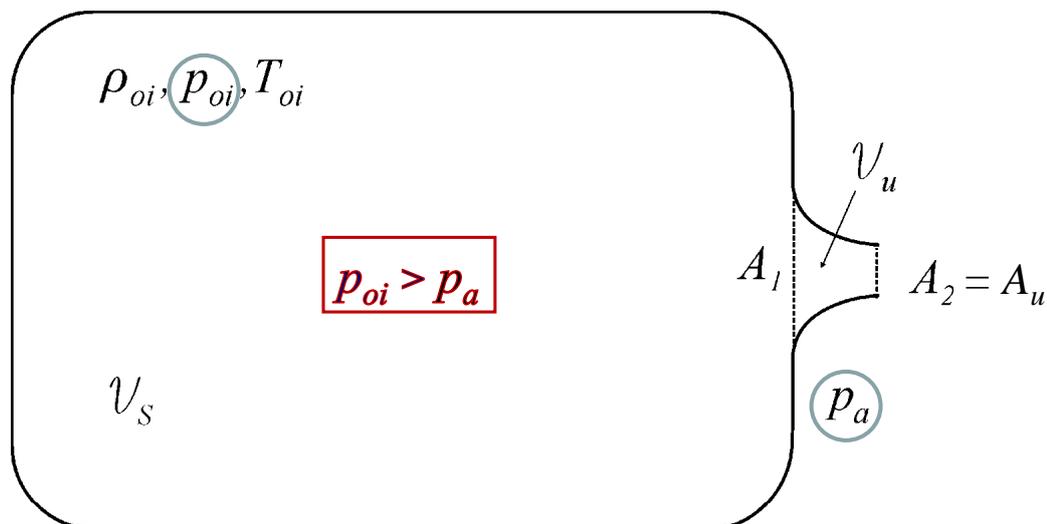


SVUOTAMENTO DI UN SERBATOIO MEDIANTE UN UGELLO CONVERGENTE

Si consideri il problema già posto in precedenza di un serbatoio, schematicamente rappresentato in figura, in cui sia contenuto un gas avente inizialmente una pressione p_{oi} .

Questo serbatoio sia collegato ad un ugello semplicemente convergente che scarica in un ambiente alla pressione p_a .



Se il volume dell'ugello è molto minore di quello del serbatoio, durante lo svuotamento di quest'ultimo, il moto nell'ugello si può considerare quasi-stazionario, seppure con una pressione di ristagno p_o variabile nel tempo.

Ritenendo valida anche l'ipotesi di moto quasi unidimensionale nell'ugello e poichè il volume del serbatoio è costante, l'applicazione dell'equazione di conservazione della massa al sistema costituito da serbatoio più ugello conduce alla relazione:

$$V_s \frac{d\rho_o}{dt} + \rho_u V_u A_u = 0$$

Si supponga dapprima valida la relazione $p_{oi} / p_a \gg 1$ per cui, durante lo svuotamento del serbatoio fino a che la p_o/p_a sarà maggiore della p_o/p_a^* , il moto del fluido nella sezione di uscita dell'ugello si può considerare sonico.

Per l'ipotesi fatta e assumendo il modello di gas più che perfetto, **il secondo termine della relazione precedente può essere valutato mediante la:**

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^* \quad \boxed{p_{oi} / p_a \gg 1}$$

così che detta relazione diventa:

$$V_s \frac{d\rho_o}{dt} + \frac{p_o A_u}{a_o} \psi^* = 0$$



Nel derivare la precedente relazione, per la valutazione dell'integrale di volume della:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_D \rho \underline{V} \cdot \underline{n} dD = 0$$

sono state **trascurate le variazioni della densità in prossimità dell'ugello** perchè di piccolo volume rispetto al serbatoio, ossia la densità è stata posta ovunque uguale a quella di ristagno (nel serbatoio). Inoltre si è fatto uso della:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^* \quad \boxed{p_{oi} / p_a \gg 1}$$

valida per moti unidimensionali e stazionari, perchè nell'ugello il moto può essere considerato quasi unidimensionale e quasi stazionario. Nell'equazione:

$$V_s \frac{d\rho_o}{dt} + \frac{p_o A_u}{a_o} \psi^* = 0$$

le quantità p_o , ρ_o e a_o sono, di solito, variabili nel tempo. Esse, comunque, **non sono indipendenti tra loro** sia perchè per un gas più che perfetto si ha:

$$a_o = \sqrt{\gamma p_o / \rho_o}$$

sia perchè è necessario fare un'ipotesi sul tipo di **trasformazione termodinamica** che il gas contenuto nel serbatoio subisce durante lo svuotamento.



Infatti, se il gas, in partenza, ha la stessa temperatura delle pareti del serbatoio, la sua trasformazione termodinamica sarà **inizialmente adiabatica**, poiché il gas non è in grado di scambiare calore con il serbatoio stesso.

Però, la progressiva diminuzione della pressione nel serbatoio provocherà una corrispondente diminuzione della temperatura che, dando luogo ad uno scambio termico tra il serbatoio ed il gas, tenderà successivamente a mantenere quest'ultimo **isotermo**, sia pure ad una temperatura inferiore a quella iniziale.

Questa condizione sarà raggiunta tanto prima, e con una differenza di temperatura tanto minore, quanto più elevati sono il rapporto superficie/volume del serbatoio ed il rapporto tra la capacità termica del serbatoio e quella del gas.

Si pensi, ad esempio, al caso in cui il serbatoio sia costituito da una tubazione relativamente lunga, caso per il quale la trasformazione diventerà rapidamente isoterma.

Si può quindi concludere che i **due casi limite** per la trasformazione termodinamica del gas all'interno del serbatoio sono la **trasformazione isoterma** e la **adiabatica reversibile**.



Per quanto riguarda in particolare la trasformazione **isoterma**, la:

$$\mathcal{V}_s \frac{d\rho_o}{dt} + \frac{p_o A_u}{a_o} \psi^* = 0$$

si trasforma in una semplice equazione differenziale del primo ordine alle derivate ordinarie, a variabili immediatamente separabili. Infatti si ha ($T_o = T_{oi}$):

$$\frac{\mathcal{V}_s}{RT_o} \frac{dp_o}{dt} + \frac{A_u \psi^*}{a_o} p_o = 0$$

o in altra forma:

$$\frac{\gamma \mathcal{V}_s}{a_o} \frac{dp_o}{dt} + A_u \psi^* p_o = 0$$

per cui, separando le variabili p_o e t :

$$\frac{dp_o}{p_o} = - \frac{A_u \psi^* a_o}{\gamma \mathcal{V}_s} dt$$

e, integrando con la condizione iniziale $p_o = p_{oi}$, **si ottiene l'espressione:**

$$\ln \frac{p_o}{p_{oi}} = - \frac{A_u a_o \psi^*}{\gamma \mathcal{V}_s} t = - \frac{t}{\theta} \quad ;$$

$$\theta = \frac{\gamma \mathcal{V}_s}{A_u a_o \psi^*}$$



$$\cancel{e} \ln \frac{p_o}{p_{oi}} = - \frac{A_u a_o \psi^*}{\gamma \mathcal{V}_s} t = - \frac{t}{\theta} \rightarrow \frac{p_o}{p_{oi}} = \exp \left(- \frac{A_u a_o \psi^*}{\gamma \mathcal{V}_s} t \right) = \exp (- t/\theta)$$

La formula riquadrata rappresenta la **soluzione cercata**.

Tenendo conto che $T_o = T_{oi}$, si possono ricavare anche i rapporti:

$$\frac{\rho_o}{\rho_{oi}} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_i} = \frac{p_o}{p_{oi}}$$

dove \mathcal{M} è la massa contenuta nel serbatoio al tempo t e \mathcal{M}_i la massa iniziale. La quantità:

$$\theta = \frac{\gamma \mathcal{V}_s}{A_u a_o \psi^*}$$

rappresenta la **costante di tempo** del fenomeno nel senso che, per $t = \theta$, la pressione, la densità e la massa di gas nel serbatoio si riducono al 36.8% = e^{-1} del loro valore iniziale e la quantità

$$- 1/\theta$$

rappresenta la pendenza sul piano $p_o / p_{oi} - t$ della curva che descrive il fenomeno all'istante iniziale $t = 0$.



Si vuole ora determinare l'andamento della pressione nel serbatoio nel caso in cui la trasformazione termodinamica all'interno di quest'ultimo sia **adiabatica reversibile**.

In questo caso la relazione:

$$\mathcal{V}_s \frac{d\rho_o}{dt} + \frac{p_o A_u}{a_o} \psi^* = 0$$

diventa:

$$\frac{\mathcal{V}_s}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_o}{T_o} \right) + \frac{A_u \psi^*}{\sqrt{\gamma} R} \frac{p_o}{\sqrt{T_o}} = 0$$

in cui, però, bisogna tener conto che sono **contemporaneamente variabili sia la pressione, che la temperatura di ristagno**.

Queste ultime sono comunque legate tra di loro dalla relazione tra la temperatura e la pressione:

$$T_o = T_{oi} \left(\frac{p_o}{p_{oi}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

valida per una trasformazione adiabatica reversibile.



In questo modo si può, ad esempio, esprimere la temperatura in funzione della pressione e calcolare le due quantità variabili della:

$$\frac{\mathcal{V}_s}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_o}{T_o} \right) + \frac{A_u \psi^*}{\sqrt{\gamma} R} \frac{p_o}{\sqrt{T_o}} = 0$$

ovvero le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_o}{T_o} \right) &= \frac{p_{oi}^{(\gamma-1)/\gamma}}{T_{oi}} \frac{d}{dt} p_o^{1/\gamma} = \\ &= \frac{p_{oi}^{(\gamma-1)/\gamma}}{\gamma T_{oi}} p_o^{(1-\gamma)/\gamma} \frac{dp_o}{dt}; \end{aligned}$$

e:

$$\frac{p_o}{\sqrt{T_o}} = \frac{p_{oi}^{(\gamma-1)/2\gamma}}{\sqrt{T_{oi}}} p_o^{(\gamma+1)/2\gamma}$$

che sostituite nell'equazione in alto danno:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{V}_s}{\gamma R T_{oi}} p_{oi}^{(\gamma-1)/\gamma} p_o^{(1-\gamma)/\gamma} \frac{dp_o}{dt} + \\ + \frac{A_u \psi^*}{\sqrt{\gamma} R T_{oi}} p_{oi}^{(\gamma-1)/2\gamma} p_o^{(\gamma+1)/2\gamma} = 0 \end{aligned}$$

$$T_o = T_{oi} \left(\frac{p_o}{p_{oi}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$



$$\frac{V_s}{\gamma RT_{oi}} p_{oi}^{(\gamma-1)/\gamma} p_o^{(1-\gamma)/\gamma} \frac{dp_o}{dt} + \frac{A_u \psi^*}{\sqrt{\gamma RT_{oi}}} p_{oi}^{(\gamma-1)/2\gamma} p_o^{(\gamma+1)/2\gamma} = 0$$

$$\theta_i = \frac{\gamma V_s}{A_u a_{oi} \psi^*}$$

infine, semplificando, si ha:

$$p_{oi}^{(\gamma-1)/2\gamma} p_o^{(1-3\gamma)/2\gamma} dp_o = -\gamma d(t/\theta_i)$$

in cui, questa volta, il pedice i è necessario in a_o a causa della sua variabilità.

L'integrazione dell'equazione differenziale precedente conduce alla relazione:

$$\frac{2\gamma}{1-\gamma} \left(\frac{p_o}{p_{oi}} \right)^{(1-\gamma)/2\gamma} = -\gamma \frac{t}{\theta_i} + cost$$

nella quale la costante può essere determinata imponendo che per $t = 0$ si abbia $p_o = p_{oi}$:

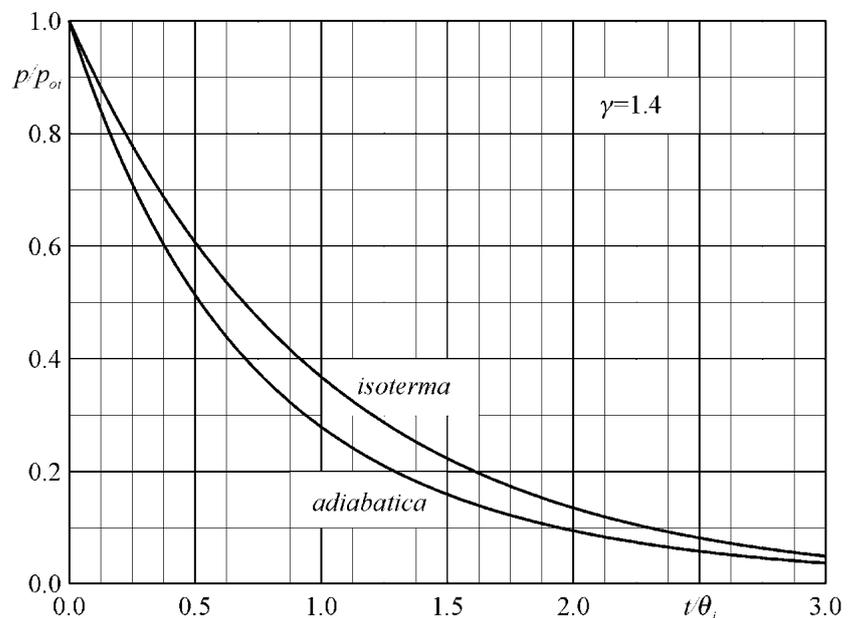
$$cost = \frac{2\gamma}{1-\gamma}$$

ottenendo infine:

$$\frac{p_o}{p_{oi}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{t}{\theta_i} \right)^{2\gamma/(1-\gamma)}$$



$$\frac{p_o}{p_{oi}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{t}{\theta_i} \right)^{2\gamma/(1-\gamma)}$$



Questa relazione esprime la legge con la quale la pressione diminuisce nel serbatoio in funzione del tempo, qualora la trasformazione al suo interno sia **adiabatica e reversibile**.

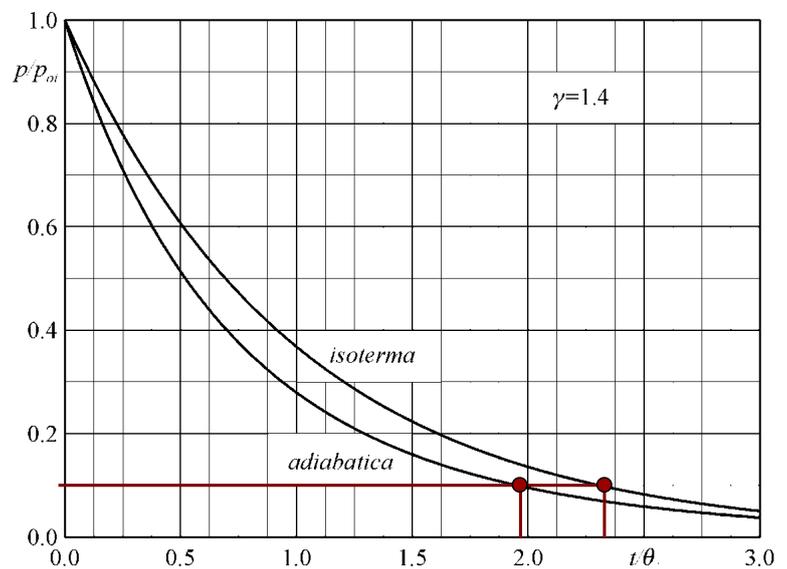
La **pendenza iniziale** della curva che descrive il fenomeno sul piano $p_o/p_{oi} - t$ si può ottenere calcolando la derivata rispetto a t per $t = 0$. Essa risulta pari alla quantità $-\gamma/\theta_i$ e cioè a γ volte l'analoga pendenza per il caso isoterma.

Ciò è evidente anche dalla figura nella quale, per i due tipi di trasformazione, sono stati rappresentati gli andamenti di p_o/p_{oi} in funzione del rapporto adimensionale t/θ_i . Il pedice i vale solo per l'adiabatica reversibile.



Dal diagramma si nota che, per $t/\theta_i \cong 1.95$ nel caso dell'adiabatica e per $t/\theta_i \cong 2.3$ per l'isoterma, la pressione nel serbatoio si riduce a **circa un decimo di quella iniziale**.

La più rapida diminuzione della pressione di ristagno per il caso adiabatico è dovuta alla diminuzione della temperatura di ristagno che, facendo diminuire la a_o , fa aumentare la portata di massa effluente dall'ugello.



Utilizzando le:

$$\frac{v}{v_o} = \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{c_v/R} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

e la:

$$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$



si possono ricavare anche i rapporti delle altre grandezze termodinamiche in funzione del tempo:

$$\frac{p_o}{p_{oi}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{t}{\theta_i}\right)^{2\gamma/(1-\gamma)}$$

$$\frac{T_o}{T_{oi}} = \left(\frac{p_o}{p_{oi}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{t}{\theta_i}\right)^{-2}$$

$$\frac{\rho_o}{\rho_{oi}} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_i} = \left(\frac{p}{p_{oi}}\right)^{1/\gamma} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{t}{\theta_i}\right)^{2/(1-\gamma)}$$

Le formule prima indicate per l'ugello convergente (isoterma e adiabatica reversibile) sono applicabili anche al caso di un ugello convergente divergente sostituendo all'area di uscita, l'area di gola dell'ugello.

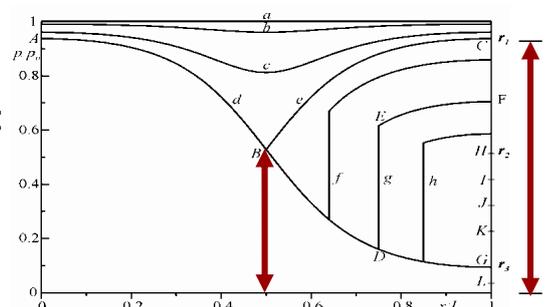
L'unica differenza tra i due casi consiste nel fatto che, mentre per l'ugello convergente la validità della trattazione è legata alla condizione:

$$p_a/p_o < p^*/p_o$$

per l'ugello convergente divergente deve essere:

$$p_a/p_o < r_1 > p^*/p_o$$

che garantisce $M = 1$ nella sezione di gola.



Si supponga ora valida un'altra ipotesi sul valore della pressione iniziale all'interno del serbatoio e che cioè:

$$(p_{oi} - p_a) / p_a \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta p / p_a \ll 1$$

Si è visto che in tale ipotesi, il moto nell'ugello si può ritenere **incompressibile** e la portata nella sezione di uscita dell'ugello può essere calcolata con la:

$$\dot{m} = A_u \sqrt{2(p_o - p_a)\rho} = A_u \sqrt{2\rho \Delta p}$$

per cui in questo caso si ha:

$$V_s \frac{dp_o}{dt} + A_u \sqrt{2\rho_u (p_o - p_a)} = 0$$

Poiché:

$$p_o = \rho_o R T_o$$

e, per l'incompressibilità:

$$\rho_o = \rho_u$$

l'equazione differenziale che governa il fenomeno diventa:

$$\frac{V_s}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_o}{T_o} \right) + A_u \sqrt{\frac{2 p_o (p_o - p_a)}{R T_o}} = 0$$



$$\frac{V_s}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_o}{T_o} \right) + A_u \sqrt{\frac{2 p_o (p_o - p_a)}{R T_o}} = 0$$

Ora, **nell'ipotesi di temperatura T_o costante nel serbatoio**, la precedente relazione diventa:

$$\frac{dp_o}{dt} + \frac{A_u}{V_s} \sqrt{2 R T_o} \sqrt{p_o (p_o - p_a)} = 0$$

Dividendo per p_a e ponendo:

$$\pi = p_o / p_a \quad ; \quad \tau = t/t_r \quad ; \quad t_r = \frac{V_s}{A_u \sqrt{2 R T_o}}$$

si ottiene:

$$\frac{d\pi}{\sqrt{\pi(\pi-1)}} = -d\tau$$

che integrata, con la condizione iniziale $\pi = \pi_i$ per $\tau = 0$, dà luogo a:

$$\ln \left[\frac{2\pi - 1 + 2\sqrt{\pi(\pi-1)}}{2\pi_i - 1 + 2\sqrt{\pi_i(\pi_i-1)}} \right] = -\tau$$



$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2 \quad \ln \left[\frac{2\pi - 1 + 2\sqrt{\pi(\pi - 1)}}{2\pi_i - 1 + 2\sqrt{\pi_i(\pi_i - 1)}} \right] = -\tau \quad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$$

Esplicitando il rapporto π in funzione di τ :

$$\pi = p_o / p_a$$

$$2\pi = 1 + \left[\pi_i + \sqrt{\pi_i(\pi_i - 1)} - \frac{1}{2} \right] \exp(-\tau) + \left[\pi_i - \sqrt{\pi_i(\pi_i - 1)} - \frac{1}{2} \right] \exp \tau$$

$$\tau = t/t_r$$

$$t_r = \frac{V_s}{A_u \sqrt{2RT_o}}$$

si ottiene infine:

$$\pi = \frac{1}{2} + \left(\pi_i - \frac{1}{2} \right) \cosh \tau + \sqrt{\pi_i(\pi_i - 1)} \sinh \tau$$

Si può ricavare facilmente che **il tempo necessario per il quale la pressione nel serbatoio diventi uguale a quella atmosferica** ($\pi = 1$) è dato da:

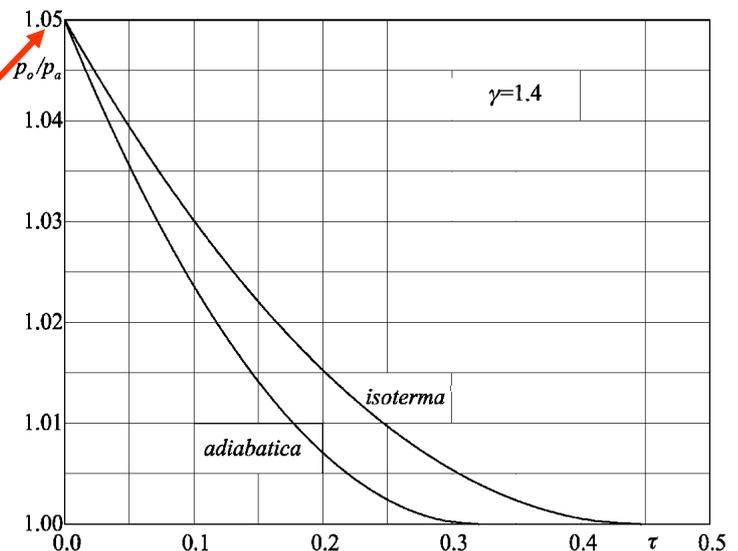
$$t = \frac{V_s}{A_u \sqrt{2RT_o}} \ln \left[2 \frac{p_{oi}}{p_a} - 1 + 2 \sqrt{\frac{p_{oi}}{p_a} \left(\frac{p_{oi}}{p_a} - 1 \right)} \right]$$



Nella figura è riportato l'andamento del rapporto $\pi = p_o / p_a$ in funzione del tempo adimensionale $\tau = t / t_r$ per il caso particolare di

$$\pi_i = p_{oi} / p_a = 1.05$$

Nella stessa figura è anche riportato lo stesso andamento nell'ipotesi di espansione adiabatica (e non isoterma) all'interno del serbatoio e valutando la portata effluente dall'ugello mediante la formula esatta:



$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

Per questa seconda condizione, il tempo di riferimento è stato calcolato alla T_{oi} poiché la temperatura di ristagno (nel serbatoio), sia pure debolmente, varia a causa dell'espansione adiabatica.

Anche in questo caso, come nel precedente, l'espansione adiabatica conduce ad uno svuotamento più rapido del serbatoio.



STABILITÀ DI UN'ONDA D'URTO IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE

In precedenza, analizzando il funzionamento degli ugelli convergenti divergenti, si è osservato che, per opportuni valori del rapporto p_a/p_0 , è possibile avere un funzionamento con un'onda d'urto normale nel tratto divergente dell'ugello.

In quel caso **è stato implicitamente supposto che l'onda si trovasse in equilibrio stabile.**

Per equilibrio stabile si intende che, se a partire da una posizione di equilibrio l'onda accidentalmente si sposta, essa tende a ritornare nella sua primitiva posizione di equilibrio.

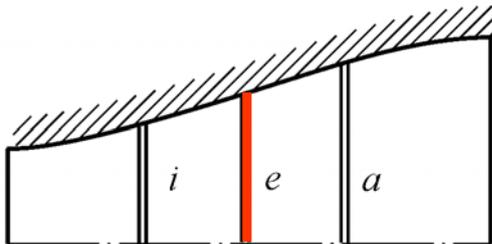
Sarebbe invece sbagliato pensare che un'onda d'urto normale sia stabile anche in un condotto convergente.

In questo contesto si analizzerà brevemente la stabilità di un'onda d'urto in un condotto avente sezione ad area variabile sia in diminuzione (convergente), che in aumento (divergente).

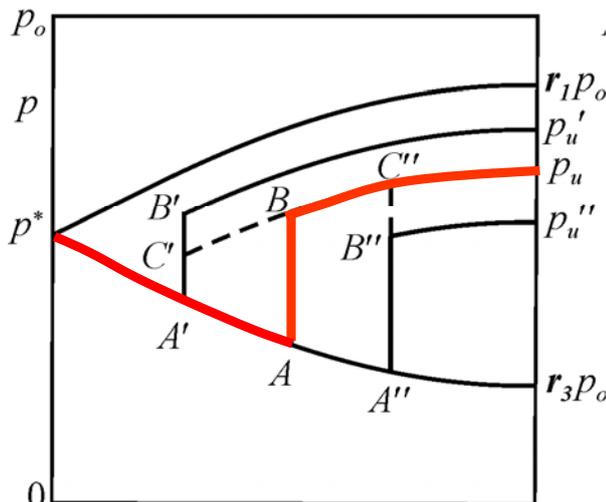
Le ipotesi su cui si basa la trattazione sono sempre quelle di **moto quasi unidimensionale, quasi stazionario e di moto isoentropico, tranne che attraverso l'onda d'urto stessa.**



STABILITÀ DI UN'ONDA D'URTO IN UN CONDOTTO AD AREA VARIABILE



Per verificare che un'onda d'urto si trova in equilibrio stabile in **un condotto divergente**, si supponga che, come mostrato in figura, **l'onda si trovi inizialmente in una situazione di equilibrio nella sezione e.**

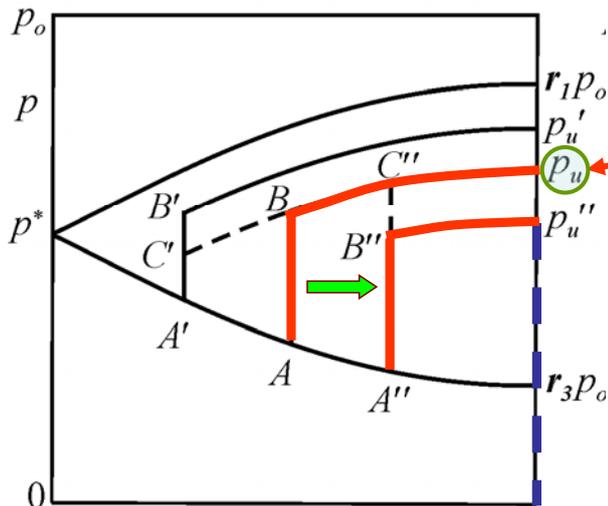
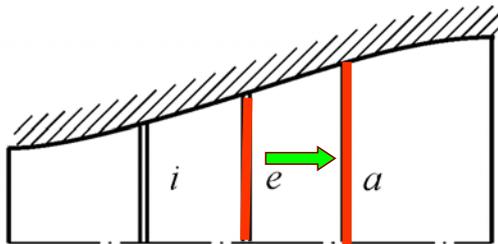


Il moto è inizialmente supersonico e l'onda d'urto normale AB genera la compressione p_B/p_A che lo rende subsonico.

La successiva ricompressione nella restante parte del divergente porta il fluido alla pressione p_u , **uguale alla pressione ambiente p_a** esistente all'uscita del condotto, **che verrà supposta costante.**



ONDA NEL DIVERGENTE



Nella figura in basso sono mostrati, a tratto intero, i diagrammi di pressione anche per altre posizioni dell'onda d'urto.

Si supponga ora che **l'onda**, per qualche motivo, **si sposti leggermente a valle nella sezione a** (in avanti).

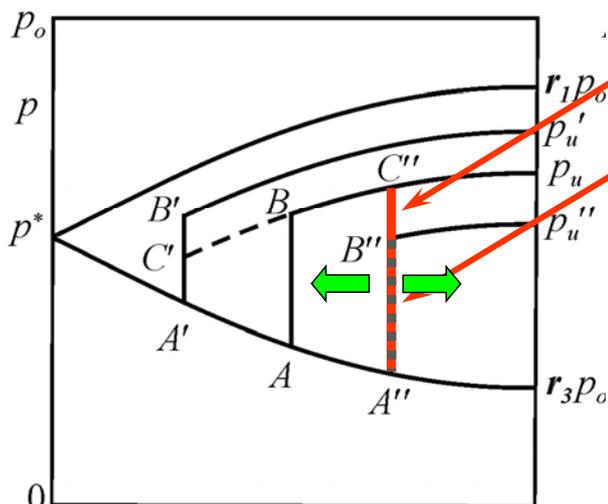
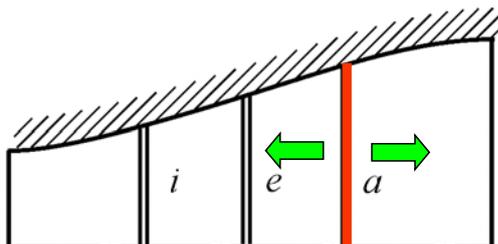
Si vede che, per questa posizione dell'onda (sezione **a**), la pressione p''_u all'uscita del condotto divergente è **minore** della pressione ambiente p_a (cioè p_u).

In condizioni stazionarie, tuttavia, la pressione all'uscita deve essere uguale a p_a (cioè p_u) e non può essere influenzata dalla posizione dell'onda.

Infatti, poiché il moto all'uscita dell'ugello è subsonico, la pressione deve soddisfare, ivi la **condizione di Kutta** e la relativa curva di funzionamento deve essere sempre quella che passa per p_u .



ONDA NEL DIVERGENTE



In questa condizione, il moto nel divergente è necessariamente instazionario poiché il rapporto di pressione (p_C''/p_A'') che l'onda, nella sezione **a**, deve garantire per poter arrivare alla p_u , è maggiore di quello che si avrebbe se l'onda fosse in condizioni stazionarie (p_B''/p_A'').

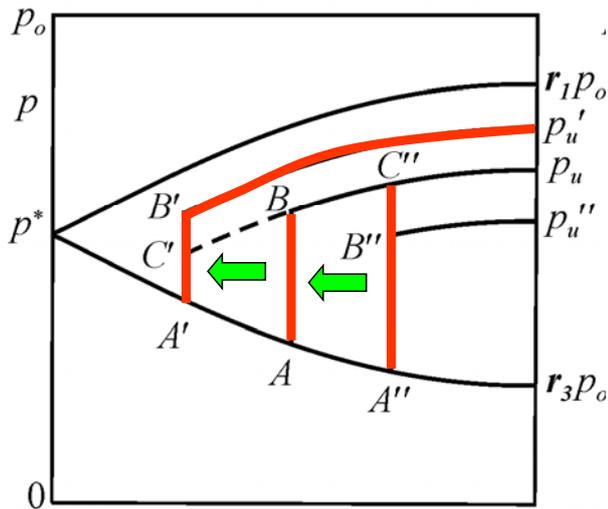
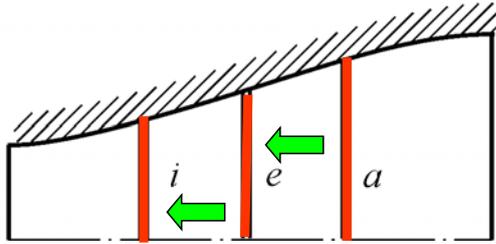
Infatti, per garantire questo maggiore rapporto di pressione, **il numero di Mach effettivo a monte dell'onda** (quello relativo ad un sistema di riferimento che si muove con l'onda) **deve essere senz'altro maggiore**.

Se l'onda muovesse verso valle nella stessa direzione della corrente, questa ultima dovrebbe raggiungere l'onda e **il numero di Mach effettivo si ridurrebbe**.

Quindi, **l'onda deve muoversi verso monte** e cioè **tornare indietro**.



ONDA NEL DIVERGENTE



La necessità di un aumento del Mach effettivo della corrente provoca, quindi, un moto dell'onda che la riporta verso monte

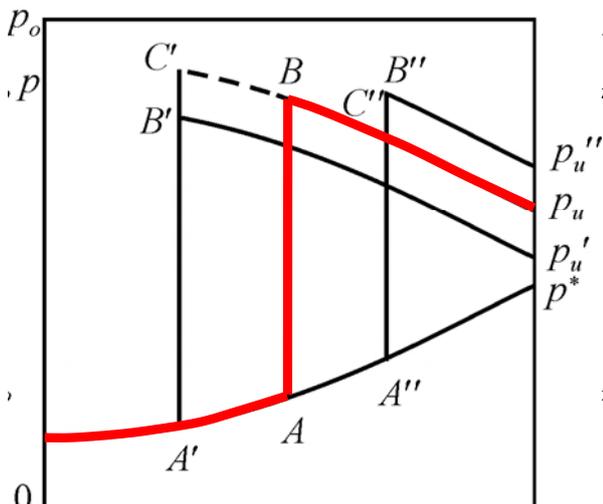
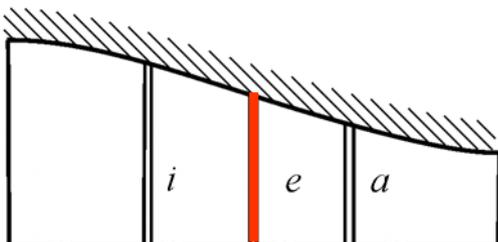
L'onda tende perciò a ritornare verso la posizione *e* di equilibrio che essa aveva inizialmente.

Ne risulta che per un condotto divergente, l'onda è intrinsecamente stabile per tutti i piccoli spostamenti verso valle.

Il caso opposto, piccolo spostamento dell'onda verso monte, indietro (dalla sezione *e* alla sezione *i*) risulta essenzialmente analogo, potendosi fare considerazioni del tutto simili al caso precedente.



ONDA NEL CONVERGENTE



Quando il condotto è convergente gli andamenti della pressione sono completamente differenti da quelli nel divergente, così come mostrato in figura.

