

# MOTI COMPRESSIBILI E SCAMBIO TERMICO

In ambito industriale esistono numerose situazioni nelle quali un fluido si muove all'interno di un condotto, in regime compressibile, **scambiando energia sotto forma di calore** e, quindi, **variando la sua entalpia totale**.

Tipici esempi sono gli scambiatori di calore e le camere di combustione di sistemi aperti.

Di solito, **lo scambio termico è associato all'attrito alla parete** e si ricorda che **il prodotto tra il numero di Eckert e quello di Peclet  $EcPe$** , da un lato, ed **il numero di Reynolds  $Re$** , dall'altro, ne misurano rispettivamente l'importanza relativa rispetto ai flussi convettivi di energia cinetica e a quelli di quantità di moto.

Il numero di Peclet è esprimibile come prodotto tra il numero di Reynolds e quello di Prandtl,  $Pe = RePr$  e, poiché per i gas quest'ultimo è di ordine di grandezza unitario, **i due numeri  $Pe$  e  $Re$  risultano dello stesso ordine di grandezza**. Si può, pertanto, concludere che, **se il numero di Eckert**

$$Ec = V^2 / (c_p \Delta T)$$

**è molto piccolo** (ad es.,  $\Delta T$  molto grande) **mentre quello di Reynolds risulta molto grande, è senz'altro possibile trascurare gli effetti viscosi pur tenendo conto di quelli associati allo scambio termico**.



# MOTI COMPRESSIBILI E SCAMBIO TERMICO

Nasce così il modello di **moto alla Rayleigh** basato sulle seguenti ipotesi:

- il moto è **quasi-unidimensionale** e **quasi-stazionario**;
- **l'area della sezione di passaggio del fluido nel condotto è ritenuta costante**;
- **il fluido non scambia lavoro con l'ambiente** e **sia gli effetti viscosi, che quelli delle forze gravitazionali, sono trascurabili**;
- **la produzione di entropia è trascurabile**, in altre parole la trasformazione termofluidodinamica è considerata **reversibile**;
- l'unica **forza spingente** è lo **scambio di calore** lungo il condotto che dà luogo ad una variazione dell'entalpia totale  $H$ .

Delle ipotesi di unidimensionalità e di stazionarietà si è già discusso.

L'assenza di lavoro d'elica è una condizione facilmente riscontrabile nelle applicazioni pratiche e della trascurabilità degli effetti associati alle forze viscosi si è ora discusso.

Per alti valori del numero di Froude, si può trascurare l'effetto gravitazionale.

**Meno verosimile risulta non tener conto della produzione di entropia** perché, **oltre che agli sforzi viscosi qui non considerati, essa è associata sia allo scambio termico, che alle reazioni chimiche**.



# LE EQUAZIONI DEL MOTO ALLA RAYLEIGH

Le ipotesi di quasi-unidimensionalità, di quasi-stazionarietà e di condotto a sezione costante conducono alla **stessa equazione di conservazione della massa già scritta per il moto alla Fanno e per il moto isoterma**:

$$G = \rho V = \text{cost}$$

Con le ipotesi fatte, e quindi trascurando sia gli sforzi di attrito alla parete, che le forze gravitazionali, **la proiezione dell'equazione del bilancio della quantità di moto sull'asse del condotto dà luogo alla costanza dell'impulso specifico lungo il condotto stesso**:

$$I = p + \rho V^2 = \text{cost}$$

Tenendo conto dell'equazione di conservazione della massa, questa relazione può essere scritta anche in altre forme quali:

$$I = p + GV = p + G^2 v = \text{cost} \quad ; \quad v = 1/\rho$$

La costanza dell'impulso specifico mostra, quindi, che, **sul piano di Clapeyron  $p$ - $v$ , le diverse condizioni termodinamiche del fluido si trovano su una retta** con pendenza  $-G^2$  ed ordinata all'origine pari ad  $I$ .

Anche **sul piano  $p$ - $V$  l'ultima relazione è rappresentata da una retta** che, in questo caso, ha pendenza  $-G$  e ordinata all'origine ugualmente pari ad  $I$ .



$$I = p + GV = p + G^2 v = \text{cost}$$

Dalla costanza dell'impulso specifico si può, quindi, concludere che, **in un moto alla Rayleigh, se la pressione del fluido aumenta la sua velocità diminuisce e la sua densità ( $\rho = 1/v$ ) aumenta**.

Viceversa, **se la pressione diminuisce, la velocità aumenta e la densità diminuisce**.

La dipendenza lineare della  $p$  dal volume specifico  $v$ , ancorché molto semplice, **risulta di scarsa utilità** nel discutere il moto alla Rayleigh, mentre, come si vedrà in seguito, molto più utile è la rappresentazione di quest'ultimo sul piano di Gibbs  $T$ - $s$ , le cui aree sottese sono calore scambiato.

Nell'ipotesi fatta di **potenza di elica assente**, l'equazione di conservazione dell'energia si riduce a:

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q}$$

dove  $\dot{Q}$  rappresenta la **potenza scambiata tra il fluido ed il suo ambiente (energia per unità di tempo) nel modo del calore**.

Si ricorda che, **per convenzione, la quantità  $\dot{Q}$  viene considerata positiva se ricevuta dal fluido, ovvero negativa se da questo ceduta**.



In **termini differenziali** le equazioni precedenti diventano:

$$G = \rho V = \text{cost}$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$I = p + GV = p + G^2 v = \text{cost}$$

$$dI = dp + \rho V dV = dp + G dV = 0$$

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q}$$

$$G(dh + V dV) = G dH = G c_p dT_o = 4 \dot{q} \frac{dx}{D_e}$$

Si ricordi la già trovata **equazione differenziale di conservazione dell'energia per moti anergodici**:

$$G dH = 4 \dot{q} \frac{dx}{D_e}$$

In questa equazione,  $\dot{q}$  rappresenta il **flusso termico alla parete** (energia per unità di superficie e di tempo) supposto anch'esso unidimensionale.

La quantità  $\dot{q}$  può, anch'essa, essere positiva, o negativa, il che comporta rispettivamente aumento, o diminuzione, dell'entalpia di ristagno del fluido.

Nel caso di scambio termico per convezione, la quantità  $\dot{q}$  si può ancora calcolare con la:

$$\dot{q} = \alpha (T_p - T_{pa})$$

nella quale la temperatura di parete adiabatica è sempre valutabile con la

$$T_{pa} = T + r \frac{V^2}{2c_p} = T \left( 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$



Per moto turbolento in condotti e numero di Prandtl  $Pr$  compreso tra 0.5 e 1.0 (valore tipico dei gas), **il coefficiente di scambio termico convettivo  $\alpha$**  è determinabile, a partire dal **numero di Nusselt  $Nu$** , con **la formula di Dittus e Boelter**:

$$Nu = \frac{\alpha D_e}{\lambda} = 0.022 Pr^{0.6} Re^{0.8}$$

dove  $\lambda$  è **il coefficiente di conducibilità termica del fluido** e  $D_e$  è ancora **il diametro equivalente del condotto**.

Il numero di Reynolds  $Re$  ed il numero di Prandtl  $Pr$  sono dati da:

$$Re = VD_e / \nu \quad ; \quad Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$$

**La formula di Dittus e Boelter è valida nel caso di tubi lisci.**

Per **tubi scabri** è generalmente accettata la correlazione (per  $f_{sc}/f_\ell \leq 4$ ):

$$Nu_{sc} / Nu = (f_{sc} / f_\ell)^n \quad ; \quad n = 0.68 Pr^{0.215}$$

Nelle relazioni appena scritte **tutte le quantità che dipendono dallo stato termodinamico del fluido devono essere, in particolare, valutate alla temperatura media nella sezione retta del condotto.**



Tenendo conto della:

$$\delta_e S = \left[ - \int_D \frac{J_q}{T} \cdot \underline{n} dD \right] dt$$

e ricordando che la trasformazione è reversibile, la:

$$G(dh + VdV) = GdH = Gc_p dT_o = 4\dot{q} \frac{dx}{D_e}$$

può essere posta anche nella forma:

$$dH = \frac{4\dot{q}}{G} \frac{dx}{D_e} = dq = Tds$$

dove  $q$  rappresenta l'energia scambiata nel modo calore per unità di massa di fluido evolvente e l'ultima eguaglianza deriva dal II principio della termodinamica applicato a una trasformazione reversibile.

Ovviamente, anche **la quantità  $q$  può essere positiva o negativa.**

E' facile intuire che **ciascuna coppia di valori del flusso di massa  $G$  e dell'impulso specifico  $I$**  (cioè, le due quantità che restano costanti durante il moto) **individua un particolare moto alla Rayleigh.**



## LA CURVA DI RAYLEIGH

Come già fatto nel moto alla Fanno, per meglio comprendere alcuni comportamenti del moto alla Rayleigh, è utile rappresentare **la curva che lo descrive sul piano di Gibbs  $T-s$ .**

Quest'ultima rappresenta il **luogo dei punti a  $G$  e  $I$  costanti** ed è denominata **curva di Rayleigh.**

Anche la curva di Rayleigh si può facilmente ricavare a partire dall'equazione della sua tangente locale su detto piano.

