dell'energia per moti unidimensionali, stazionari, in condotti***.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\dot{m} \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 \right) + \cancel{\dot{L}} = \dot{m} \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 \right) + \cancel{\dot{Q}}$$

In un moto che sia ***adiabatico*** $(\dot{Q} = 0)$ ***e anergodico*** $(\dot{L} = 0)$, le quantità in parentesi non cambiano valore.

Un moto di questo tipo si definisce ***omoenergetico***.

Sarebbe più corretto definirlo ***omoentalpico totale*** (dove l'***entalpia totale*** rappresenta la quantità in parentesi), ma poiché ***nei sistemi aperti l'entalpia totale prende il posto dell'energia totale*** è consuetudine usare ancora l'aggettivo ***omoenergetico***. Per un moto omoenergetico si ha:

$$\dot{m} \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 \right) = \dot{m} \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 \right)$$

In condizioni di omoenergeticità, ***se il moto è unidimensionale su ciascuna superficie permeabile***, si ha quindi:

$$\boxed{h + V^2/2 + gz = cost}$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$h + V^2/2 + gz = cost$$

In termini differenziali (considerando q = cost):

$$dh + VdV + gdz = 0$$

Dalla definizione di entalpia, ricordando che $dh = Tds + dp/\rho$, si ha:

$$Tds + dp/\rho + VdV + gdz = 0$$

Per un ***moto adiabatico*** si ha $\delta_e s = 0$.

Se poi, in particolare, ***sono nulle*** le forze di attrito e comunque ***le altre cause di produzione di entropia***, sarà anche $\delta_i s = 0$ e quindi $ds = 0$.

Con questa ipotesi, l'equazione precedente, che rappresenta ***l'equazione di conservazione dell'energia per un moto omoenergetico e isoentropico***, diventa :

$$dp/\rho + VdV + gdz = 0$$

che ***coincide con la già trovata equazione di Bernoulli in forma differenziale***.
Si può concludere, pertanto, che, ***in questo caso, l'equazione di conservazione dell'energia non fornisce alcuna ulteriore condizione vincolante sull'evoluzione del fluido***.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right) + \dot{L} = \dot{m}\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right) + \dot{Q}$$

Dividendo per la portata massica

$$\boxed{h_2 + V_2^2/2 + gz_2 + \ell = h_1 + V_1^2/2 + gz_1 + q}$$

dove ℓ e q rappresentano rispettivamente ***l'energia scambiata nel modo lavoro e nel modo calore per unità di massa*** del fluido evolvente.

Come detto, ***il contributo dovuto all'energia gravitazionale si supporrà, in generale, trascurabile***, il che equivale, ad esempio, a considerare:

$$z_1 \cong z_2$$

o che ***il numero di Froude è abbastanza elevato***.

Introducendo la quantità $H = h + V^2/2$ detta ***entalpia specifica totale*** o ***di ristagno*** (della quale si parlerà estensivamente in seguito), si ottiene:

$$\boxed{\dot{m}\,\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}}$$

L'equazione:

$$\dot{m}\,\Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

rappresenta il ***principio di conservazione dell'energia per un sistema aperto*** nel caso di moto unidimensionale e stazionario.
Essa ricorda il primo principio della termodinamica

$$\mathcal{M}\Delta u = \Delta U = Q - L$$

che è il ***principio di conservazione dell'energia per un sistema chiuso***.

Le differenze sostanziali sono:

- il primo principio riguarda (in un sistema ***chiuso***) un processo ***instazionario*** (si ha una variazione di $\boldsymbol{U}$ **n**ella massa di controllo) mentre l'altra relazione conserva l'energia (in un sistema ***aperto***) in un processo ***stazionario***;
- la ***massa*** $\mathcal{M}$ che compare nel primo principio è quella contenuta nel sistema, mentre, nella relazione in alto, la $\dot{m}$ è la ***massa che attraversa il sistema nella unità di tempo***;
- l'***energia interna specifica u*** è sostituita dall'***entalpia totale specifica H.***

In una ***macchina*** per la quale siano trascurabili gli scambi di energia nel modo calore $(\dot{Q} = 0)$ con l'ambiente esterno:

$$\boxed{\dot{m}\,\Delta H = -\dot{L}}$$

In uno ***scambiatore di calore***, nel quale non vi siano scambi di energia nel modo lavoro $(\dot{L} = 0)$ con l'ambiente esterno:

$$\boxed{\dot{m}\,\Delta H = \dot{Q}}$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER MOTI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

$$\dot{m}\,\Delta H = \dot{Q}$$

Può essere utile esprimere questa relazione ***in termini differenziali*** e cioè:

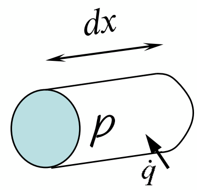
$$\dot{m}\;dH = d\dot{Q}$$

La quantità $d\dot{Q}$, che è la quantità elementare di calore scambiata sulla superficie impermeabile del condotto, può essere espressa in termini della componente normale a detta superficie del flusso di calore: $\dot{q} = -\underline{J}_q \cdot \underline{n}$.
Infatti, se $\dot{q}$ è costante lungo la periferia della sezione del condotto, per un tratto elementare di condotto (di lunghezza $\boldsymbol{dx}$) si ha la relazione:

$$d\dot{Q} = \dot{q}\,\wp\,dx$$

che, sostituita nella formula precedente e ricordando le definizioni sia del diametro idraulico che di $G = \rho V$ ($\dot{m} = GA$), dà luogo a:

$$\boxed{\boldsymbol{D_e} = 4\boldsymbol{A}/\wp} \qquad \boxed{G\,dH = 4\,\dot{q}\,\frac{dx}{D_e}}$$



che rappresenta l'***equazione differenziale di conservazione dell'energia per moti anergodici***, unidimensionali e stazionari

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

La ***condizione di ristagno*** (detta anche ***condizione totale***) di una particella di fluido in moto è definita come ***la condizione* TERMODINAMICA *che la particella raggiungerebbe qualora venisse rallentata fino a velocità nulla con una trasformazione adiabatica, anergodica e isoentropica*** (omoenergetica e isoentropica).