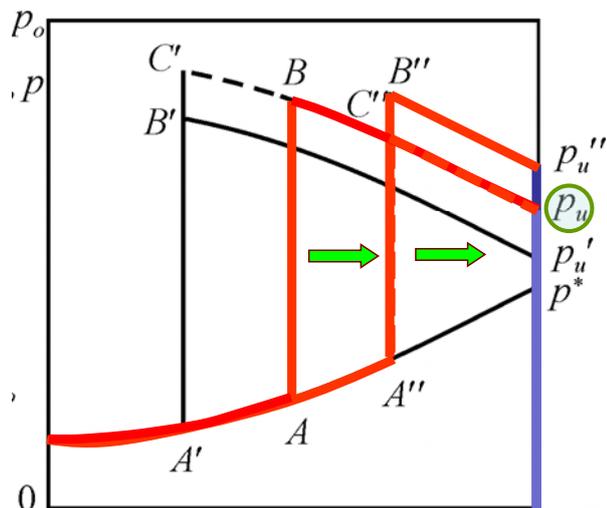
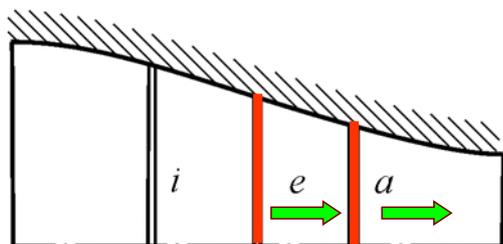
Si supponga nuovamente che l'onda d'urto si trovi in equilibrio nella sezione *e*.

Essendo il fluido inizialmente in moto supersonico, la pressione dapprima aumenta per la diminuzione del numero di Mach dovuta al restringimento della sezione.

A valle dell'onda d'urto normale il moto diventa subsonico e successivamente la pressione tende a diminuire per la diminuzione di area.



ONDA NEL CONVERGENTE



Un eventuale spostamento dell'onda d'urto dalla sezione e a quella **avanti** (a valle), sempre indicata con a , provocherebbe un innalzamento della pressione p''_u all'uscita del condotto rispetto a quella ambiente, cosa che per la condizione di Kutta non può verificarsi.

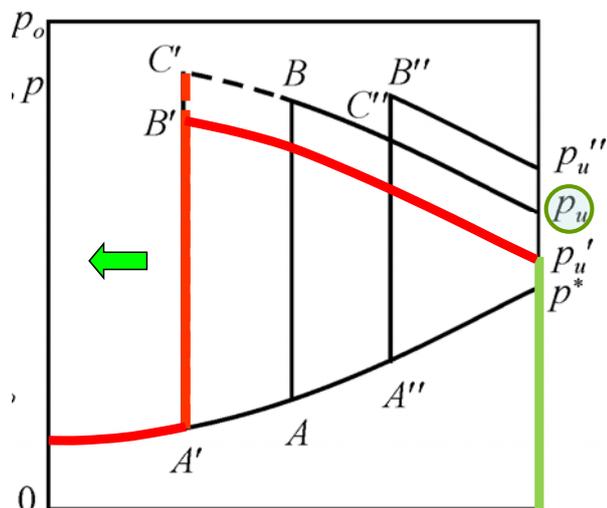
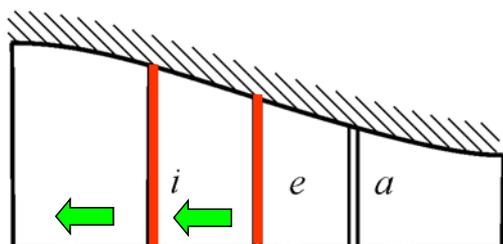
Quindi, in questo caso, il salto di pressione che l'onda dovrebbe garantire nella sezione a ($p_{C''}/p_{A''}$) deve essere minore di quello che si ha se l'onda si trova in condizioni stazionarie ($p_{B''}/p_{A''}$).

L'onda d'urto dovrebbe, di conseguenza, continuare a muoversi verso valle per poter ridurre il numero di Mach effettivo della corrente e la compressione.

Essa verrebbe quindi ingoiata a valle.



ONDA NEL CONVERGENTE



Viceversa, uno spostamento dell'onda d'urto verso monte, **indietro**, provocherebbe una pressione p'_u all'uscita del condotto minore rispetto a quella ambiente, cosa che non è possibile.

Invece, il rapporto di pressione che l'onda, nella sezione i , dovrebbe garantire ($p_{C'}/p_{A'}$) è maggiore di quello che si avrebbe se l'onda fosse in condizioni stazionarie ($p_{B'}/p_{A'}$).

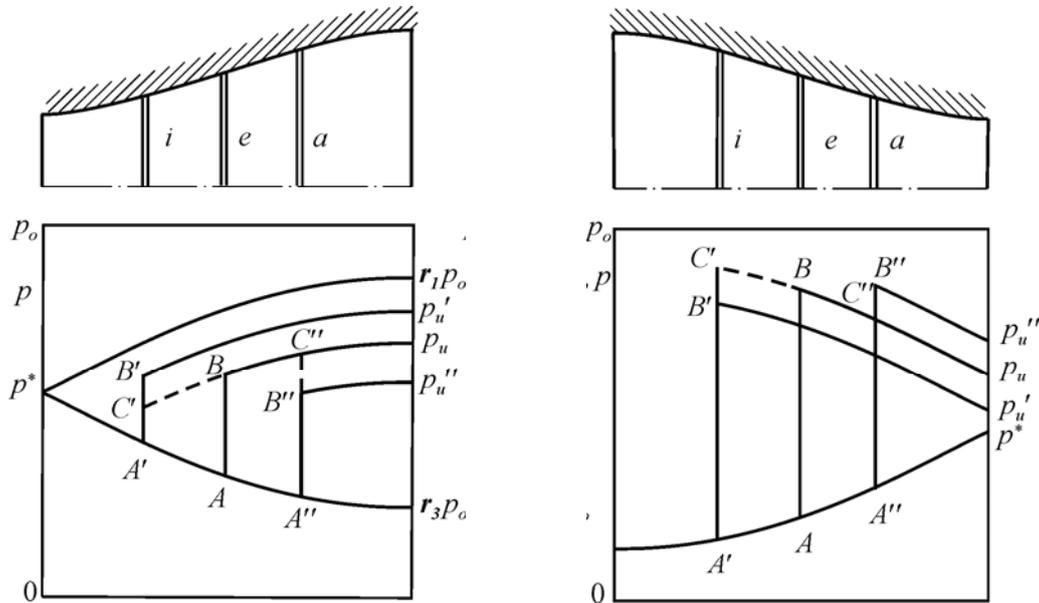
L'onda d'urto dovrebbe quindi continuare a muoversi verso monte aumentando così il numero di Mach effettivo della corrente che la attraversa e la conseguente compressione.

Essa verrebbe, quindi, espulsa a monte del condotto.



Quanto detto mostra che, **in un condotto convergente, l'onda d'urto è instabile** per piccoli spostamenti sia in avanti che indietro e che quindi tende rispettivamente, o ad essere **ingoziata a valle**, ovvero ad essere **espulsa a monte**.

L'analisi della stabilità di un'onda d'urto in condotti a sezione variabile può essere eseguita, partendo dai diagrammi delle due figure, anche in altro modo ipotizzando che, dopo l'onda, il moto continui a seguire la distribuzione di pressione nel condotto corrispondente ad essa per il moto stazionario.



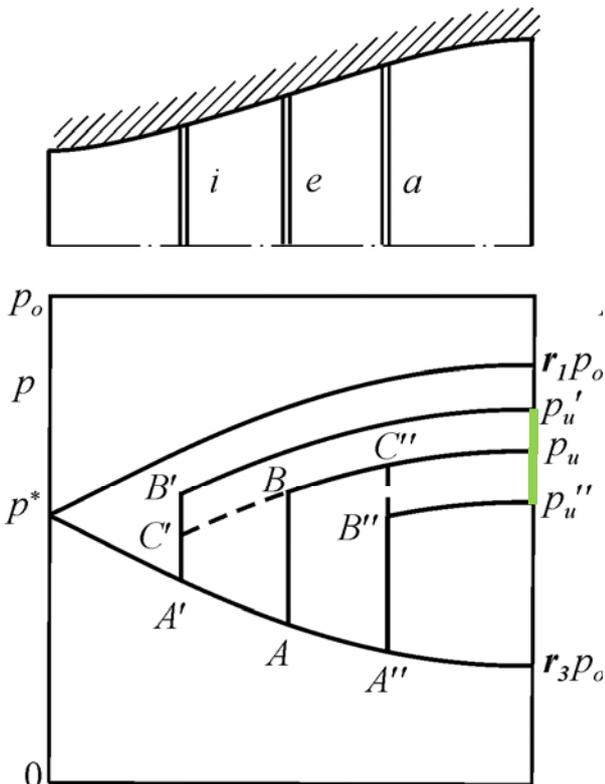
ONDA NEL DIVERGENTE

Nel caso di un condotto divergente si è visto che lo spostamento dell'onda nella sezione ***a*** provoca la diminuzione della pressione p''_u all'uscita del condotto.

Se ciò avvenisse, nella sezione di uscita si avrebbe la presenza di un'ulteriore **onda d'urto** che si **propagherebbe verso monte** perché il moto è sub-sonico.

Questa onda farebbe accelerare il fluido nella direzione di propagazione, quindi rallentandolo e causando, così, anche il **ritorno dell'onda d'urto nella posizione di equilibrio**.

Di converso, lo spostamento verso monte dell'onda causerebbe un aumento della pressione d'uscita rispetto all'ambiente e, quindi, la formazione di un treno di onde d'espansione che propagandosi verso monte alla velocità del suono, accelererebbe il fluido verso valle.



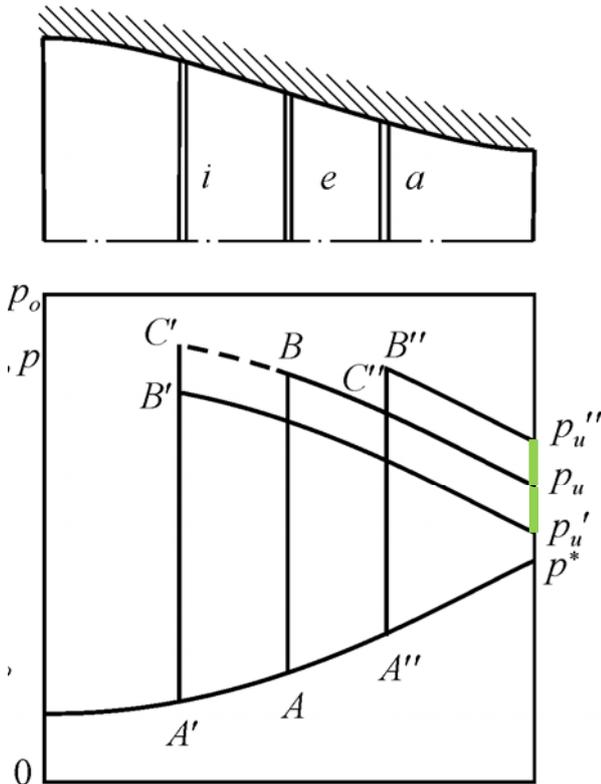
ONDA NEL CONVERGENTE

Per un condotto convergente il discorso è del tutto simile.

Per uno spostamento dell'onda d'urto in avanti (sezione a), l'aumento della pressione p''_u all'uscita del condotto provocherebbe la formazione di un ventaglio d'espansione.

Questo ventaglio, propagandosi verso monte e facendo accelerare il fluido nella direzione opposta a quella della sua propagazione, causerebbe anche **l'ulteriore allontanarsi dell'onda d'urto dalla posizione d'equilibrio.**

Viceversa, il contrario accadrebbe nel caso di una perturbazione dell'onda d'urto che la spostasse verso monte.



GALLERIE DEL VENTO SUPERSONICHE

In generale le **gallerie del vento** (o **tunnel del vento**, o **gallerie aerodinamiche**) sono utilizzate per provare modelli di aeroplani, treni, automobili, ponti, etc., o loro componenti, in un opportuno regime di moto.

Nella gran parte dei casi non è possibile né costruire una galleria in cui provare il modello in scala 1:1, né riprodurre, durante le prove, le esatte condizioni termofluidodinamiche che si verificano nella realtà operativa.

Sfruttando **le leggi della similitudine**, si cerca comunque di **simulare i fenomeni di maggiore interesse** quali l'attrito e la compressibilità.

La rilevanza di questi due fenomeni dipende soprattutto dai corrispondenti raggruppamenti adimensionali (quali ad es. **i numeri di Reynolds e di Mach**).

I limiti del corso non consentono una trattazione completa delle problematiche associate alla prova di modelli in galleria

Nel seguito, ci si limiterà a considerare solo alcuni schemi di **gallerie supersoniche** come **applicazione della teoria degli ugelli**.



GALLERIE DEL VENTO SUPERSONICHE

Esistono vari tipi di gallerie del vento supersoniche (dette anche, nella letteratura anglosassone, [supersonic wind tunnels](#)).

Esse si possono dividere in due categorie principali:

- ❖ [stazionarie](#) (o quasi stazionarie) con durate almeno dell'ordine di s ,
- ❖ [non stazionarie](#) (del tipo [shock tunnels](#)) con durate dell'ordine dei ms .

Per la loro importanza, in questo contesto saranno considerate [solo le gallerie supersoniche stazionarie](#).

Questa tipologia di tunnel è generalmente utilizzata quando i tempi di sperimentazione (di prova) devono essere relativamente alti.

Il loro impiego di solito, a meno che non siano di tipo [blow-down](#) con un basso tempo di prova, richiede generalmente una potenza installata molto maggiore di quella relativa ad una galleria non stazionaria.

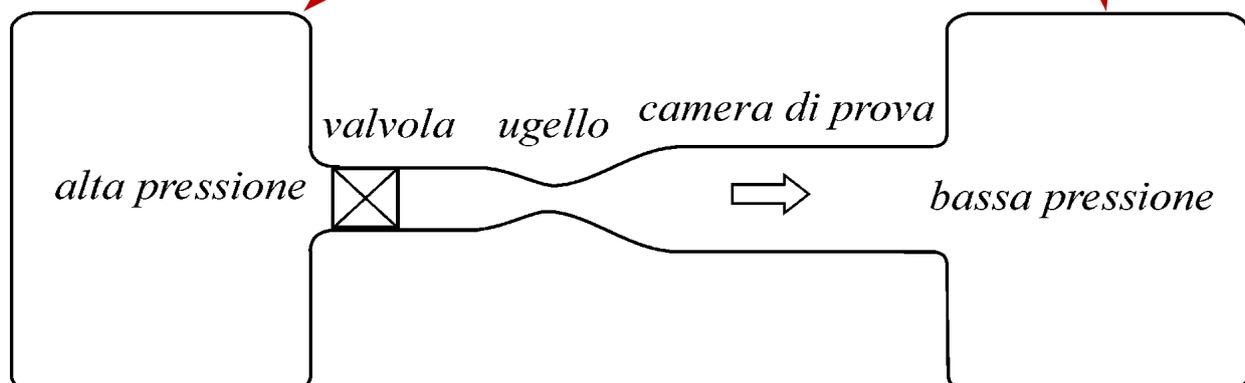
Da tutto ciò deriva l'esigenza di studiare queste gallerie in maniera relativamente accurata, soprattutto al fine di contenerne i consumi di energia.



Un [tunnel supersonico stazionario](#) può essere in generale schematizzato, come mostrato in figura, con un [serbatoio di alimentazione ad alta pressione](#), una [valvola](#), un [ugello convergente divergente](#) che serve ad accelerare il flusso, una [camera di prova](#) ed un [serbatoio a bassa pressione](#).

Nella camera di prova, in inglese [test section](#), (a sezione costante per non far variare ivi il numero di Mach), viene posto il modello da provare così che, in questa zona, il flusso deve essere necessariamente supersonico.

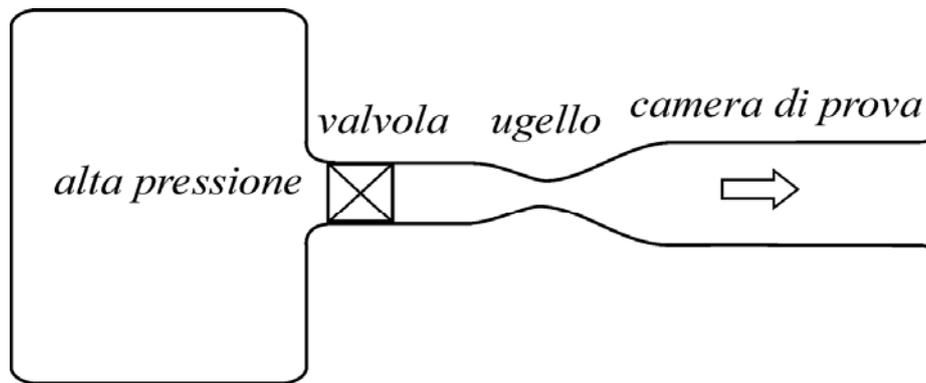
A partire da questo tipo di schematizzazione si possono individuare [diverse possibili configurazioni](#) di gallerie supersoniche.



Nello studio di tutte queste configurazioni si supporrà che il moto possa essere considerato quasi stazionario, unidimensionale, omoenergetico.

Eventuali perdite di pressione sono associate soltanto alle onde d'urto normali presenti nella galleria, e non alle onde d'urto (prevalentemente oblique) dovute alla presenza del modello nella camera di prova, nè agli effetti viscosi lungo la galleria.

Si analizzerà dapprima il caso in cui il serbatoio a bassa pressione sia costituito dall'**ambiente esterno** e cioè che, di fatto, esso non esista e il tunnel scarichi direttamente nell'atmosfera.

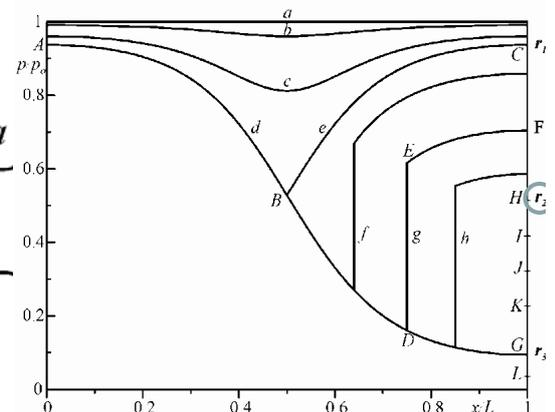
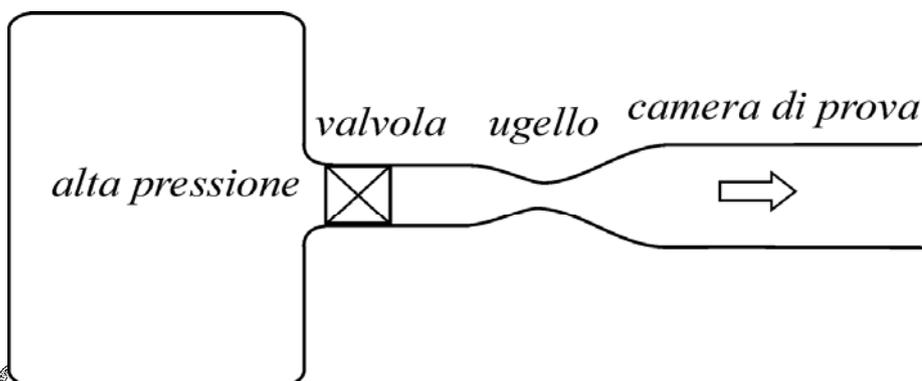


La valvola che collega il serbatoio all'ugello è inizialmente chiusa ed il fluido è quindi ovunque fermo.

All'apertura della valvola, la differenza di pressione tra il serbatoio e l'ambiente fa accelerare il fluido nell'ugello e, **finché il rapporto tra la pressione ambiente e quella di ristagno (all'interno del serbatoio) è minore del rapporto r_2 dell'ugello, nella camera di prova il moto è supersonico.**

Infatti, per il modello proposto, il funzionamento della galleria è identico a quello dell'ugello convergente divergente attaccato ad un serbatoio, con la sola differenza che l'uscita di quest'ultimo è seguita da un tratto a sezione costante che costituisce la camera di prova, nella quale il numero di Mach non varia.

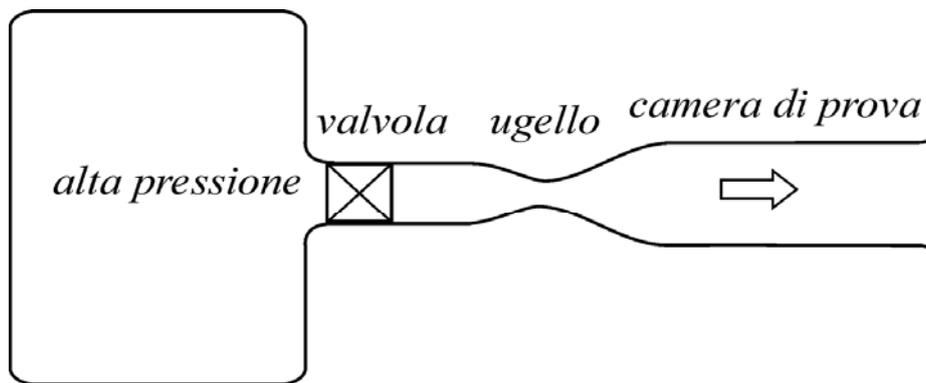
La condizione limite di funzionamento nella camera di prova è, quindi, quella per la quale l'onda d'urto obliqua presente nella sezione di uscita della test section diventa normale.



La **durata di una prova** è calcolabile con le formule relative allo svuotamento di un serbatoio, avendo cura di considerare come limite inferiore per la pressione di ristagno quello derivante dal rapporto r_2 . In particolare, ipotizzando uno svuotamento isoterma del serbatoio di alimentazione, si può valutare il **tempo massimo di prova**:

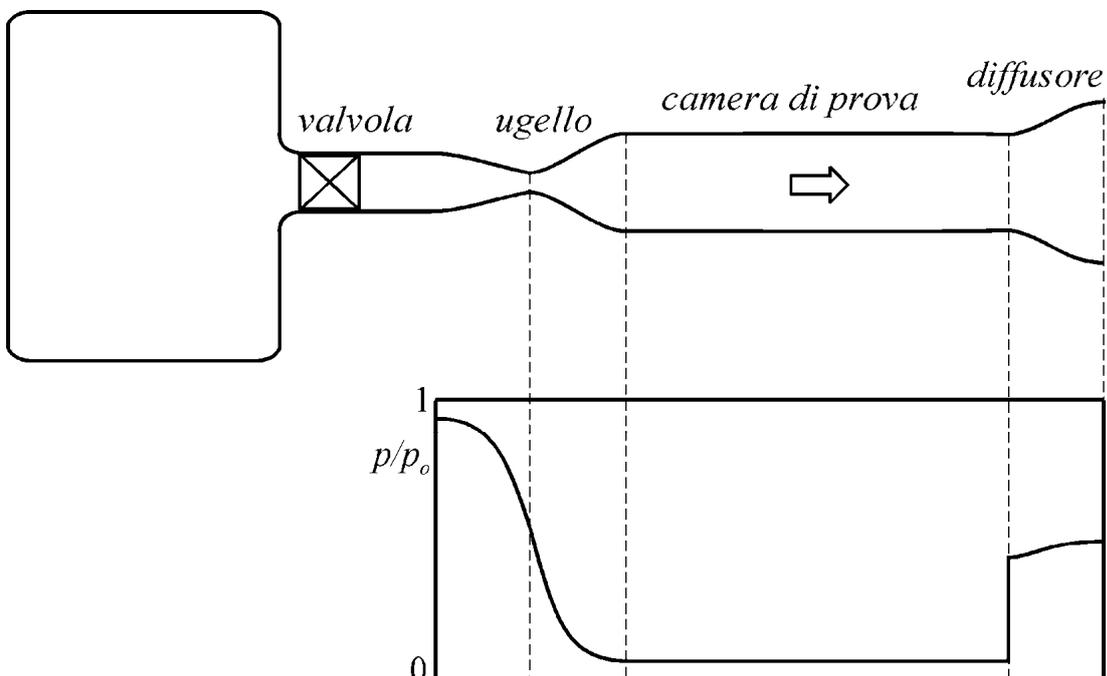
$$\ln \frac{p_o}{p_{oi}} = - \frac{A_u a_o \psi^*}{\gamma V_s} t = - \frac{t}{\theta} \quad \rightarrow \quad t_m = \frac{\gamma V_s}{A_g a_o \psi^*} \ln \frac{p_{oi} r_2}{p_a}$$

Questo limite è puramente **teorico** perché la presenza del modello nella camera di prova provoca certamente la formazione di onde d'urto e la diminuzione della pressione di ristagno farà diminuire il tempo massimo di prova. Inoltre, come si vedrà, anche le perdite di natura viscosa alle pareti causano una ulteriore diminuzione della pressione di ristagno.



Per aumentare il tempo massimo di prova in una galleria di questo tipo è possibile, come mostrato in figura, aggiungere un tratto divergente all'uscita della camera di prova che agisca da **diffusore**.

Infatti, la presenza del divergente dà luogo ad una successiva ricompressione del fluido a valle di quella già prodotta dall'onda d'urto facendo, quindi, aumentare il tempo di prova.



Nei due casi discussi in precedenza, a parte il tempo, più o meno breve, necessario per l'accelerazione iniziale del fluido (cioè, per avviare la galleria), **il moto del fluido attraverso il tunnel supersonico può essere considerato, in prima approssimazione, quasi stazionario.**

Purtuttavia, mentre **il numero di Mach** (che risulta essere fissato dal rapporto delle aree dell'ugello) **rimane praticamente costante** durante tutto il periodo di prova, **il numero di Reynolds relativo al modello potrebbe variare in modo significativo.**

Anche se la temperatura nel serbatoio rimane costante, ciò può accadere qualora la pressione (cioè la densità del fluido) nel serbatoio, e di conseguenza nella camera di prova, fossero soggette ad una forte variazione in diminuzione.

Si ricordi che nel numero di Reynolds appare la densità al numeratore.

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

Per ovviare a questo inconveniente risulta decisamente opportuno introdurre a monte del convergente una **valvola di laminazione che, mantenendo costante la pressione di ristagno, mantiene costante anche la pressione nella camera di prova.**

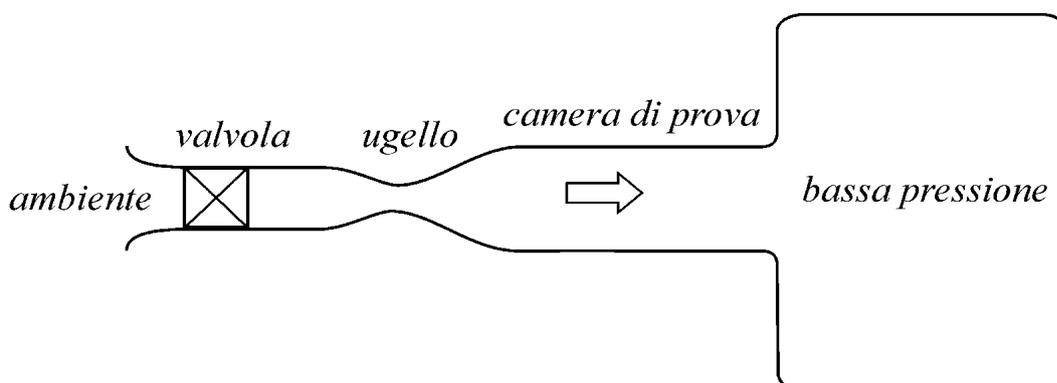


Un'altra possibile configurazione, rappresentata in figura, è quella per la quale **il serbatoio ad alta pressione sia costituito dall'ambiente esterno.**

In questo caso il moto viene generato dalla bassa pressione nel serbatoio, posto a valle della camera di prova, nel quale viene fatto il vuoto.

Al contrario di quanto succede nei due casi precedenti, con questa configurazione **la pressione di ristagno rimane costante**, essendo uguale a quella ambiente, mentre la pressione nella sezione di uscita della camera di prova (cioè quella nel serbatoio a bassa pressione) aumenta con l'andare del tempo.

Anche per questa configurazione, **il moto è supersonico in camera di prova finché** (in assenza del modello) **il rapporto tra la pressione nel serbatoio di vuoto e quella ambiente è minore o uguale del rapporto r_2 , ($p_s \leq r_2 p_a$)** relativo all'ugello.

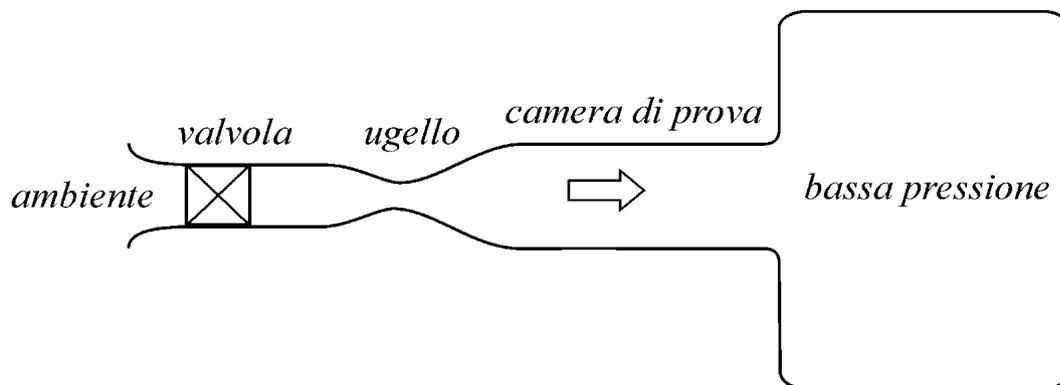


La **temperatura di ristagno** del fluido all'ingresso dell'ugello sarà durante la prova sempre **uguale a quella ambiente**.

Infatti, trascurando gli scambi di energia nel modo calore (sia per le piccole differenze tra la temperatura di parete adiabatica e quella ambiente che per la relativamente bassa lunghezza del condotto), la temperatura di ristagno non varia lungo il condotto quando il fluido attraversa l'ugello.

La improvvisa decelerazione del fluido nel serbatoio non è isoentropica, anche se è omoenergetica, e provoca la conversione dell'energia cinetica ordinata in energia disordinata per cui la temperatura raggiunta dal fluido nel serbatoio risulta in pratica nuovamente uguale a quella dell'ambiente.

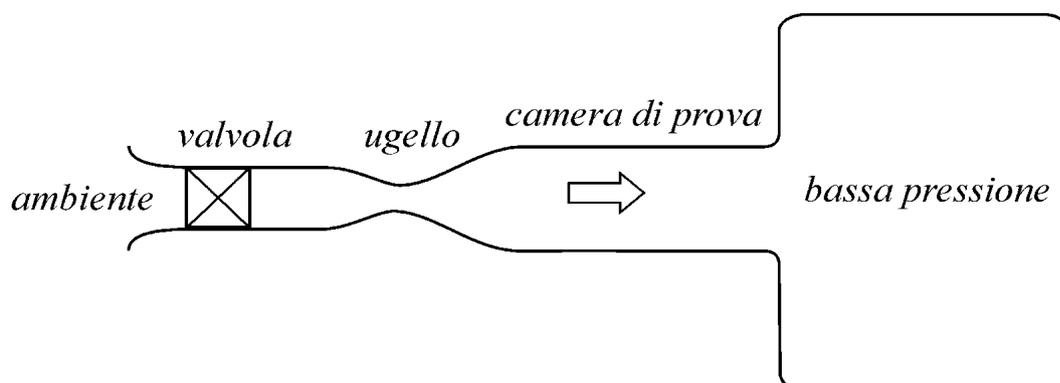
La non isoentropicità della decelerazione del fluido nel serbatoio **non consente quindi alcun recupero di pressione** per cui la pressione limite nel serbatoio risulta, praticamente, quella statica all'uscita della camera di prova.



Anche in questo caso, peraltro, **l'aggiunta di un tratto divergente, che colleghi la sezione di uscita della camera di prova con il serbatoio a bassa pressione, aumenta il tempo massimo di prova**.

Fino a che il moto risulta strozzato nella gola dell'ugello, l'invariabilità della pressione e della temperatura di ristagno, a monte dell'ugello (nell'ambiente), implica la **costanza delle condizioni termofluidodinamiche in camera di prova** ed, in particolare, **della portata e dei diversi raggruppamenti adimensionali**.

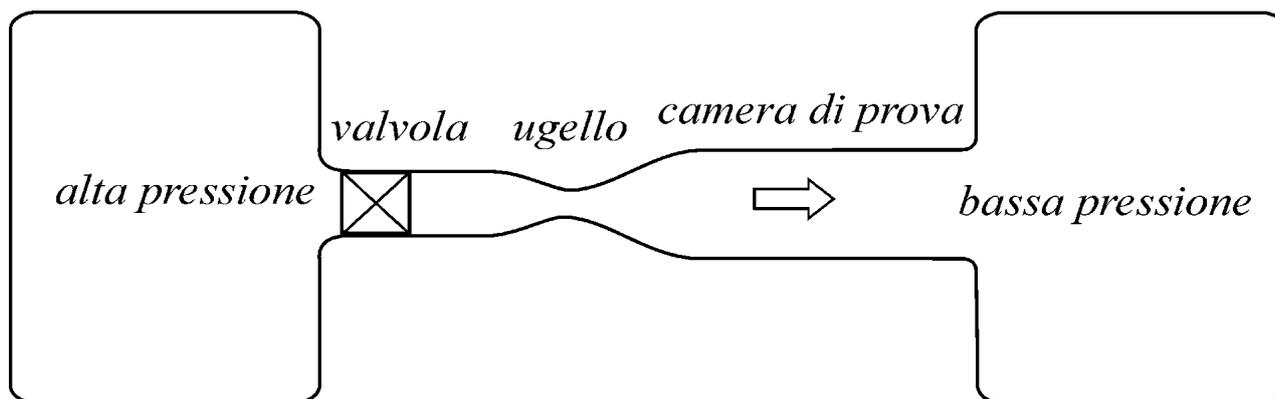
La massima pressione all'interno del serbatoio per la quale il moto resta supersonico in camera di prova si può sempre calcolare dal rapporto r_2 e, conoscendo la portata di massa attraverso il tunnel (che, per quanto detto, resta costante) e il volume del serbatoio, si può ancora calcolare il tempo massimo di funzionamento.



la più complessa configurazione possibile è quella in cui **sono presenti entrambi i serbatoi**, così come presentato inizialmente.

In questo caso, durante il funzionamento, la pressione nel primo serbatoio diminuisce mentre quella nel secondo aumenta.

L'analisi di questo tipo di galleria risulta solo leggermente più complessa dei due casi precedenti, perché entrano in gioco **le pressioni all'interno di entrambi i serbatoi**, oltre che **il rapporto tra i loro volumi e l'area della sezione di gola dell'ugello**, ma non di particolare difficoltà.