In particolare, per il modello di gas più che perfetto, l'equazione di stato e le:

$$\frac{dG}{G} = \frac{dp}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$dI = dp + \rho V dV = 0 \quad \Rightarrow \quad dV = - dp / \rho V$$

danno luogo a:

$$V^2 d\rho = dp = R(\rho dT + Td\rho)$$

Questa relazione, divisa per la quantità  $\rho RT$ , diventa:

$$\frac{V^2}{RT} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}$$



La

$$\frac{\gamma V^2}{\gamma RT} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}$$

ricordando la definizione di numero di Mach, può essere messa nella forma:

$$\frac{dT}{T} = (\gamma M^2 - 1) \frac{d\rho}{\rho} = (1 - \gamma M^2) \frac{dV}{V}$$

Sostituendo la prima di queste due eguaglianze nell'equazione di Gibbs:

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$$

si ottiene:

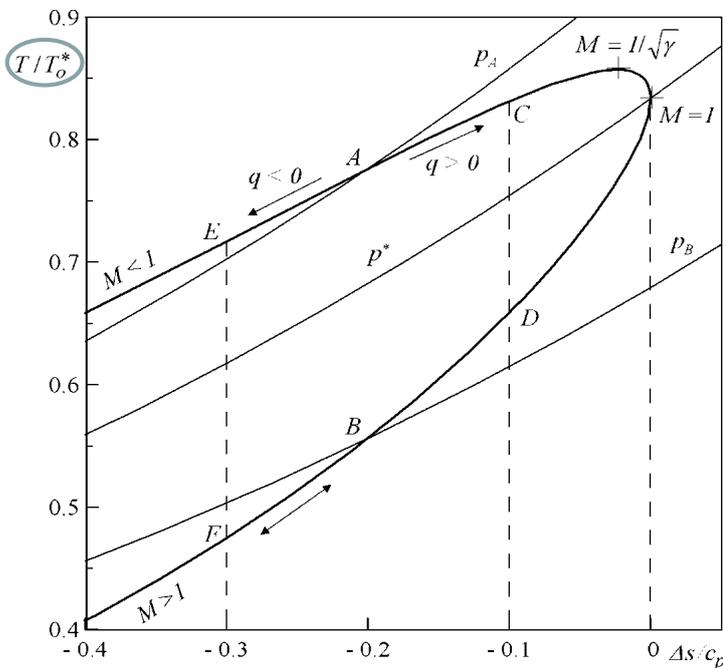
$$ds = \frac{dT}{T} \left( c_v - \frac{R}{\gamma M^2 - 1} \right)$$

e, ricordando che per un gas più che perfetto:

$$\gamma c_v = c_p \quad ; \quad c_p = c_v + R$$

**si perviene, infine, all'espressione della derivata di  $T$  rispetto a  $s$ :**

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$



L'equazione fornisce la **pendenza della curva di Rayleigh sul piano di Gibbs  $T$ - $s$** .

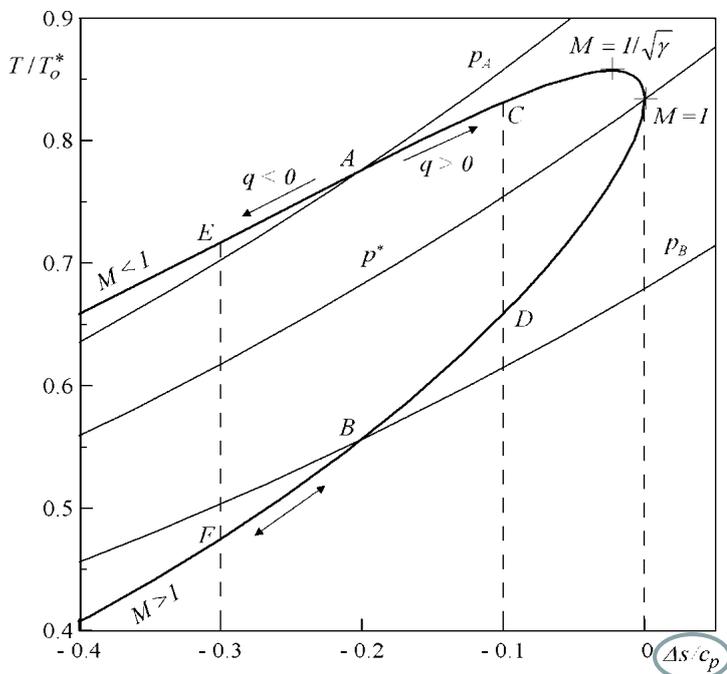
La sua soluzione è riportata, nel diagramma a lato per  $\gamma = 1.4$ .

**Attenzione:** Nel moto alla Fanno la temperatura di ristagno non varia, il che ne rende semplice la scelta quale temperatura di riferimento per adimensionalizzare la temperatura statica.

Invece, nel moto alla Rayleigh questa scelta è più soggettiva perché, nel moto, variano sia la temperatura statica che quella di ristagno.

In questo caso, è stata fatta la scelta di utilizzare quale temperatura di riferimento quella di ristagno relativa alle condizioni critiche, che, come si vedrà, corrispondono ancora a  $M = 1$ .

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$



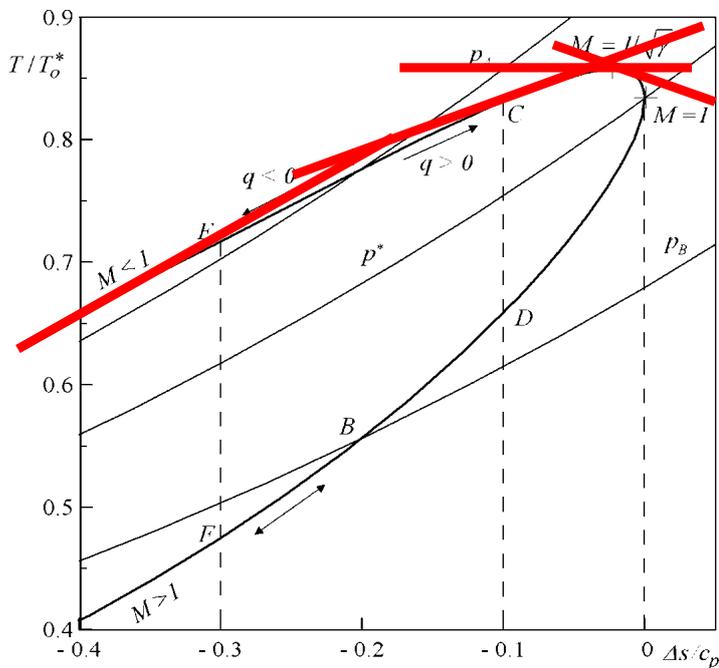
Anche la variazione di entropia, adimensionalizzata mediante il  $c_p$ , è stata riferita alle condizioni soniche; per questo motivo **tutte le variazioni di entropia risultano negative**.

La scelta delle coordinate adimensionali dà luogo ad un'**unica curva di Rayleigh per ciascun valore di  $\gamma$** .

Ovviamente, in coordinate dimensionali, si ottiene una particolare curva per ogni particolare coppia di valori delle quantità  $G$  e  $I$ .

Tenendo presente che l'equazione fornisce il valore della pendenza locale della curva di Rayleigh, da essa è possibile trarre le seguenti conclusioni, in parte riconoscibili nel diagramma:

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$



- **per moto iposonico** ( $M \rightarrow 0$ ), si ha

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} \rightarrow 1$$

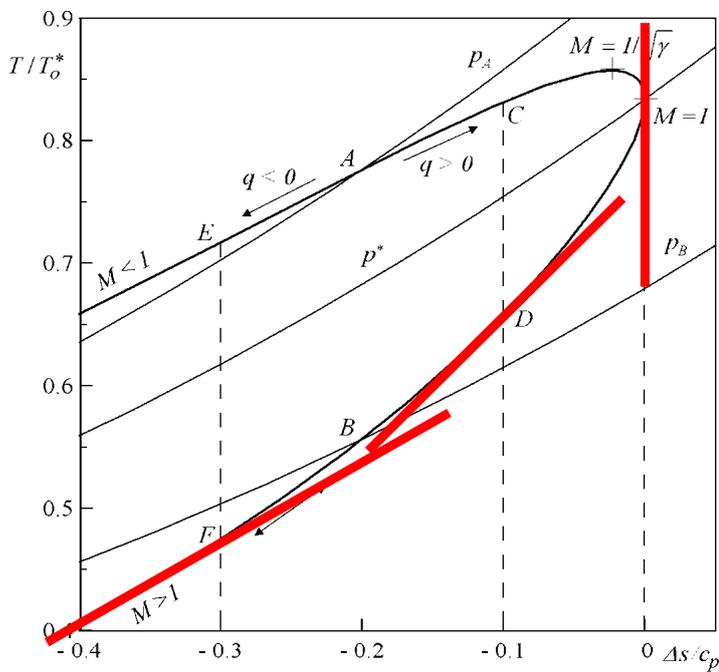
che, ricordando la definizione di data dalla

$$c_p = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$$

comporta che, in questo regime, **la curva di Rayleigh debba tendere ad una isobara**;

- **per  $M < 1/\sqrt{\gamma}$ , la pendenza della curva è sempre positiva**;
- **per  $M = 1/\sqrt{\gamma}$ , la curva ha tangente orizzontale e la temperatura statica del fluido raggiunge il suo valore massimo**;
- **per  $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ , la pendenza della curva è sempre negativa**;

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$



• per  $M \rightarrow 1$ , si ha

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} \rightarrow \pm \infty$$

la curva ha, quindi, **tangente verticale** e, cioè, **in condizioni soniche, si ha un massimo dell'entropia**;

• per moto supersonico ( $M > 1$ ), la pendenza della curva di Rayleigh risulta sempre **positiva**;

• per moto ipersonico ( $M \rightarrow \infty$ ), si ha:

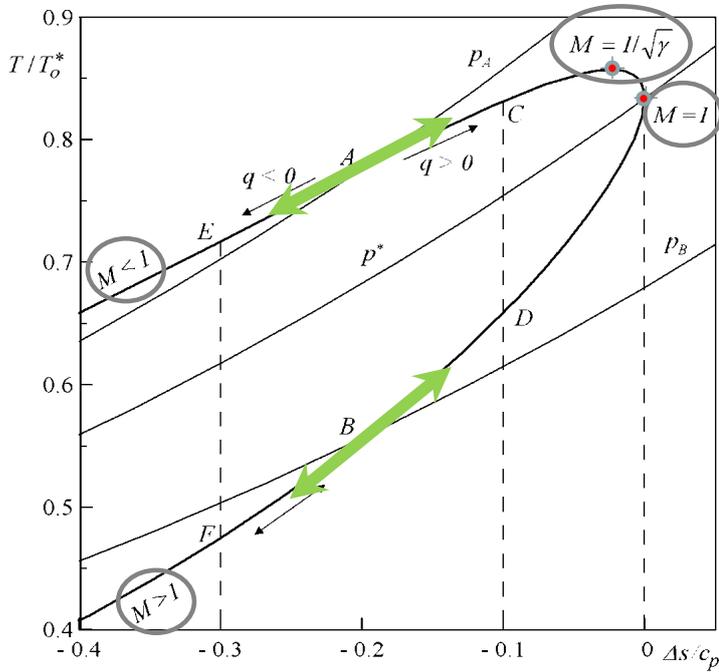
$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} \rightarrow \gamma$$

che, ricordando la definizione di:

$$c_v = T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v$$

comporta che **la curva di Rayleigh deve tendere ad un'isocora**.