La condizione di ristagno non è quindi associata né alla condizione di moto quasi unidimensionale, nè a quella di moto quasi stazionario.

Le condizioni di ristagno ***non rappresentano condizioni*** che debbono essere necessariamente ***presenti nel campo di moto*** oggetto di studio.

Ad ogni stato termofluidodinamico del fluido è associato uno stato di ristagno.

Ovviamente ***non è vero il contrario***.

Lo ***stato di ristagno*** di un sistema semplice è uno ***stato termodinamico caratterizzato da due parametri termodinamici*** indipendenti tra loro (manca il cinetico).

Lo ***stato termofluidodinamico, invece, è caratterizzato da tre parametri*** (due termodinamici più uno cinetico).

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Dalla definizione di condizione di ristagno, applicando l'equazione di conservazione dell'energia:

$$\dot{m}\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2}\right) + \cancel{\dot{L}} = \dot{m}\left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{gz_1}\right) + \cancel{\dot{Q}}$$

trascurando i termini gravitazionali e considerando il moto omoener-getico, per un fluido avente velocità V e livello entalpico h, ***quando si rallenta il fluido sino a velocità nulla si raggiunge l'entalpia totale***, o ***di ristagno***:

$$\boxed{H = h + V^2/2}$$

La quantità h è chiamata ***entalpia specifica sensibile***, o ***statica***.

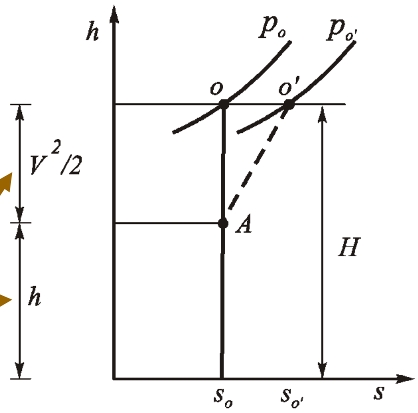
La quantità H è chiamata ***entalpia specifica totale***, o ***di ristagno***.

Si possono definire, in generale, ***condizioni statiche di una corrente quelle misurate con uno strumento che si muove alla velocità del fluido, cioè con uno strumento rispetto al quale il fluido è fermo***.

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

La relazione $H = h + V^2/2$ esprime in particolare il seguente concetto.

Se una corrente avente un'entalpia specifica h e una velocità V (punto $\boldsymbol{A}$) ***viene rallentata*** fino a velocità nulla mediante una trasformazione adiabatica e anergodica (punto $\boldsymbol{o}$), ***la sua entalpia specifica aumenta della sua energia cinetica specifica*** (per unità di massa) $V^2/2$.



Occorre notare che, nel rallentamento del fluido, la trasformazione espressa dalla $H = h + V^2/2$ potrebbe ***non essere necessariamente isoentropica***, così come imposto dalla definizione di condizione di ristagno (punto $\boldsymbol{o'}$), ***potendo l'entropia in questo caso solo aumentare per produzione.***

Non può, ovviamente, diminuire perché la trasformazione è adiabatica.

La sola condizione necessaria alla $H = h + V^2/2$ è, quindi, l'***omoenergeticità*** della trasformazione.

La condizione di isoentropicità è, peraltro, necessaria per poter determinare tutti gli altri parametri termodinamici di ristagno (ad es. la $p_o \neq p_{o'}$).

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

$$H = h + V^2/2$$

Per ***gas più che perfetto***, $h = c_p T$ e $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, per cui si ha:

$$H = h\left[1 + \frac{(\gamma - 1)V^2}{2\gamma RT}\right]$$

Poiché, per un gas più che perfetto il quadrato della velocità del suono laplaciana è dato da:

$$a_L^2 = \gamma RT$$

ricordando la definizione del numero di Mach (laplaciano) , si ottiene:

$$\boxed{H = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)}$$

espressione che dà l'***entalpia totale in funzione di quella statica e del numero di Mach*** per gas più che perfetto.

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

$$H = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

Questa relazione mostra che ***l'importanza relativa del termine cinetico rispetto a quello relativo all'entalpia sensibile, è misurata dal quadrato del numero di Mach.***

In una corrente a ***basso numero di Mach*** (M << 1) ***l'entalpia di ristagno praticamente coincide con quella sensibile***.

Ad esempio in una corrente di aria (γ = 1.4) a M = 0.1 (che a temperatura ambiente corrisponde ad una velocità di circa 120km/h), l'entalpia di ristagno è superiore a quella sensibile di appena 0.002 (cioè il **2 *per mille***).

Correnti di questo tipo vengono dette ***microsoniche***, o ***iposoniche***

In una corrente ad ***elevato numero di Mach, l'entalpia di ristagno risulta di gran lunga maggiore di quella sensibile***, il cui contributo potrebbe essere, al limite, trascurato.

Ad esempio in una corrente di aria a M = 10, risulta che l'entalpia sensibile rappresenta appena il **4,8%** dell'entalpia totale (**1/21**).

Correnti di questo tipo vengono dette ***ipersoniche***

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Per un gas più che perfetto uguagliando le relazioni:

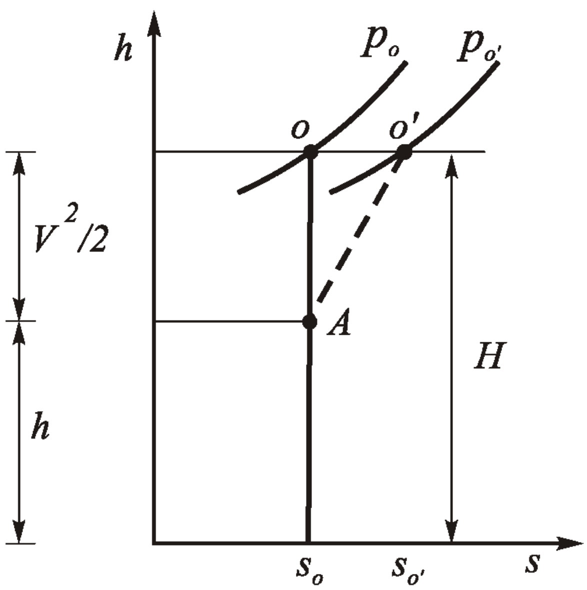
$$H = h + V^2/2$$

e

$$H = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

si ricava:

$$\boxed{M^2 = \frac{V^2/2}{(\gamma - 1)h/2}}$$



Come già detto, ***il quadrato del numero di Mach può essere pertanto considerato proporzionale al rapporto tra l'energia cinetica ordinata $V^2/2$ e quella disordinata h.***