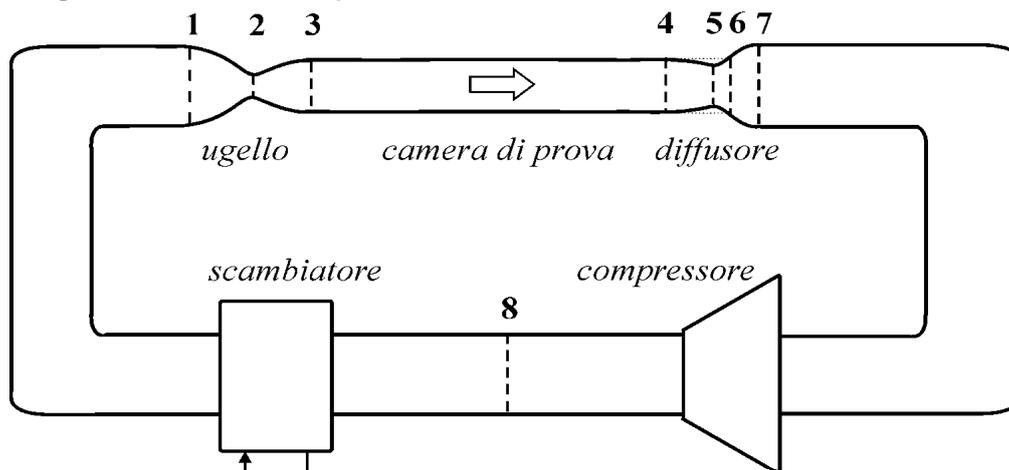


Risulta ora interessante analizzare il caso in cui la differenza di pressione fra i due serbatoi, dovuta alla presenza dell'onda d'urto, sia generata in modo continuo, ad esempio da un **compressore** inserito in un circuito di ritorno.

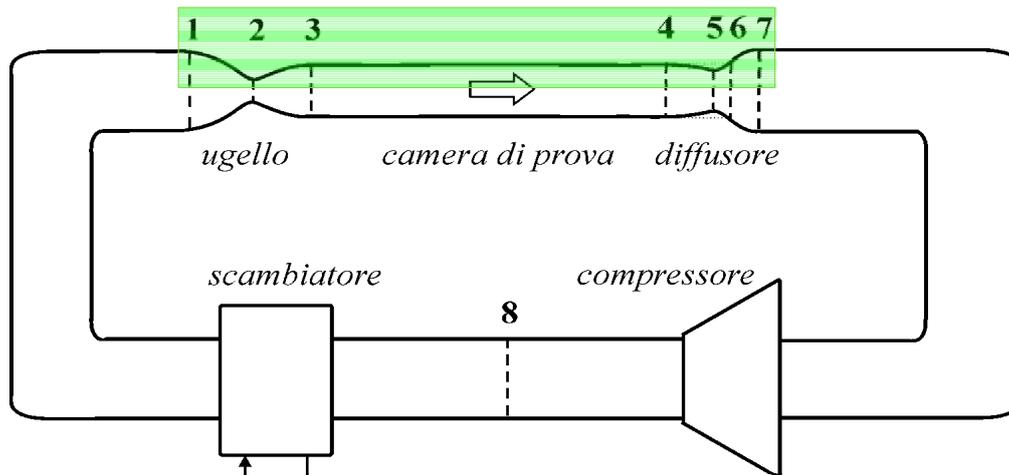
In questo caso si ha a che fare con un **tunnel supersonico a ciclo continuo** e, così come mostrato in figura, i serbatoi sono, di fatto, sostituiti da un condotto di raccordo che collega la zona a monte con quella a valle della camera di prova.

In questo caso, la presenza di un **secondo convergente divergente** dopo la camera di prova sarà giustificata successivamente.

Lo **scambiatore di calore**, mostrato in figura, si rende indispensabile per raffreddare il fluido la cui temperatura di ristagno aumenta, a causa del lavoro che gli fornisce il compressore.



Per semplicità, di seguito, si considererà la sola zona del tunnel in verde che presenta variazioni di area e che include la camera di prova.

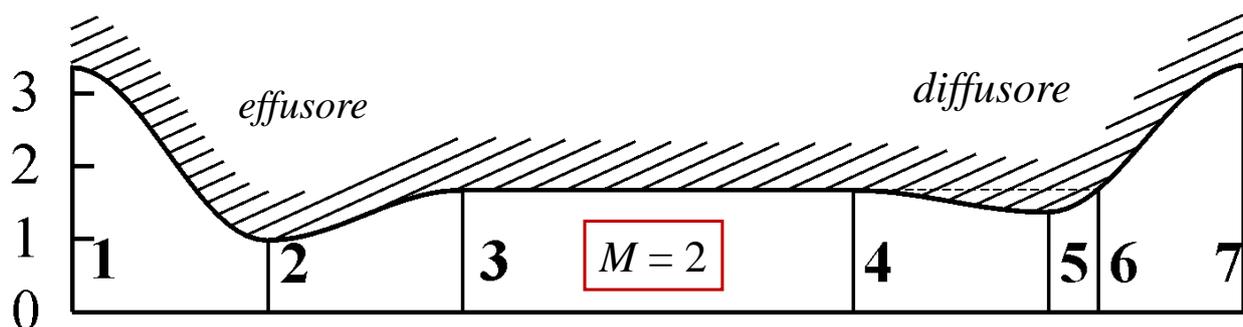


Per semplicità, di seguito, si considererà la sola zona del tunnel in verde che presenta variazioni di area e che include la camera di prova.

La situazione esaminata è schematicamente rappresentata nella figura, dalla quale si può notare che la seconda gola è stata rappresentata con area maggiore di quella della prima per quanto verrà detto in seguito.

Il primo ugello è denominato semplicemente **ugello** della galleria (sarebbe più corretto chiamarlo **effusore** perché deve accelerare il fluido), mentre il **secondo** viene denominato **diffusore** perché ha lo scopo di decelerare il fluido e recuperare, per quanto possibile, pressione al fluido evolvente.

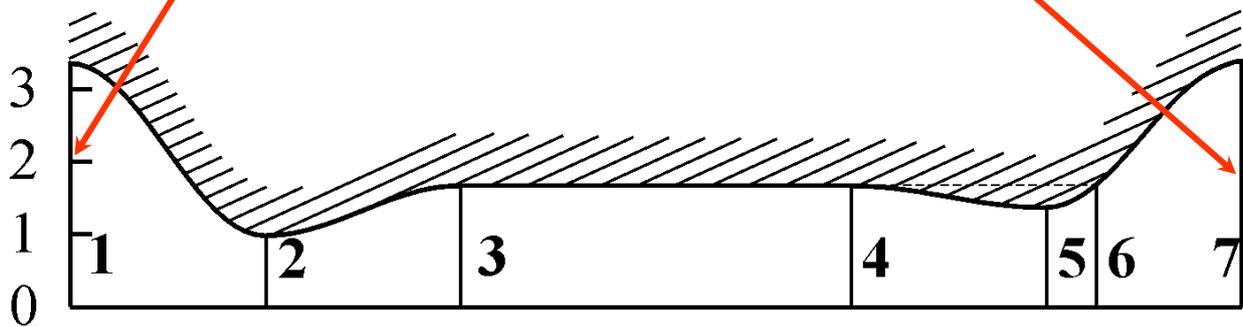
Inoltre, i vari diagrammi saranno tracciati per il caso particolare nel quale il numero di Mach nella sezione di prova sia pari a 2 e $\gamma = 1.4$.



Per semplificare la trattazione, si supporrà che (come d'altronde si realizza in pratica) ***l'area della sezione retta del condotto di raccordo*** (aree delle sezioni 1 e 7) ***risulti molto maggiore di quella della sezione di gola a monte della camera di prova.***

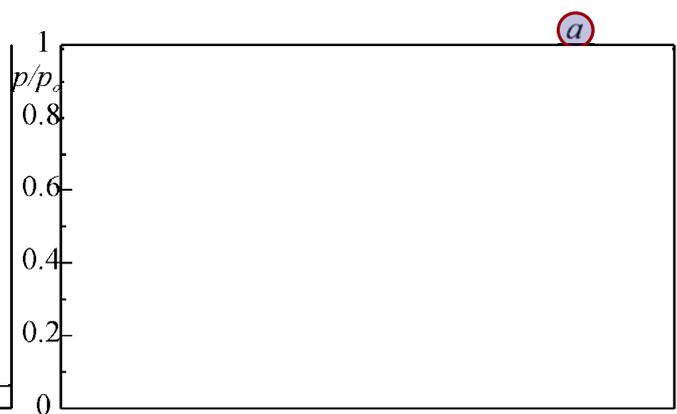
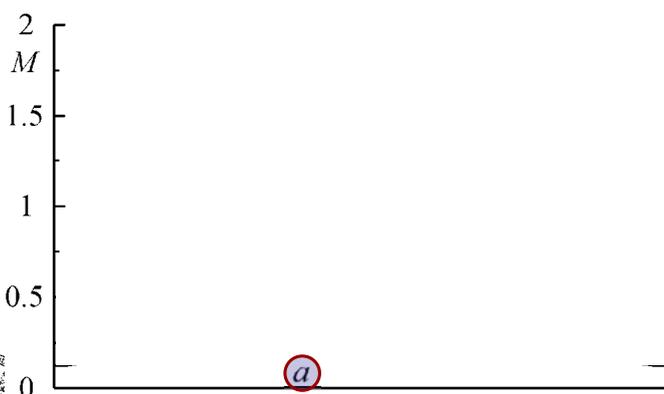
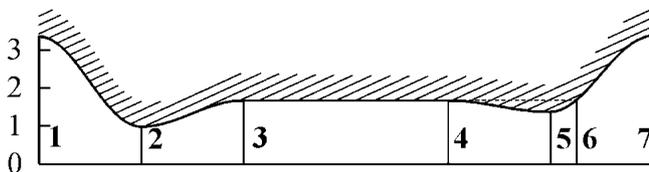
In tale ipotesi, anche se nella gola si raggiungesse $M = 1$, il numero di Mach nel condotto sarà molto basso e sarà quindi possibile assumere, nel condotto stesso, ***una pressione di ristagno del fluido uguale a quella statica.***

Nella fattispecie, il rapporto fra l'area del condotto e quella della prima sezione di gola è pari a 3.4, per cui nel condotto risulta al più $M_1 = 0.17$, quando $M_2 = 1$ ed, al meno, $p/p_o = 0.98$ e, cioè praticamente $p = p_o$.



All'inizio, la velocità è nulla in qualsiasi sezione della galleria e, di conseguenza, la pressione statica coincide con la pressione di ristagno così come rappresentato dalle curve ***a*** (il rapporto p/p_o risulta ovunque unitario).

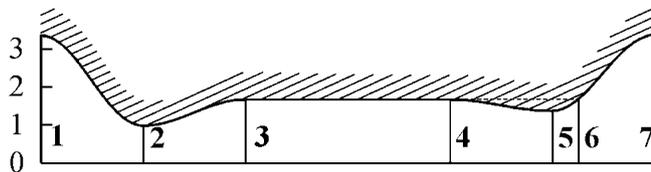
Per le ipotesi fatte, nel momento in cui si avvia il compressore, la corrente inizia a muoversi e, in regime subsonico, ***avendo trascurato qualsiasi tipo di effetto dissipativo, qualora si spegnesse il compressore essa continuerebbe teoricamente in un suo moto perpetuo.***



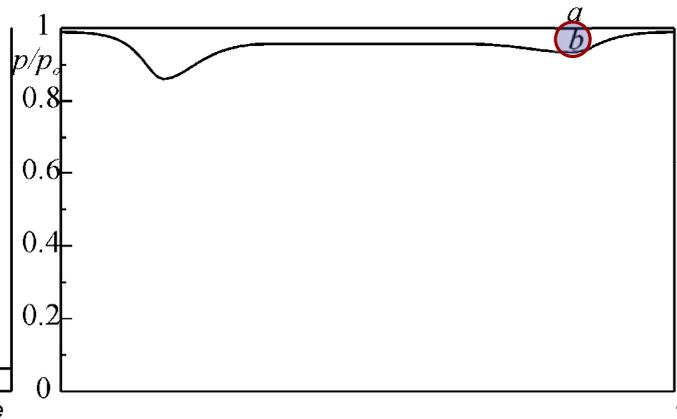
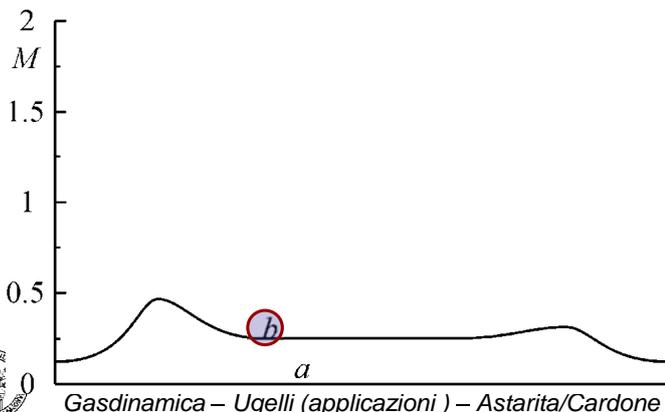
Un'altra curva di funzionamento è quella del tipo indicato con la lettera *b* e, sempre nelle ipotesi fatte, **il numero di Mach e il rapporto p/p_o sono uguali all'ingresso e all'uscita** perché corrispondenti ad aree uguali.

In realtà, gli effetti viscosi daranno una diminuzione della pressione di ristagno (in questo regime, praticamente proporzionale al quadrato della velocità), che deve essere fornita dal compressore, ma non sono qui considerati.

Sia nell'ugello, che nel diffusore, il fluido inizialmente accelera, raggiungendo la massima velocità nella gola, e poi decelera; con un funzionamento simile a quello già visto per gli ugelli convergenti divergenti nel **regime alla Venturi**.



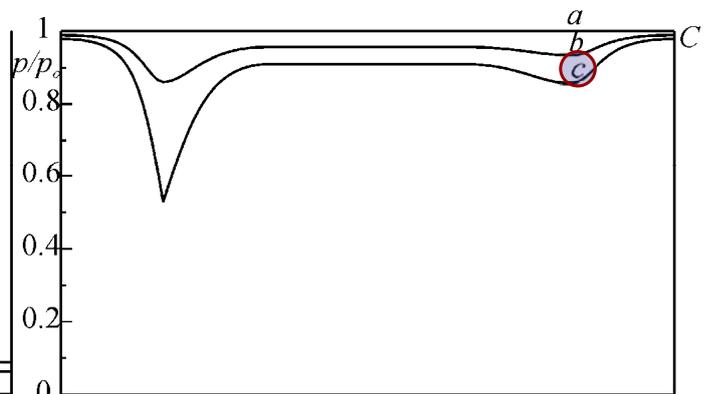
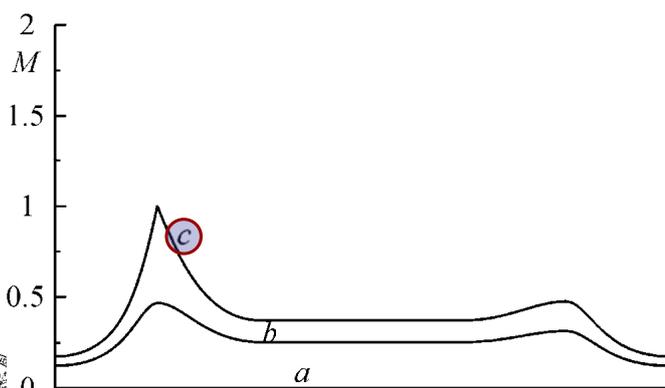
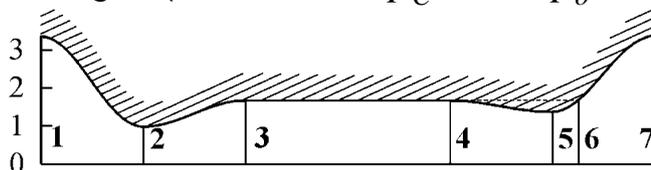
Nella camera di prova, poiché non ci sono variazioni di area della sezione retta, **il fluido conserva la stessa velocità, cioè la stessa pressione.**



Il funzionamento rappresentato dalle curve *c*, per cui si raggiunge $M = 1$ nella gola dell'ugello, si può ottenere solo se **l'area di gola dell'ugello è minore, o al più uguale, a quella del diffusore.**

Se non si soddisfa questa condizione, il flusso strozza prima nella gola del diffusore rendendo impossibile un ulteriore aumento del numero di Mach in qualunque altra sezione a monte del condotto.

Nel caso della curva *c*, la pressione all'uscita del diffusore è individuata dal punto *C* che, come si vede dalla figura, di fatto coincide con la pressione di ristagno (risulta infatti: $p_C = 0.98 p_o$, valore identico a quello della sezione 1).

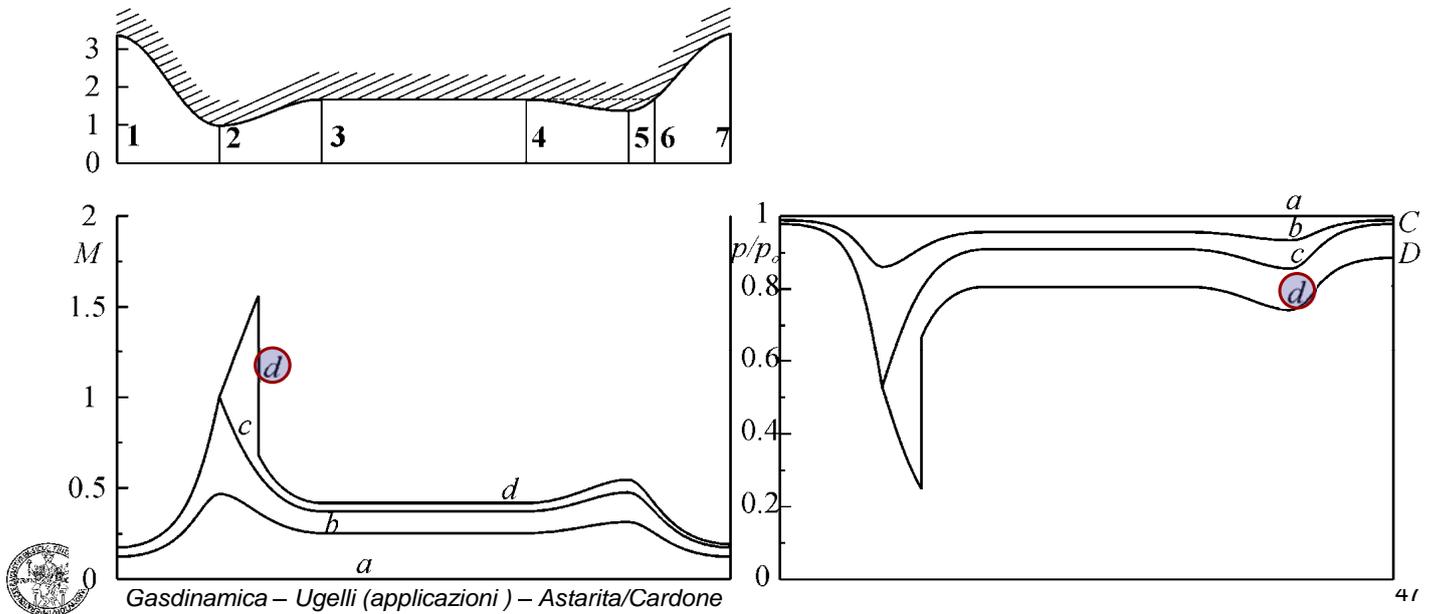


Aumentando il regime di rotazione del compressore, (che fino a questo punto serviva solo a contrastare gli effetti viscosi), **la pressione all'uscita del diffusore, e quindi all'uscita dell'ugello, tende a diminuire.**

Si forma allora un'onda d'urto normale nella parte divergente dell'ugello ed il funzionamento è quello rappresentato ad esempio dalle curve **d** di figura.

Come già detto, anche la pressione all'uscita del diffusore (indicata dal punto **D**) coincide praticamente con la pressione di ristagno in quella sezione.

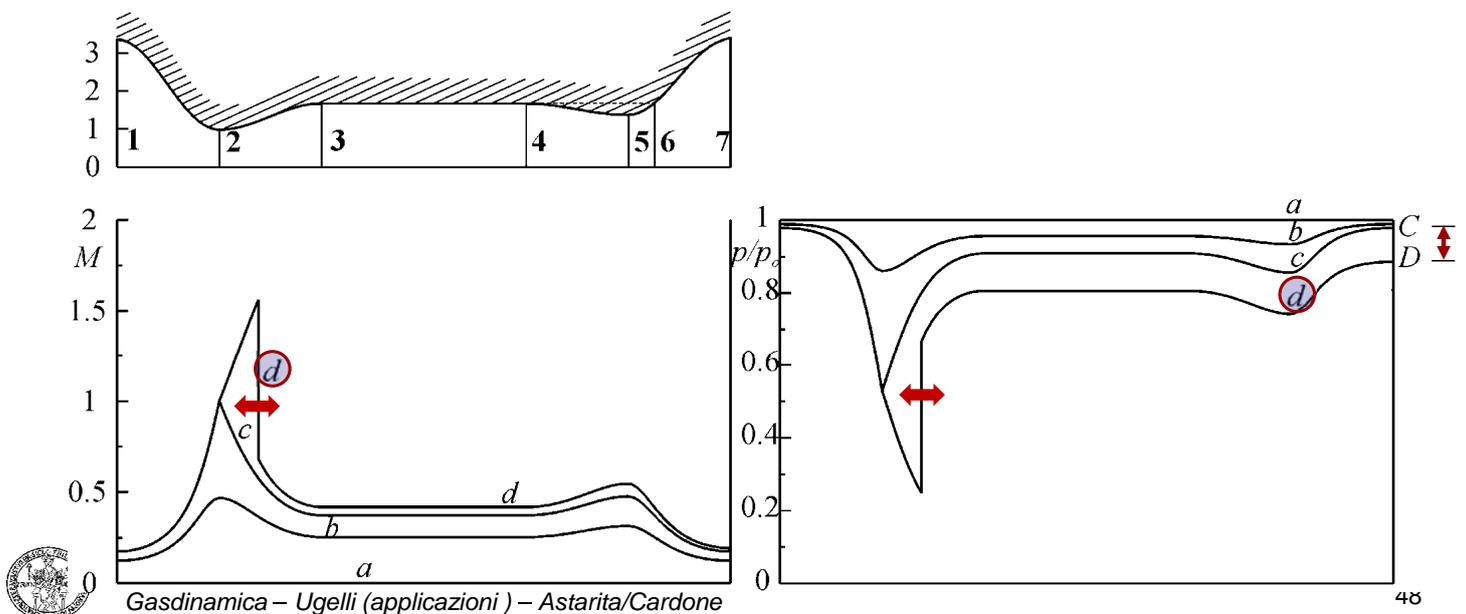
A causa della diminuzione causata dall'onda d'urto, essa è sostanzialmente minore di quella all'ingresso che resta, peraltro, uguale a quella del punto **C**.



Il compressore deve quindi fornire al fluido il salto di pressione $p_C - p_D$ più le eventuali **perdite viscose** lungo il tratto rappresentato in figura, attraverso il condotto di raccordo e lo scambiatore di calore.

Nel caso in cui sia presente anche il modello in camera di prova, il compressore deve altresì fornire le **perdite dovute alla resistenza aerodinamica** (in questo caso subsonica) del modello stesso.

A partire da questa condizione, un aumento (risp. una diminuzione) del regime di rotazione del compressore sposta in avanti (risp. indietro) l'onda d'urto diminuendo (risp. aumentando) la pressione (di ristagno) all'uscita del diffusore.



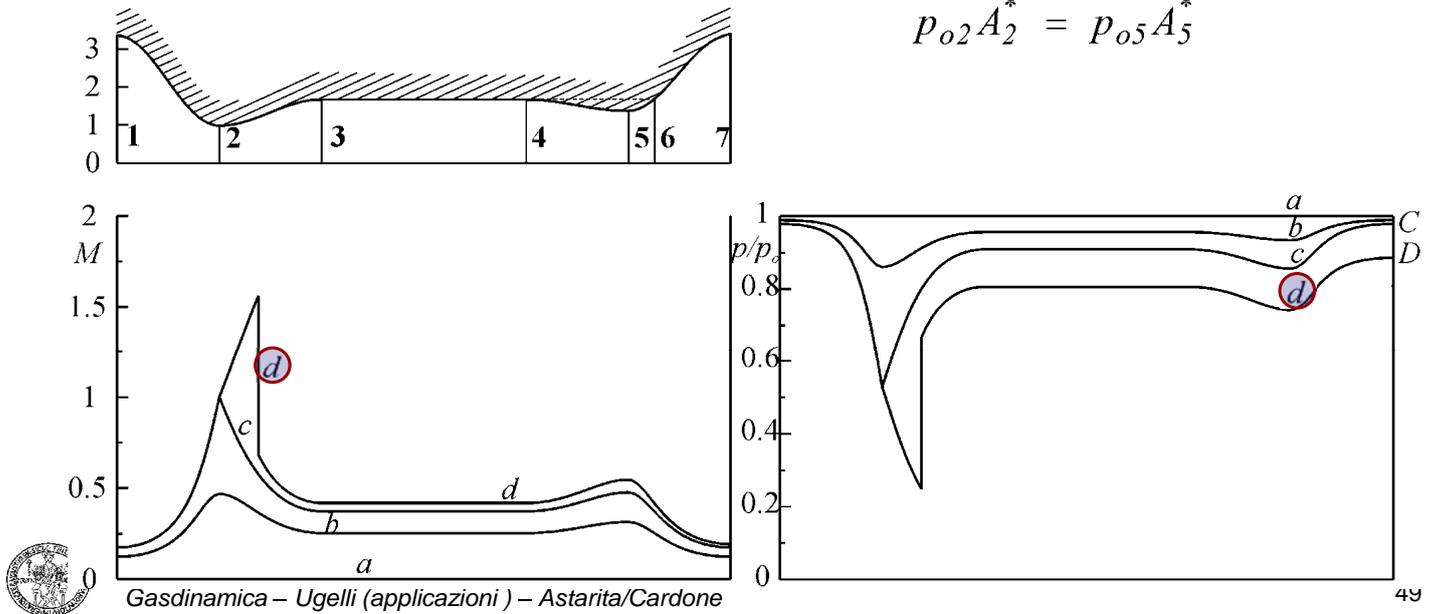
Chiaramente, la formazione dell'onda d'urto, provocando una **diminuzione della pressione di ristagno**, fa aumentare l'area critica a valle dell'onda come si può dedurre dalla:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^* \psi^*}{a_o}$$

dove la temperatura di ristagno (e quindi la a_o) non varia attraverso l'onda d'urto e ψ^* è costante.

Infatti, dalla costanza della portata attraverso la galleria si ha:

$$p_{o2} A_2^* = p_{o5} A_5^*$$

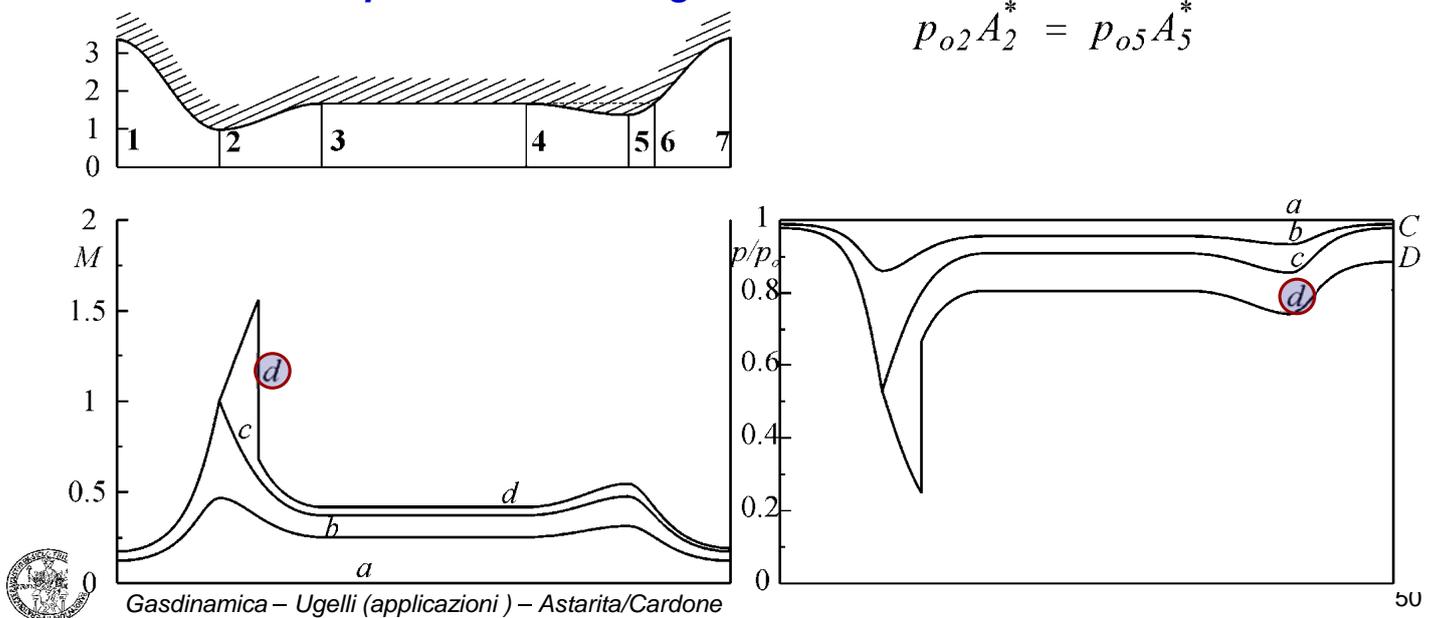


L'area di gola del diffusore deve, dunque, essere in generale maggiore di quella dell'ugello

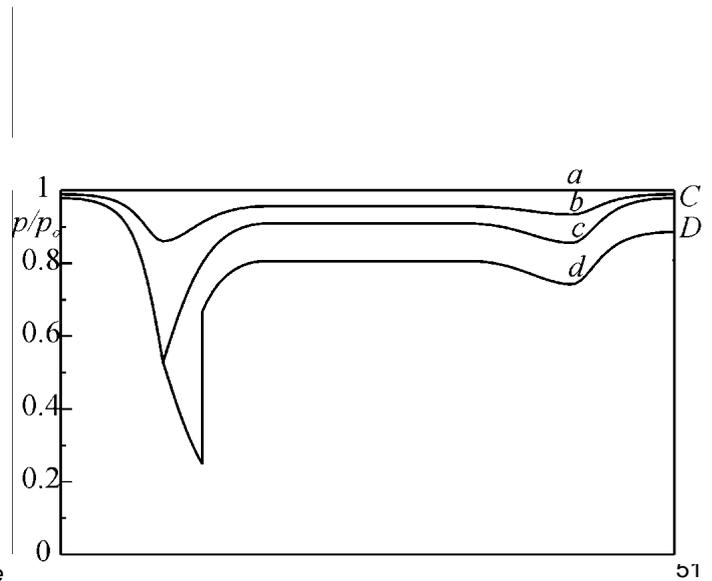
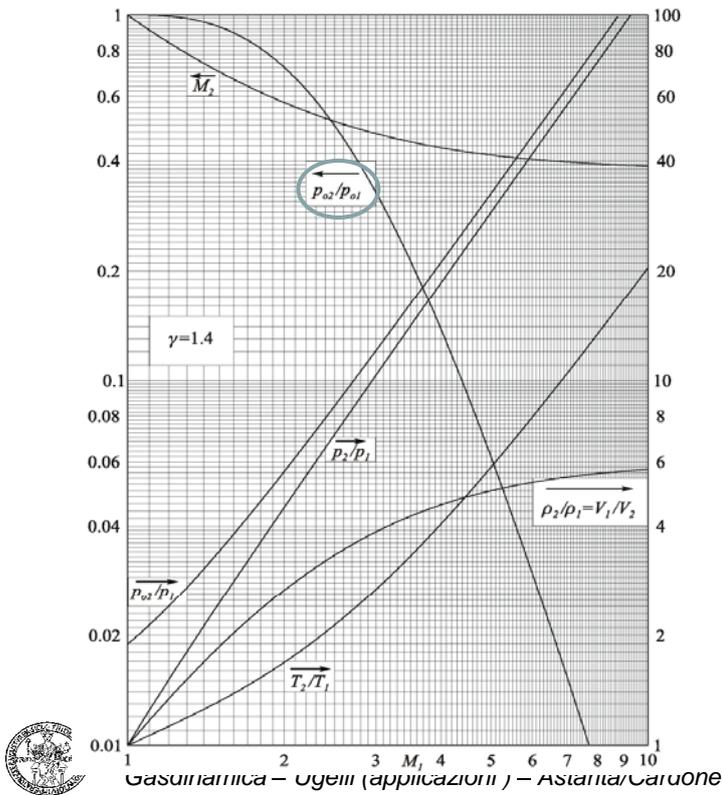
Essa dovrà aumentare man mano che l'onda d'urto si muove verso la camera di prova, cioè man mano che il numero di Mach a monte dell'onda aumenta e la pressione di ristagno a valle (praticamente coincidente con quella all'uscita del diffusore) diminuisce.

Per determinare la minima area di gola che permetta all'onda d'urto di essere ingoiata nel diffusore, è sufficiente determinare la massima diminuzione di pressione di ristagno.

$$p_{o2} A_2^* = p_{o5} A_5^*$$



La massima diminuzione di pressione di ristagno si ha quando il numero di Mach a monte dell'urto è massimo.

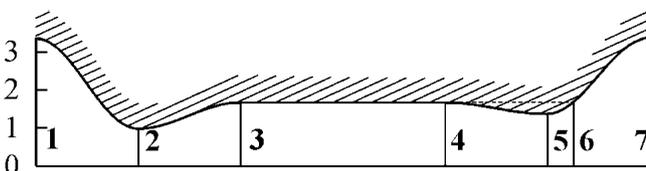


La massima diminuzione di pressione di ristagno si ha quando il numero di Mach a monte dell'urto è massimo.