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$



Anche sulla curva di Rayleigh sono riconoscibili due rami: uno **subsonico (posto in alto)**, l'altro **supersonico (posto in basso)**.

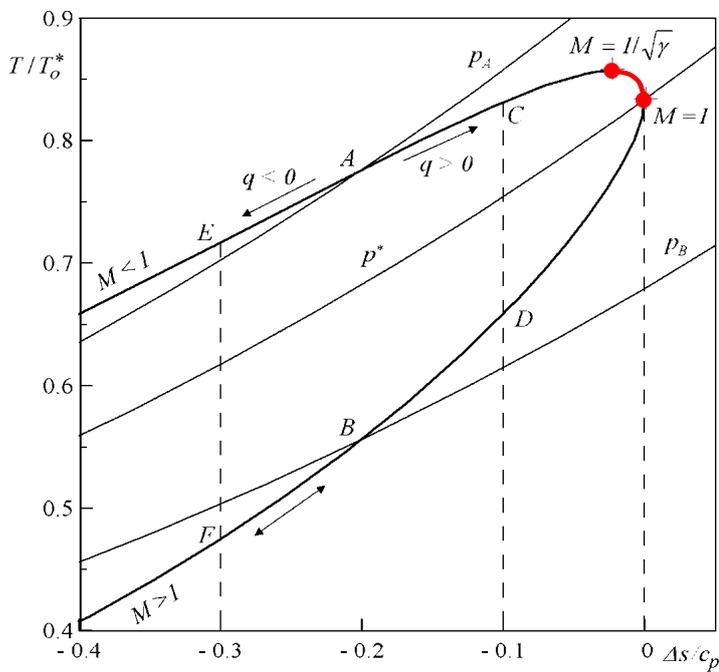
Sono poi indicati i due valori notevoli del numero di Mach:  **$M = 1/\sqrt{\gamma}$**  (0.8452 per  $\gamma = 1.4$ ), **cui corrisponde la massima temperatura statica**;  **$M = 1$** , **al quale corrisponde la massima entropia**.

Poiché nel moto alla Rayleigh è stata trascurata la produzione di entropia, **le variazioni di quest'ultima sono solo dovute agli scambi di energia nel modo calore  $Tds$ , che possono essere sia positivi, che negativi**.

Di conseguenza, **positive, o negative, risultano le variazioni di entropia**.

Sono possibili quindi, spostamenti lungo la curva di Rayleigh, **sia verso entropie crescenti, che decrescenti, risp. per calore ceduto dall'ambiente al fluido, ovvero dal fluido all'ambiente**.

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$



L'andamento della curva nell'intervallo  $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$  tende a far apparire ivi il moto **instabile**.

Per adduzione di calore ( $Tds > 0$ ), si ha diminuzione di temperatura ( $dT < 0$ ) e, per sottrazione di calore ( $Tds < 0$ ), un aumento di temperatura ( $dT > 0$ ).

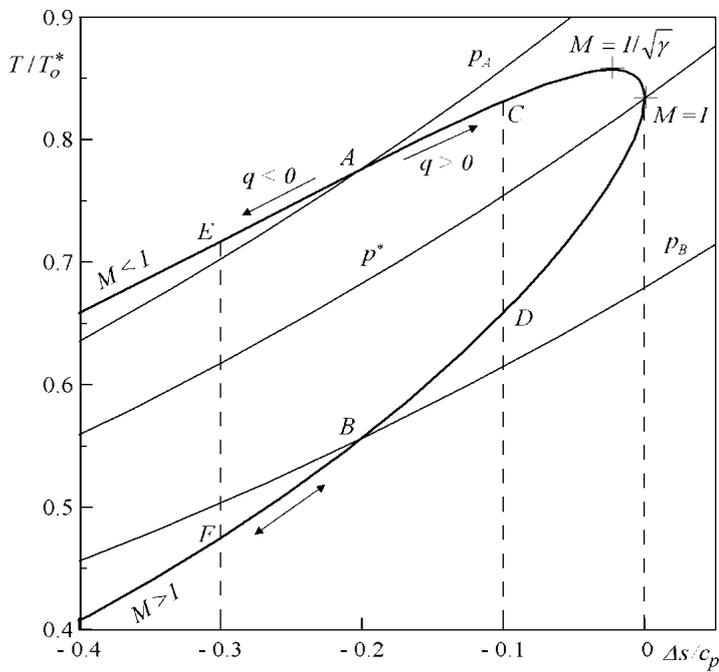
Si vedrà poi che, di fatto, il moto è intrinsecamente stabile anche in questo campo di valori del numero di Mach.

Nel diagramma in basso, posto in corrispondenza di quello in alto, è indicato l'**andamento del numero di Mach in funzione dell'entropia**.

**La cessione di calore ( $\Delta s > 0$ ) fa sempre muovere il fluido verso  $M = 1$** , sia in moto subsonico che supersonico.

**La sottrazione di calore ( $\Delta s < 0$ ) lo allontana sempre più dalle condizioni soniche (critiche).**

$$\frac{c_p}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_{G,I} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$$



Ricordando che la velocità del suono laplaciana è pari a:

$$a^2 = \gamma RT = \gamma p/\rho$$

la:

$$I = p + \rho V^2 = cost$$

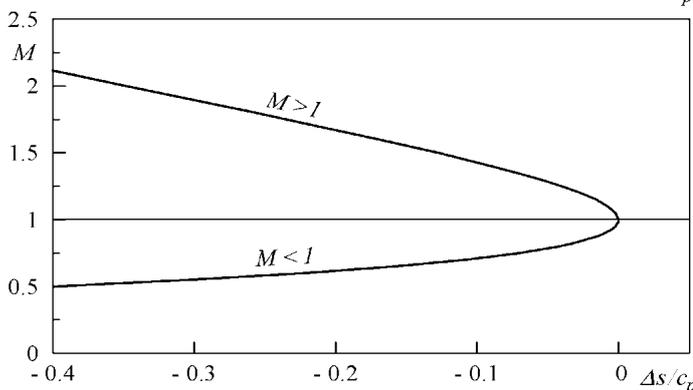
dà luogo alternativamente all'espressione:

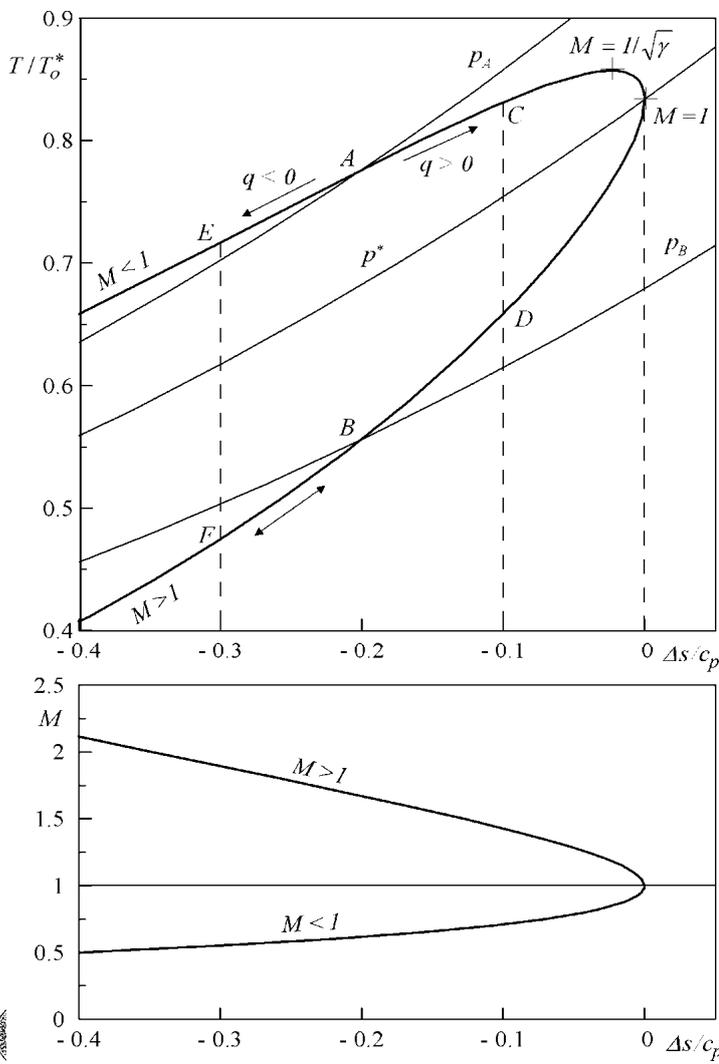
$$I = p (1 + \gamma M^2) = cost$$

Per la costanza dell'impulso specifico, questa relazione mostra che **le variazioni di pressione e quelle del numero di Mach sono sempre di segno opposto**.

Ciò vale sia in regime subsonico, che supersonico, sia in riscaldamento, che in raffreddamento.

Se il numero di Mach aumenta, la pressione diminuisce e viceversa.