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Nel caso di ***gas più che perfetto, la*** ***temperatura di ristagno***, o ***totale***, T_o è immediatamente derivabile dalla relazione $H = h + V^2/2$ dividendo entrambi i membri per c_p :

$$T_o = T + V^2/2c_p$$

ovvero, in termini di numero di Mach, dalla relazione:

$$H = h\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)$$

dividendo sempre per c_p, si ottiene:

$$\boxed{T_o = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)}$$

Le considerazioni già fatte per l'entalpia totale (per bassi e alti numeri di Mach) possono essere identicamente riproposte per la temperatura di ristagno (o totale) T_o.

La temperatura T è detta ***temperatura statica***, o ***sensibile***, della corrente.

Quest'ultima può essere anche definita come ***la temperatura misurata da un termometro che viaggia alla stessa velocità della corrente***.

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Dalla relazione fondamentale entropica per un gas più che perfetto:

$$s - s_o = c_v \ell n\left(\frac{u}{u_o}\right) + R\,\ell n\left(\frac{v}{v_o}\right)$$

per una trasformazione isoentropica: $\Delta s = s - s_o = 0$

e, ricordando che $u = c_v T$, si ricava:

$$\frac{v}{v_o} = \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{c_v/R} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

per cui, sostituendo nella formula precedente, la relazione:

$$T_o = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)$$

si ottiene l'espressione della ***densità di ristagno***, o ***totale***, ρ_o in funzione di quella ***statica***:

$$\boxed{\rho_o = \rho\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}}$$

CONDIZIONI DI RISTAGNO DI UN FLUIDO

Sostituendo nella:

$$\frac{v}{v_o} = \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{c_v/R} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

la prima equazione di stato $p = \rho RT$ di un gas più che perfetto, si ottiene il rapporto tra la **pressione di ristagno**, o **totale**, p_o e la **pressione statica** p della corrente:

$$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \qquad T_o = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

ovvero:

$$\boxed{p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Anche ***la pressione statica p è quella misurata da un manometro che viaggia alla stessa velocità della corrente***.

FATTORE DI COMPRESSIBILITA'

Sviluppando in ***serie di Mac-Laurin*** l'espressione della pressione di ristagno:

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2/2! + .. \\ x << 1\end{array}}$$

per bassi numeri di Mach ($M << 1$), si ottiene:

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma\,(2 - \gamma)}{48} M^6 + \ldots\right)$$

od in altra forma:

$$p_o - p = \frac{\gamma}{2} pM^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2 - \gamma}{24} M^4 + \ldots\right)$$

Poiché la quantità:

$$\gamma\, pM^2/2 = \rho V^2/2$$

si ha:

$$p_o - p = \rho \frac{V^2}{2} \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2 - \gamma}{24} M^4 + \ldots\right)$$

FATTORE DI COMPRESSIBILITA'

$$p_o - p = \rho \frac{V^2}{2}\left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24}M^4 + \ldots\right)$$

Per M << 1, questa formula coincide con quanto si ricaverebbe dall'applicazione dell'equazione di Bernoulli (per moti incompressibili) senza il termine $\rho g z$:

$$p_o - p = \rho \frac{V^2}{2}$$

Si può, quindi, concludere che ***un moto omoenergetico*** (adiabatico e anergodico) ***e isoentropico,*** (ipotesi fatte per le condizioni di ristagno) ***si può considerare incompressibile se il suo numero di Mach è basso.***

La quantità $\rho V^2 / 2$ è chiamata **pressione dinamica** della corrente.

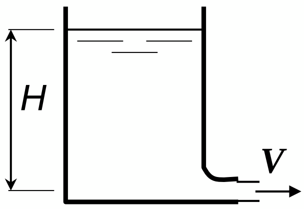
Il rapporto:

$$\boxed{F_c = \frac{p_o - p}{\rho V^2 / 2} = \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-\gamma}{24}M^4 + \ldots\right)}$$

è definito come **fattore di compressibilità del moto**.

Per moti incompressibili (M **<<** 1) si ha, ovviamente, $F_c = 1$.

ELLISSE DELLE VELOCITA'



In condizioni omoenergetiche e stazionarie, si ha:

$$H = h + \frac{V^2}{2} = cost$$

La ***massima velocità raggiungibile*** da un gas che possiede un'entalpia totale pari ad H, detta anche **velocità limite**, o ***velocità massima***, è data da:

$$\boxed{V_\ell = \sqrt{2H}}$$

che corrisponde alla condizione per la quale si annulla l'entalpia sensibile $h = 0$. Si noti come la precedente relazione ricordi la ben nota formula di Torricelli:

$$V = \sqrt{2gH}$$

che esprime la velocità raggiunta da un liquido, ovviamente in un moto incompressibile, sotto un battente di pressione *H*.

Infatti, ***nel caso del liquido, l'energia potenziale che il fluido trasforma in energia cinetica,*** per unità di massa, ***è data da*** gH, mentre in ***questo caso è tutta la*** H, che si trasforma completamente in energia cinetica.