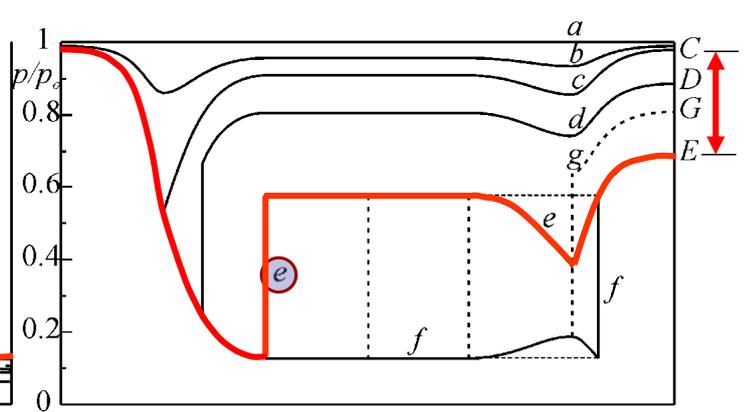
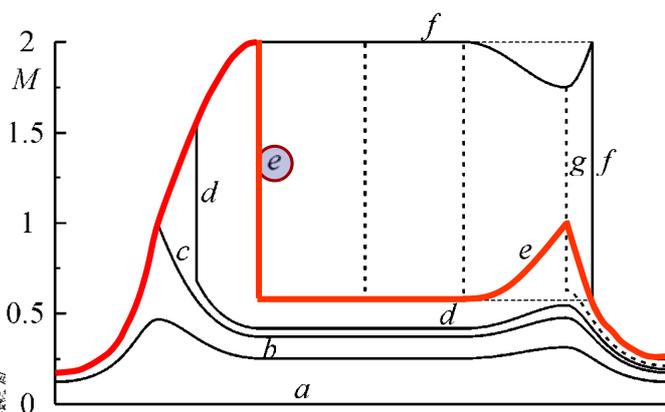
Per un tunnel supersonico, questa condizione si verifica quando l'onda d'urto si trova **immediatamente a monte della camera di prova**, cioè quando si segue la curva *e* relativa al valore massimo del numero di Mach prima dell'urto.

Questo *M* è ovviamente quello che si deve realizzare in camera di prova.

In queste condizioni, la pressione all'uscita del diffusore è quella indicata dal punto *E* e $(p_C - p_E)$ **è il salto di pressione che deve fornire il compressore.**



Queste condizioni stabiliscono anche l'area che deve avere la seconda gola.

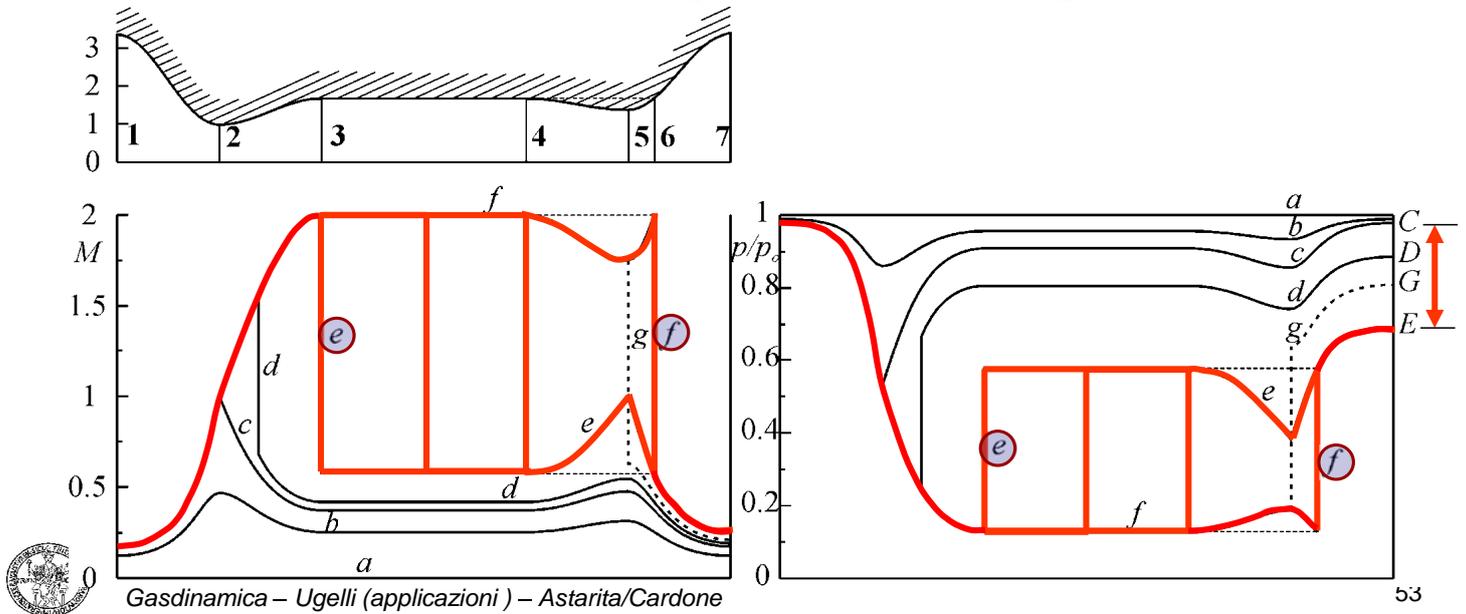


Per le condizioni di figura ($M = 2$, $\gamma = 1.4$), il rapporto tra le pressioni di ristagno a valle ed a monte dell'onda d'urto nella sezione **3** è pari a $p_E/p_C \approx p_{oE}/p_{oC} = 0.721$ per cui l'area della gola del diffusore, per quanto visto, deve essere (almeno) $1/0.721 = 1.387$ volte quella dell'ugello.

La perdita di pressione di ristagno risulta pari a circa il **28%** di quella iniziale.

Nell'ambito delle ipotesi fatte, quando il compressore produce un salto di pressione pari a $(p_C - p_E)$, l'onda d'urto si può trovare in una **qualsiasi sezione** della camera di prova (perché ivi non cambia il numero di Mach).

Se va nella sezione **4**, può essere ingoiata e finire nel divergente del diffusore.

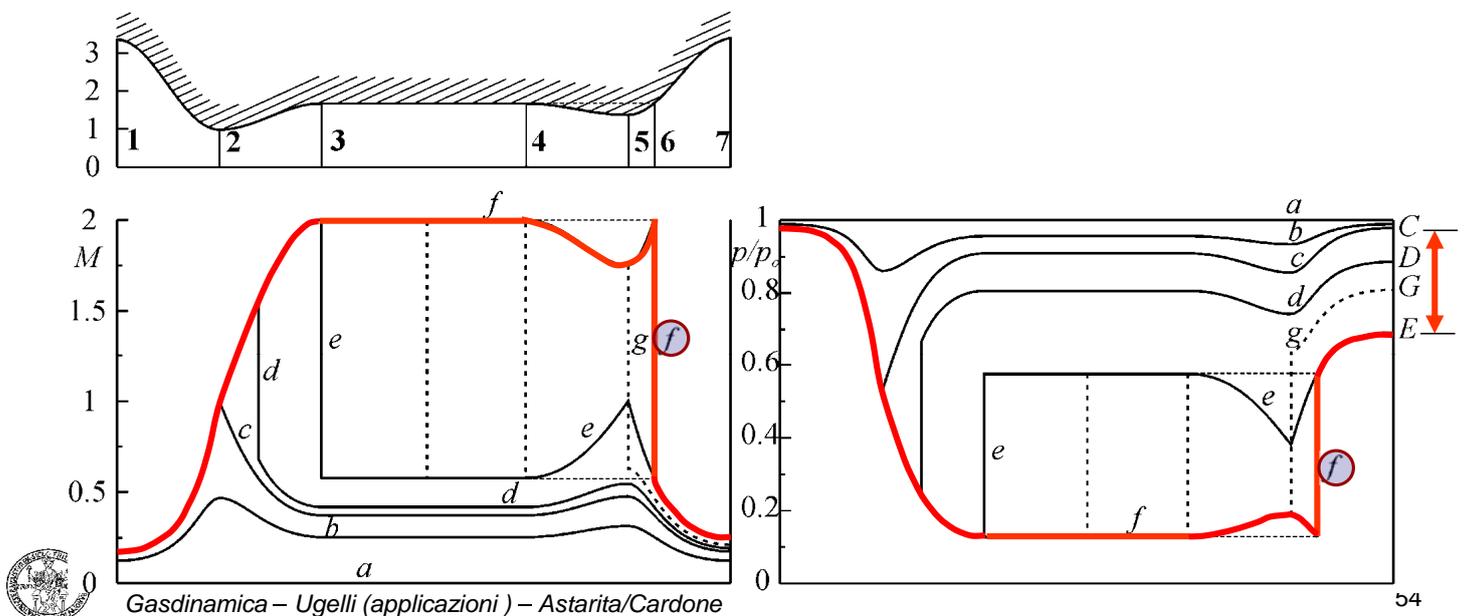


Infatti, ovunque sia situata l'onda, anche nella parte divergente del diffusore, il compressore fornisce lo stesso salto di pressione.

Quindi, il numero di Mach a monte dell'onda d'urto nel divergente del diffusore deve essere uguale a quello in camera di prova e cioè l'onda deve, per forza, stabilirsi nella sezione **6** che ha la stessa area della **test section** (curva **f**).

La procedura descritta, necessaria per portare l'onda d'urto nel divergente del diffusore e ottenere certamente un numero di Mach supersonico in camera di prova, è chiamata **fase d'avviamento della galleria**.

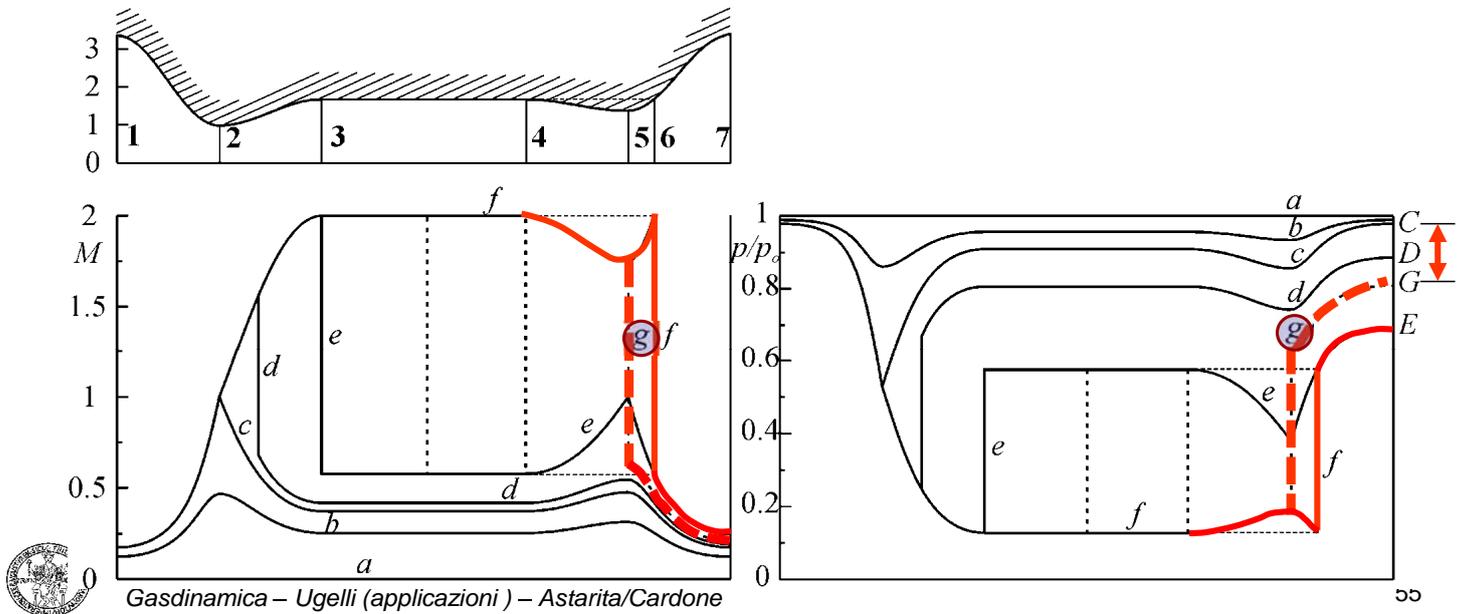
Essa fa sì che il compressore deve fornire **almeno** il salto di pressione $(p_C - p_E)$.



Una volta avviata la galleria, è possibile ridurre il regime di rotazione del compressore e portare l'onda in una sezione prossima a quella di gola, così come rappresentato dalle curve tratteggiate *g* di figura.

Così facendo si riduce il numero di Mach a monte dell'onda d'urto e, quindi, la diminuzione di pressione di ristagno da essa provocata, che in questo caso diventa pari a $p_C - p_G$.

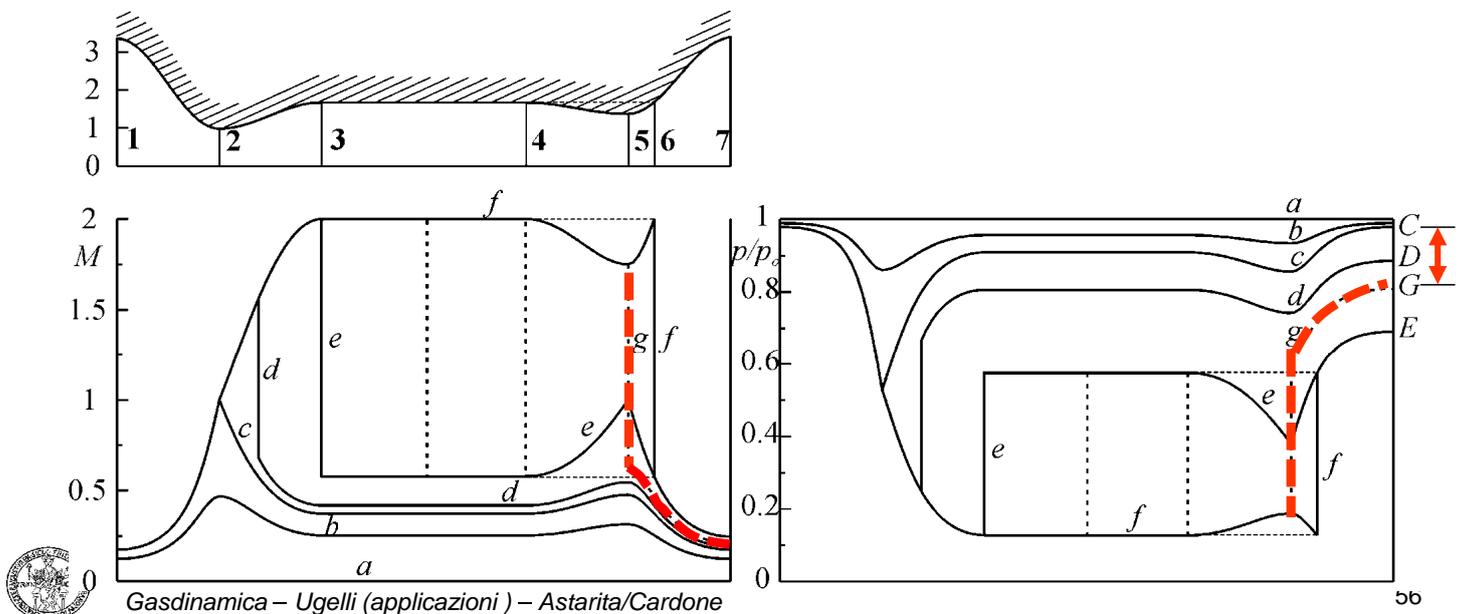
Si tratta comunque di un **funzionamento limite** poichè non è possibile avere l'onda d'urto esattamente nella gola del diffusore perché, ivi, l'onda sarebbe stabile per perturbazioni verso destra ma instabile verso sinistra, essendo espulsa dal diffusore e rendendo necessaria una nuova fase d'avviamento.



Nelle condizioni rappresentate in figura, il funzionamento limite corrisponde alle condizioni per le quali, come già calcolato, $A_5 / A_2^* = 1.387$ cui corrisponde $M = 1.75$ ed un rapporto tra le pressioni di ristagno a valle ed a monte dell'onda d'urto pari a $p_G/p_C = 0.835$.

La diminuzione di pressione di ristagno è quindi in questo caso pari al **16,5%** invece del **28%** che si aveva alla fine della fase di avviamento.

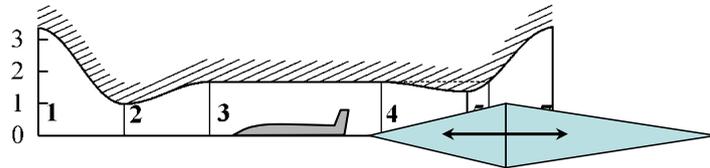
Ciò significa che il compressore, in questa situazione, deve fornire, in termini di pressione, solo circa il **59%** di quanto aveva fornito in fase di avviamento.



Una volta avviato il tunnel, per diminuire ulteriormente il salto di pressione che deve essere fornito dal compressore, si potrebbe far avvenire l'onda d'urto, presente nel diffusore, **ad un numero di Mach ancora più basso**.

Ciò comporta l'utilizzo di un **diffusore a geometria variabile** nel quale, una volta avviato il tunnel, sia possibile far diminuire l'area della sezione di gola del diffusore (al meno, teoricamente, sino al valore A_2).

Ad esempio, una **spina conica mobile**, avanzando verso la gola, ne riduce l'area abbassando conseguentemente il numero di Mach nella gola stessa.



Un ulteriore accorgimento per facilitare la fase di avviamento consiste nell'introdurre il modello in camera di prova **dopo aver avviato la galleria**.

Ciò evita la perdita di pressione di ristagno, associata alle onde d'urto generate dalla presenza del modello in camera di prova, e facilita la fase di avviamento.

Attenzione: Occorre osservare che **un diffusore di tipo convergente divergente può essere anche applicato ai tunnel di tipo discontinuo** (con serbatoi ad alta e/o a bassa pressione) precedentemente esaminati, per aumentarne il tempo di funzionamento.

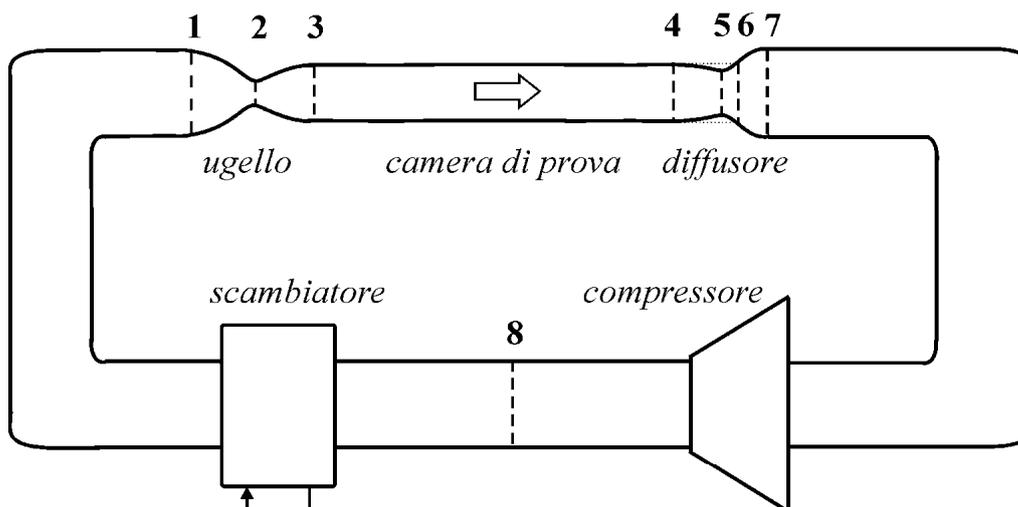


Ritornando al tunnel di tipo continuo, per quanto detto in precedenza si può concludere che **il compressore è necessario per ripristinare la pressione di ristagno all'ingresso dell'ugello**.

Ricordando la formulazione del bilancio di energia per sistemi aperti, è facile comprendere che il compressore, però, fa aumentare, oltre che la pressione di ristagno, anche la temperatura di ristagno.

Infatti, dalla: $\dot{m}\Delta H = -\dot{L}$ si vede immediatamente che il lavoro del compressore incrementa l'entalpia totale, e cioè la temperatura totale.

Quindi, per ripristinare la temperatura di ristagno iniziale, è necessario inserire nel circuito anche uno **scambiatore di calore** che abbassi la temperatura.



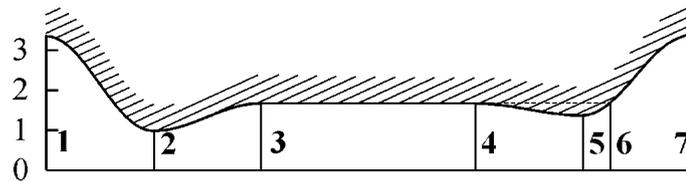
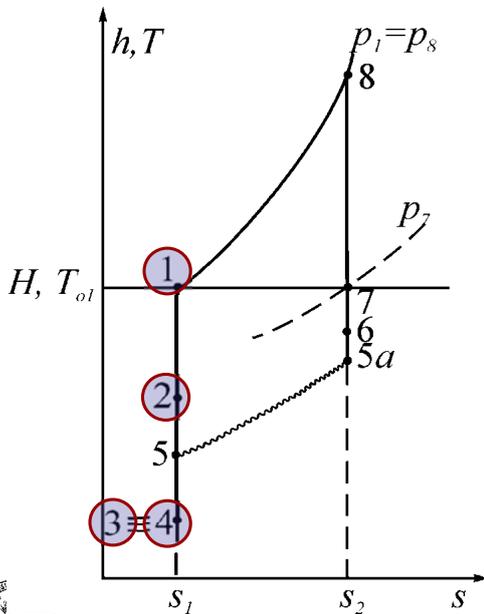
Gli aspetti termodinamici si comprendono meglio riportando i punti relativi alle diverse trasformazioni sul piano $h-s$ (ovvero, $T-s$).

In figura i punti da **1** a **7** si riferiscono alle sezioni indicate nella figura a destra e **il funzionamento in condizioni di regime è quello con l'onda d'urto nella gola del diffusore 5** (o meglio un poco a valle di questa sezione).

Il punto **1** rappresenta, allora, le condizioni a monte dell'ugello, coincidenti per quanto detto con quelle di **ristagno**.

I punti **2** e **3** corrispondono rispettivamente alle condizioni nella **gola** e nella **sezione di uscita** dell'ugello (massima espansione).

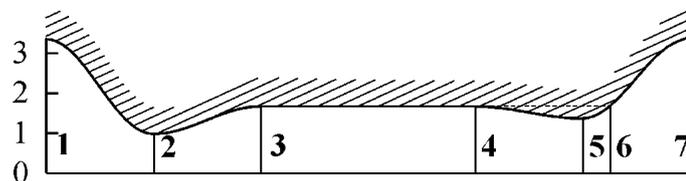
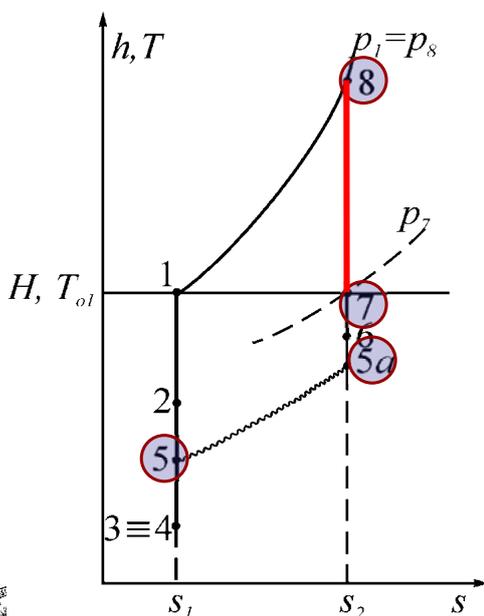
Chiaramente, trascurando tutte le perdite di pressione in camera di prova e in assenza del modello, **il punto 4 coincide con il punto 3** poichè il tratto **3 - 4** è un tratto senza alcuna variazione di area e, quindi, di pressione e di numero di Mach.

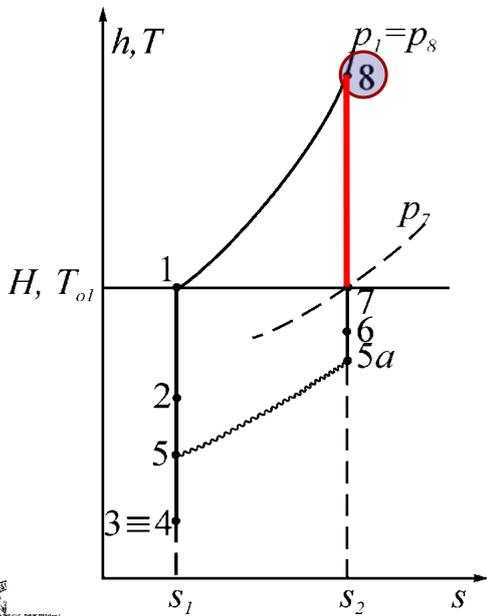
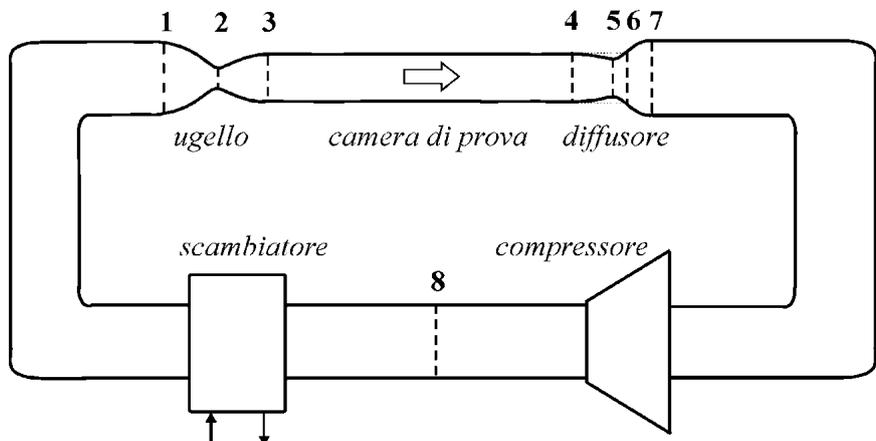


Avendo supposto una ricomprensione adiabatica reversibile nel convergente del diffusore, il punto **5** corrisponde alle condizioni nella **gola del diffusore**, mentre il punto **5a** a quelle **a valle dell'onda d'urto** ivi presente.

Quest'ultima trasformazione, che non è reversibile, è stata indicata con la linea ondulata.

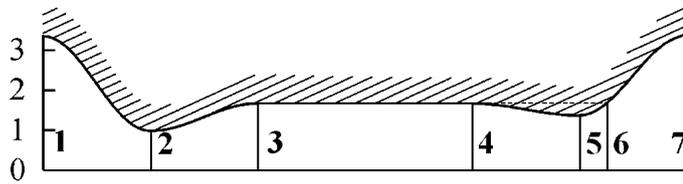
Dopo l'onda d'urto, nel divergente del diffusore, la temperatura e la pressione aumentano isoentropicamente sino al punto **7**, che corrisponde praticamente alle **nuove condizioni di ristagno** e deve trovarsi alla stessa altezza del punto **1**.





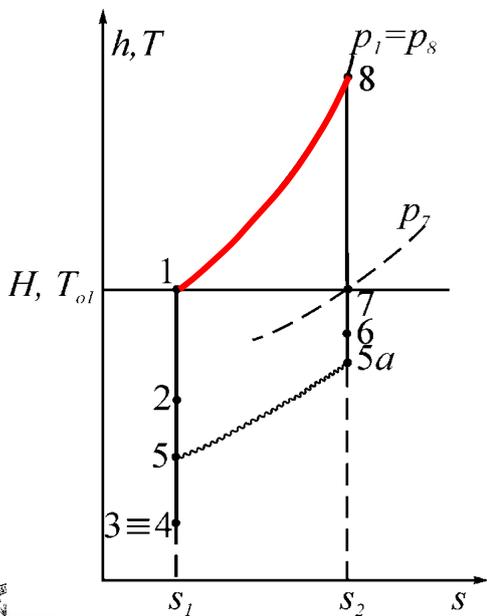
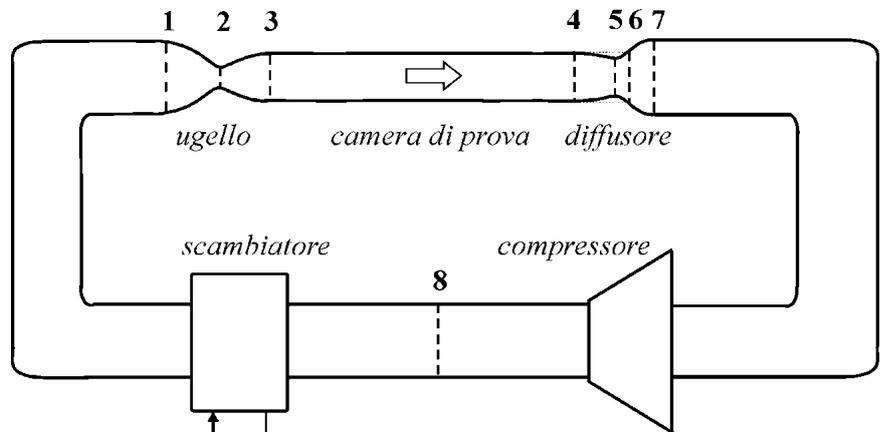
Poi, il compressore cede energia al fluido sino al punto **8**, che ha la **stessa pressione del punto 1**, ma una temperatura più elevata.

Infatti, un compressore si può schematizzare come una macchina isoentropica, così che il punto **8** si trova alla stessa entropia del punto **7**, ma a una pressione e un'entalpia totale maggiori.



Per bassi valori del numero di Mach, la trasformazione che avviene nello **scambiatore di calore**, che in questo caso **è posto dopo il compressore**, si può agevolmente schematizzare con un **processo a pressione costante**.

La curva che unisce i punti **8** e **1** coincide, quindi, con l'**isobara** che rappresenta la sottrazione di calore al fluido nello scambiatore.



Per bassi valori del numero di Mach, la trasformazione che avviene nello **scambiatore di calore**, che in questo caso **è posto dopo il compressore**, si può agevolmente schematizzare con un **processo a pressione costante**.

La curva che unisce i punti **8** e **1** coincide, quindi, con l'**isobara** che rappresenta la sottrazione di calore al fluido nello scambiatore.

Per valutare la potenza del compressore è necessario riscrivere la già ricordata equazione di conservazione dell'energia per sistemi aperti nel caso adiabatico:

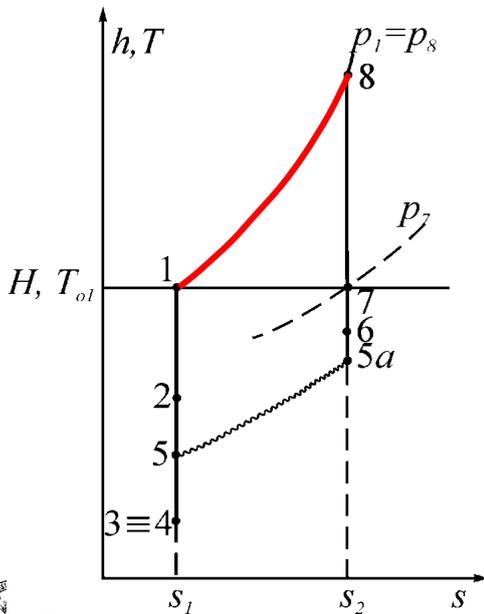
$$\dot{m}\Delta H = -\dot{L}$$

Applicando questa relazione (per un gas più che perfetto) fra gli stati **7** ed **8** (che coincidono con quelli di ristagno) si ha:

$$-\dot{L} = \dot{m}c_p(T_{o8} - T_{o7})$$

quantità positiva perché $T_{o8} > T_{o7}$.

Il termine L è, invece, negativo in quanto il compressore è una macchina operatrice (che assorbe energia per funzionare).



Gasdinamica – Ugelli (applicazioni) – Astarita/Cardone

$$-\dot{L} = \dot{m}c_p(T_{o8} - T_{o7})$$

La $T_{o7} = T_{o1}$ è una quantità nota mentre dello stato **8** si conosce solo la pressione di ristagno che coincide con quella del punto **1**. Avendo supposto il processo di compressione isoentropico, la T_{o8} si può calcolare dalla:

$$T_{o8} = T_{o7} \left(p_{o8} / p_{o7} \right)^{(\gamma - 1) / \gamma}$$

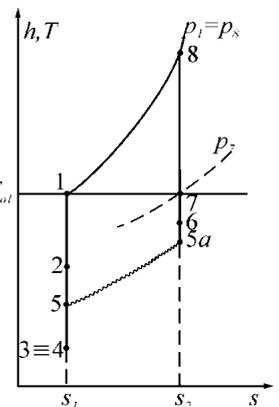
per cui sostituendo e tenendo presente che $p_{o8} = p_{o1}$ e $T_{o7} = T_{o1}$, si ha:

$$-\dot{L} = \dot{m}c_p T_{o1} \left[\left(p_{o1} / p_{o7} \right)^{(\gamma - 1) / \gamma} - 1 \right]$$

Questa relazione mostra che, **a parità di rapporto di compressione realizzato dal compressore, la potenza necessaria è linearmente proporzionale alla temperatura di ingresso nel compressore**.

Per poter riportare il fluido alla stessa temperatura (entalpia) di ristagno del punto **1** è necessario **sottrargli, questa volta sotto forma di calore, la stessa potenza che il compressore gli ha fornito sotto forma di lavoro**.

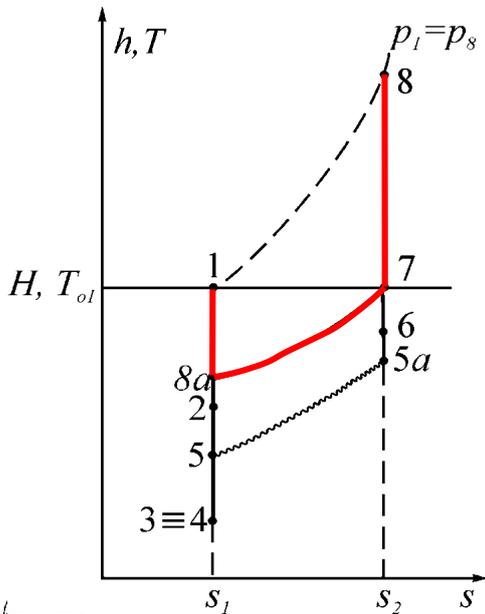
Questa potenza termica è quindi **ancora** calcolabile mediante la formula precedente.



Resta solo da valutare se è più conveniente inserire lo scambiatore di calore prima, o dopo, il compressore.

Come mostra la figura, se si introducesse lo scambiatore di calore prima del compressore, dal punto 7 si andrebbe, lungo una isobara, al punto 8a e successivamente, con la trasformazione isoentropica di compressione, al punto 1.

È noto che in un piano $h-s$ le isobare sono delle curve divergenti tra loro verso destra per cui, il lavoro compiuto dal compressore in questo caso, $8a \rightarrow 1$, risulterebbe minore di quello compiuto nella trasformazione $7 \rightarrow 8$.