Tenendo conto del diagramma in basso, delle:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$dI = dp + \rho V dV = dp + G dV = 0$$

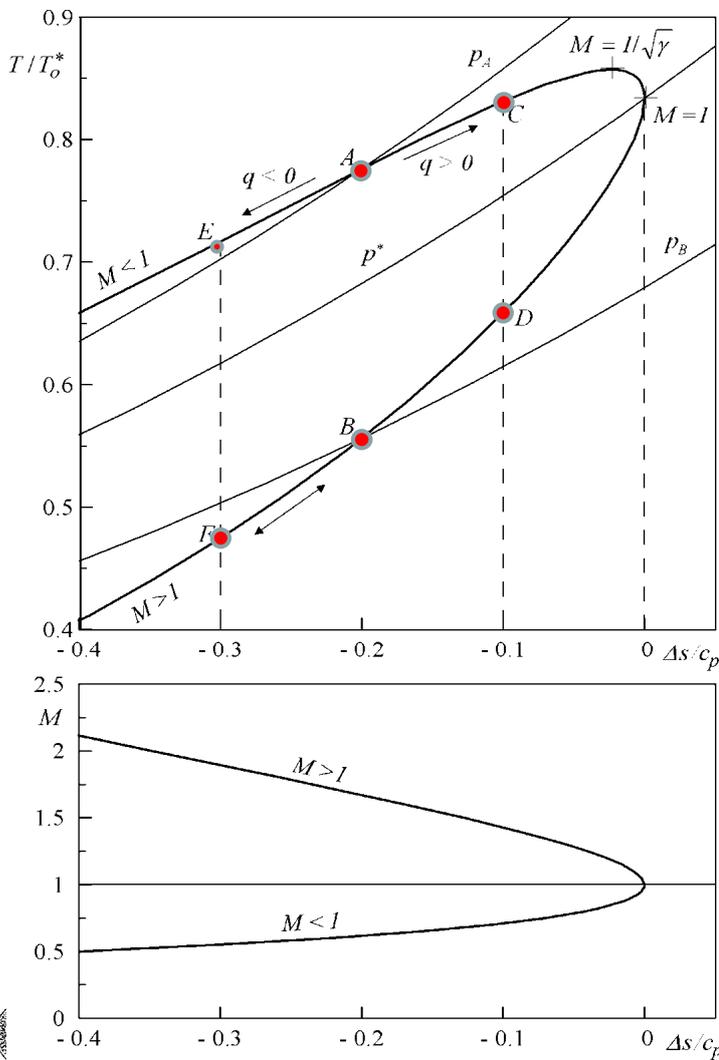
e della forma differenziale della:

$$I = p(1 + \gamma M^2) = \text{cost}$$

si può concludere che:

**Per flusso termico positivo e moto subsonico, ovvero per flusso termico negativo e moto supersonico, il numero di Mach e la velocità del fluido aumentano e le sue pressione e densità diminuiscono.**

**Per flusso termico negativo e moto subsonico, ovvero per flusso termico positivo e moto supersonico, si ha un comportamento opposto.**

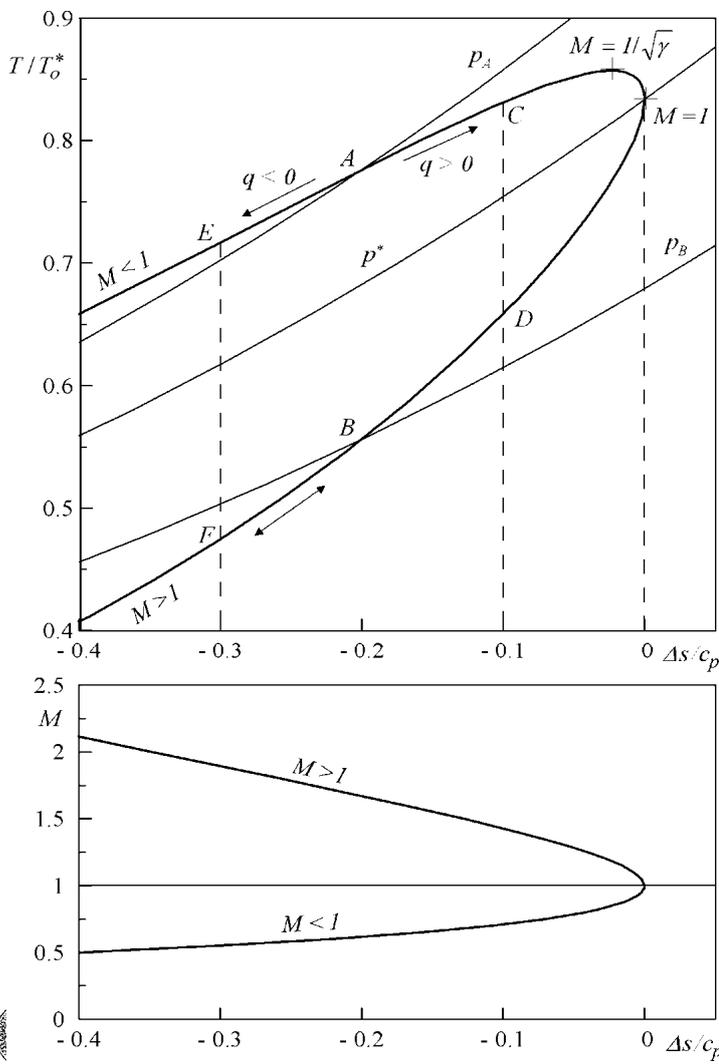


Ad es., se la condizione iniziale del moto è rappresentata dal punto A (rispettivamente B), il moto evolverà:

- verso il punto C (risp. D) a pressione minore (risp. maggiore) se il flusso di energia nel modo calore è positivo
- verso il punto E (risp. F) a pressione maggiore (risp. minore) quando il flusso termico è negativo.

In particolare, **sia per moto subsonico che supersonico, se il flusso termico è positivo si possono raggiungere le condizioni critiche che corrispondono alle condizioni soniche di  $M = 1$ .**

**Queste condizioni possono essere raggiunte solo all'uscita del condotto che riscalda il fluido**, cioè, quando è stata fornita al fluido tutta l'energia (**di fatto l'entropia**) che è possibile fornire sotto forma di calore.

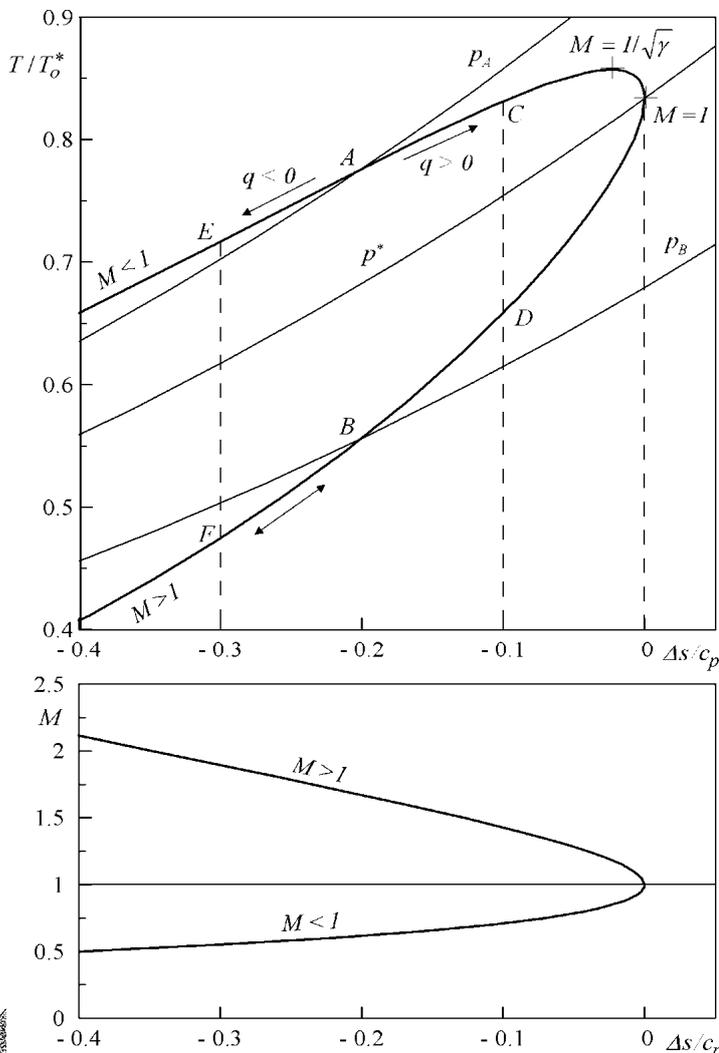


In effetti, **se si sta scaldando** il fluido, anche nel moto alla Rayleigh (come in quello alla Fanno) **le condizioni corrispondenti a  $M = 1$  rappresentano le condizioni critiche che danno luogo allo strozzamento del moto.**

In realtà, anche **la sottrazione di calore è limitata** potendosi, in linea di principio, **sottrarre al più l'entalpia totale posseduta inizialmente dal fluido.** Questo fatto non è sempre posto nel suo dovuto rilievo nei testi.

**In linea del tutto teorica,** sarebbe possibile accelerare un flusso subsonico fino a  $M > 1$  (decelerare un flusso supersonico fino a  $M < 1$ ) prima riscaldando e poi raffreddando il fluido.

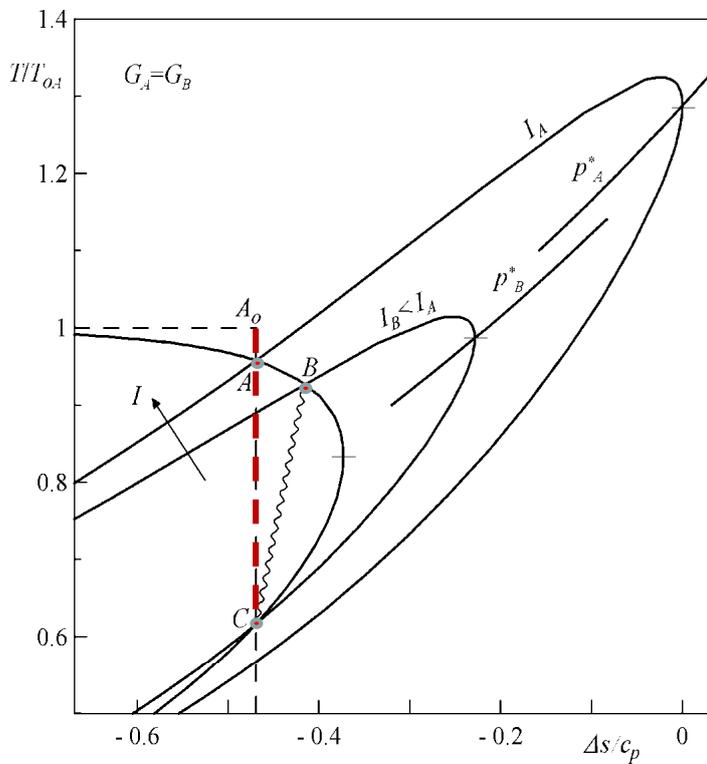
In pratica, questa operazione non si può realizzare anche perché, com'è facile immaginare, **si creerebbero condizioni di instabilità del moto.**



La differenza sostanziale tra il moto alla **Rayleigh** e quello alla **Fanno** sta nel fatto che, mentre in Fanno le **condizioni soniche** si possono raggiungere solo nella **sezione di uscita** del condotto, nel moto alla Rayleigh queste condizioni **si possono verificare anche all'inizio del condotto,** qualora lungo il condotto stesso si stia **raffreddando il fluido** ( $Tds < 0$ ).