ELLISSE DELLE VELOCITA'

Ritornando al problema, si osserva, inoltre, che per un gas più che perfetto:

$$h = c_p T = \gamma RT/(\gamma - 1)$$

$$a^2 = \gamma RT$$

si ha:

$$(\gamma - 1)h = a^2$$

e quindi:

$$(\gamma - 1)H = a_o^2$$

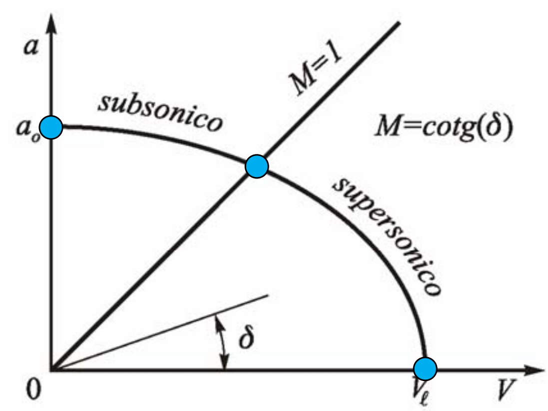
in cui a_o rappresenta la velocità del suono laplaciana in condizioni di ristagno, per cui l'equazione:

$$H = h + V^2/2 \longrightarrow 1 = \frac{h}{H} + \frac{V^2}{2H}$$

ricordando che $V_\ell = \sqrt{2H}$, diventa l'equazione di un'**ellisse in forma canonica** :

$$\boxed{\frac{a^2}{a_o^2} + \frac{V^2}{V_\ell^2} = 1}$$

$$\frac{a^2}{a_o^2} + \frac{V^2}{V_\ell^2} = 1$$



Questa equazione rappresenta la cosiddetta **ellisse delle velocità** raffigurata, per il quadrante di interesse, nella figura a lato.

Si ritrova ovviamente che:

- per $a = h = 0 \rightarrow V = V_\ell$
- per $V = 0 \rightarrow a = a_o$

È interessante notare come ***all'aumentare della velocità V, la velocità del suono a diminuisca e viceversa***.

Nella figura è anche indicata la ***bisettrice del quadrante***, di equazione $V = a$, che corrisponde alle ***condizioni soniche*** per le quali si ha $M = 1$.

Per $M = 1$, la velocità del fluido V^*, coincide con quella del suono a^* pari a:

$$V^* = a^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_\ell \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Le condizioni termofluidodinamiche corrispondenti a $M = 1$ sono generalmente indicate con l'apice (**∗**) e sono dette **condizioni critiche**.

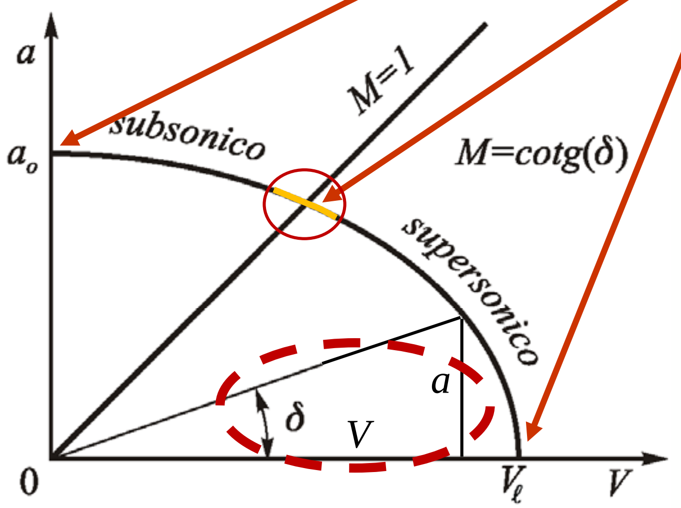
ELLISSE DELLE VELOCITA'

Poiché $M = V/a = cotg\delta = 1/tan\delta$, la zona dell'ellisse a sinistra della retta $M = 1$ corrisponde a condizioni di moto ***subsonico*** ($M < 1$) mentre quella a destra a moto ***supersonico*** ($M > 1$).

Nell'ambito di queste due zone si possono riconoscerne altre due:

- valori del ***numero di Mach molto bassi***, già detta di moto ***iposonico***,
- valori del ***numero di Mach molto alti***, già detta di moto ***ipersonico***.

La zona a cavallo della retta $M = 1$ viene detta di moto ***transonico***.



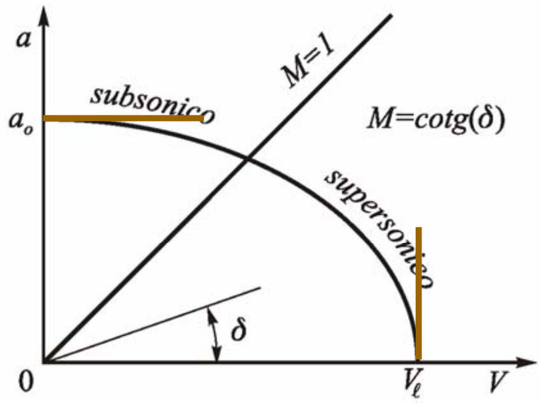
La prima zona (***iposonica***), corrisponde al tratto di curva a sinistra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (orizzontale) nel punto di intersezione con l'asse delle a.

Essa è caratterizzata dal fatto che il fattore di compressibilità del moto è molto prossimo all'unità (per $M = 0.2 \rightarrow F_c = 1.010$) e quindi ***il moto, se è anche omoenergetico e reversibile, può essere considerato incompressibile***.

La seconda zona (***ipersonica***), corrisponde al tratto di curva a destra dell'ellisse delle velocità dove è possibile approssimare l'ellisse stessa con la sua tangente (verticale) nel punto di intersezione con l'asse delle V.