La seconda configurazione, che è certamente vantaggiosa dal punto di vista termodinamico, potrebbe essere però di difficile applicazione pratica

Infatti, per un corretto funzionamento dello scambiatore, non è sempre possibile avere un fluido freddo con una temperatura minore di quella del punto 8a.

Comunque, in questo caso si otterrebbe:

$$-\dot{L} = \dot{m} c_p T_{o8a} \left[(p_{o1} / p_{o7})^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

dove la T_{o8a} può essere calcolata utilizzando sempre la relazione per trasformazione isoentropica:

$$T_{o8a} = T_{o1} (p_{o7} / p_{o1})^{(\gamma-1)/\gamma}$$

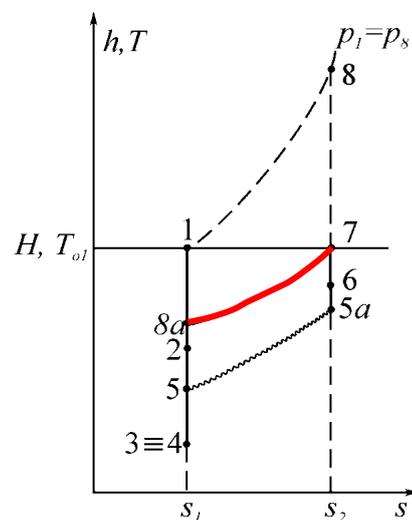
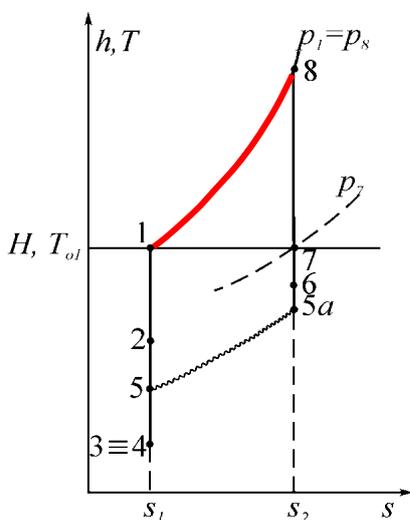


$$T_{o8a} = T_{o1} (p_{o7} / p_{o1})^{(\gamma-1)/\gamma}$$

T_{o8a} comunque risulta minore della $T_{o1} = T_{o7}$ perché $p_{o7} < p_{o1}$.

Dal confronto tra i due casi:

$$-\dot{L} = \dot{m} c_p T_{o1} \left[(p_{o1} / p_{o7})^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] \quad \Bigg| \quad -\dot{L} = \dot{m} c_p T_{o8a} \left[(p_{o1} / p_{o7})^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$



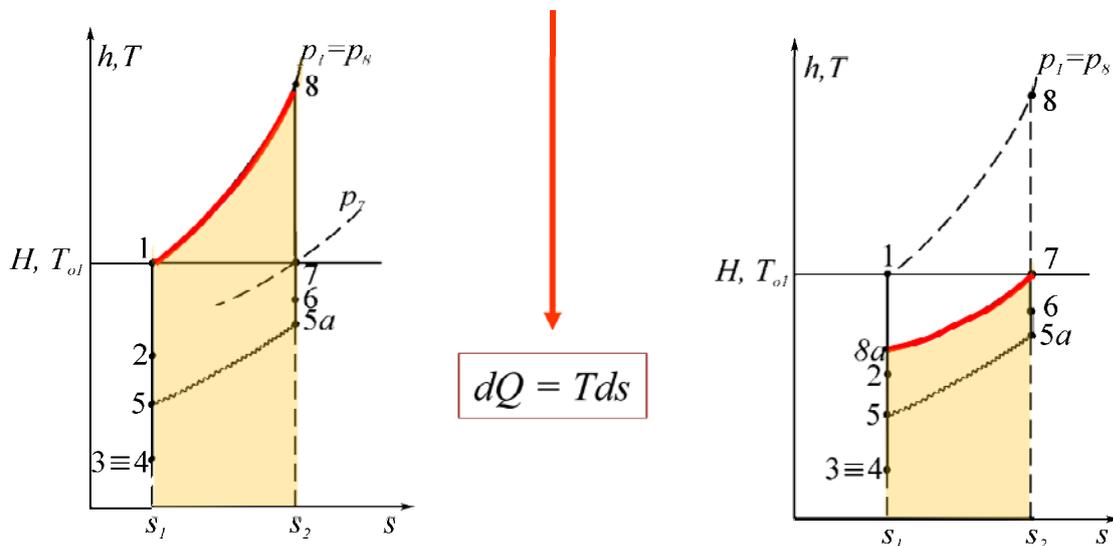
si nota che, essendo il rapporto di compressione p_{o7}/p_{o1} uguale nei due casi, poiché la temperatura all'ingresso del compressore è minore nella seconda configurazione, l'inserimento dello scambiatore di calore prima del compressore risulta termodinamicamente più efficiente.



Un altro modo per pervenire alla stessa conclusione è il seguente.

È stato visto che la potenza del compressore (in termini di lavoro scambiato) e quella dello scambiatore di calore (in termini di calore) **devono essere uguali**.

Se ora i piani riportati nelle figure sono riguardati come piani $T-s$ (e non $h-s$), **le aree sottese dalle curve trasformazione rappresentano la quantità di calore scambiato durante la trasformazione stessa**.



Orbene, **l'area sottesa dalla trasformazione 8→1 è decisamente maggiore di quella della trasformazione 7→8a**.

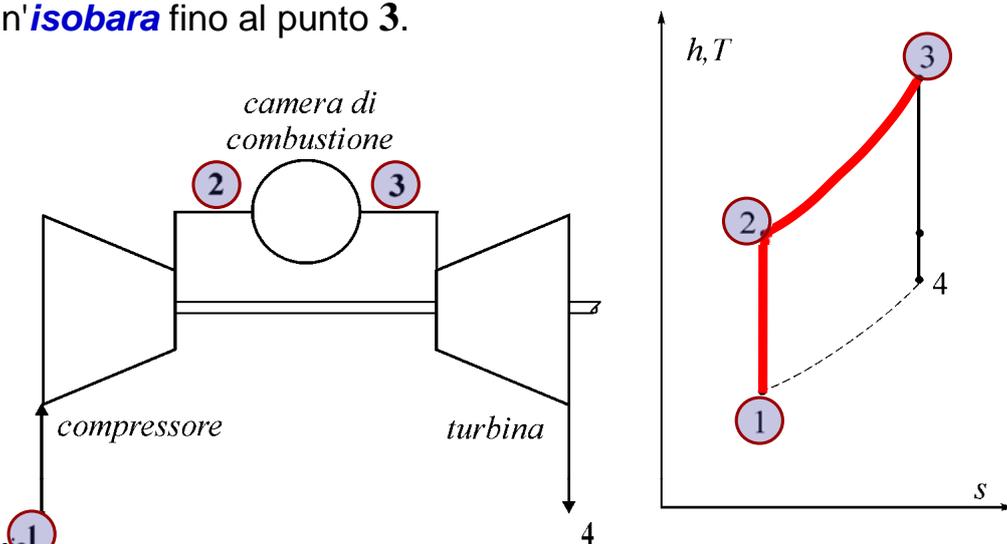


PRESE D'ARIA SUBSONICHE

Il cosiddetto **ciclo Joule** (che forse più correttamente dovrebbe essere chiamato **ciclo Brayton**), mostrato sul piano $h, T-s$ in figura, è quello che meglio descrive il funzionamento di una turbina a gas, anch'essa schematicamente rappresentata in figura nei suoi principali componenti.

Il fluido (normalmente aria), inizialmente nelle condizioni ambiente indicate dal punto **1**, passa attraverso il **compressore**, che ne fa **isotermicamente** aumentare la pressione fino al punto **2**

Successivamente, attraversa la **camera di combustione**, ove la sua entalpia totale aumenta seguendo una trasformazione che può essere schematizzata come un'**isobara** fino al punto **3**.

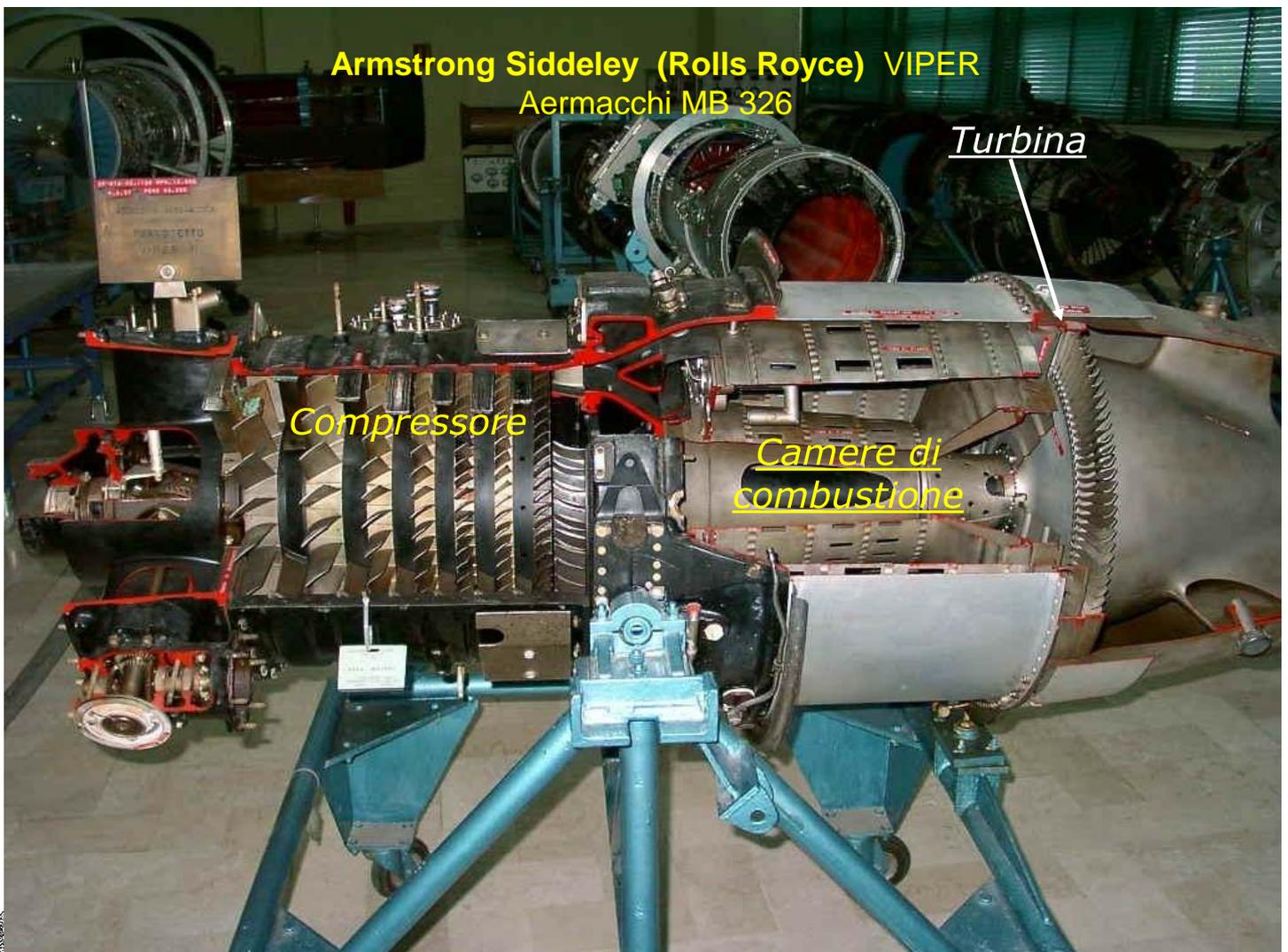
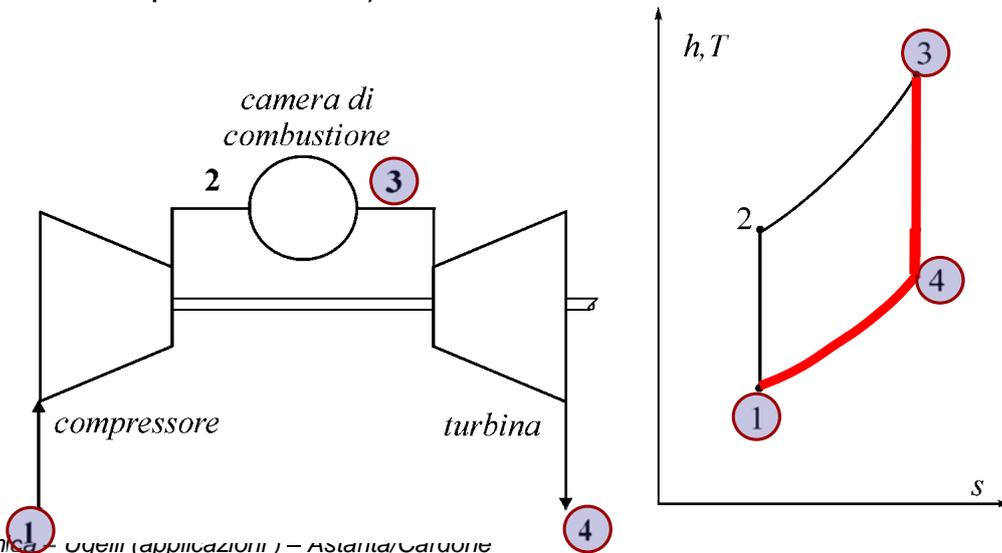


Successivamente il fluido **espande in turbina** fino al punto 4 raggiungendo nuovamente la pressione ambiente relativa al punto 1.

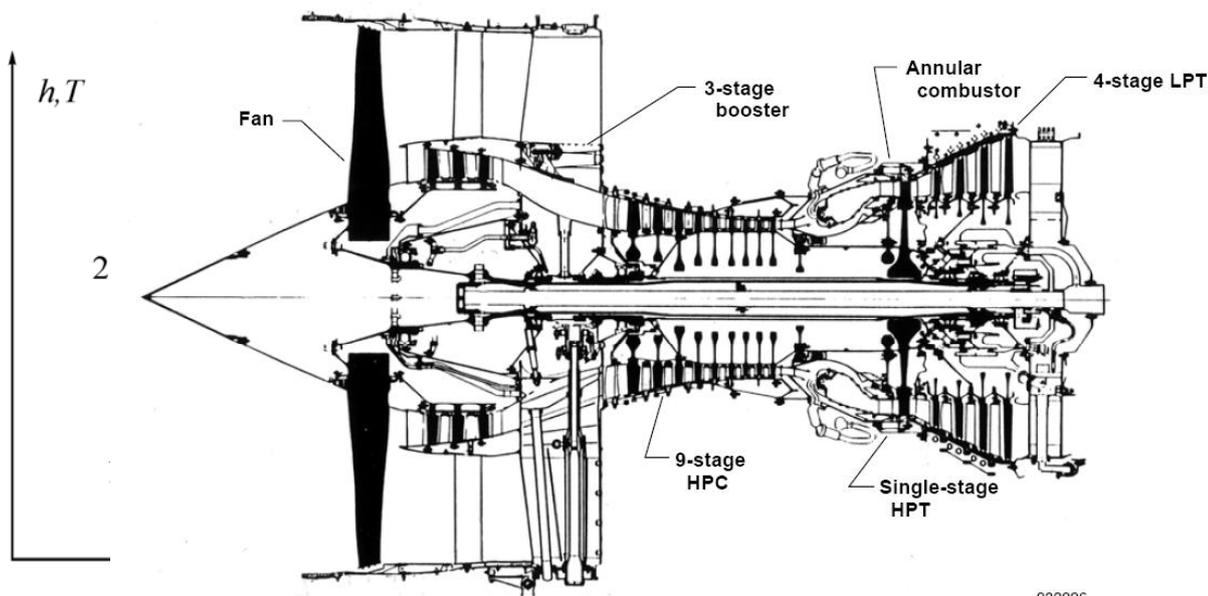
Idealmente, il ciclo si chiude con la trasformazione 4 → 1 che rappresenta uno **scambio di calore dal sistema all'ambiente**, anch'esso isobaro.

In realtà, c'è un continuo ricambio di fluido anche perché la combustione tenderebbe ad esaurire rapidamente l'ossigeno presente nell'aria.

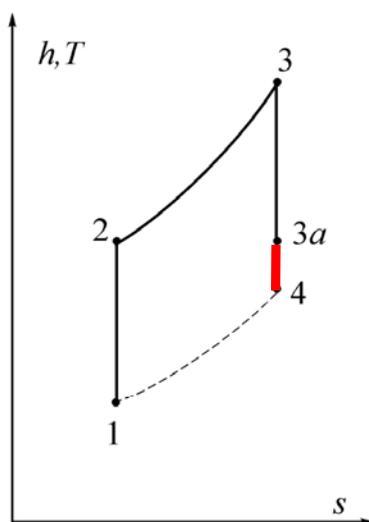
La maggiore lunghezza del tratto 3 → 4 rispetto al tratto 1 → 2, dovuta alla divergenza delle isobare sul piano $T-s$, permette di ottenere in turbina un lavoro maggiore di quello speso per muovere il compressore (uguale a quello relativo alla sola parte 3 → 3a).



L'eccesso di energia disponibile ($3a \rightarrow 4$) si potrebbe, ad esempio, impiegare per muovere una macchina operatrice (un alternatore, una pompa, etc.). Peraltro, una turbina a gas può essere utilizzata anche per applicazioni propulsive aeronautiche e, allora, questo eccesso di energia serve, o per accelerare il fluido a valle della turbina e generare così una maggiore spinta (**turbogetto**), ovvero per muovere un'elica (**turboelica**), o, infine, per realizzare entrambe le cose (**turbofan**). Gli aerei di linea moderni sono spesso propulsi da turbofan.



L'eccesso di energia disponibile ($3a \rightarrow 4$) si potrebbe, ad esempio, impiegare per muovere una macchina operatrice (un alternatore, una pompa, etc.). Peraltro, una turbina a gas può essere utilizzata anche per applicazioni propulsive aeronautiche e, allora, questo eccesso di energia serve, o per accelerare il fluido a valle della turbina e generare così una maggiore spinta (**turbogetto**), ovvero per muovere un'elica (**turboelica**), o, infine, per realizzare entrambe le cose (**turbofan**). Gli aerei di linea moderni sono spesso propulsi da turbofan.



Per un buon funzionamento del compressore è necessario che il numero di Mach del fluido sia sufficientemente **basso** e, possibilmente, abbia una distribuzione uniforme della velocità nella sezione d'ingresso al motore.

Evidentemente, qualsiasi macchina che utilizzi l'aria come fluido di lavoro consiste in un sistema aperto (cioè con continuo ricambio d'aria) e deve esserci una **presa d'aria** che la capti dall'esterno (in inglese: **air inlet**).

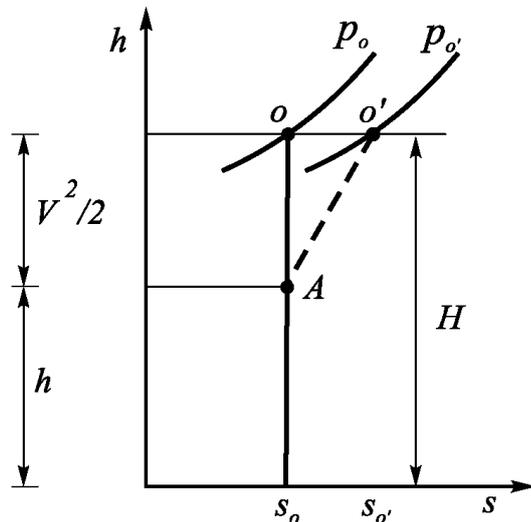
Se la macchina è ferma, la presa d'aria è costituita da un convergente che serve solo ad accelerare e convogliare l'aria (anch'essa inizialmente ferma perché proveniente dall'ambiente) nel compressore.

In queste circostanze, la presa d'aria si comporta come un effusore ed il suo progetto è relativamente semplice.



Nel seguito si studieranno turbine a gas per impieghi aeronautici, e, anche se semanticamente improprio, si utilizzerà il termine presa d'aria solo per indicare quei condotti che, nelle condizioni di progetto, si comportano da diffusori, ossia quelli che rallentano il fluido.

Infatti, la funzione principale delle prese d'aria per applicazioni aeronautiche è di decelerare l'aria ma, se progettate bene, esse possono essere utilizzate anche per aumentare nel contempo la pressione all'ingresso del compressore, risparmiando lavoro al compressore stesso e aumentando di conseguenza l'efficienza del ciclo termodinamico.



Poiché la trasformazione del fluido nella presa è omoenergetica (perché il fluido non ha praticamente modo di scambiare calore, né scambia lavoro), questo aumento è tanto maggiore quanto minore è la produzione di entropia derivante dal processo di decelerazione.

L'aumento massimo si ottiene, quindi, con una trasformazione omoenergetica e reversibile (isoentropica).



Evidentemente, l'aumento della pressione idealmente ottenibile isoentropicamente a monte del compressore è una funzione crescente del numero di Mach di crociera del velivolo M_c . Ciò deriva dalla:

$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

in cui p_o rappresenta la pressione di ristagno e p_a la pressione ambiente.

Da questa relazione si intuisce che, per avere un aumento significativo della pressione, è necessario avere numeri di Mach relativamente elevati.

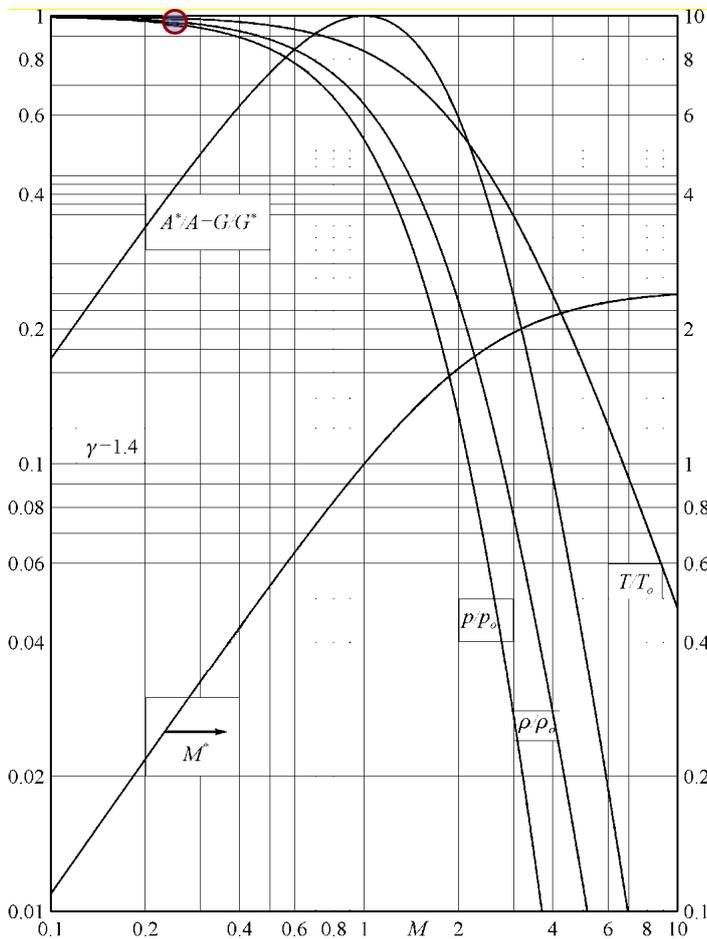
Perciò, le prese d'aria propriamente dette sono utilizzate prevalentemente nei motori dei velivoli a relativamente alto numero di Mach.

Anche nelle applicazioni automobilistiche, un aumento della pressione a monte del sistema d'iniezione consentirebbe di ottenere un migliore rendimento volumetrico del motore ma, normalmente, non sono utilizzate prese d'aria particolari perché il numero di Mach delle vetture è relativamente basso.

L'unica eccezione si ha per le automobili da competizione per le quali anche un piccolo aumento del rendimento volumetrico può essere significativo.

Ad una velocità pari a 300km/h , il massimo aumento di pressione ottenibile è di poco superiore al 4%, mentre quello di densità di circa il 3%.





$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\rho_o = \rho_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$300 \text{ km/h} = 300/3.6 = 83.3 \text{ m/s}$$

$$M = 83.3/340 = 0.245$$

$$p_o/p_a = 1.043$$

$$\rho_o/\rho_a = 1.030$$



Nella quasi totalità dei casi, ***i motori per applicazioni aeronautiche devono funzionare sia in condizioni di crociera che al punto fisso (cioè con l'aeroplano fermo) che, infine, in situazioni intermedie.***

Ciò comporta la necessità di studiare il funzionamento del sistema presa d'aria-compressore all'aumentare della velocità del velivolo fino a quella massima di crociera V_c .

Questa fase iniziale viene generalmente denominata ***di avviamento.***

L'unico tipo di motore aeronautico che non ha al suo interno un compressore è l'***autoreattore (ramjet, or scramjet,*** utilizzato talvolta nei missili supersonici). Però, anche in questo caso, è necessario ***avviare*** la presa.

In questo contesto si indicherà con M_c il ***numero di Mach di crociera*** ed, invece, con M_∞ il ***numero di Mach del velivolo se diverso da quello di crociera.***

Inoltre, si intende sempre valida la trasformazione galileiana del sistema di riferimento e, pertanto, si tratterà ***il velivolo (e quindi il motore) fermo, cioè investito da una corrente a velocità V_∞ .***



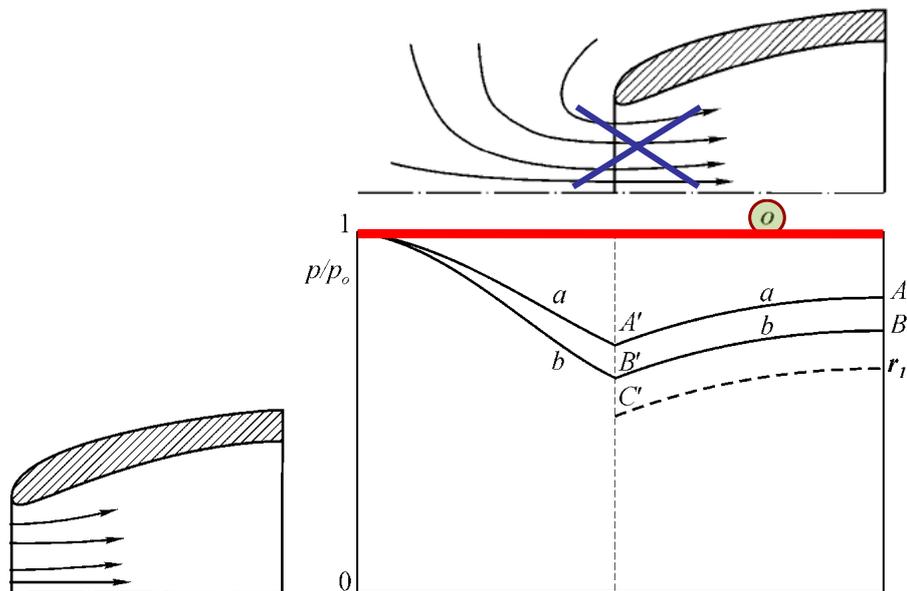
Come si vede dalla figura, una **presa d'aria subsonica** è costituita solo da un condotto divergente che, in condizioni di crociera, deve far rallentare l'aria.

Inizialmente (**al punto fisso**) l'aeroplano, e cioè l'aria esterna, non si muovono.

Con **il motore spento, la portata e la velocità sono, chiaramente, nulle.**

Anche la pressione nella presa non varia, ovunque uguale alla pressione ambiente (coincidente con quella di ristagno), come indicato dalla curva o .

La curva di non funzionamento si protrae ovviamente fino all'infinito a monte.



Come si vede dalla figura, una **presa d'aria subsonica** è costituita solo da un condotto divergente che, in condizioni di crociera, deve far rallentare l'aria.

Inizialmente (**al punto fisso**) l'aeroplano, e cioè l'aria esterna, non si muovono.

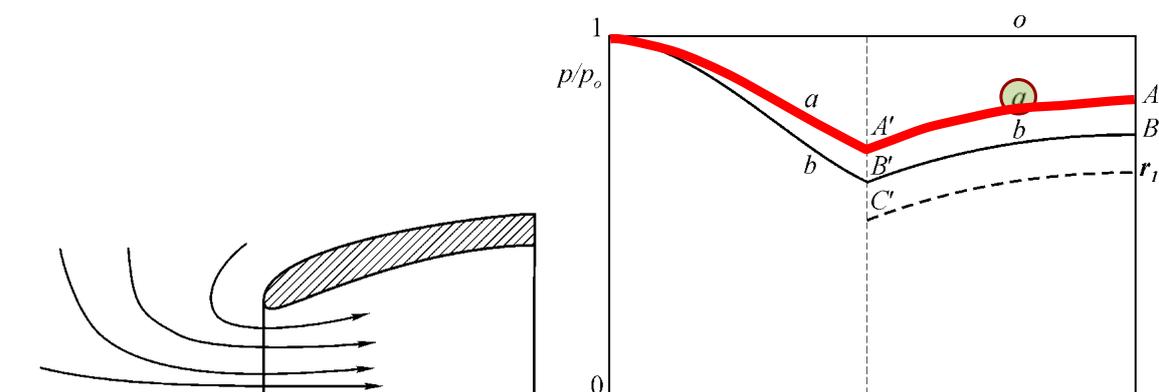
Con **il motore spento, la portata e la velocità sono, chiaramente, nulle.**

Anche la pressione nella presa non varia, ovunque uguale alla pressione ambiente (coincidente con quella di ristagno), come indicato dalla curva o .

La curva di non funzionamento si protrae ovviamente fino all'infinito a monte.

Con aeroplano sempre al punto fisso, all'accensione del motore, il compressore inizia a girare riducendo la pressione al suo ingresso rispetto a quella ambiente e fissandola, per esempio, al punto A .

Se il moto nella presa è isoentropico, unidimensionale e stazionario, la curva di funzionamento $A' - A$, indicata con a , è fissata dalla geometria del diffusore.

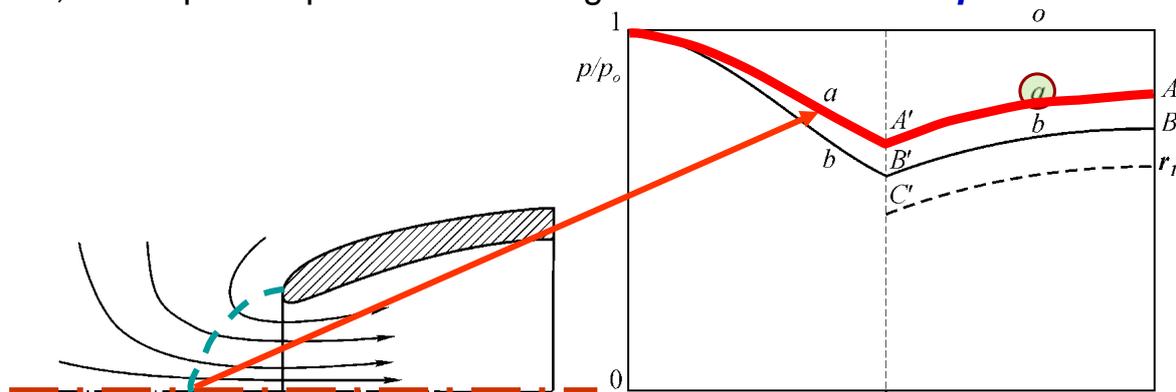


Poiché anche la pressione ambiente è fissata, l'aria in prossimità della presa deve accelerare, diminuendo così la sua pressione statica all'esterno della presa in modo da portarsi nelle condizioni del punto A' imposte dalla curva *a*. Quest'accelerazione avviene, come mostrato in figura, con un convergente fittizio che si sviluppa all'esterno della presa d'aria e convoglia in essa aria proveniente da tutte le direzioni.

Anche per questo motivo, la presa d'aria, come mostrato in figura, deve avere un bordo d'attacco arrotondato per evitare fenomeni di separazione.

Occorre, poi, osservare che, poiché le linee di corrente convergono da tutte le direzioni, la parte sinistra della curva *a* (relativa all'esterno della presa d'aria) rappresenta il profilo di pressione solo sull'asse della presa stessa.

Ad una certa distanza dalla presa, dove la velocità (il numero di Mach) è molto bassa, si recupera la pressione di ristagno coincidente con quella ambiente.

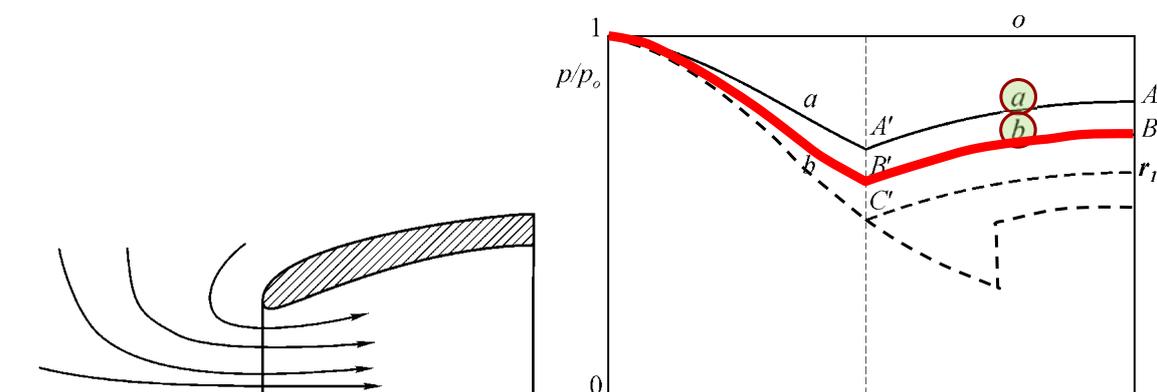


All'aumentare della velocità di rotazione del compressore, la pressione nella sezione di uscita della presa (ingresso al compressore) può diminuire al punto B, mentre la portata aumenta e la curva di funzionamento diventa la *b*.

Se si facesse diminuire la pressione all'uscita della presa d'aria fino al valore definito dal rapporto r_1 , si raggiungerebbero il valore massimo della portata e la condizione sonica nella sezione d'ingresso della presa (bocca della presa), punto di funzionamento C'.

Un'ulteriore diminuzione della pressione provocherebbe la formazione di un'onda d'urto nel divergente della presa d'aria ma non un aumento di portata.

Attenzione: Come sarà più chiaro in seguito, in altre condizioni di funzionamento, all'esterno della presa d'aria, si può avere sia un'espansione che una compressione.



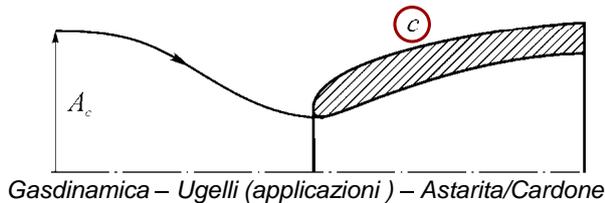
Come mostrato in figura, se ora **l'aereo si muove alla velocità subsonica** V_∞ , anche se la pressione ambiente non varia, il rapporto p_a/p_o (che è uguale a p_∞/p_o) diminuisce perché la pressione di ristagno aumenta.