In questo, caso come si vedrà in seguito, il seguire il ramo supersonico, o quello subsonico, della curva di Rayleigh (o parte di entrambi) dipende dal valore della pressione all'uscita del condotto.

**Mantenendo costante il flusso di massa  $G$  e variando l'impulso specifico  $I$ ,** si ottiene un'infinità di curve di Rayleigh, due delle quali sono mostrate nella figura che segue insieme con una curva di Fanno.



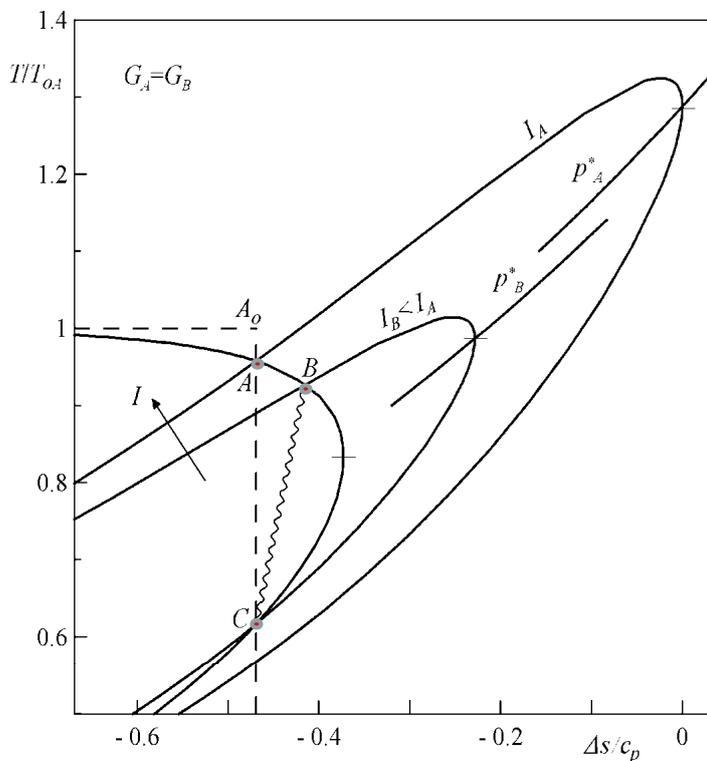
L' entropia di riferimento è quella relativa al **punto sonico** della curva di Rayleigh più esterna e la temperatura di riferimento è la temperatura di ristagno del suo punto  $A$ , cioè  $T_{oA}$  (curva tratteggiata orizzontale di figura),

Si può allora considerare una espansione isoentropica (in particolare quella che origina dalle condizioni di ristagno del punto  $A$ , cioè  $A_o$ ) in un ugello convergente divergente (curva tratteggiata verticale di figura).

Si possono allora calcolare sul piano  $T-s$ , **i tre punti caratteristici all'uscita dell'ugello** corrispondenti ai tre rapporti critici di pressione  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ .

Questa ricerca risulta più semplice utilizzando la curva di Fanno tracciata nella figura, asintotica alla  $T_{oA}$ , passante per il punto  $A$  (curva  $ABC$ ) e che ha lo stesso valore di  $G$  delle due curve di Rayleigh.

Infatti, come già visto, i tre punti cercati si trovano su questa stessa curva di Fanno dovendo avere tutti gli stessi valori sia di  $H$ , che di  $G$ .



I punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  corrispondono rispettivamente ai rapporti  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ .

Si noti che i punti  $B$  e  $C$  sono sulla curva di Rayleigh più interna (dovendo avere lo stesso valore sia di  $G$  che di  $I$ , oltre che di  $H$ , in quanto punti a valle e a monte di un'onda d'urto).

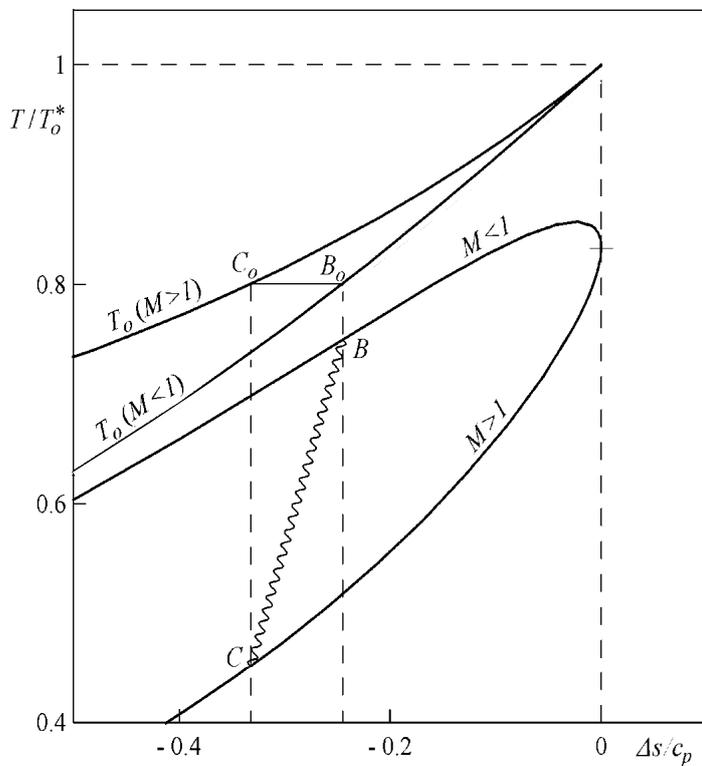
Il punto  $A$  si trova sulla curva di Rayleigh esterna avendo, di fatto, un diverso valore dell'impulso specifico.

Poiché, sia in regime subsonico che supersonico, in un moto alla Fanno l'impulso specifico  $I$  è una funzione decrescente dell'entropia, il punto  $B$  corrisponde ad un impulso specifico minore di quello del punto  $A$  ( $I_B < I_A$ ),

Quindi **la curva di Rayleigh più interna che passa per  $B$  è relativa ad un impulso specifico minore.**

Come mostrato in figura, a quest'ultima curva compete una pressione critica  $p^*$  minore di quella relativa alla curva di Rayleigh passante per  $A$  che, come detto, ha **lo stesso flusso di massa  $G$ , ma impulso specifico maggiore.**



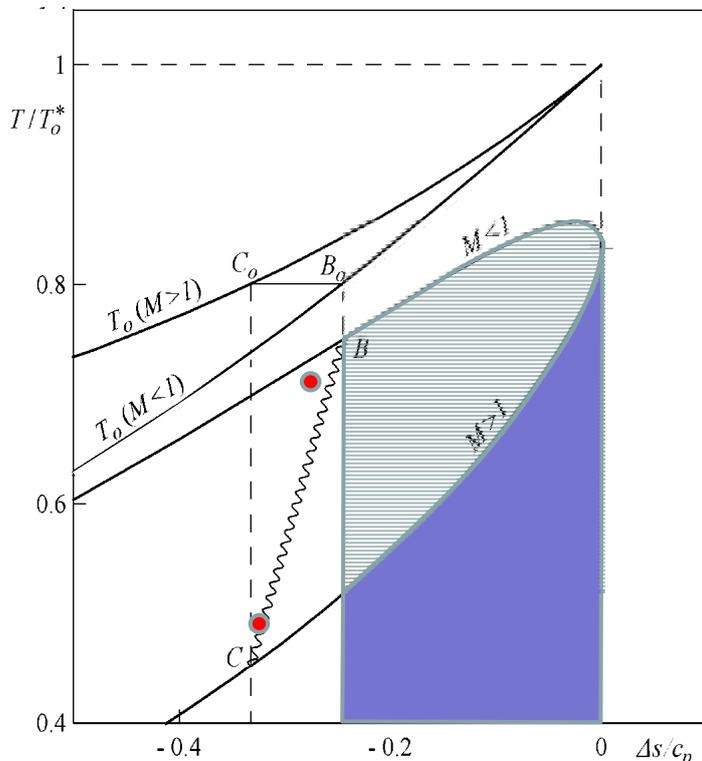


In figura sono mostrati ancora i due punti **a monte C** (supersonico) ed **a valle B** (subsonico ad entropia maggiore) **di un'onda d'urto normale** i quali, come visto nella figura precedente, avendo in comune le quantità  $G$  ed  $I$ , devono trovarsi su una **stessa curva di Rayleigh**, uno sul tratto supersonico e l'altro, avente entropia maggiore, su quello subsonico.

Si ricordi che i punti  $C$  e  $B$  devono avere anche la stessa entalpia totale  $H$  e, quindi, nel caso di gas perfetto, le **stesse temperature di ristagno**, così come mostrato dalle due curve a tratto intero, entrambi al di sopra della curva di Rayleigh.

Queste curve rappresentano gli **andamenti della  $T_0$  per i due rami**, quello subsonico (curva della  $T_0$  in basso) e quello supersonico (curva della  $T_0$  in alto).

E' facile riconoscere **la curva relativa al ramo subsonico della  $T_0$  perché questa curva, per  $M \rightarrow 0$ , deve risultare asintotica al corrispondente ramo della curva di Rayleigh** che, si ricorda, diagramma la temperatura statica.