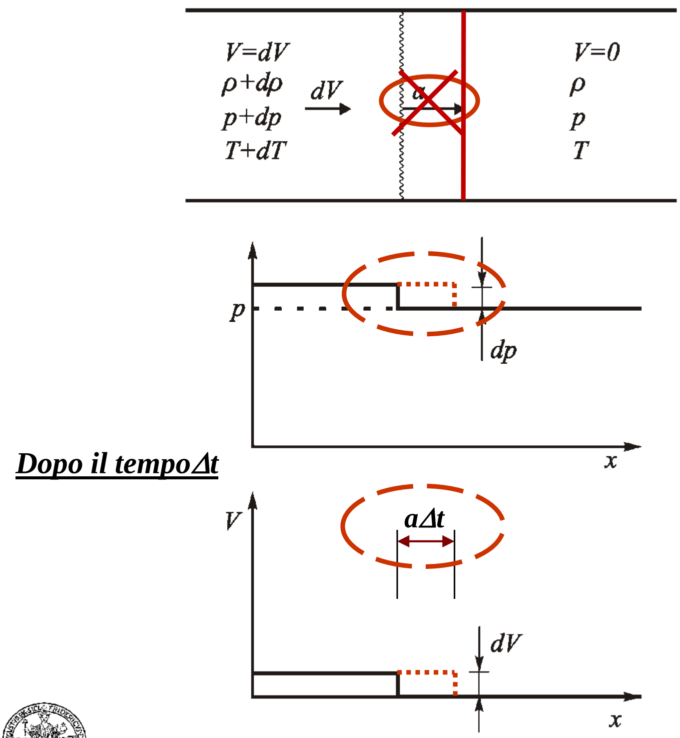
Essa è caratterizzata dal fatto che ***l'energia cinetica ordinata è molto maggiore di quella disordinata*** h.

Va qui comunque osservato che, nel caso di moto ipersonico, gli ***effetti di gas reale*** possono diventare molto importanti per cui occorre, di solito, abbandonare l'ipotesi di modello di gas più che perfetto.



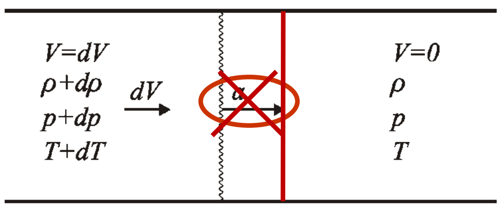
VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE

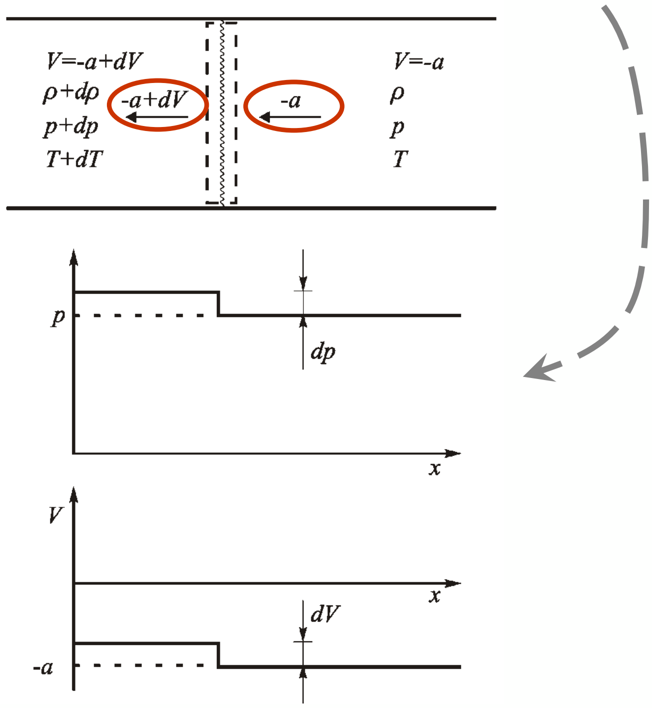
Un piccolo disturbo di pressione viaggia in un condotto alla velocità a (verso destra) attraverso un fluido in quiete.



VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE

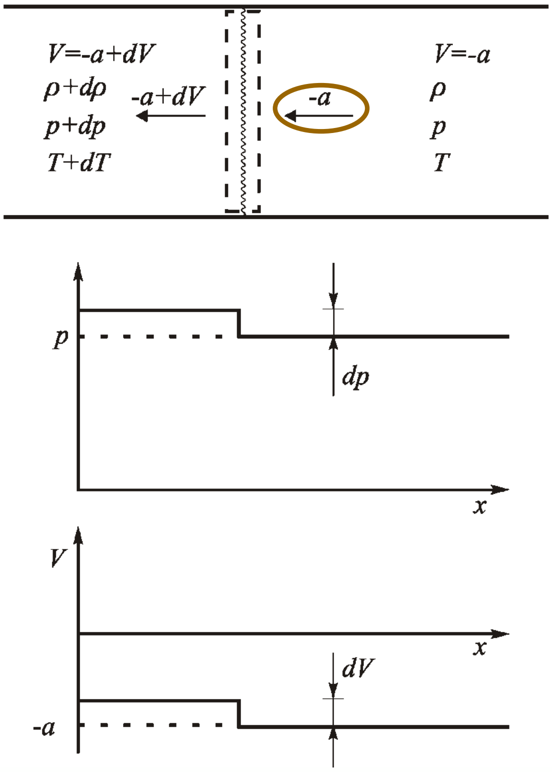
Un piccolo disturbo di pressione viaggia in un condotto alla velocità a (verso destra) attraverso un fluido in quiete. In un nuovo sistema di riferimento, ***avente velocità*** a ***rispetto al primo***, il disturbo di pressione si può fermare.





Per fermare l'onda, occorre dare a tutto il sistema una velocità – a e cioè muoversi con l'onda.

VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE



L'equazione di ***conservazione della massa***, per moti stazionari, in forma differenziale:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

tenendo conto che $V = -a$, dà luogo a:

(a) $$dV = a\frac{d\rho}{\rho}$$

Trascurando la forza peso, l'equazione del ***bilancio della quantità di moto***:

$$dp + \rho V dV = 0$$

tenendo ancora conto che $V = -a$, conduce a:

(b) $$dp = \rho\, a dV$$

Eliminando tra le (a) e (b) la quantità $\rho\, dV$, si ottiene:

$$\boxed{a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}}$$

Un dV positivo (***corrente che <u>accelera</u>***) dà dp e $d\rho$ positivi, ***compressione*** (nell'altro sistema di riferimento, ***il fluido segue l'onda***), e viceversa.

VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE

La ***<u>velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione</u>*** (del suono) **<u>newtoniana</u>** ***(<u>isoterma</u>)*** è definita dalla relazione:

$$\boxed{a_N^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = RT \qquad \text{(gas perfetto)}$$

La ***<u>velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione</u>*** (del suono) **<u>laplaciana</u>** ***(<u>isoentropica</u>)*** è definita dalla relazione:

$$\boxed{a_L^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \gamma RT \qquad \text{(gas perfetto)}$$

Si hanno, quindi, almeno ***due*** diverse velocità caratteristiche di propagazione dei piccoli disturbi di pressione.

<u>Delle due, la velocità che riguarda, quasi sempre, le presenti applicazioni è quella laplaciana</u>.

<u>Attenzione</u>: Per ricavare le due velocità non si è fatta alcuna ipotesi sul modello di gas, quindi le formule sono valide ***<u>qualunque sia il modello di gas utilizzato</u>.***

VELOCITA' DI PROPAGAZIONE DEI PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE

Del fatto che il ***suono*** sia un ***piccolo disturbo di pressione*** ci si può facilmente convincere con un aneddoto riportato in una delle edizioni della Enciclopedia Britannica.

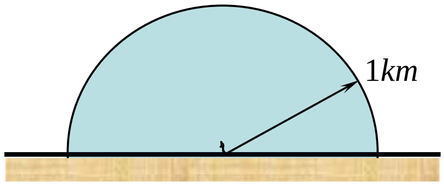
Se in una notte di agosto si ha la ventura di passeggiare in aperta campagna, si può sentire a lungo un grillo cantare. In effetti è dimostrato che, in assenza di rumori di fondo, si può ascoltare il canto del grillo ***a più di un chilometro di distanza***.

Ciò significa che il grillo mette in movimento almeno tutta l'aria racchiusa in una ***semisfera di raggio un chilometro.***

Questa semisfera ha un ***volume*** $2\pi R^3/3$ che può essere approssimato con $2R^3$ (dove R è il raggio della semisfera) e che quindi risulta $2 \times 10^9 m^3$.

Poiché la densità dell'aria alla temperatura di 20°*C* (siamo in agosto) ed alla pressione di una atmosfera è pari a circa $1.2 kg/m^3$, risulta che il grillo mette in movimento con il suo canto una ***massa*** pari a $2.4 \times 10^9 kg$ di aria (due milioni quattrocentomila tonnellate).

I conseguenti disturbi di pressione devono essere decisamente piccoli poiché la ***potenza sonora emessa dal violino del grillo è necessariamente limitata.***



INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Si consideri, ora, un ***moto quasi unidimensionale, quasi stazionario, omoenergetico e isoentropico attraverso un condotto ad area variabile***.

Si sta quindi considerando il moto di un fluido attraverso un condotto che presenta variazioni della sua area trasversale.

Ricordando l'espressione per la velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione (del suono) laplaciana (isoentropica):

$$a_L^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$$

l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale per moti unidimensionali e stazionari:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

può essere scritta nella forma:

$$\frac{1}{a^2}\frac{dp}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Si ricorda che la forma differenziale dell'equazione generale del bilancio della quantità di moto per moti unidimensionali e stazionari è la seguente:

$$dp + \rho V dV + \cancel{\rho g dz} + \cancel{4\tau_p \frac{dx}{D_e}} = 0$$

e tenendo presente che, per il particolare problema in esame, nella fattispecie si può assumere:

$$\tau = g = 0$$

(poiché vengono trascurate le influenze sia delle forze viscose, che di quelle gravitazionali), si ottiene infine:

$$\frac{dp}{\rho} = -VdV$$

relazione già utilizzata in precedenza nel calcolo della velocità di propagazione dei piccoli disturbi di pressione.

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Sostituendo questa relazione:

$$\frac{dp}{\rho} = -VdV$$

nella equazione prima trovata:

$$\frac{1}{a^2}\frac{dp}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

e ricordando la definizione del numero di Mach $M = V/a$ (laplaciano), si ottiene infine ***la relazione che lega la variazione di velocità a quella di area***:

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}\left(M^2 - 1\right)}$$

Attenzione: Anche in questo caso, per ricavare l'ultima relazione non è stata fatta alcuna ipotesi sul modello di gas per cui essa è valida ***qualunque sia il modello di gas utilizzato***.

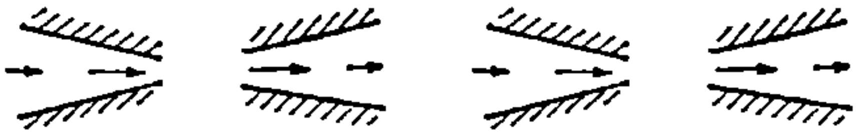
Si ricordi (ellisse delle velocità), che V e M hanno lo stesso andamento.

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Vediamo cosa succede

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}\left(M^2 - 1\right)}$$

		Moto Subsonico $M < 1$		Moto Supersonico $M > 1$	



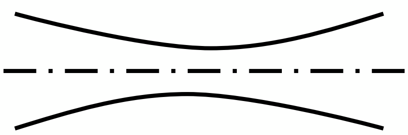
dA	$\rightarrow$	$-$	$+$	$-$	$+$
dV	$\rightarrow$	$+$	$-$	$-$	$+$

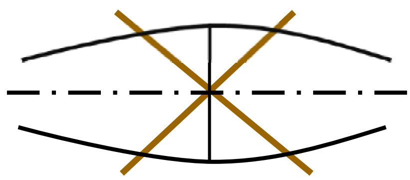
- in un ***moto subsonico*** ($M^2 < 1$) il fluido ***accelera*** ($dV > 0$) ***in un condotto convergente*** ($dA < 0$) mentre ***decelera*** ($dV < 0$) ***in un condotto divergente*** ($dA > 0$). Si ha quindi lo stesso comportamento di un moto incompressibile (moto iposonico);
- in un ***moto supersonico*** ($M^2 > 1$) il fluido ***accelera*** ($dV > 0$) ***in un condotto divergente*** ($dA > 0$) mentre ***decelera*** ($dV < 0$) ***in un condotto convergente*** ($dA < 0$).