Variando la pressione del compressore, si hanno **tre modi di funzionamento**.

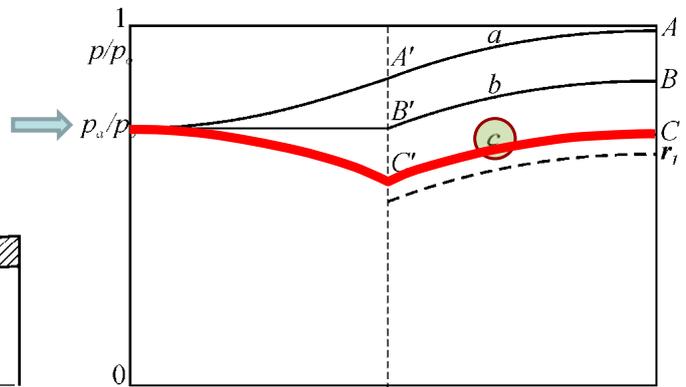
Quello descritto dalla curva c è simile a quanto prima analizzato. La pressione imposta dal compressore è tale che nel punto C' la pressione risulta minore di quella ambiente ed è quindi necessario avere un'espansione all'esterno della presa con un convergente esterno (figura in basso a sinistra).

Solo ad una certa distanza dalla presa, lì dove i filetti fluidi risultano praticamente paralleli tra di loro, si recupera la pressione ambiente.

$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



Gasdinamica – Ugelli (applicazioni) – Astarita/Cardone

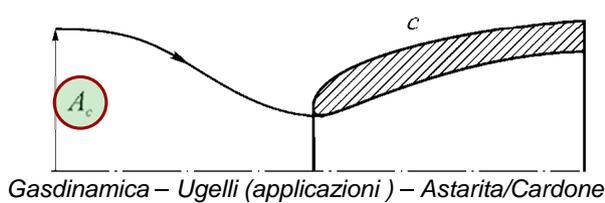


È utile, a questo punto, introdurre il concetto di **area di cattura** che è definita come **l'area della sezione retta, posta all'infinito a monte** (in pratica, dove i filetti fluidi risultano paralleli tra loro), **da cui proviene l'aria che passa attraverso la presa.**

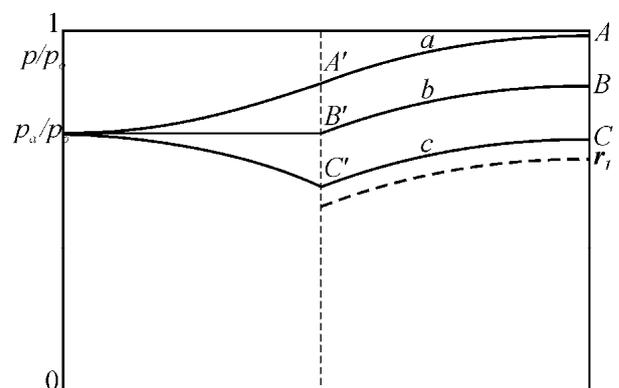
Per come è definita, l'area di cattura (**che può essere maggiore o minore dell'area della bocca**) si può calcolare, dall'equazione di conservazione della massa, mediante la:

$$A_c = \rho VA / (\rho_\infty V_\infty) = \dot{m} / (\rho_\infty V_\infty)$$

$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



Gasdinamica – Ugelli (applicazioni) – Astarita/Cardone



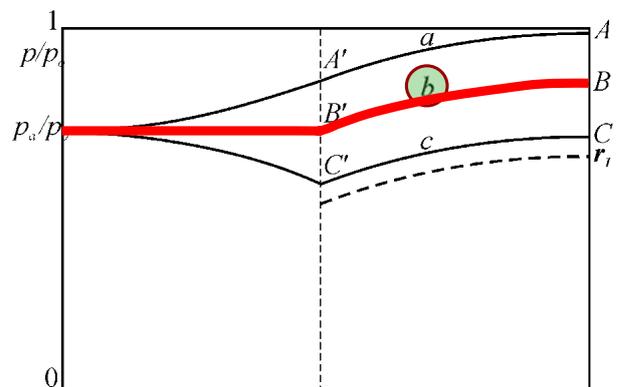
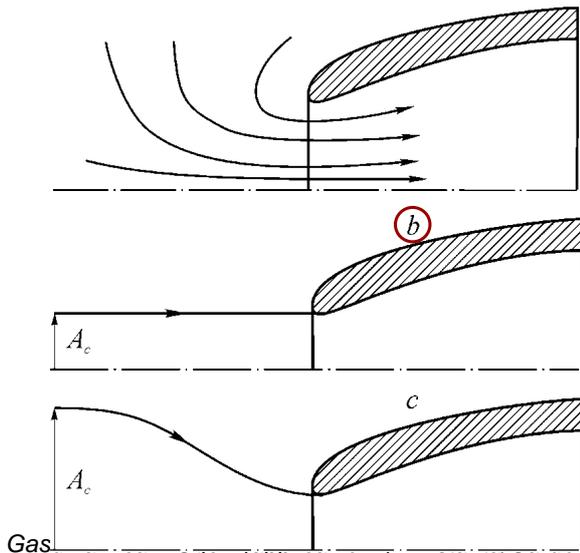
Nel caso della curva c , l'area di cattura è maggiore dell'area della bocca e le linee di corrente, fuori della presa, sono convergenti per avere un'espansione.

Al punto fisso, poiché la V_∞ è identicamente nulla, l'area di cattura deve essere infinitamente grande, il che comporta che le linee di corrente convergono **da tutte le direzioni**.

Se la pressione imposta dal compressore è quella particolare relativa al punto B , la curva seguita è la b e **il funzionamento della presa si dice corretto**.

La pressione relativa al punto B' è proprio uguale alla pressione ambiente e **l'area di cattura è uguale a quella della bocca della presa d'aria**.

All'esterno della presa il fluido non deve né espandersi né comprimersi, per cui il relativo tubo di flusso ha sezione costante.



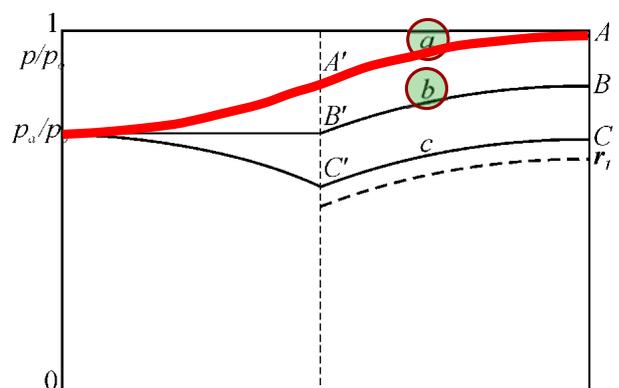
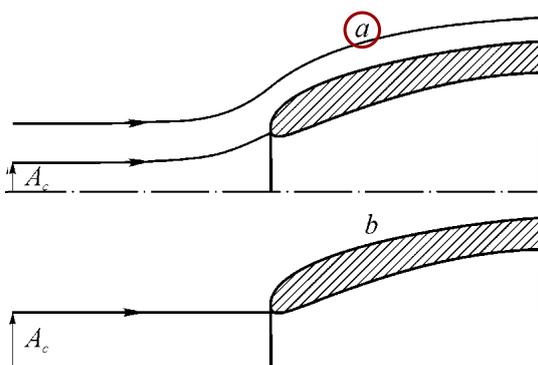
83

Aumentando ulteriormente la pressione immediatamente a monte del compressore fino al valore indicato con il punto A , si ha un funzionamento con **spillamento d'aria** all'esterno della presa. I filetti fluidi della corona circolare tra l'area di cattura e quella di ingresso della presa non entrano nel motore.

In questo caso la pressione a monte della presa deve aumentare cosicché deve essere ivi presente un divergente; l'area di cattura risulta quindi minore di quella all'ingresso della presa e si segue la curva a .

In conclusione, le prese d'aria divergenti possono innalzare la pressione del fluido con una compressione solo **interna**, o di **tipo misto**. Nel primo caso, l'aumento di pressione avviene solo all'interno del diffusore (curva b) mentre,

nel secondo, la compressione ha luogo anche all'esterno (curva a).

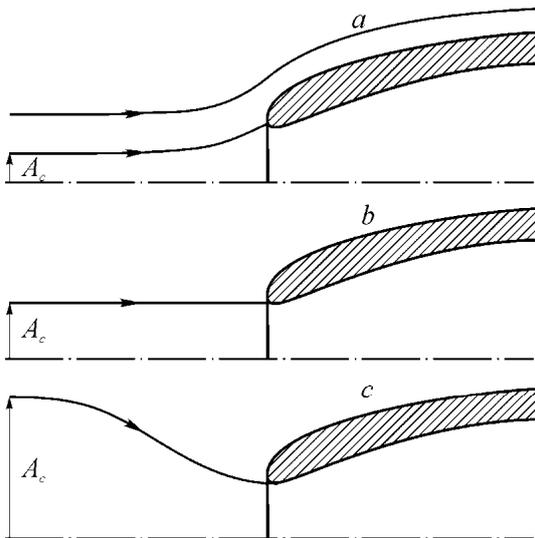


84

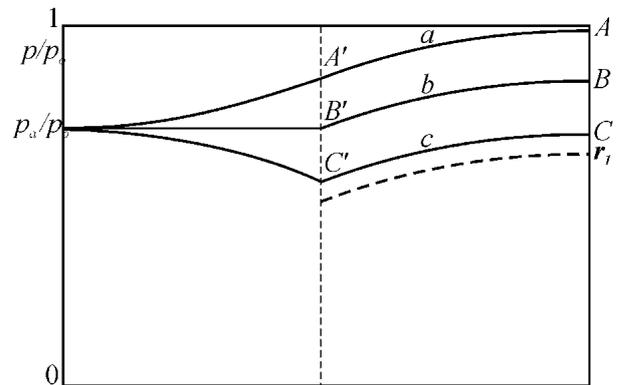
Fra i tre tipi di funzionamento elencati, il più efficiente è chiaramente quello corretto; infatti in questo caso **la resistenza aerodinamica sulle pareti esterne della presa d'aria è minore.**

Si noti che, qualora la presa funzionasse seguendo la curva di funzionamento corretto **b**, un aumento della velocità del velivolo (del numero di Mach M_∞) condurrebbe a una diminuzione del rapporto p_a/p_o e dell'area di cattura. Ci si sposterebbe, quindi, su una curva di funzionamento del tipo indicato con **a**.

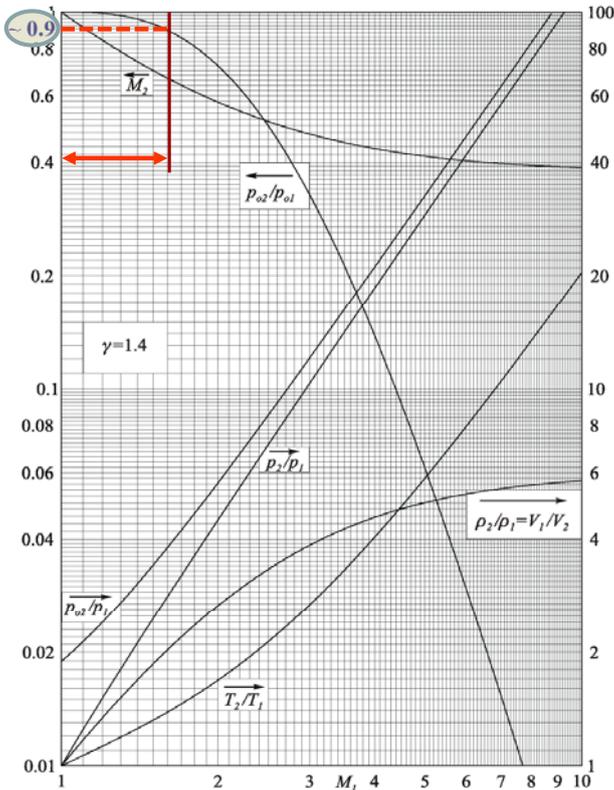
Viceversa, una diminuzione della velocità aumenterebbe il rapporto p_a/p_o e l'area di cattura, portando a una curva di funzionamento del tipo **c**.



$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



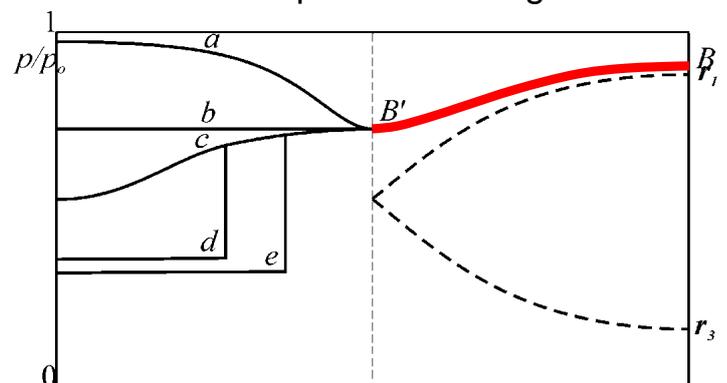
PRESE D'ARIA SUPERSONICHE



Se il numero di Mach di crociera M_c del velivolo è basso ($M_c \leq 1.6$), la presa d'aria semplicemente divergente può essere utilizzata anche in regime supersonico.

La perdita di p_o è, infatti bassa.

Per fissare le idee, si supponga che il compressore mantenga costante il rapporto p/p_o all'uscita della presa d'aria (ingresso al compressore) e, cioè, si fissi una curva di funzionamento all'interno della stessa, ad esempio quella individuata dai punti **B-B'** di figura.



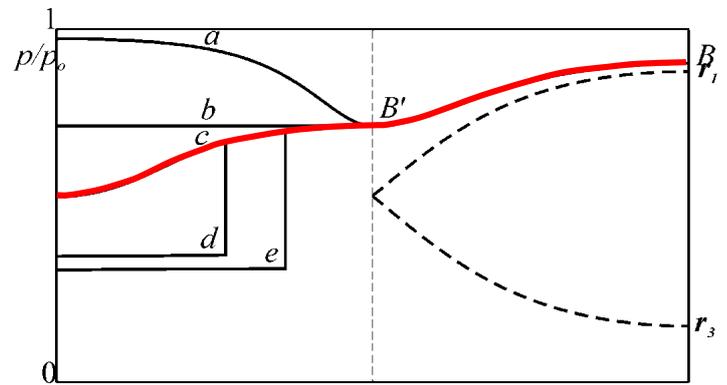
Nel caso in cui la condizione di volo provochi la formazione di un'onda d'urto, i diagrammi delle figure seguenti sono sempre adimensionalizzati rispetto alla pressione di ristagno a valle dell'onda d'urto.

È necessario sottolineare che quest'ipotesi è equivalente a fissare il numero di Mach in ogni sezione della presa d'aria, in particolare quello nel punto B' , ed implica che $p_{B'}$ aumenti all'aumentare del numero di Mach.

L'ipotesi fatta non lede la generalità del problema e consente una notevole semplificazione nella descrizione dello stesso permettendo una migliore comprensione della fenomenologia coinvolta.

Il funzionamento, a partire dal punto fisso fino al raggiungimento del Mach unitario, è analogo a quello descritto in precedenza. La curva c è stata rappresentata per un velivolo che vola in condizioni soniche ($M_\infty = 1$).

$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



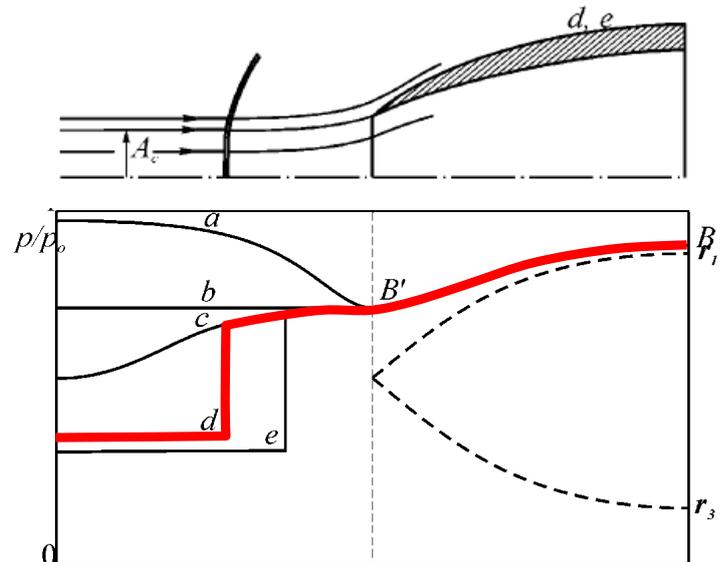
Quando si supera la velocità del suono si ha, come mostrato dalla curva d , la **formazione di un'onda d'urto a monte della presa d'aria**, praticamente normale nella zona di interesse (zona dell'area di cattura).

Il diffusore si comporta, infatti, quasi come un corpo tozzo ed è quindi necessario avere un'onda d'urto staccata che **informi** la corrente della presenza della presa.

Il diagramma di pressione indicato dalla curva d mostra che, a valle dell'urto, è necessario che si formi un divergente esterno per comprimere ulteriormente il fluido. Quindi, anche in queste condizioni **l'area di cattura è minore dell'area della bocca della presa d'aria**.

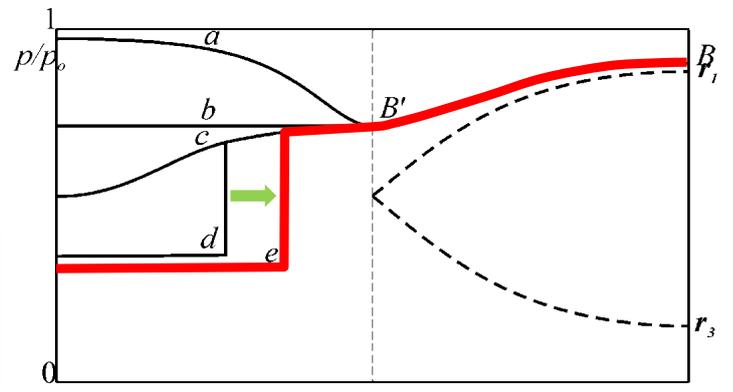
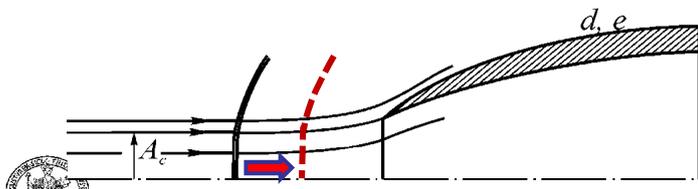
Per semplicità di rappresentazione, questa compressione esterna è descritta ancora dalla parte della curva c a valle dell'onda d'urto.

$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



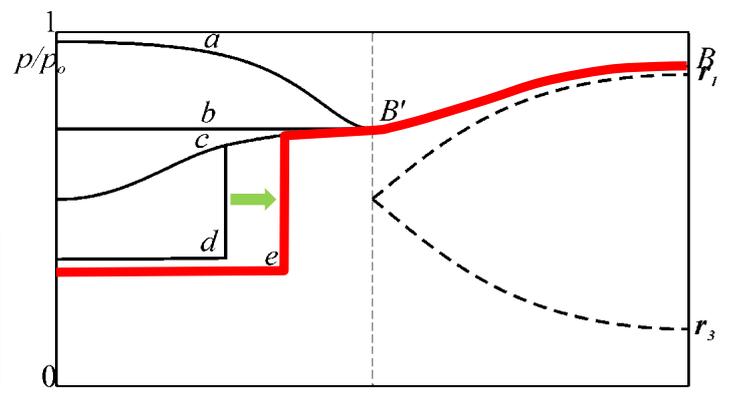
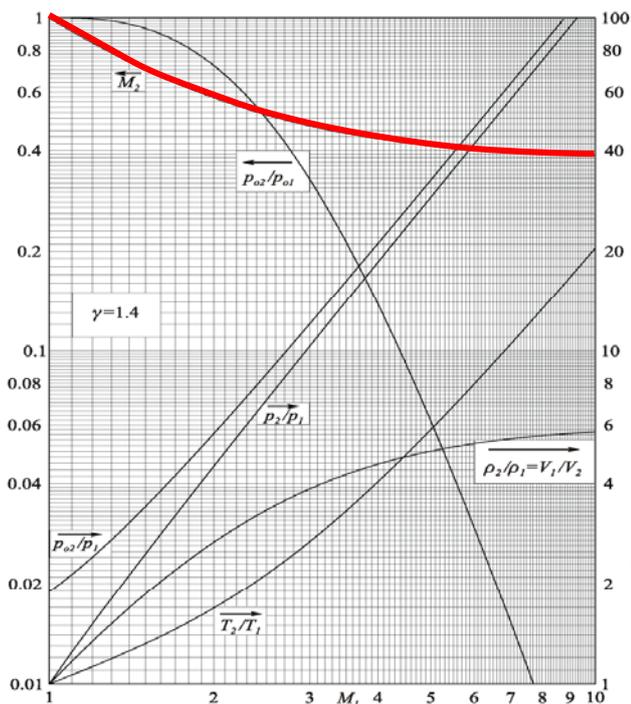
Aumentando ancora il numero di Mach, l'onda tende ad avvicinarsi alla presa d'aria e il diagramma di pressione diventa quello indicato, ad esempio, dalla curva *e*.

$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



Aumentando ancora il numero di Mach, l'onda tende ad avvicinarsi alla presa d'aria e il diagramma di pressione diventa quello indicato, ad esempio, dalla curva *e*.

L'avvicinarsi dell'onda d'urto alla presa d'aria all'aumentare del numero di Mach si può spiegare considerando che **il Mach a valle di un'onda d'urto è una funzione decrescente di quello a monte**.



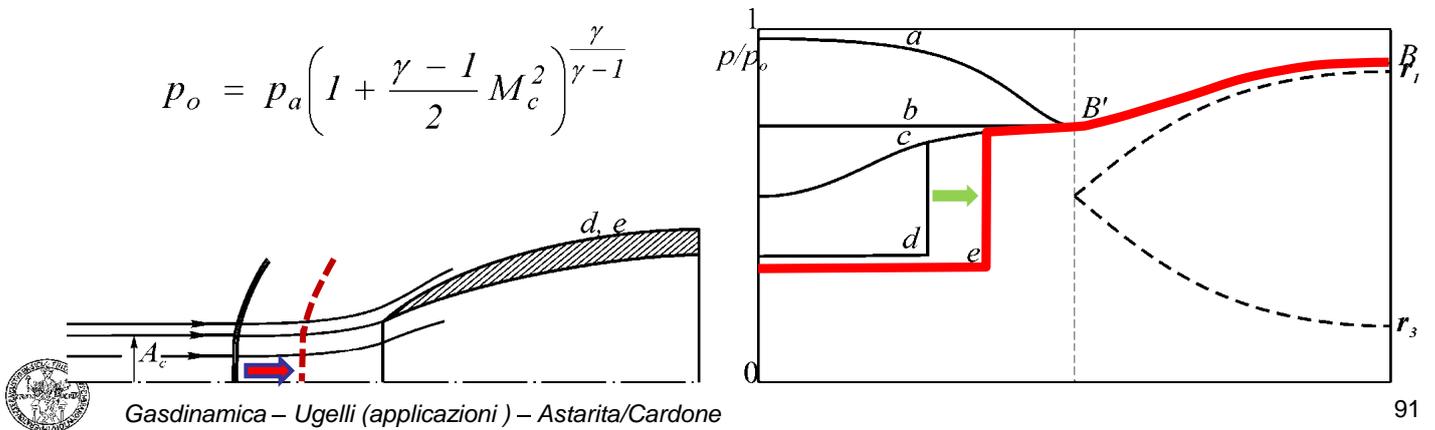
Aumentando ancora il numero di Mach, l'onda tende ad avvicinarsi alla presa d'aria e il diagramma di pressione diventa quello indicato, ad esempio, dalla curva *e*.

L'avvicinarsi dell'onda d'urto alla presa d'aria all'aumentare del numero di Mach si può spiegare considerando che **il Mach a valle di un'onda d'urto è una funzione decrescente di quello a monte**.

Poiché per bassi valori supersonici di M_∞ il numero di Mach imposto nel punto B' risulta minore di quello a valle dell'onda d'urto, al diminuire di quest'ultimo (e cioè all'aumentare di M_∞), ci si avvicina alle condizioni del punto B' ed è quindi necessaria una compressione esterna minore.

Ne consegue che, all'aumentare del numero di Mach, **l'onda d'urto si avvicina alla bocca della presa d'aria**.

$$p_o = p_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

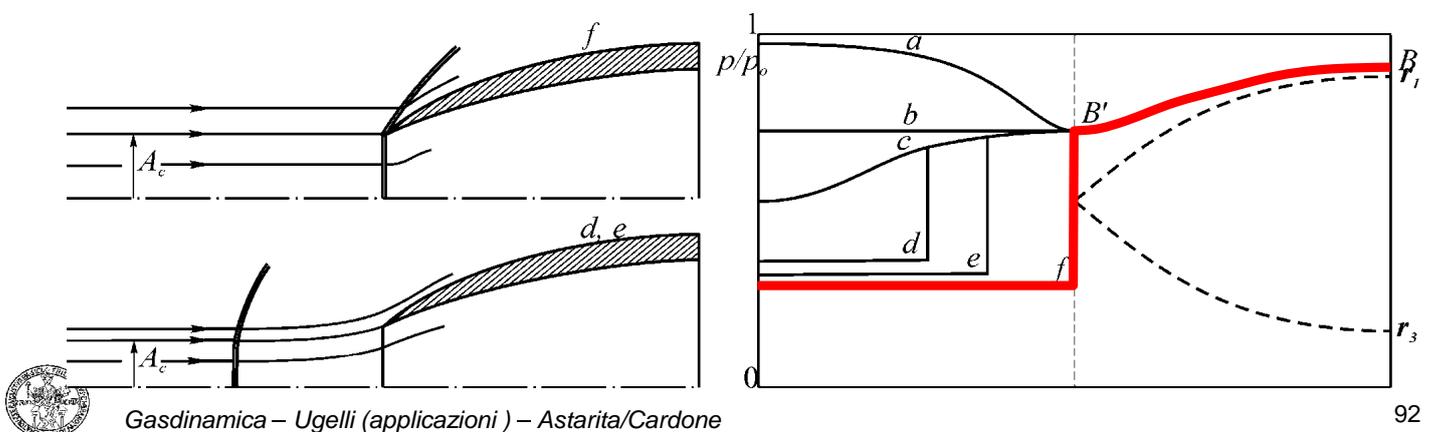


Quando M_∞ è tale che il numero di Mach dopo l'onda d'urto è uguale a quello corrispondente al punto B' , l'onda si porta esattamente sulla bocca della presa d'aria e si ha il cosiddetto **funzionamento corretto** (curva *f*) **della presa d'aria**.

Ciò potrà avvenire **purché il numero di Mach del punto B' non sia inferiore a quello dettato dal punto B' stesso** (dipendente da B e dal rapporto tra le aree).

In queste condizioni **la parete esterna della presa d'aria provoca la formazione di onde d'urto oblique** e, per ridurne la resistenza aerodinamica, essa è normalmente costruita con uno **spigolo per quanto possibile vivo** e con un **angolo di deviazione relativamente basso**, così come mostrato in figura.

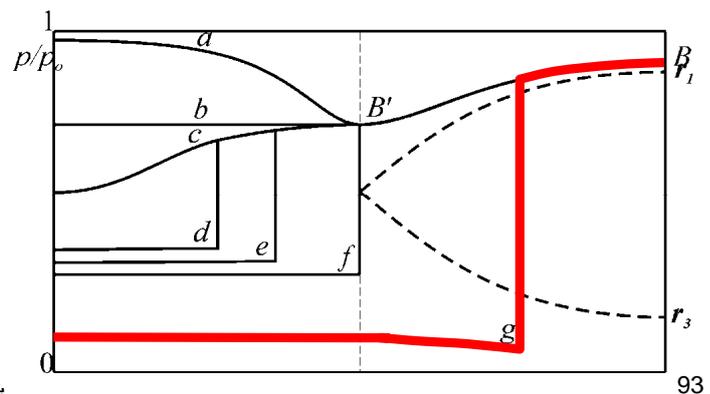
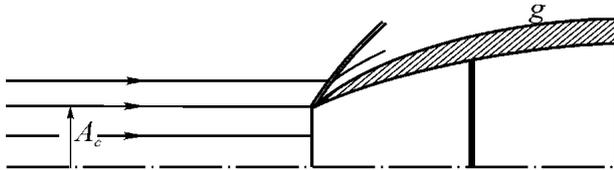
Va comunque osservato che una tale geometria può causare **separazione della corrente, in particolare al punto fisso**.



Un **ulteriore aumento del numero di Mach di volo provoca l'ingresso dell'onda d'urto all'interno della presa d'aria** con un aumento del numero di Mach a monte dell'onda e, di conseguenza, una **maggiore caduta di pressione di ristagno**.

La curva di funzionamento è quella indicata con la lettera **g** e, per le ipotesi fatte, a valle dell'onda si segue la restante porzione della curva **B'-B**.

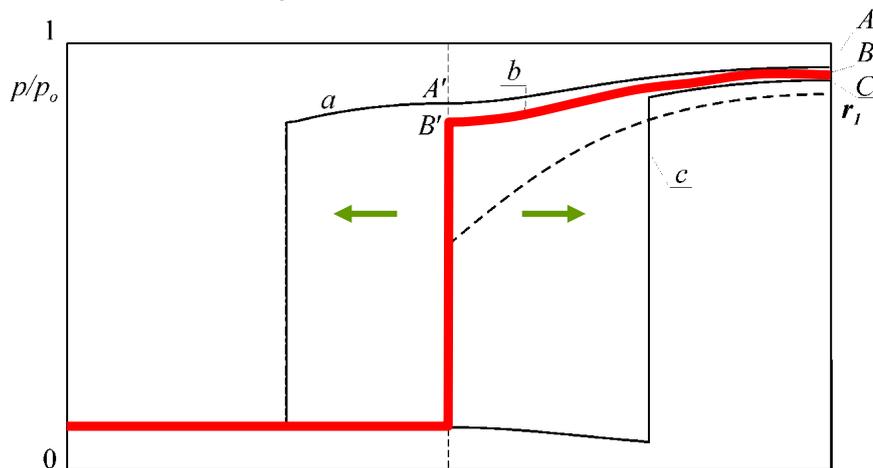
Più esattamente, **nell'ambito di una trattazione bidimensionale**, sulla bocca della presa esisterebbe un **ventaglio di espansione** per la presenza di una **convessità** che, dopo la riflessione sull'asse di simmetria, riflettendosi sulla superficie concava del divergente, genererebbe l'onda d'urto interna.



Per completare l'analisi, è opportuno discutere come si modificano le curve di funzionamento **all'aumentare, o al diminuire, della pressione imposta dal compressore** (cioè immediatamente prima di esso) rispetto a quella relativa al funzionamento corretto (curva **b**), per un fissato valore del numero di Mach.

Nel caso di **aumento della pressione** (curva **a**), **l'onda si allontana** dalla bocca della presa perché il numero di Mach all'ingresso deve diminuire ed è quindi necessaria una compressione esterna; lo spillamento dovuto alla compressione esterna provoca una **diminuzione della portata di massa**.

Nel caso in cui si ha una **diminuzione della pressione** in ingresso al compressore (curva **c**), **l'onda d'urto si porta all'interno del divergente ma la portata rimane costante** perché le condizioni sulla bocca non variano.



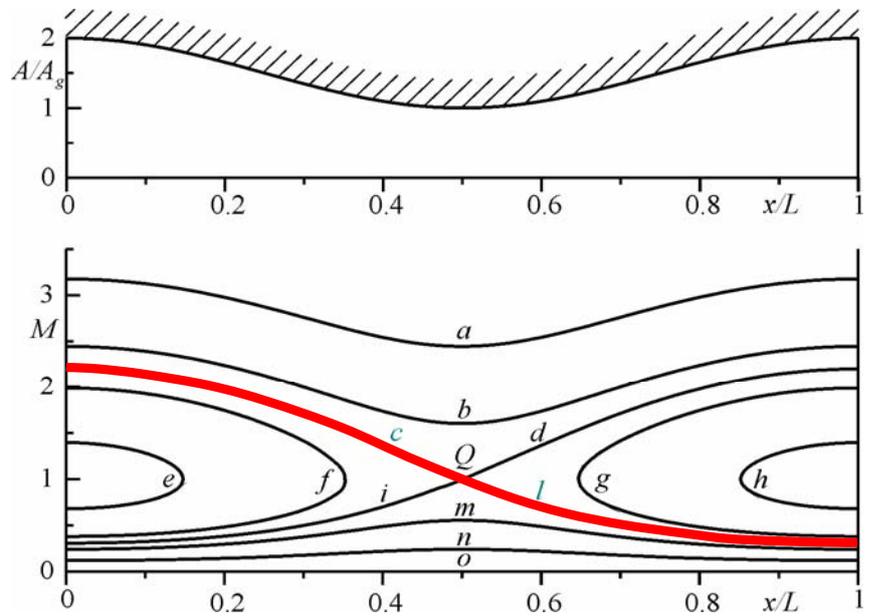
Per quanto detto, una presa d'aria formata da un semplice condotto divergente si può utilizzare solo se la caduta di pressione di ristagno, associata all'onda d'urto, è abbastanza piccola, cioè per Mach di crociera relativamente bassi.

Un limite ragionevole si ha per M_c **minore di circa 1.6**. Infatti, in queste condizioni, la caduta di pressione di ristagno risulta inferiore al 10%.

Per numeri di Mach maggiori, la caduta di pressione di ristagno diventa rapidamente troppo grande (ad es., già per $M_c = 1.8$, la pressione di ristagno, a valle dell'urto, diminuisce di quasi il 20%).

In tal caso, è necessario utilizzare una **presa d'aria convergente divergente**.

La curva di funzionamento **ideale** per quest'ultimo tipo di presa d'aria sarebbe una **curva simile a quella indicata dalle lettere c-l** nella figura a lato, con un numero di Mach all'ingresso del diffusore uguale a quello di crociera.