Il fatto che la curva della  $T_0$  relativa al ramo supersonico giace tutta sopra di quella del ramo subsonico, è ricavabile anche grazie ad un'altra considerazione. Sul piano  $T-s$ , **l'integrale di  $Tds$  in accordo con la:**

$$dH = \frac{4 \dot{q}}{G} \frac{dx}{D_e} = dq = Tds$$

**rappresenta il calore scambiato dall'unità di massa di fluido  $q$ .**

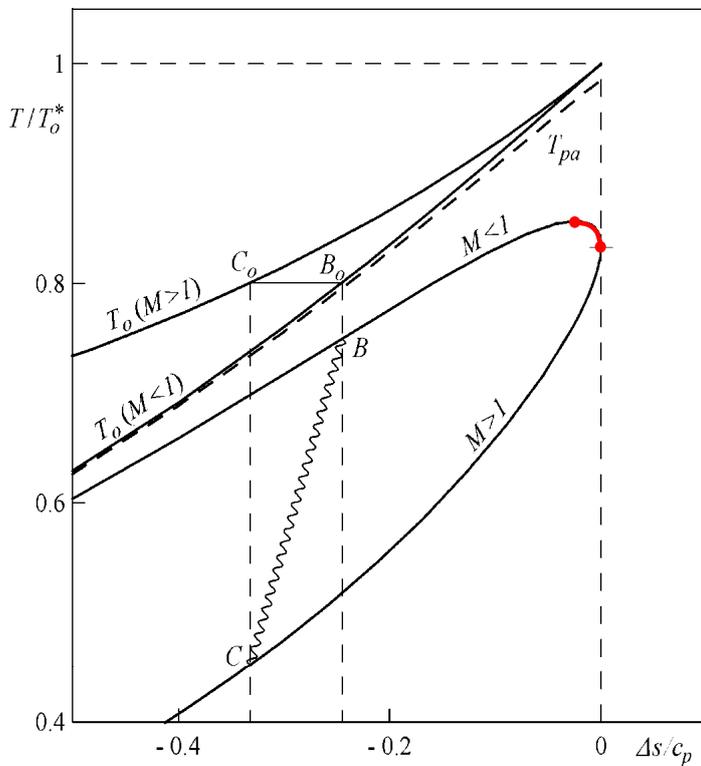
Partendo da  $M = 1$  (dove le due curve devono avere un punto in comune) e sottraendo calore, è chiaro che, per raggiungere la stessa entropia procedendo in regime subsonico, si deve sottrarre più calore, poiché il ramo

subsonico della curva di Rayleigh sottende un'area maggiore. I due punti  $C$  e  $B$ , avendo gli stessi  $G$  e  $H$ , devono trovarsi anche sulla stessa curva di Fanno.

**I punti intersezione di una curva di Fanno con una curva di Rayleigh rappresentano gli stati a monte ed a valle di un'onda d'urto.**

Le due curve devono, ovviamente, riferirsi allo stesso flusso di massa  $G$ .





Per il solo ramo subsonico, è stato rappresentato anche l'andamento della **temperatura di parete adiabatica (curva tratteggiata)** di cui si è già discusso per il moto alla Fanno.

In particolare, si ricorda qui, che la temperatura di parete adiabatica governa, tra l'altro, il verso nel quale fluisce il calore in base alla:

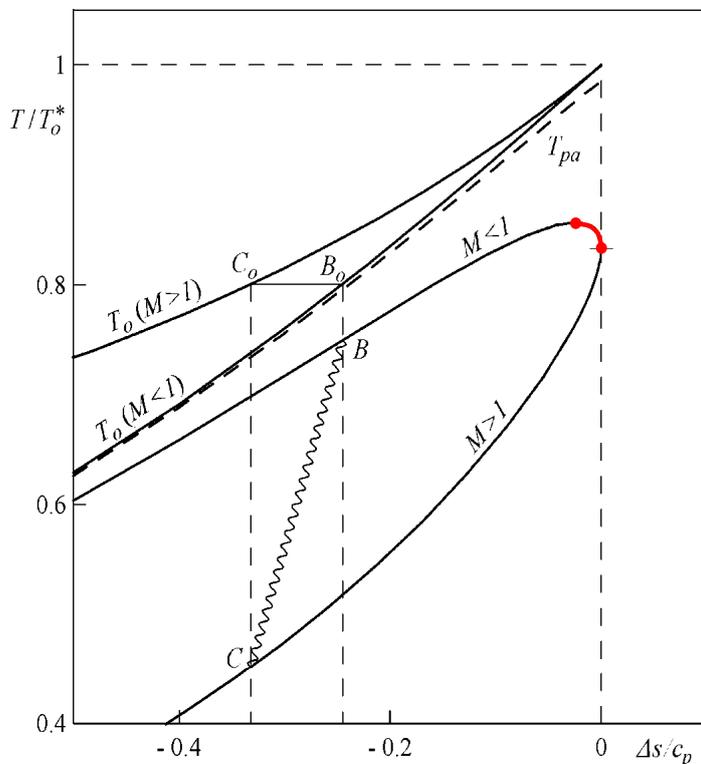
$$\dot{q} = \alpha (T_p - T_{pa})$$

dove  $T_p$  è la temperatura di parete e  $T_{pa}$  è la temperatura di parete adiabatica.

Quest'ultima è stata diagrammata tenendo conto della:

$$T_{pa} = T + r \frac{V^2}{2c_p} = T \left( 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

e supponendo un coefficiente di recupero  $r = 0.9$  (ad esempio, per aria a temperatura ambiente si ha:  $Pr = 0.71$ ).



Se erroneamente si supponesse che la  $T_{pa}$  debba coincidere con la temperatura sensibile  $T$ , effettivamente il moto alla Rayleigh avrebbe un comportamento termofluidodinamico instabile per  $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ .

A una adduzione (rispettivamente sottrazione) di calore corrisponderebbe una diminuzione (risp. un aumento) della temperatura del fluido, comportamento che violerebbe il **principio di Le Chatelier - Brown**.

In effetti, come si può notare dalla figura, la temperatura di parete adiabatica  $T_{pa}$  [che, si ripete, è quella che governa tramite la:

$$\dot{q} = \alpha (T_p - T_{pa})$$

il flusso termico] **cresce monotonamente**, quando ci si muove in campo subsonico verso  $M = 1$ .

Quindi, di fatto, **non esiste alcun comportamento del moto che risulti termofluidodinamicamente instabile nell'intervallo  $1/\sqrt{\gamma} < M < 1$ .**



# I RAPPORTI CARATTERISTICI PER UN MOTO ALLA RAYLEIGH

È opportuno, a questo punto, ricavare per il caso di un gas più che perfetto tutte le relazioni che permettono di valutare ***i rapporti caratteristici, adimensionali, tra le diverse grandezze termofluidodinamiche in funzione del numero di Mach*** della corrente fluida.

Poiché nel paragrafo precedente si è visto che le condizioni per  $M = 1$  risultano essere critiche, anche per il moto alla Rayleigh ***è conveniente adimensionalizzare ciascuna grandezza con il valore da essa assunto per  $M = 1$ , valore che sarà ancora indicato con l'apice asterisco.***

Applicando la:

$$I = p(1 + \gamma M^2) = \text{cost}$$

tra lo stato generico, in cui numero di Mach sia  $M$ , e quello sonico ( $M = 1$ ) si ottiene ***il rapporto tra le due pressioni statiche:***

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}$$



Dalla definizione del numero di Mach, tenendo conto dell'equazione di stato dei gas, della definizione di velocità del suono laplaciana e della costanza del flusso di massa si ottiene la relazione:

$$M^2 = \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{\gamma RT} = \frac{G^2}{\gamma R \rho^2 T} = \frac{G^2 RT}{\gamma p^2}$$

Applicandola tra lo stato generico  $M$  e quello per  $M = 1$  e ricordando che  $G = \text{cost}$ , si ottiene:

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left( \frac{p}{p^*} \right)^2$$

per cui, sostituendo in questa relazione la:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}$$

si ha ***il rapporto tra le temperature statiche:***

$$\frac{T}{T^*} = \frac{M^2 (1 + \gamma)^2}{(1 + \gamma M^2)^2}$$



$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left( \frac{p}{p^*} \right)^2$$

**L'eguaglianza espressa dalla relazione precedente è ovviamente rispettata anche per il moto alla Fanno** [perché è ricavata dalla costanza del flusso di massa, valida per entrambi i tipi di moto] com'è anche possibile verificare dalla:

$$\frac{p}{p^*} = \sqrt{\frac{T}{T^*}} \frac{1}{M}$$

La costanza del flusso di massa e l'equazione di stato dei gas, tenendo conto delle:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \quad ; \quad \frac{T}{T^*} = \frac{M^2(1+\gamma)^2}{(1+\gamma M^2)^2}$$

conducono ai **rapporti per le velocità e le densità**:

$$\frac{V^*}{V} = \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{p}{p^*} \frac{T^*}{T} = \frac{1 + \gamma M^2}{M^2(1 + \gamma)}$$



Dalle equazioni:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \quad ; \quad p_o = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

si ottiene l'espressione del **rapporto tra le pressioni di ristagno**:

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

La grandezza, che nel moto alla Rayleigh è direttamente connessa alla forza spingente, è la temperatura di ristagno che, ovviamente, varia in conseguenza dello scambio termico alla parete del condotto. Dalle relazioni:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{M^2(1+\gamma)^2}{(1+\gamma M^2)^2} \quad ; \quad T_o = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

si ottiene il **rapporto tra le temperature di ristagno**:

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{2(1 + \gamma)M^2}{(1+\gamma M^2)^2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$



$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{2(1 + \gamma)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Nel moto alla Rayleigh, questo rapporto riveste un ruolo senz'altro confrontabile con quello della quantità adimensionale  $4fL^*/D_e$  utilizzata nel caso di moto alla Fanno.

Infine, la sostituzione delle:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{M^2(1+\gamma)^2}{(1+\gamma M^2)^2} \quad ; \quad \frac{p}{p^*} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma M^2}$$