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}\left(M^2 - 1\right)}$$

- **se** $M^2 = 1$ deve necessariamente essere $dA = 0$ cioè la sezione retta del condotto deve avere ***un punto di stazionarietà***, in particolare ***un minimo***, ***o un massimo***.



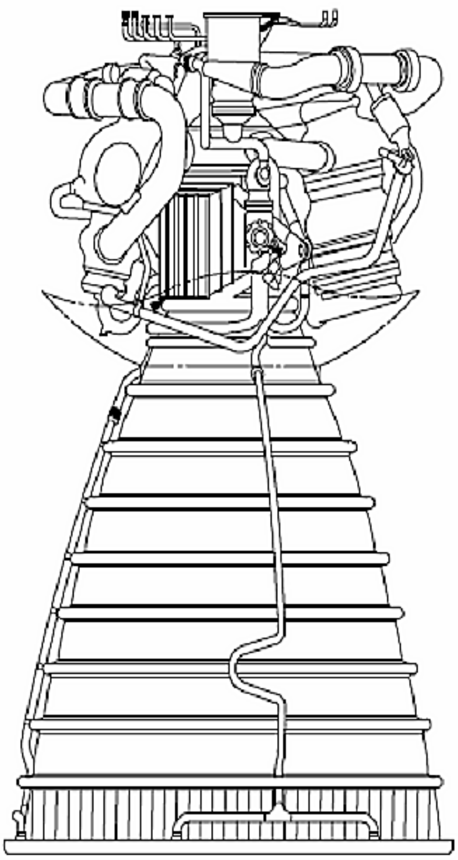


È facile convincersi che, ***per raggiungere*** $M^2 = 1$, il condotto deve presentare una ***sezione di minimo***.

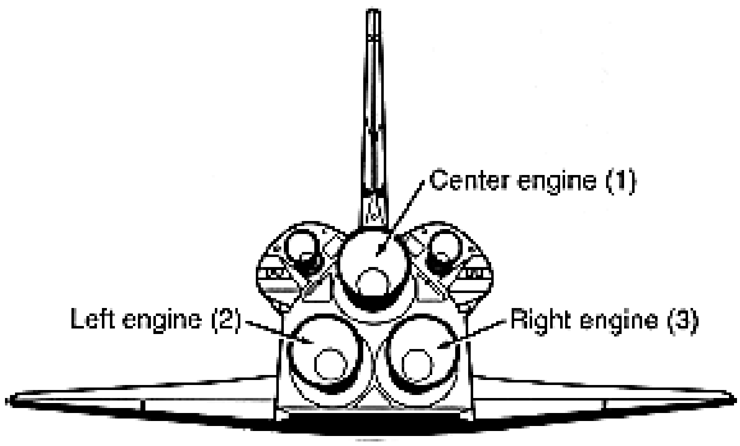
Infatti, se la sezione presentasse un massimo, una corrente subsonica che si muovesse verso detta sezione decelererebbe, mentre una corrente supersonica accelererebbe, senza mai poter raggiungere $M^2 = 1$.

Quando $M^2 = 1$ e quindi $dA = 0$, si può avere sia $dV = 0$, che $dV \neq 0$, e cioè ***il passaggio da moto subsonico a supersonico, o viceversa***;

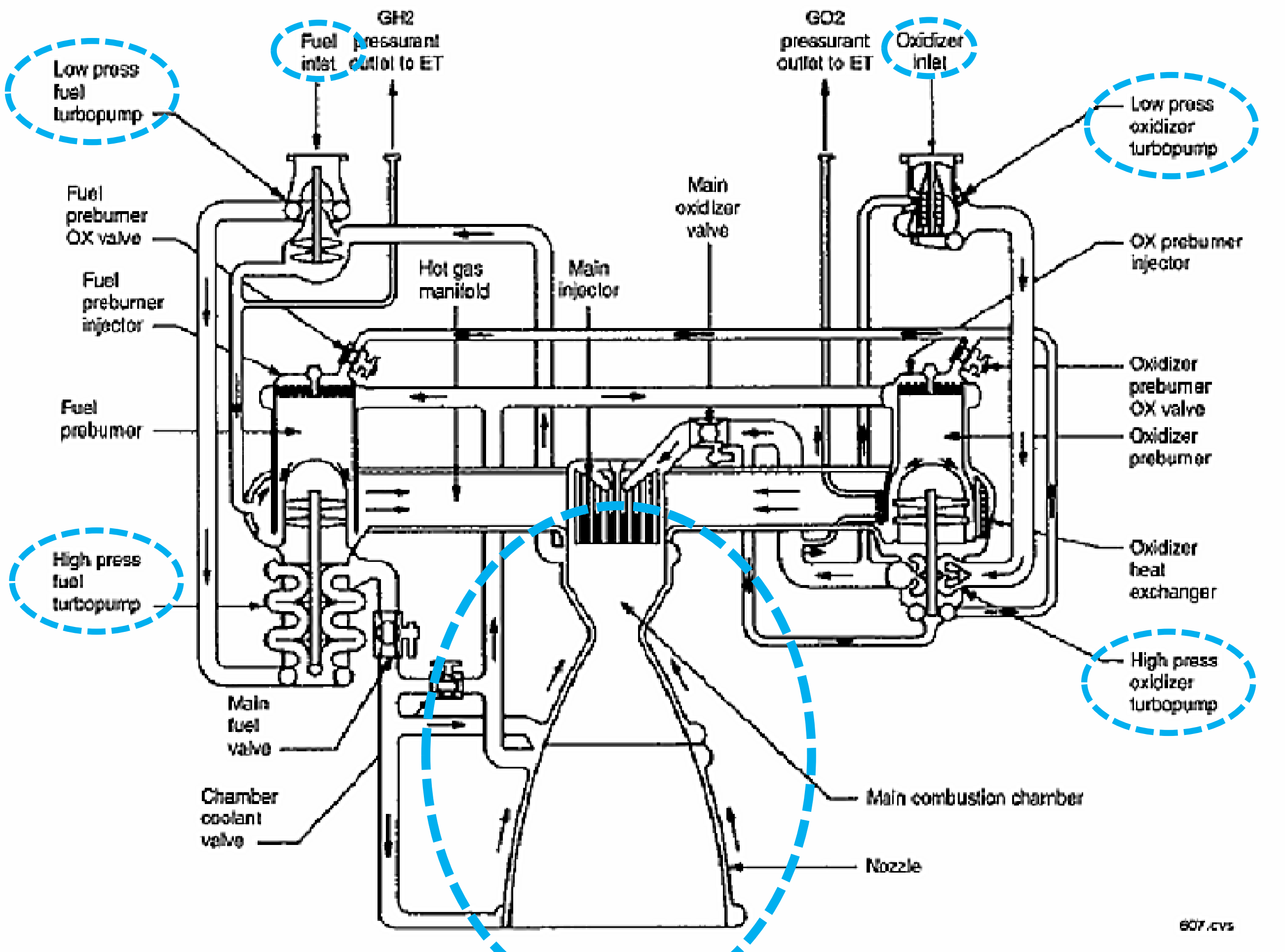
Space Shuttle as seen from its back with fired engines