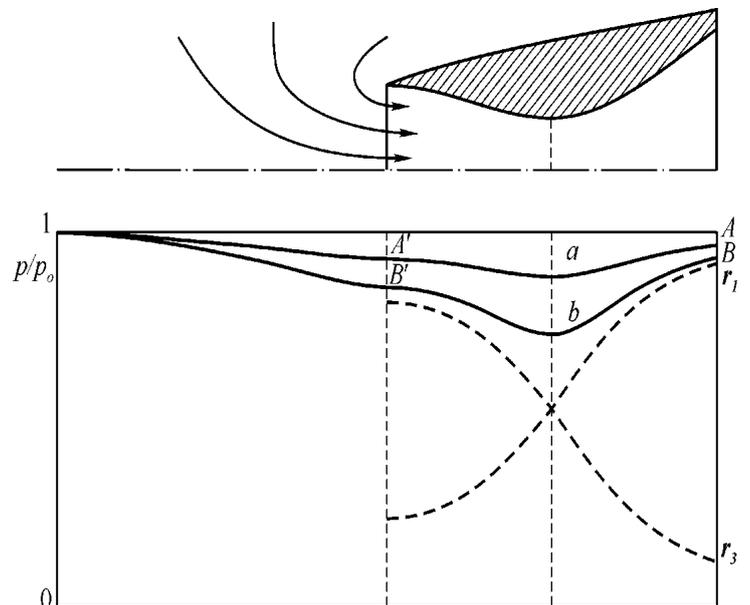


La fase iniziale di avviamento è analoga a quella già descritta per le prese d'aria subsoniche semplicemente divergenti; l'unica differenza è che la pressione diminuisce nel convergente e poi aumenta nel divergente della presa.

Se il compressore impone una pressione (all'uscita della presa) pari a quella del punto B, la curva di funzionamento all'interno della presa d'aria è **fissata al punto B'** ed è necessario avere un **convergente esterno**.

Anche in questo caso, **l'area di cattura è infinita** e le linee di corrente convergono da tutte le direzioni, per cui la parte di curva all'esterno della presa rappresenta il profilo di pressione **solo sull'asse** della presa stessa.

La presa si strozza (con portata massima) quando **il rapporto tra la pressione a monte del compressore e quella di ristagno** (al punto fisso, uguale all'ambiente) **è uguale ad r_1** .

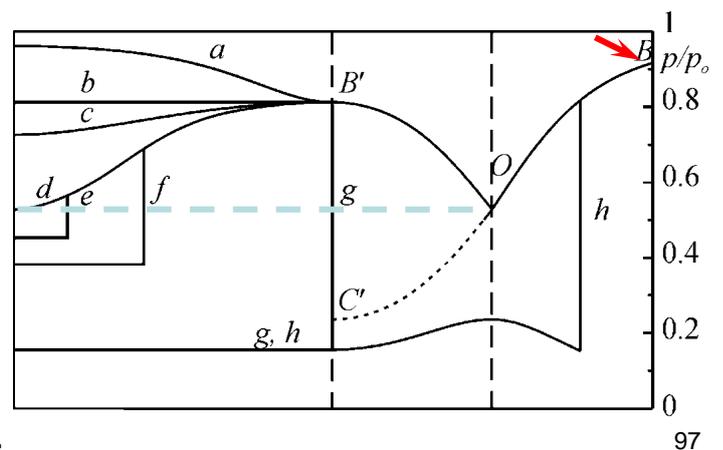


Per analizzare la fase successiva, **si supponga che il compressore mantenga costante il rapporto p/p_o , all'uscita della presa d'aria**, che ad esempio è ipotizzato pari a r_1 .

Una particolare condizione di funzionamento, in regime subsonico, è quella mostrata nella curva **b**, che ha area di cattura uguale a quella della bocca.

Un aumento (o una diminuzione) di M_∞ provoca gli stessi effetti già discussi nel caso di una presa d'aria semplicemente divergente (curve **c** e **a** rispettivamente).

La curva **d** corrisponde al funzionamento in condizioni soniche della corrente esterna.

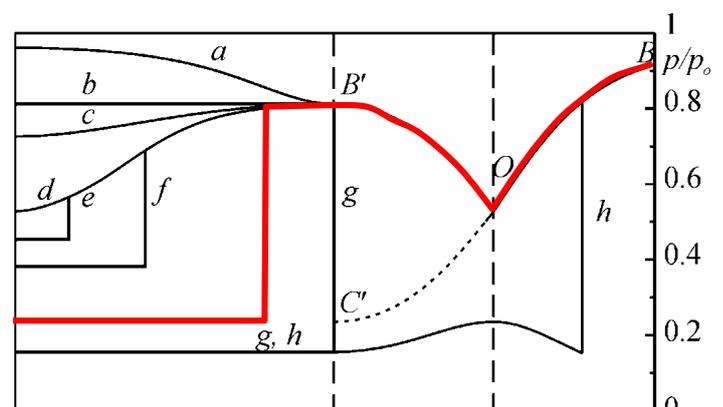
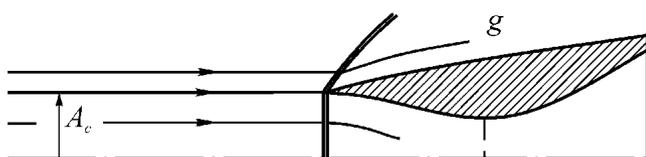


Anche le curve **e** o **f**, per cui si ha un'onda d'urto, sono simili al caso di prima.

In particolare, il numero di Mach a valle dell'onda d'urto risulta maggiore di quello relativo al punto **B'** e si ha un'onda d'urto staccata, con la compressione esterna e un conseguente spillamento.

Aumentando il numero di Mach di volo fino al valore relativo al punto **C'**, l'onda d'urto è **ancora esterna** alla presa d'aria e occorre, come si vedrà in seguito, un'ulteriore accelerazione per portarla sulla bocca.

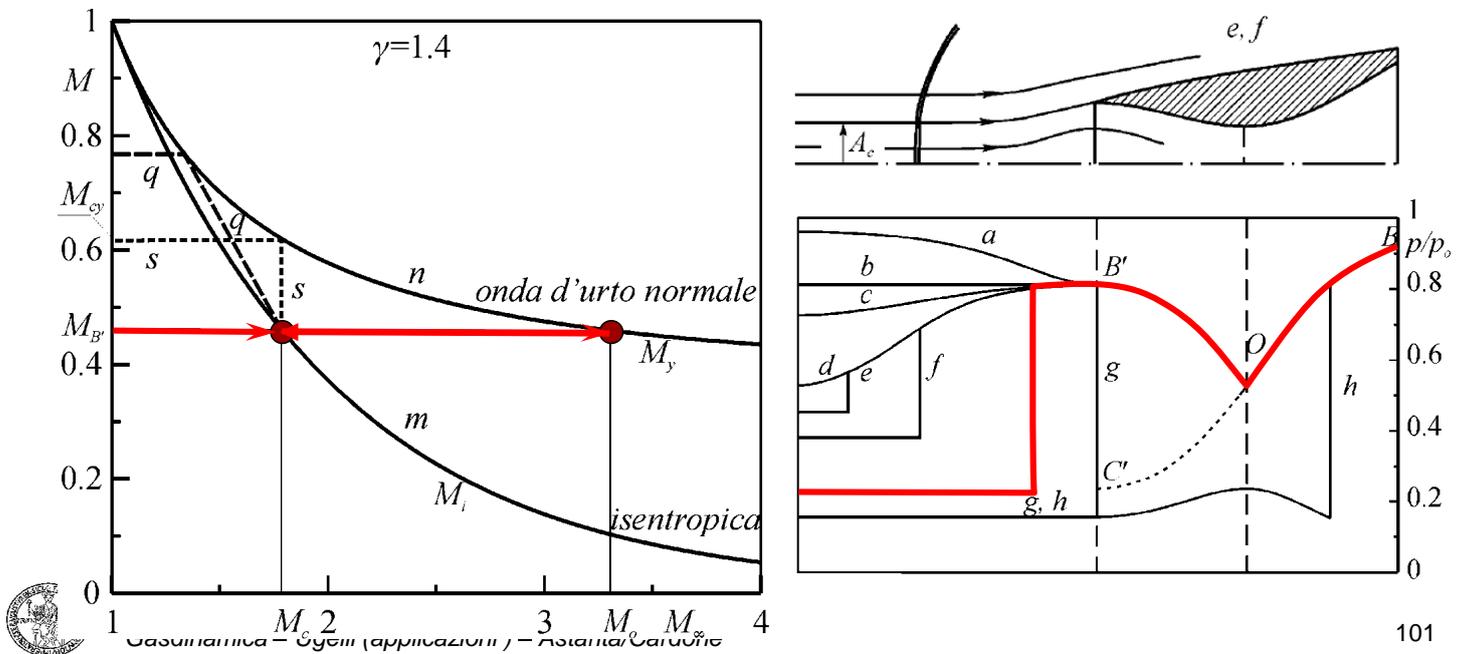
L'onda d'urto, infatti, si porta all'ingresso dell'ugello (curva g) solo se, e quando, il numero di Mach a valle dell'onda è uguale a quello relativo al punto B'.



Poiché M_{cy} è maggiore di $M_{B'}$, anche quando il velivolo raggiunge **il numero di Mach di crociera, l'onda si troverà ancora a monte della presa.**

Per portare l'onda sulla bocca del convergente, e quindi **inghiottirla** in presa, si deve aumentare M_∞ fino a raggiungere il valore indicato con M_o (curva **n**) di figura.

Risulta dunque necessario operare un "**overspeeding**" (da cui il pedice **o**) e **solo successivamente ci si può riportare a M_c .**



Se $M_\infty = M_o$, la curva di funzionamento è la **g**.

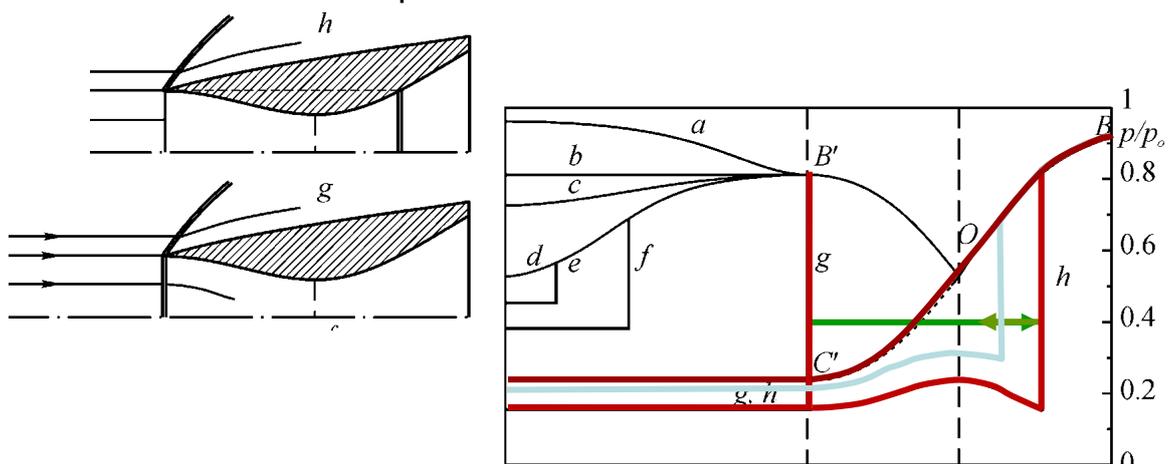
L'onda, attaccata alla bocca del diffusore, risulta instabile. Una perturbazione può far entrare l'onda nel convergente della presa d'aria che la inghiotte.

Come per le gallerie supersoniche, **l'onda si sposta in una sezione del diffusore che ha la stessa area della bocca della presa (curva **h**).**

Una volta **avviata la presa d'aria**, si può **diminuire il numero di Mach fino al valore di crociera**, avvicinando l'onda alla gola del diffusore (diminuendo quindi il numero di Mach a monte fino a quello di crociera) **riducendo così la caduta di pressione di ristagno.**

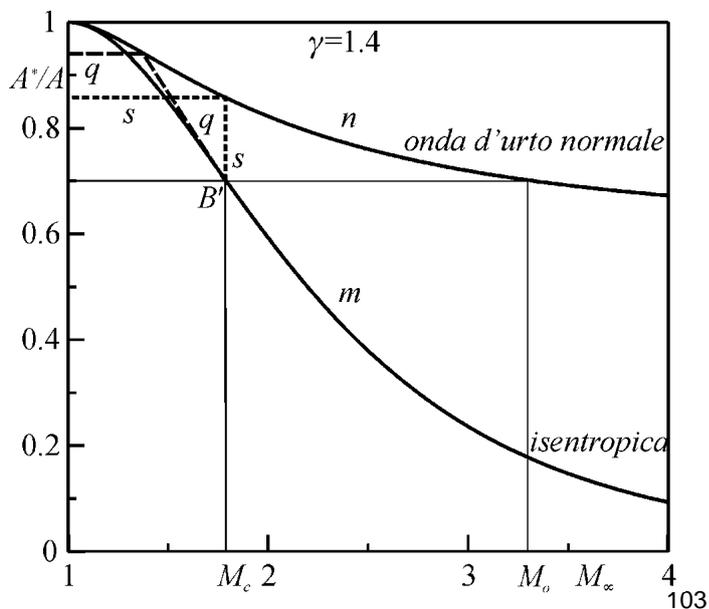
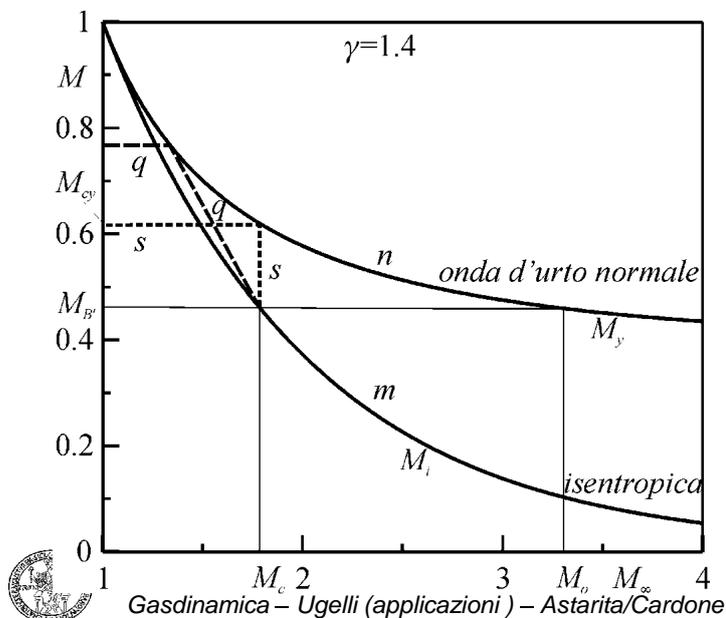
Si vuole, quindi, far funzionare la presa secondo la curva $C'OB$.

Chiaramente **non conviene portare l'onda proprio nella sezione di gola**, perché, essendo instabile agli spostamenti verso monte, **può essere espulsa** rendendo necessaria una nuova procedura d'avviamento.



Per semplificare la progettazione delle prese d'aria, il diagramma di sinistra è alternativamente espresso con il diagramma di destra, in termini del rapporto A^*/A che è proprio il rapporto tra l'area di gola (nella quale si verifica $M = 1$) e quella d'ingresso. La superficie del diagramma può suddividersi in tre zone:

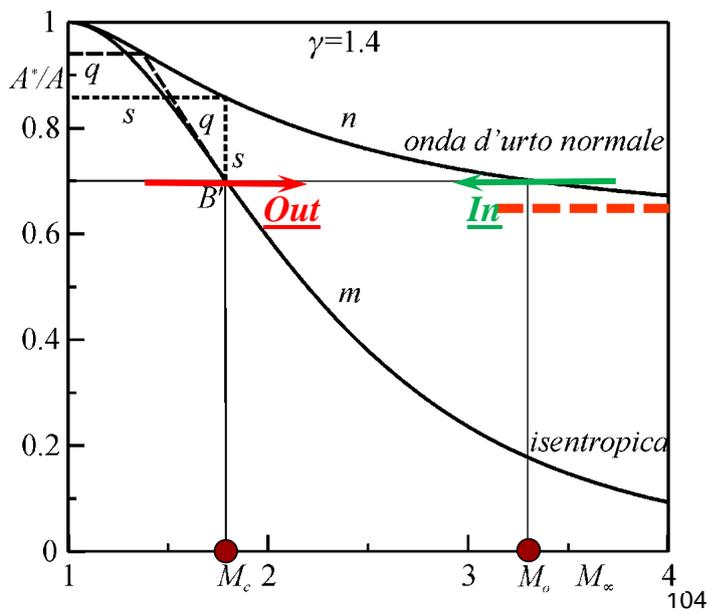
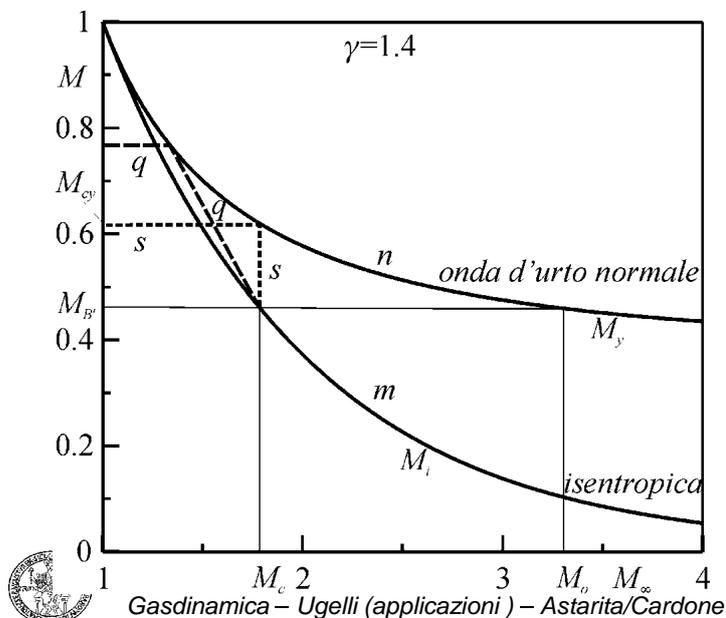
- la **zona sotto la curva isentropica**, che rappresenta il dominio in cui l'onda si trova senz'altro **a monte del diffusore**;
- la **zona sopra la curva relativa alle onde d'urto normali**, che rappresenta il dominio in cui l'onda si trova senz'altro **nel divergente della presa d'aria**;
- la **zona intermedia fra le due curve**, che rappresenta **una zona d'isteresi**.



Se si **arriva nella zona centrale da sinistra**, l'onda si trova **all'esterno** della presa d'aria mentre, arrivando **da destra**, l'onda è **all'interno del divergente**.

Esaminando i diagrammi si può notare come, per una presa d'aria a geometria fissa, anche per moderati valori di M_c , il valore di M_o sia nettamente maggiore. Inoltre, la curva superiore presenta un **valore asintotico**, per cui non è sempre possibile inghiottire l'onda d'urto.

Comunque, anche qualora fosse possibile arrivare al numero di Mach di over-speeding, la resistenza aerodinamica aumenterebbe notevolmente rendendo necessario **sovradimensionare sia il motore che le strutture del velivolo**.



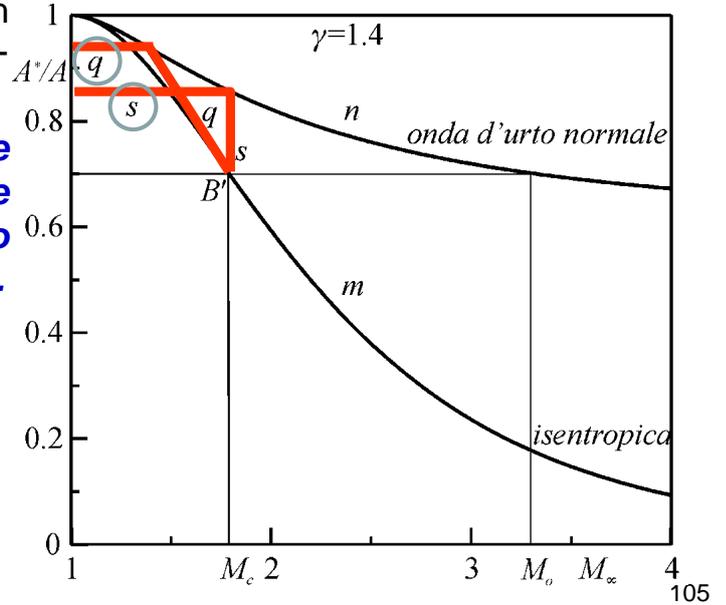
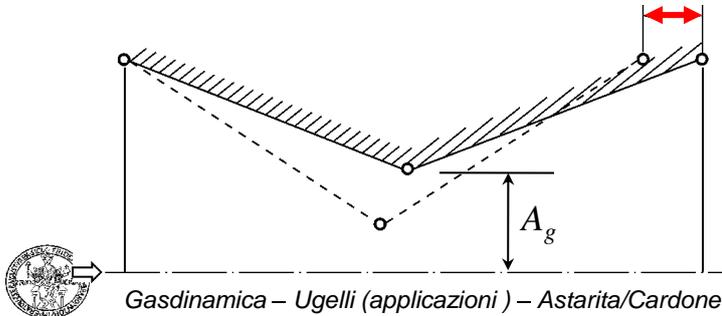
Perciò, una presa d'aria convergente divergente è normalmente realizzata a **geometria variabile**, come schematicamente rappresentato in basso.

Il **movimento verso sinistra** (o, destra) della cerniera di destra **fa diminuire** (rispettivamente, aumentare) **l'area di gola** della presa stessa.

In questo caso è possibile seguire la curva s del diagramma, **ingoiare l'onda ad un rapporto A^*/A** più elevato (**al Mach di crociera**) e poi diminuire il rapporto delle aree per ridurre la caduta di pressione di ristagno.

Se si può **variare in modo significativo il rapporto delle aree**, risulta ancora più conveniente seguire la curva q , e cioè ingoiare subito l'onda con elevata area di gola e poi accelerare al Mach di crociera variando contemporaneamente il rapporto delle aree.

Ciò consente di **far funzionare meglio il motore grazie alla minore caduta di pressione di ristagno della corrente durante l'avviamento**.



Il Valkyrie XB 70, bombardiere supersonico (aereo sperimentale), utilizzava la configurazione canard ed un'ala a delta, (come l'odierno Eurofighter Typhoon) costruito per la maggior parte in acciaio inossidabile ad alto tenore di nichel, pannelli a nido d'ape e titanio.

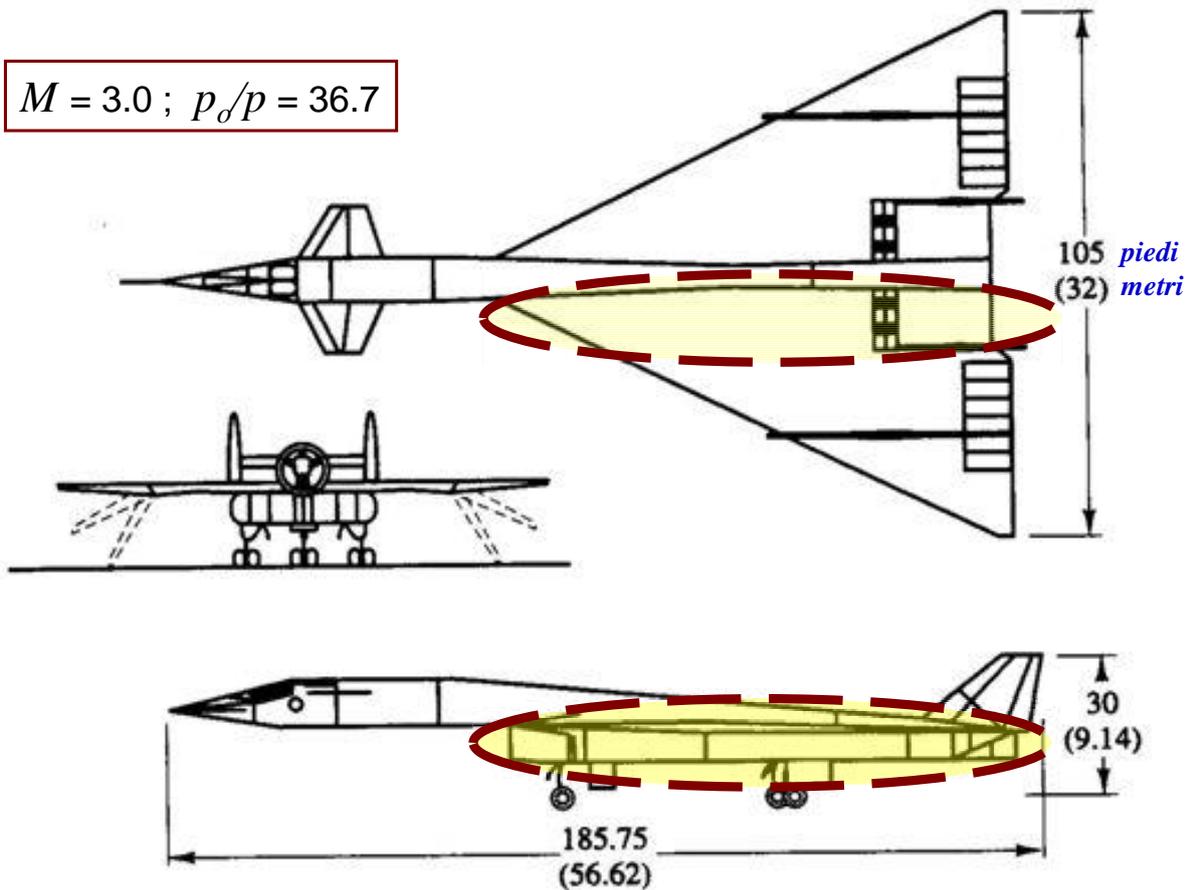
Il Valkyrie era progettato per sfruttare un fenomeno chiamato compression lift (portanza di compressione), ottenuto quando le onde d'urto generate da un aereo che voli a velocità supersoniche (sono chiamati waveriders, "cavalcatori di onde")

Propulsione:
6 turbogetto
General Electric
YJ93-GE-3
con postbruciatore

Spinta da 84 a 133 kN
ciascuno

Costo programma: 1,5 miliardi US\$
1964-1970

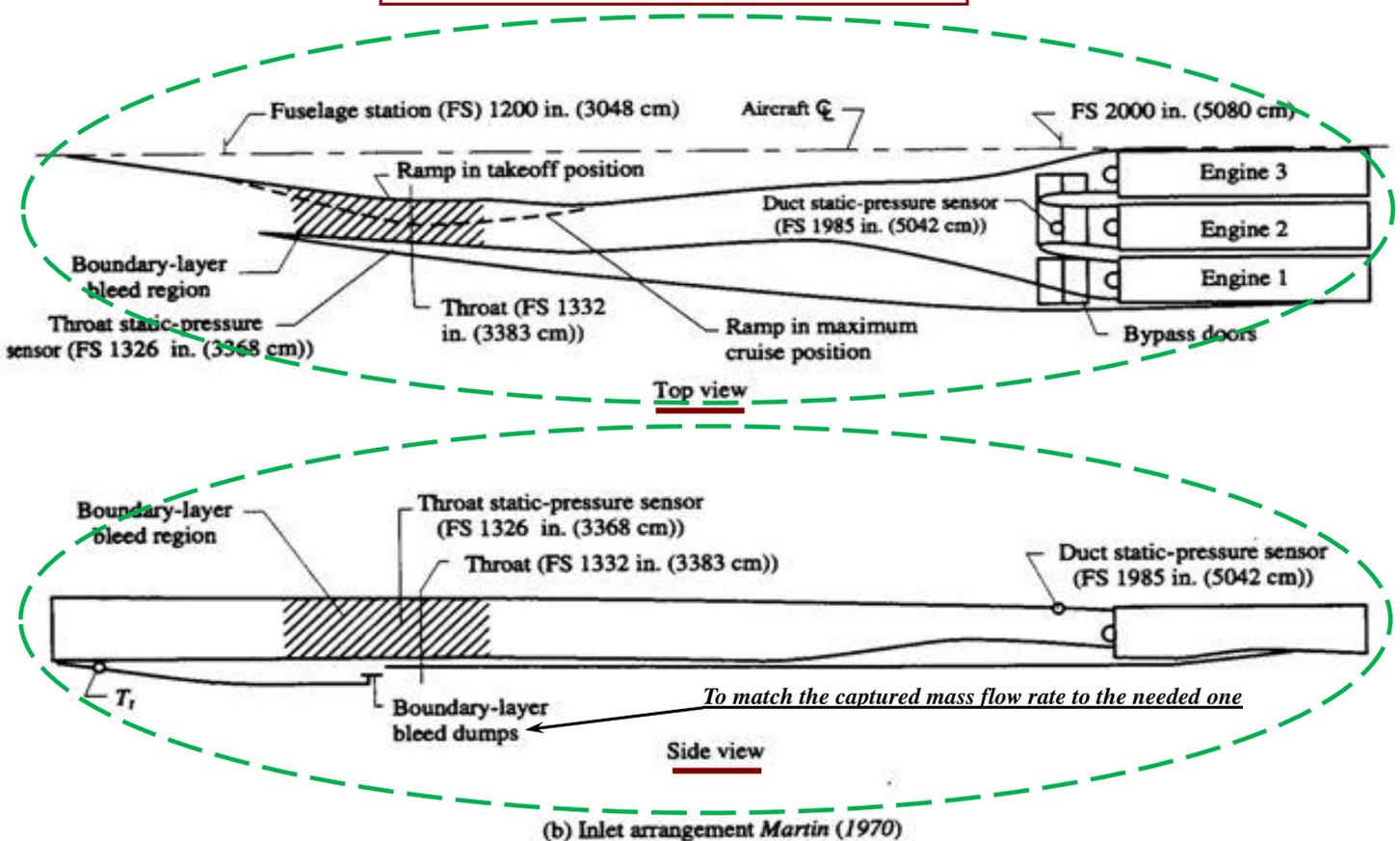
$$M = 3.0 ; p_o/p = 36.7$$



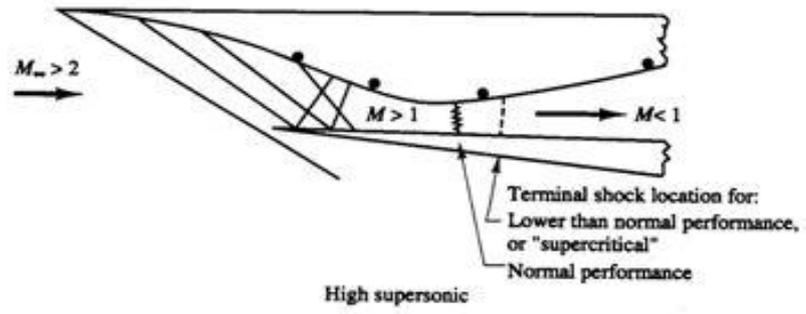
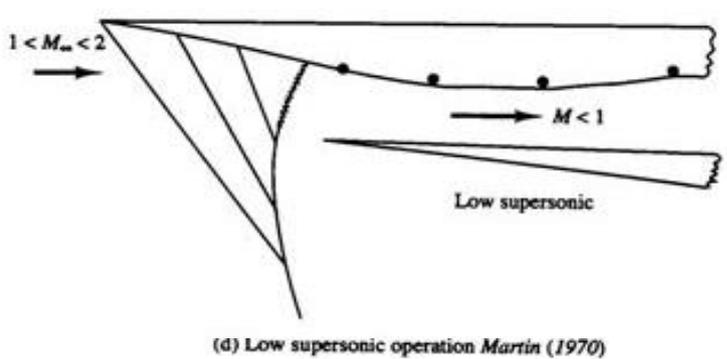
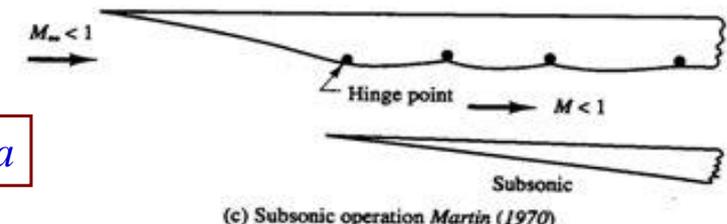
(a) XB-70 Aircraft three-view *Gallagher (1970)*



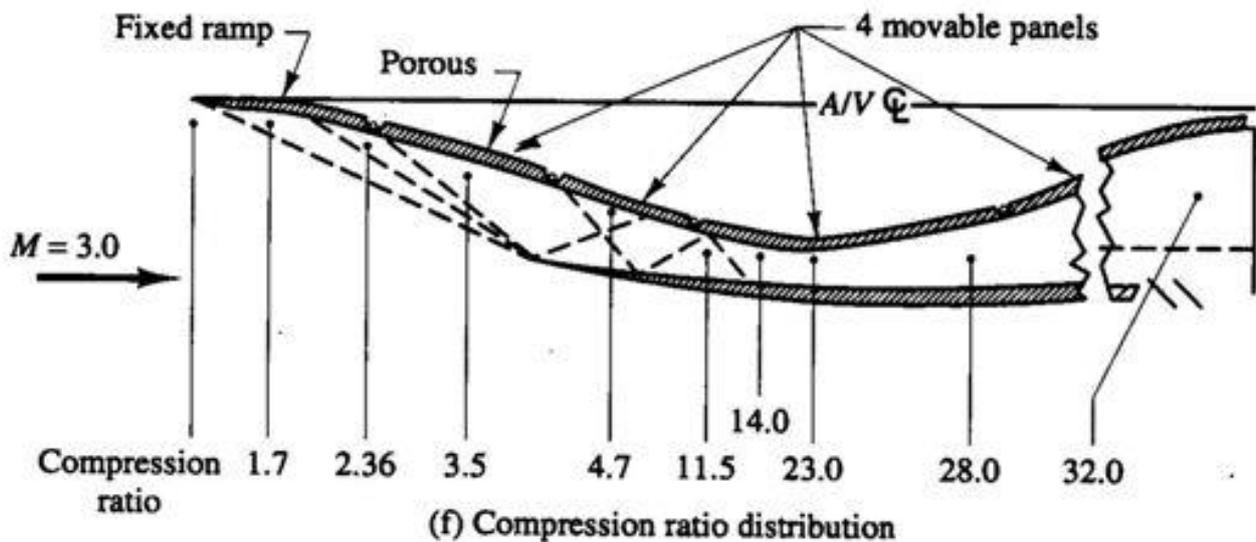
bleed = sfiato ; dump = scarico



hinge = cerniera



$$M = 3.0 ; p_o/p = 36.7 = 32/0.87$$



PROPULSIONE A GETTO

Per propulsione si dovrebbe intendere l'operazione con la quale, comunque, si dà ad un corpo mobile la spinta necessaria a vincere le resistenze che si oppongono al suo moto ed, eventualmente, ad accelerarlo.

Tuttavia, il termine propulsione è, spesso, riservato a quelle situazioni per le quali la spinta si ottiene accelerando un fluido, o meglio, augmentandone la portata di quantità di moto.