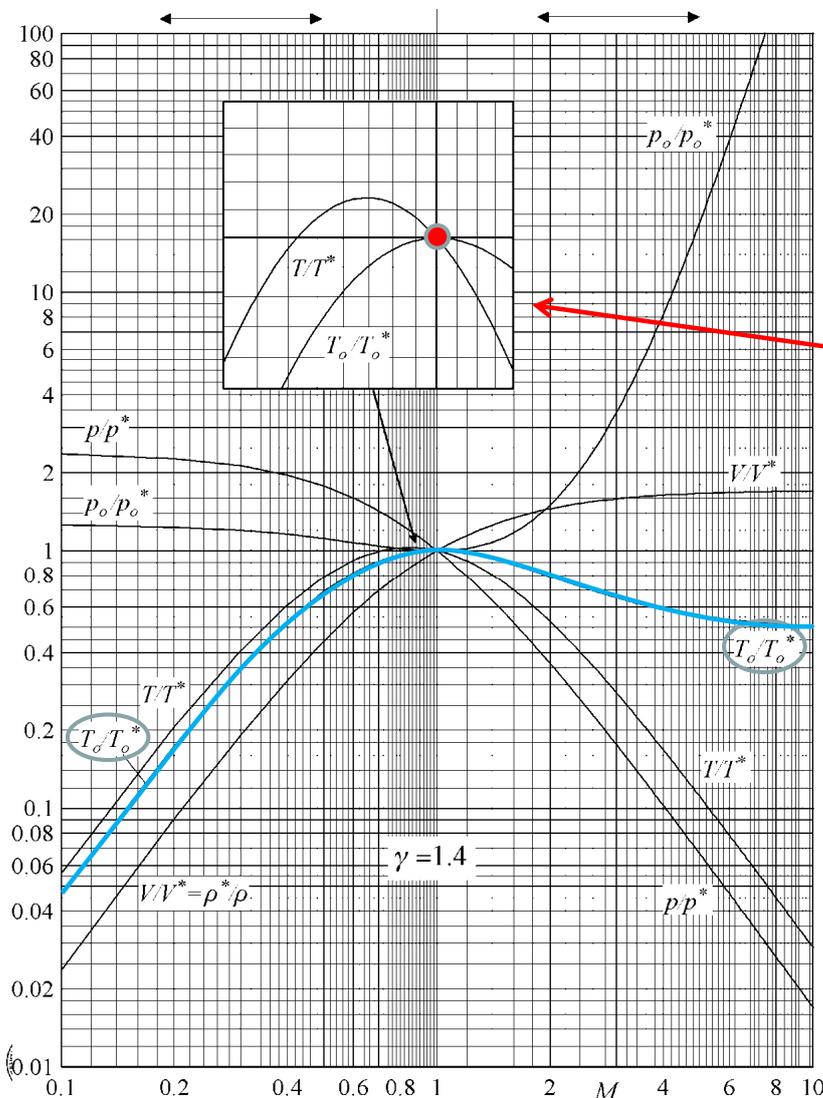
nella:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

consente di calcolare la **variazione di entropia rispetto alle condizioni critiche**,  $\Delta s = s - s^*$ :

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \ln \left[ M^2 \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^\gamma \right]$$

Sostituendo in questa relazione il  $M^2$  ricavato dall'espressione di  $T/T^*$  si ha l'equazione della curva di Rayleigh sul piano T-s.



In figura sono stati diagrammati, in funzione del numero di Mach  $M$ , **i rapporti caratteristici per il moto alla Rayleigh** espressi dalle relazioni appena ricavate, **per il caso di  $\gamma = 1.4$ .**

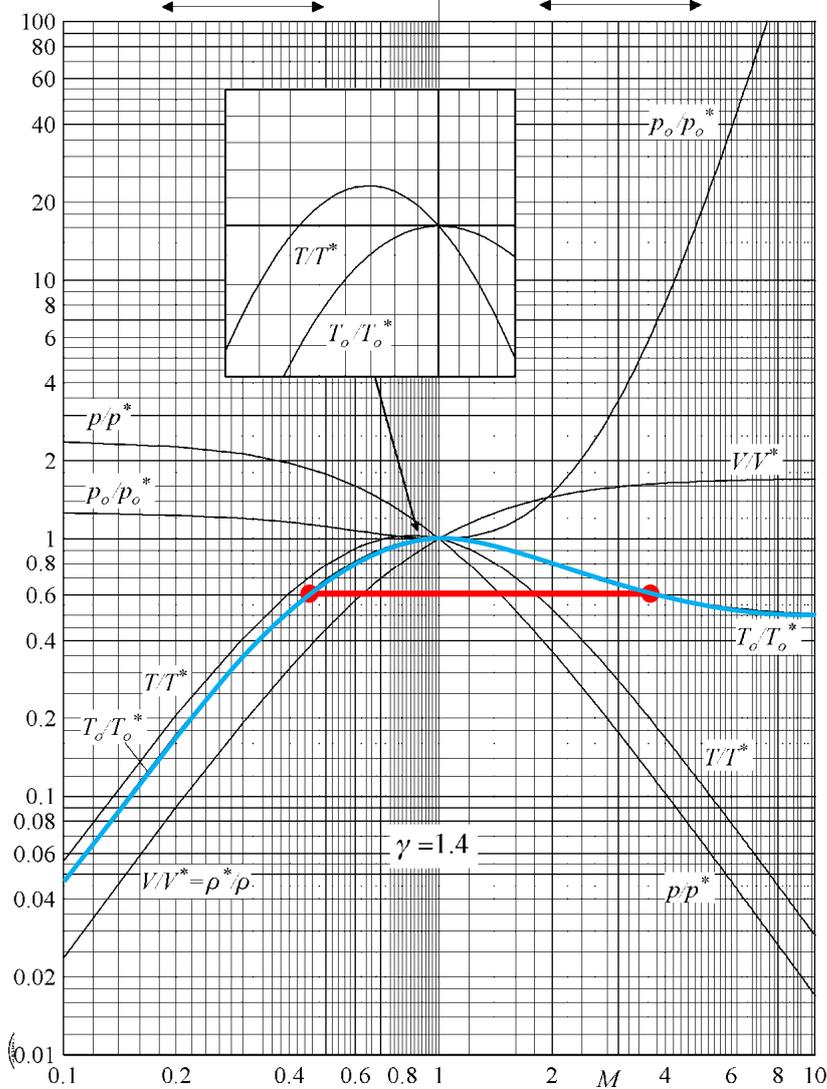
Nel riquadro in alto della figura, è riportato un ingrandimento dei soli andamenti della **temperatura statica e di quella di ristagno** per metterne in risalto il particolare comportamento in prossimità di  $M = 1$ .

Il **rapporto  $T_o/T_o^*$**  ha:

- un massimo per  $M = 1$
- va a zero per  $M \rightarrow 0$
- per  $M \rightarrow \infty$ , raggiunge il valore limite:

$$(\gamma^2 - 1) / \gamma^2$$

(0.4898 per  $\gamma = 1.4$ ).



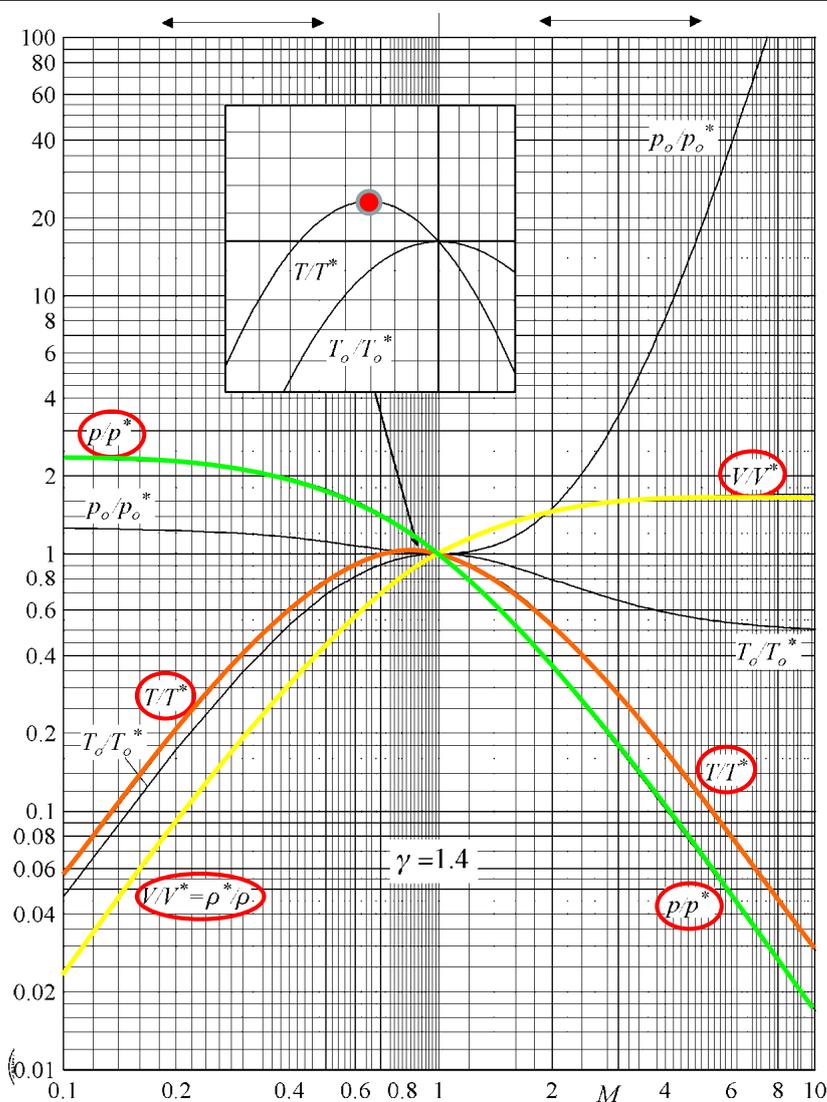
La quantità di **calore** che si può cedere al fluido è, quindi, **teoricamente illimitata per moto subsonico** (purché si parta da un numero di Mach sufficientemente basso), mentre risulta limitata per il supersonico.

**Due punti allineati in orizzontale** (uno subsonico, l'altro supersonico) hanno lo stesso rapporto  $T_0/T_0^*$  (in pratica la stessa entalpia totale  $H$ ).