Space Shuttle Main Engine

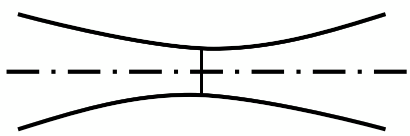


Main Engine Numbering System



Main Engine Schematic

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE



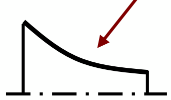
$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}\left(M^2 - 1\right)$$

La condizione $dA = 0$ (**gola del condotto**, per la quale l'area è minima) può comportare $dV \neq 0$ solo se $M^2 = 1$, potendosi comunque avere, anche per $M^2 = 1$, $dV = 0$.

Il punto $M^2 = 1$ (che comporta $dA = 0$) è quindi un ***punto di biforcazione*** della soluzione e cioè del comportamento del fluido poiché questo può:

- ***passare da moto subsonico a supersonico, ovvero ritornare ancora subsonico***
- ***passare da moto supersonico a subsonico, ovvero ritornare ancora supersonico***;

In un condotto convergente ($dA < 0$), ***un moto subsonico (risp. supersonico) può solo accelerare (risp. decelerare) fino a*** $M = 1$.



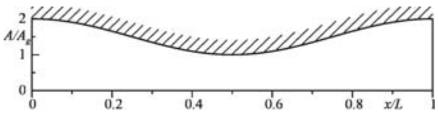
INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

Per un gas più che perfetto sarà in seguito ricavata la relazione:

$$\frac{dV}{V} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} \frac{dM}{M}$$

che sostituita nell'equazione:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V}\left(M^2 - 1\right)$$



diventa:

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

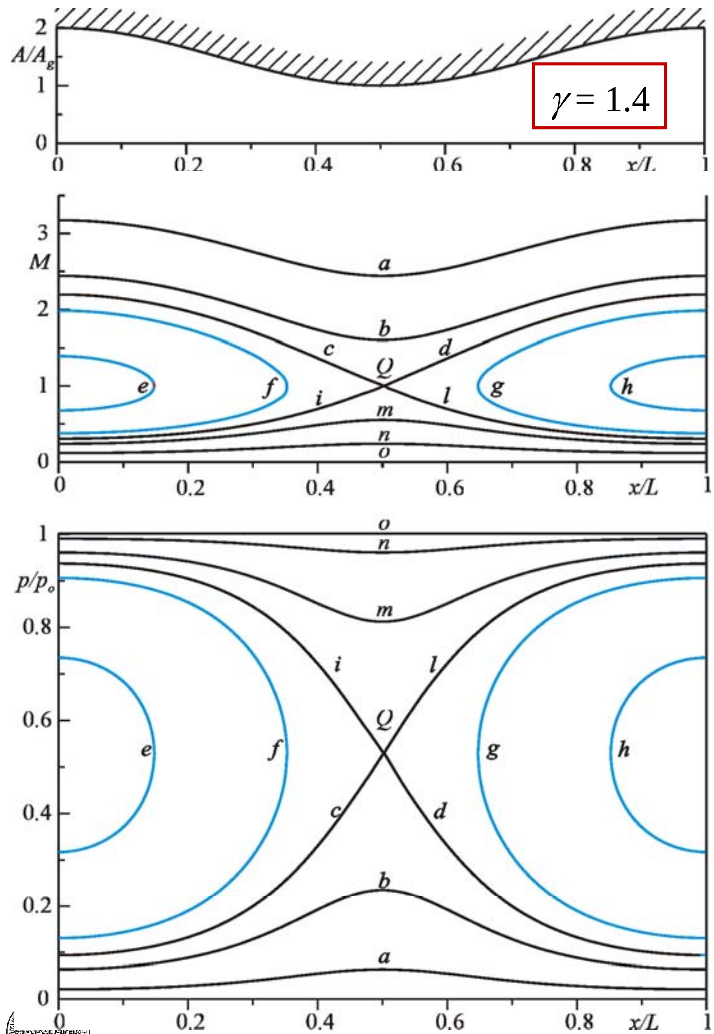
la cui soluzione è:

$$\boxed{\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}$$

Per $M = 1$:
$A = A^*$

Dato ora un ugello convergente divergente di cui sia nota la distribuzione dell'area della sua sezione retta $A = A(x)$ in funzione della ascissa *x* fissata lungo l'asse del condotto, si ha.

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{\left(M^2 - 1\right) A(x)} \frac{dA(x)}{dx}$$



Tutte le soluzioni

INFLUENZA DEL NUMERO DI MACH IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

$$A/A_g = 0.5\cos(2\pi\, x/L) + 1.5$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{\left(M^2 - 1\right) A(x)} \frac{dA(x)}{dx}$$

Le curve colorate e, f, g e h non rappresentano soluzioni del problema perché non connettono gli stati a monte con quelli a valle e prevedono $M = 1$ in una sezione diversa dalla sezione di gola.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

$$\frac{p}{p_o} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$