Tali sono i casi, ad esempio, del volo degli uccelli e della propulsione ad elica, o a getto, di navi e aeroplani e anche, in taluni casi, di auto.

In questi casi, l'aumento della quantità di moto del fluido per unità di tempo produce una spinta che, quasi sempre, agisce all'incirca nella stessa direzione del moto del corpo.

L'elica di un aeroplano aumenta la portata di quantità di moto dell'aria che attraversa il cerchio che spazza e ciò genera la spinta. L'aumento della portata di quantità di moto è uguale alla forza di trazione esercitata dall'elica.

La propulsione a getto è considerata generalmente diversa da quella ad elica poiché, accelera un fluido ad alta, o relativamente alta, pressione, attraverso un condotto (di qui la diversità) dando luogo a una corrente confinata ad alta velocità (getto) con conseguente generazione della spinta.

Va, comunque, precisato che, anche a valle di un'elica, è presente un getto di aria ad alta velocità, ma non confinato.



In linea di principio, non vi è alcuna limitazione sul tipo di fluido da utilizzare nella propulsione a getto anche se dal punto di vista pratico sono più facilmente realizzabili **tre tipi diversi di condizioni e quindi di propulsori**.

- 1 - Il fluido è acqua, o aria, che, captato dall'ambiente, si muove in un condotto in cui si trova un'**elica mossa da un motore esterno** che ne aumenta la pressione consentendo quindi di accelerare successivamente il fluido in un ugello ed, in definitiva, facendone aumentare la portata di quantità di moto (**elica intubata**)
- 2 - Il fluido è aria che, dopo essere stata prelevata dall'atmosfera, viene **inizialmente compressa, successivamente riscaldata** (bruciando in essa del combustibile) ed **infine accelerata** ad una velocità maggiore di quella in ingresso per aumentarne la portata di quantità di moto (**ramjet**, o **turbojet**).

Nel caso del **ramjet** (in italiano: **statoreattore**), la compressione avviene **esclusivamente nella presa d'aria** (supersonica), **senza l'ausilio di organi mobili**.

Viceversa nel caso del **turbogetto (turbojet)**, la compressione pur avvenendo parzialmente nella presa d'aria, essa è **prevalentemente realizzata mediante un compressore**.

In questo ultimo caso, come già visto, il compressore è azionato da una turbina che sfrutta parte del salto entalpico disponibile. la restante parte potendo essere utilizzata per accelerare il fluido.



Lo statoreattore e il turbogetto sono detti **motori respiranti** in quanto, come l'uomo, **hanno bisogno dell'aria esterna per funzionare**.

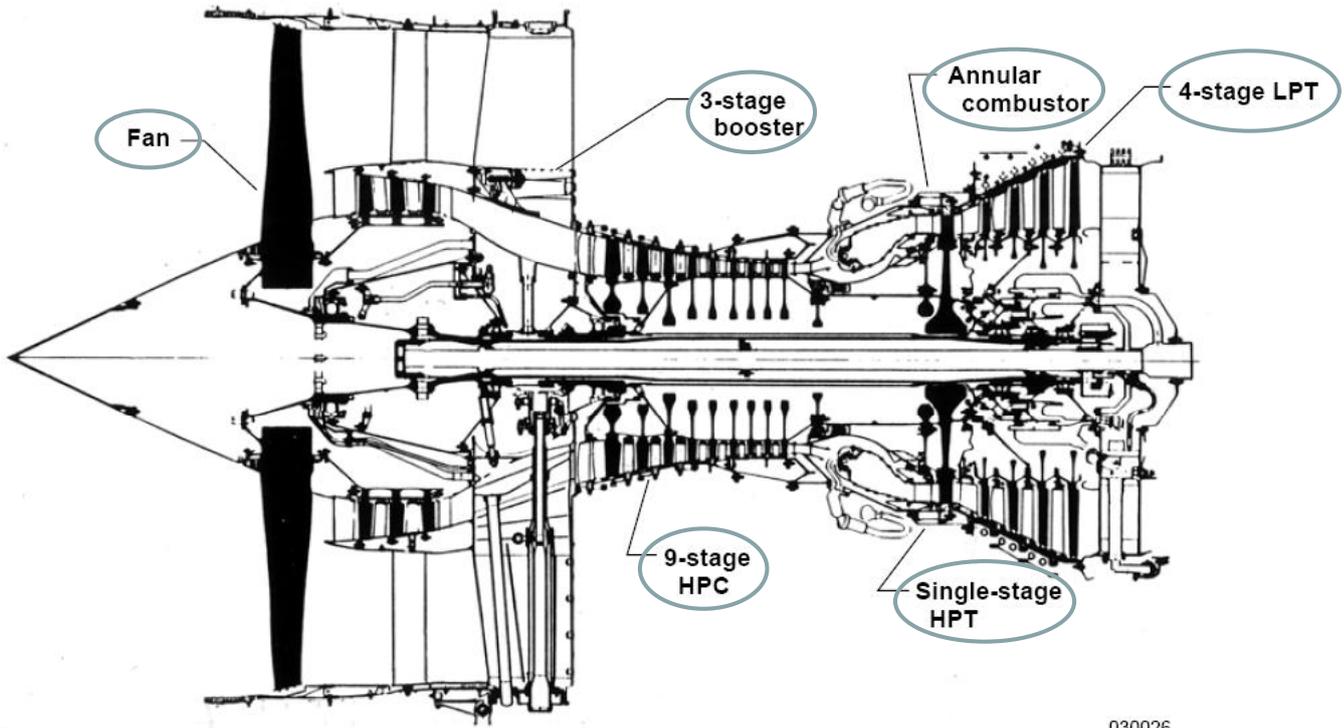
Si noti che anche il primo tipo di propulsore può essere considerato un motore respirante, perché preleva dall'esterno il fluido da accelerare.

- 3 - **Il terzo tipo di propulsore a getto utilizza come fluido ad alta pressione i prodotti gassosi di una reazione chimica** (combustione) tra un combustibile e un comburente, entrambi portati a bordo del motore (**motore a razzo**, o **endoreattore**, in lingua inglese **rocket engine** o più semplicemente **rocket**). Non avendo bisogno di respirare fluidi, il motore a razzo può funzionare anche nello spazio, dove non esistono comburenti nell'ambiente circostante, ed è, quindi, un **motore non respirante**.

In pratica, **i primi due tipi di propulsori hanno in comune il fatto che il fluido entra ed esce dal propulsore stesso (respirano)** mentre **nel terzo esiste solo l'uscita di fluido**.

Attenzione: Per **motivi di rendimento termico**, nel caso del turbogetto, si può anche **utilizzare una parte del salto entalpico rimanente nei gas combusti per muovere un'elica intubata**, generalmente posta all'esterno del turbogetto, che accelera una quantità di aria che non passa attraverso la camera di combustione. Si parla in questo caso di **turbofan**, che è, tipicamente, il propulsore dei moderni aerei di linea.





030026

Rappresentazione schematica di un turbofan **12 compression stages – 5 turbine stages**



Gasdinamica – Ugelli (applicazioni) – Astarita/Cardone

115

MOTORE A RAZZO

Il **motore a razzo**, detto anche **endoreattore**, è quasi sempre composto da:

- uno, o due, **serbatoi** nei quali sono presenti sia il **combustibile** che il **comburente** (reagenti, in generale separati tra loro se almeno uno dei due è fluido, ovvero mescolati tra loro se entrambi in fase solida);
- **una camera di combustione**, nella quale avviene la reazione chimica;
- **un ugello**, che ha lo scopo di accelerare i gas combusti.

Nella camera di combustione, i gas combusti realizzano **un'elevata temperatura e un'elevata pressione**, mentre **la velocità** (o meglio, il numero di Mach) è **generalmente bassa** per cui:

Le condizioni dei gas combusti nella camera di combustione possono essere praticamente assunte pari a quelle di ristagno.

Attraverso l'ugello, **generalmente del tipo convergente divergente**, i gas combusti sono di solito accelerati a **velocità supersonica V_u** che dipende:

- **dalla natura dei reagenti,**
- **dalla loro velocità di reazione,**
- **dalle aree di gola A^* e della sezione di uscita A_u dell'ugello.**

Come è facile comprendere, una analoga dipendenza esiste per la pressione nella sezione di uscita p_u .



Gasdinamica – Ugelli (applicazioni) – Astarita/Cardone

116

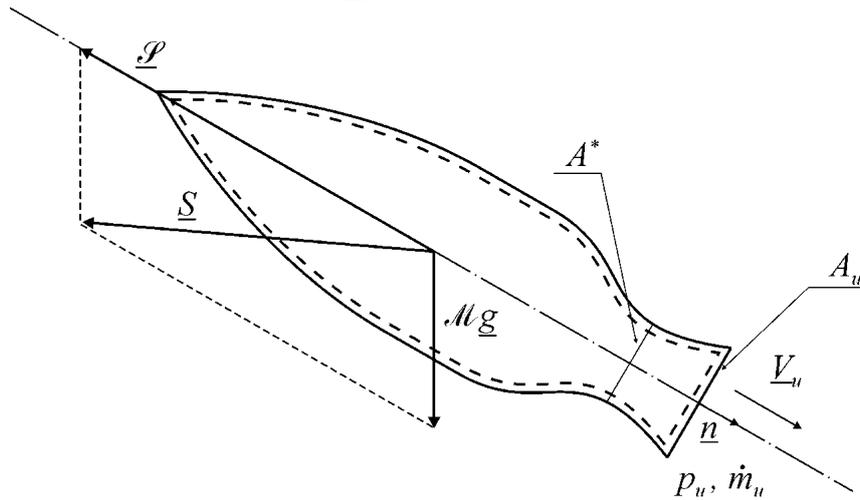
Nell'ipotesi di moto quasi unidimensionale e quasi stazionario nella sezione di uscita, l'applicazione dell'equazione del bilancio della quantità di moto al volume di controllo tratteggiato in figura conduce alla determinazione della **spinta totale sulla superficie interna del razzo**:

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 n_1 + p_2 A_2 n_2 + \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g} \quad \rightarrow \quad \underline{S} = \mathcal{M} \underline{g} - \dot{m}_u V_u - p_u A_u \underline{n}$$

nella quale \dot{m}_u rappresenta la portata di massa dei prodotti della combustione scaricati dall'ugello.

Non considerando la forza peso della massa contenuta nel razzo e supponendo, verosimilmente, i vettori V_u e \underline{n} paralleli tra loro, si può scrivere:

$$\underline{\mathcal{P}} = \underline{S} - \mathcal{M} \underline{g} = -(\dot{m}_u V_u + p_u A_u) \underline{n}$$



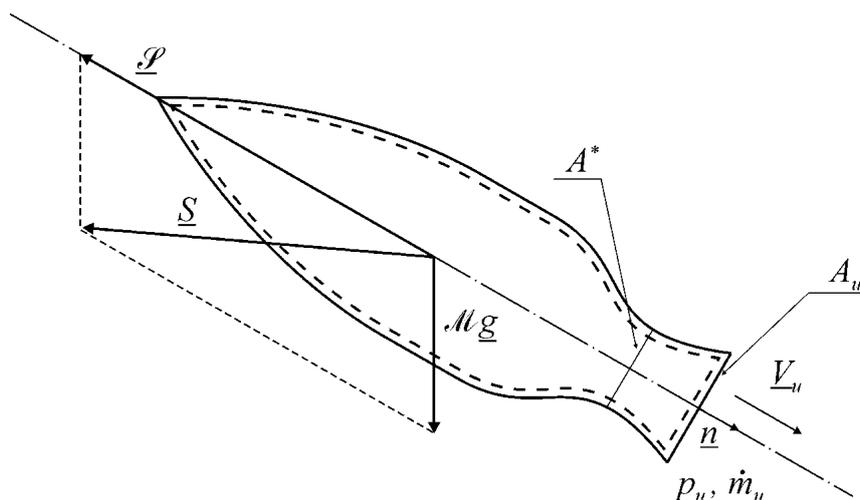
$$\underline{\mathcal{P}} = \underline{S} - \mathcal{M} \underline{g} = -(\dot{m}_u V_u + p_u A_u) \underline{n}$$

Attenzione: Questa spinta è quella che il fluido esercita sulla superficie interna delle pareti del razzo.

La positività della quantità in parentesi mostra che la direzione e il verso della spinta, così come rappresentati in figura, sono corretti e sono quelli di $-\underline{n}$.

Il modulo della spinta generata dal razzo risulta quindi pari a:

$$\mathcal{P} = \dot{m}_u V_u + p_u A_u$$

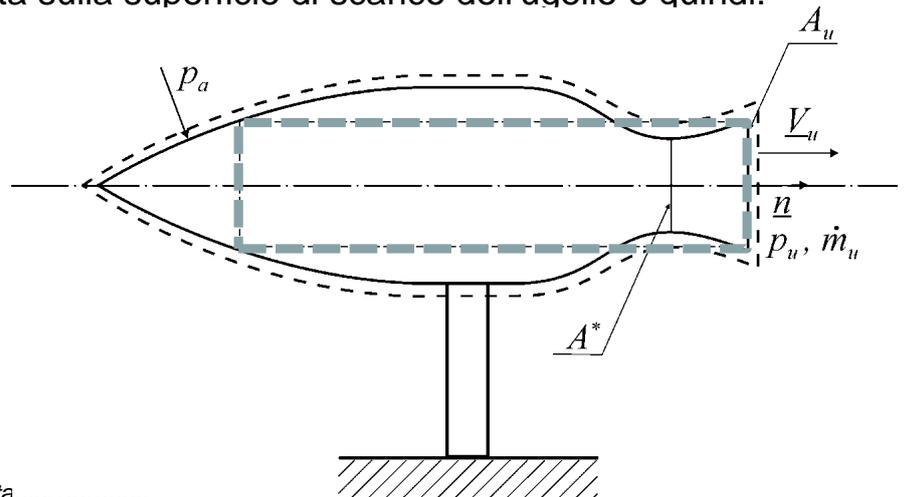


Nell'ipotesi di razzo fermo rispetto all'atmosfera (**al banco**, o al cosiddetto **punto fisso**) e considerando, invece, come volume di controllo quello indicato in figura, delimitato dalla superficie esterna delle pareti del razzo, su questa superficie agir  anche una **spinta addizionale**, dovuta alla pressione atmosferica. Il calcolo di questa spinta   semplice.

Considerando il razzo non funzionante e quindi circondato dalla pressione atmosferica, **sulla sua superficie esterna deve agire una forza risultante nulla** (a meno della trascurabile spinta di Archimede sul volume di controllo, comunque diretta secondo la verticale).

Pertanto, la spinta risultante sulle pareti solide esterne (che in pratica non cambia se il razzo funziona) deve essere uguale ed opposta a quella che la pressione atmosferica esercita sulla superficie di scarico dell'ugello e quindi:

$$\underline{\mathcal{L}}_{add} = p_a A_u \underline{n}$$



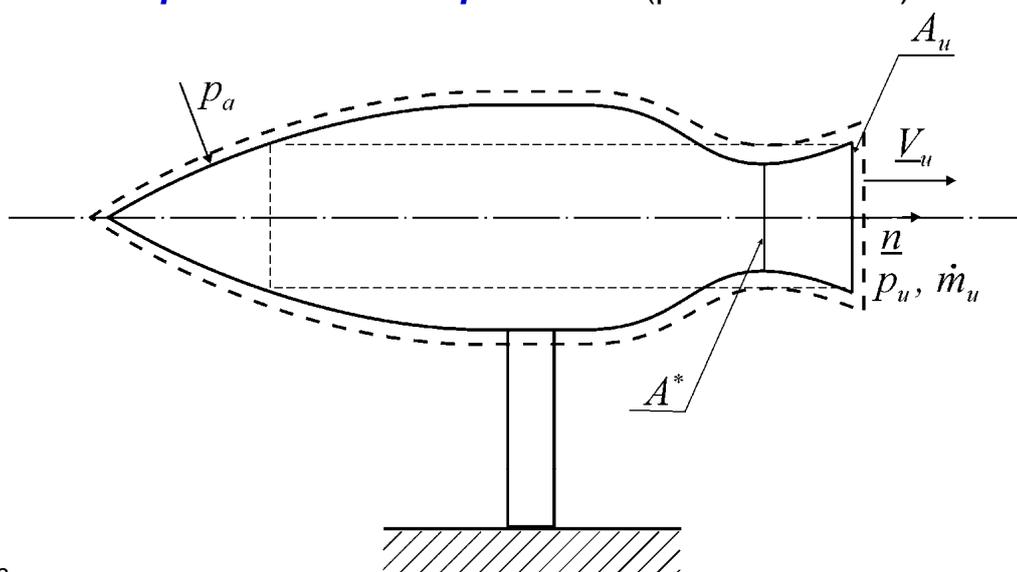
La spinta addizionale $\underline{\mathcal{L}}_{add} = p_a A_u \underline{n}$, ovviamente, va a sommarsi vettorialmente a quella data dalla:

$$\underline{\mathcal{L}} = \underline{S} - \mathcal{M} \underline{g} = -(\dot{m}_u V_u + p_u A_u) \underline{n}$$

Ne consegue che la **spinta netta sulle pareti del razzo** (inclusa cio  quella derivante dalla pressione atmosferica) risulta uguale a:

$$\underline{\mathcal{L}}_{net} = \dot{m}_u V_u + (p_u - p_a) A_u$$

La quantit  $\dot{m} V_u$   detta **spinta dovuta al getto** (jet thrust) mentre la restante parte   chiamata **spinta dovuta alla pressione** (pressure thrust).



Risulta interessante trovare le condizioni per le quali, ad un assegnato valore della portata dei gas di scarico, ed al variare dell'area della sezione di uscita dell'ugello, corrisponde il valore massimo della spinta netta. Differenziando la:

$$\mathcal{S}_{net} = \dot{m}_u V_u + (p_u - p_a) A_u$$

si ha:

$$d\mathcal{S}_{net} = \dot{m}_u dV_u + p_u dA_u + A_u dp_u - p_a dA_u$$

Ritenendo valida (nelle ipotesi di moto omenergetico ed isentropico e cioè in assenza di onde d'urto interne all'ugello) l'equazione di Bernoulli:

$$dp/\rho + VdV + g dz = 0$$

nella quale si trascura il termine gravitazionale e ricordando che:

$$\dot{m}_u = \rho_u V_u A_u$$

si ottiene infine:

$$\frac{d\mathcal{S}_{net}}{dA_u} = p_u - p_a$$

Questa relazione mostra che il valore massimo della spinta si ha per $p_u = p_a$ e cioè quando la spinta dovuta alla pressione è nulla. Ne consegue che la A_u deve essere tale da condurre all'**espansione corretta** della corrente.

In tale ipotesi, la massima spinta del razzo è data dalla sola **jet thrust**:

$$\mathcal{S}_{net max} = \dot{m}_u V_u$$



La quantità:

$$I_{sp} = \frac{\mathcal{S}_{net max}}{\dot{m}_u} = V_u$$

viene detta **impulso specifico** (diversa da quella già definita in precedenza).

L' I_{sp} , per razzi ben proporzionati, risulta **funzione essenzialmente della natura della coppia combustibile-comburente**.

E' d'uso introdurre anche il **coefficiente di spinta**, parametro adimensionale, definito come:

$$C_{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{S}_{net}}{p_o A^*} = \frac{\dot{m}_u V_u}{p_o A^*} + \left(\frac{p_u}{p_o} - \frac{p_a}{p_o} \right) \frac{A_u}{A^*}$$

Sostituendo le:

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}; \quad \dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

si ottiene:

$$C_{\mathcal{F}} = \psi^* \left[\frac{2}{\gamma - 1} \left(1 - r_u^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right]^{1/2} + (r_u - r_a) \frac{A_u}{A^*}$$

dove con r è stato indicato il **rapporto di espansione**, sia rispetto alla pressione di uscita che a quella ambiente.



Per un dato gas ed in assenza di onde d'urto, il rapporto di espansione r_u è funzione di γ e del rapporto tra le aree A_u / A^* attraverso le:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad ; \quad \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

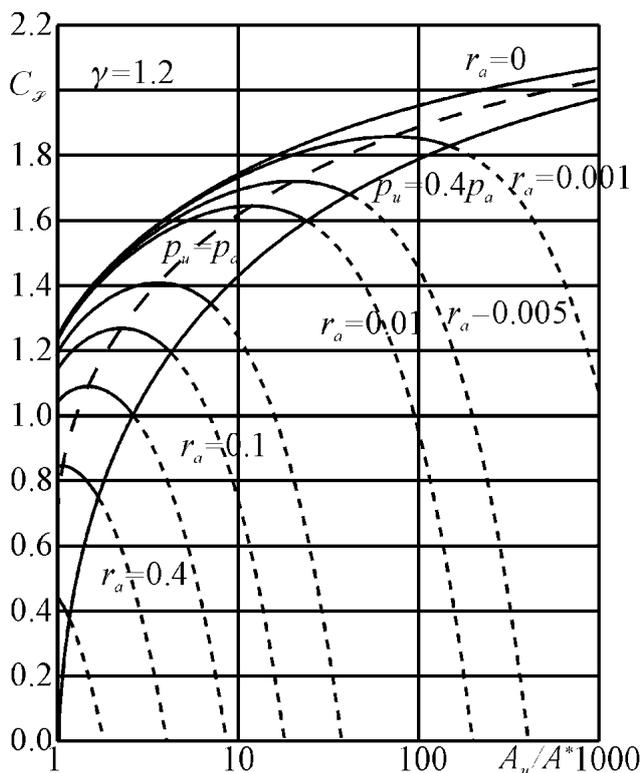
Ne consegue che il coefficiente di spinta risulta essere funzione del rapporto tra le aree A_u/A^* , oltre che di r_a e γ .

$$C_{\mathcal{F}} = \psi^* \left[\frac{2}{\gamma - 1} \left(1 - r_u^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right) \right]^{1/2} + (r_u - r_a) \frac{A_u}{A^*}$$



Per un dato gas ed in assenza di onde d'urto, il rapporto di espansione r_u è funzione di γ e del rapporto tra le aree A_u / A^* attraverso le:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad ; \quad \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$



Ne consegue che il coefficiente di spinta risulta essere funzione del rapporto tra le aree A_u/A^* , oltre che di r_a e γ .

In figura è stato diagrammato il valore del **coefficiente di spinta** in funzione di A_u/A^* per diversi valori di r_a e per $\gamma = 1.2$.

Questo valore medio, $\gamma = 1.2$, risulta abbastanza vicino al vero nel caso dei gas combusti, quando si ha una combustione stechiometrica, o quasi.



Come già visto in precedenza, è possibile notare che il coefficiente di spinta è massimo per $p_u = p_a$, cioè quando la spinta dovuta alla pressione è nulla.

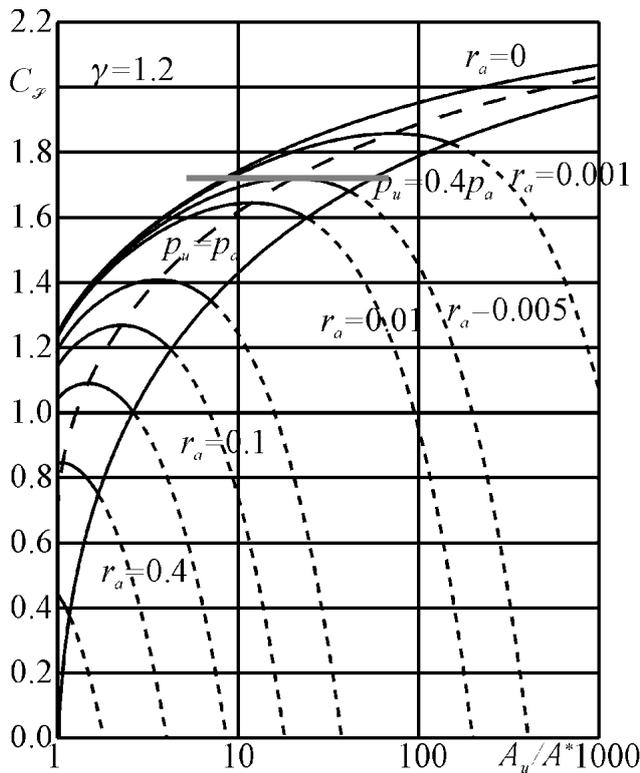
Poiché peraltro le curve per un dato r_a sono abbastanza piatte in prossimità del massimo, nella pratica si preferisce progettare l'ugello con un valore del

rapporto A_u/A^* leggermente minore di quello ottimale.

Ciò, soprattutto al fine di contenere il peso e le dimensioni del razzo.

Per quanto detto in precedenza, il funzionamento dell'ugello per valori di $r_u < 0.4 r_a$ dà luogo a una separazione della corrente all'interno dell'ugello.

Per questo motivo, il relativo tratto delle curve non risulta più valido e, per questo stesso motivo, è stato rappresentato con una curva tratteggiata.



MOTORI RESPIRANTI

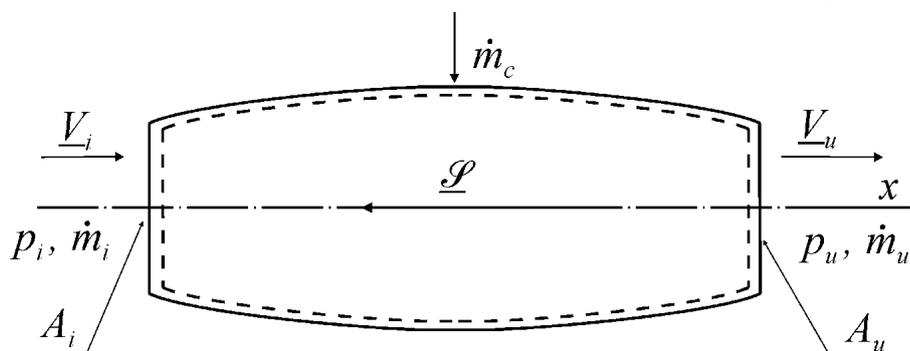
Per completezza, nel seguito si deriverà anche la spinta su un motore respirante applicando semplicemente l'equazione del bilancio della quantità di moto nella quale non verrà considerata la forza peso.

Con riferimento alla figura si supponga il moto quasi unidimensionale nelle sezioni di ingresso ed uscita del motore.

Applicando il bilancio della quantità di moto al volume di controllo si può calcolare il modulo della spinta agente sulle sue pareti interne, dato dalla:

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 n_1 + p_2 A_2 n_2 + \underline{S} = \cancel{\mathcal{M} \underline{g}} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P} = \dot{m}_u V_u - \dot{m}_i V_i + p_u A_u - p_i A_i$$

nella quale il segno positivo indica una spinta orientata in verso opposto a quello della x e si suppone trascurabile il contributo dovuto a \dot{m}_c .



$$\mathcal{P} = \dot{m}_u V_u - \dot{m}_i V_i + p_u A_u - p_i A_i$$

Per un'elica intubata:

$$\dot{m}_i = \dot{m}_u$$

mentre per il ramjet, o un turbogetto, si ha:

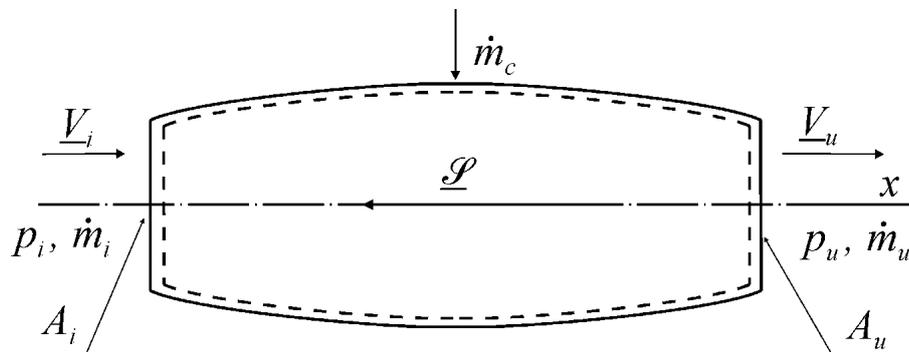
$$\dot{m}_u = \dot{m}_i + \dot{m}_c$$

dove \dot{m}_c rappresenta la portata di carburante, generalmente piccola rispetto alla portata di massa totale.

Per un turbogetto che utilizzi un **idrocarburo**, la \dot{m}_c risulta generalmente compresa tra il 4% ed il 6% della \dot{m}_i , qualora non sia presente anche una eventuale post-combustione.

In analogia con quanto fatto per il motore a razzo, la spinta netta sul motore al banco risulterà pari a:

$$\mathcal{P}_{net} = \dot{m} V_u - \dot{m}_i V_i + (p_u - p_a) A_u - (p_i - p_a) A_i$$

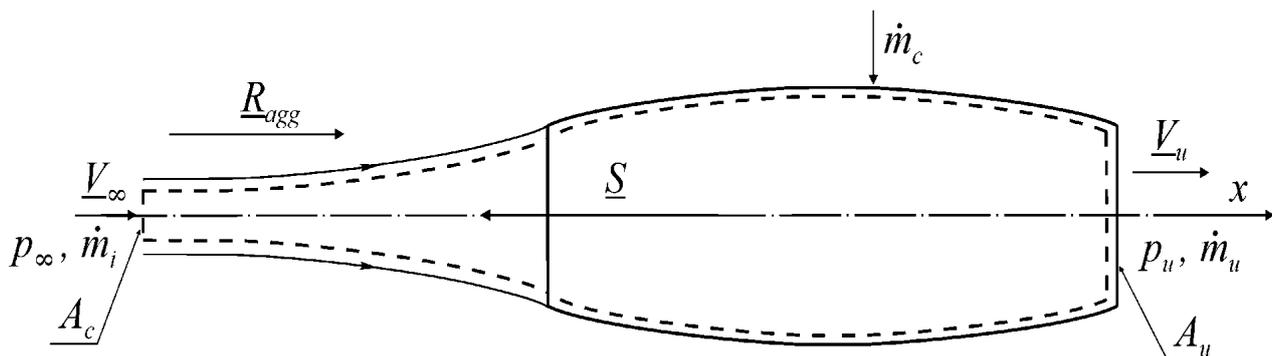


Quando il motore è investito da un fluido in moto subsonico, si preferisce spesso riferire la spinta non alle condizioni nella sezione di ingresso bensì alle **condizioni di pressione e velocità della corrente indisturbata che lo investe**, e cioè alle condizioni presenti **nella sezione di cattura**.

In tal caso conviene riferirsi al volume di controllo, rappresentato in figura, composto da una parte esterna al motore (a monte di esso e costituita dal tubo di flusso del fluido che entra nel motore) e dal motore stesso.

Applicando il bilancio della quantità di moto al volume in esame, si ottiene:

$$S = \mathcal{P} + R_{agg} = \dot{m}_u V_u - \dot{m}_i V_\infty + p_u A_u - p_\infty A_c$$



$$\mathcal{P} = \dot{m}_u V_u - \dot{m}_i V_i + p_u A_u - p_i A_i$$



$$S = \mathcal{P} + R_{agg} = \dot{m}_u V_u - \dot{m}_i V_\infty + p_u A_u - p_\infty A_c$$

- la S è la spinta su tutte le superfici impermeabili del volume di controllo scelto (superficie laterale del tubo di flusso più pareti interne del motore);
- la R_{agg} è la resistenza cosiddetta **aggiuntiva** derivante dall'integrale di pressione esteso alla sola superficie laterale del tubo di flusso in direzione assiale;
- la \mathcal{P} è la spinta sulle pareti interne del motore;
- la A_c è l'area della sezione di cattura in cui il fluido ha velocità V_∞ .

In questa formulazione la **spinta** può essere espressa mediante la:

$$\mathcal{P} = \dot{m}_u V_u - \dot{m}_i V_\infty + p_u A_u - p_\infty A_c - R_{agg}$$

per cui la **resistenza aggiuntiva** è data da:

$$R_{agg} = \dot{m}_i V_i - \dot{m}_i V_\infty + p_i A_i - p_\infty A_c$$

e la **spinta netta** avrà la forma:

$$\mathcal{P}_{net} = \dot{m}_u V_u - \dot{m}_i V_\infty + (p_u - p_\infty) A_u - R'_{agg}$$

nella quale si possono individuare:

$$R'_{agg} = \begin{matrix} \dot{m}_u V_u & \text{spinta del getto (jet thrust)} \\ \dot{m}_i V_\infty & \text{resistenza di presa dinamica (ram drag)} \\ (p_u - p_\infty) A & \text{spinta di pressione (pressure thrust)} \\ R_{agg} - p_\infty (A_i - A_c) & \text{nuova resistenza aggiuntiva (additive drag)} \end{matrix}$$



Se l'area di cattura coincide con quella di ingresso al motore si ha:

$$R'_{agg} = R_{agg} = 0$$

Tale è anche il caso di un fluido che investe il motore a velocità supersonica senza alcuna onda d'urto a monte della presa d'aria.

Anche in condizioni di fuori progetto, la resistenza aggiuntiva è una piccola frazione della spinta così come lo è generalmente la spinta di pressione.

Per **condizioni di progetto** si intendono quelle di $p_u = p_\infty$, per le quali la spinta di pressione è nulla e la spinta totale è massima.

Trascurando le quantità di cui sopra e considerando che, per quanto detto, è possibile trascurare la portata del combustibile, si può scrivere:

$$\mathcal{P}_{net} \cong \dot{m}_i (V_u - V_\infty)$$

relazione che mostra che **la spinta netta è praticamente uguale alla differenza tra la spinta del getto e la resistenza di presa dinamica**.

In realtà, ciascuna di queste due quantità assume, in un turbogetto, un valore **notevolmente più elevato della spinta netta**.

Di conseguenza, **un piccolo aumento percentuale della spinta del getto**, realizzato attraverso una accurata progettazione dell'ugello propulsivo e comunque degli organi interni del motore, **si traduce in un aumento sostanziale della spinta netta del motore**.



In un turbogetto, la spinta generata dalla portata unitaria di aria che lo attraversa:

$$I_a = \frac{\mathcal{P}}{\dot{m}_i}$$

è chiamata **spinta specifica** (**specific thrust**). Un altro parametro molto utilizzato è il **consumo specifico di carburante** (**Thrust Specific Fuel Consumption**) *TSFC* definito dalla:

$$TSFC = \frac{\dot{m}_c}{\mathcal{P}} = 1 / (\beta I_a)$$

dove con:

$$\beta = \dot{m}_i / \dot{m}_c$$

è stato indicato il rapporto tra le portate massiche di aria e carburante.

Per determinare la spinta nelle relazioni viste in precedenza è necessario determinare sia la p_u che la V_u .

Queste grandezze possono essere valutate con buona approssimazione applicando la teoria del moto omoenergetico, isoentropico, quasi-unidimensionale e quasi-stazionario al moto nell'ugello posto a valle della turbina del turbogetto, o della camera di combustione del motore a razzo.