**Essi rappresentano gli stati a valle ed a monte di un'onda d'urto normale.**

Il comportamento asintotico della curva  $T_0/T_0^*$  per  $M \rightarrow \infty$  mostra ancora una volta che si raggiunge il valore limite del numero di Mach a valle dell'onda:

$$M_{2\ell} = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \left( \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2}$$



Il **rapporto  $T/T^*$**  mostra, invece:

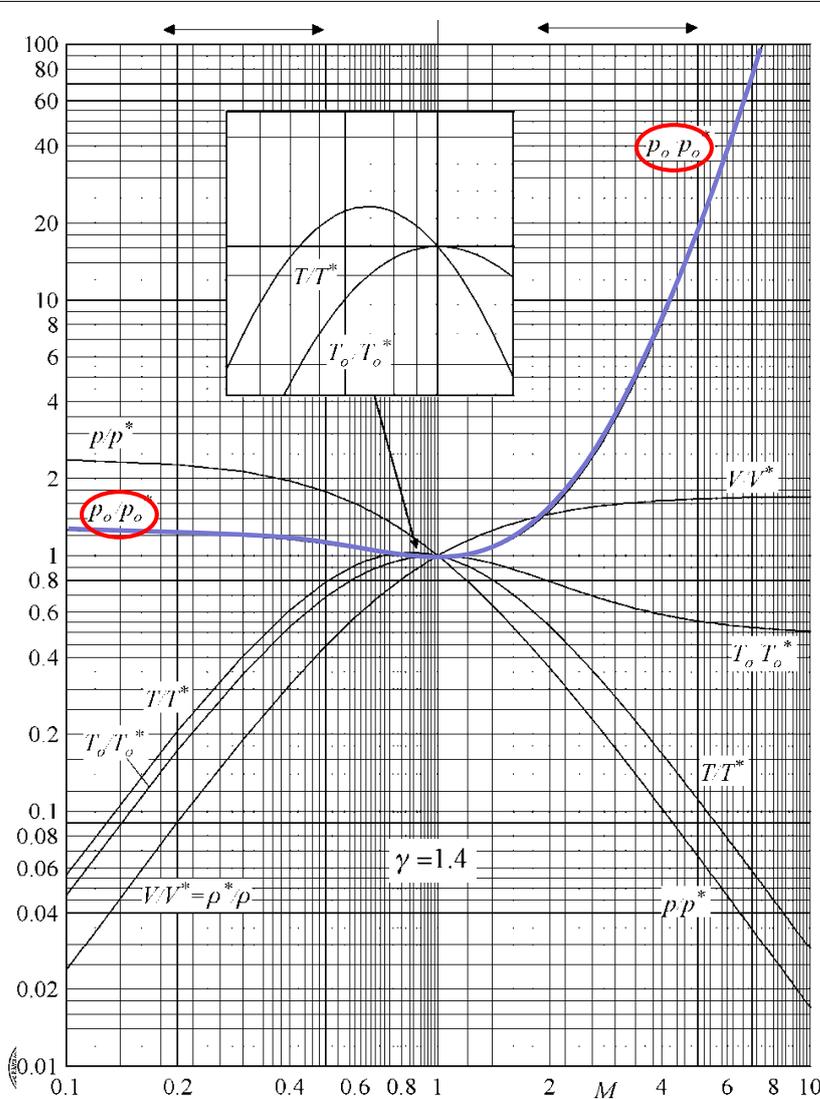
- un **massimo per  $M = 1/\sqrt{\gamma}$**  (massima temperatura); per  $\gamma = 1.4$ , vale 1.029 a  $M = 0.8452$ ,
- **tende a zero, sia per numero di Mach tendente a zero, che all'infinito.**

Il **rapporto delle velocità** (rapporto inverso delle densità)  $V/V^* = \rho^*/\rho$  **tende a zero per  $M \rightarrow 0$  e a  $(\gamma + 1)/\gamma$**  (in particolare, 1.714 per  $\gamma = 1.4$ ) **per Mach tendente all'infinito.**

Si ricorda che, **per  $M \rightarrow \infty$ , la curva di Rayleigh tende ad un'isocora.**

Il **rapporto tra le pressioni statiche  $p/p^*$  si annulla per numero di Mach tendente all'infinito, mentre tende al valore  $(\gamma + 1)$  per  $M \rightarrow 0$**

**La curva di Rayleigh tende infatti ad un'isobara.**



Il rapporto tra le pressioni di ristagno tende a:

$$(\gamma+1) \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

per  $M$  tendente a zero (si ricordi ancora che la curva di Rayleigh tende a un'isobara e che la pressione statica tende a coincidere con quella di ristagno),

a infinito per  $M \rightarrow \infty$ , presentando un minimo nelle condizioni critiche.

## CONDOTTO CON SCAMBIO TERMICO COLLEGATO AD UN UGELLO CONVERGENTE

Il comportamento di un condotto, collegato ad un ugello convergente, nel quale si ha moto alla Rayleigh e con un flusso di energia nel modo calore positivo (in altre parole, energia ceduta al fluido), è molto simile a quello già descritto nel caso di moto alla Fanno.

L'ugello si intende collegato amonte ad un serbatoio; quindi il moto del fluido che lo attraversa è senz'altro subsonico e inoltre può essere considerato, in esso, adiabatico ed isoentropico.

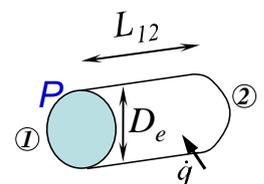
La determinazione delle curve di funzionamento del sistema è del tutto analoga a quella sviluppata per il moto alla Fanno a condizione che il rapporto  $4fL^*/D_e$  sia sostituito da  $T_o/T_o^*$  o, più precisamente, dalla quantità  $\dot{q}^*/(c_p T_{o1})$ .

In particolare, supponendo il flusso termico costante sulla superficie del condotto dove si realizza lo scambio termico, e cioè dalla sezione iniziale 1 alla sezione finale 2, dalla:

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q} \quad G(dh + VdV) = GdH = Gc_p dT_o = 4\dot{q} \frac{dx}{D_e} = \frac{\dot{q} P dx}{A} \quad D_e = 4A/P$$

si ottiene la relazione:

$$\Delta H = c_p (T_{o2} - T_{o1}) = 4 \frac{\dot{q}}{G} \frac{L_{12}}{D_e} = q$$



$$\Delta H = c_p (T_{o2} - T_{o1}) = 4 \frac{\dot{q}}{G} \frac{L_{12}}{D_e} = q$$

nella quale la sezione **2** potrebbe essere, **al più**, quella critica e la quantità  $q$ , che rappresenta il calore scambiato dall'unità di massa del fluido evolvente, deve essere considerata, in generale, nota.

Si deve qui puntualizzare che **la scelta della coordinata sull'asse delle ascisse dei diagrammi che rappresentano le curve di funzionamento è una conseguenza di questa relazione**. Infatti, dividendo la relazione per la quantità  $c_p T_{o1}$ , si ottiene:

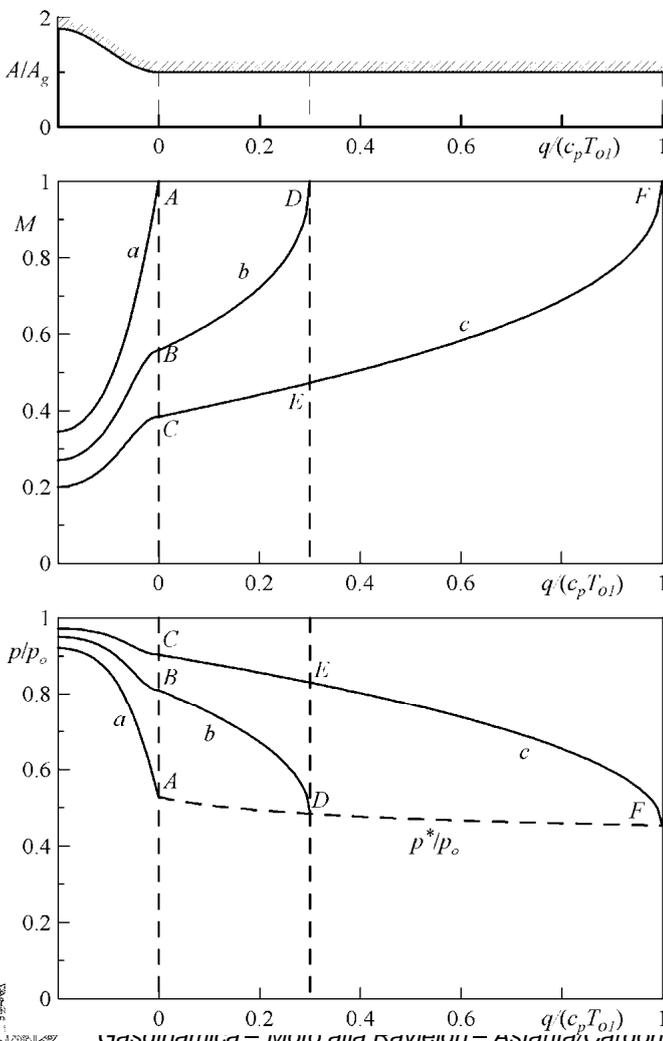
$$\frac{T_{o2}}{T_{o1}} - 1 = 4 \frac{\dot{q}}{c_p T_{o1} G} \frac{L_{12}}{D_e} = \frac{q}{c_p T_{o1}}$$

che giustifica la suddetta ascissa (quantità di calore ceduta per unità di massa al fluido, adimensionalizzata rispetto all'entalpia di ristagno iniziale dello stesso).

Si può anche notare che, per  $\dot{q} = cost$ , quest'ascissa può essere riguardata anche come lunghezza adimensionale del condotto.

Se nella sezione **2** si raggiungono le condizioni critiche ( $M = 1$ ), si ha:

$$\frac{T_o^*}{T_{o1}} - 1 = \frac{q^*}{c_p T_{o1}}$$



$$\frac{T_o^*}{T_{o1}} - 1 = \frac{q^*}{c_p T_{o1}}$$

dove la quantità  $q^*$  rappresenta l'energia ceduta al fluido nel modo calore che lo porta alle condizioni critiche ricavabile dalla:

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{2(1 + \gamma)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

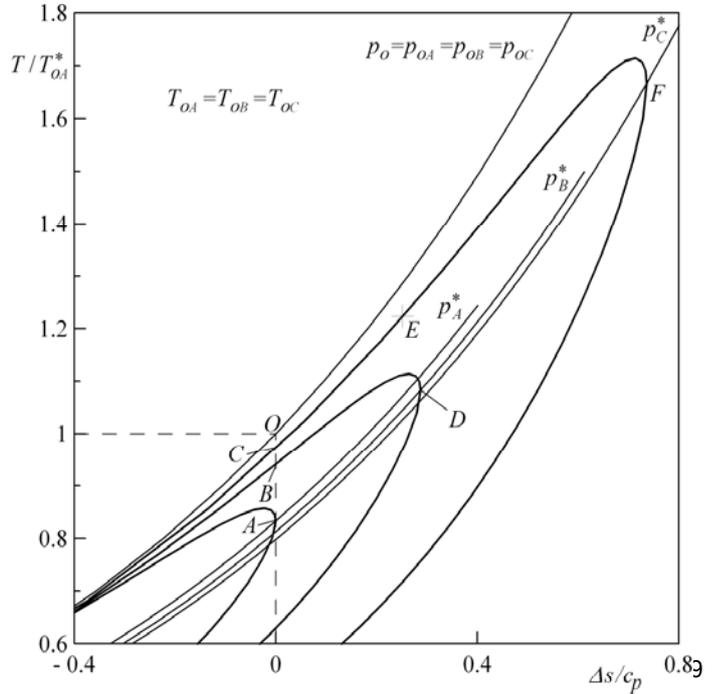
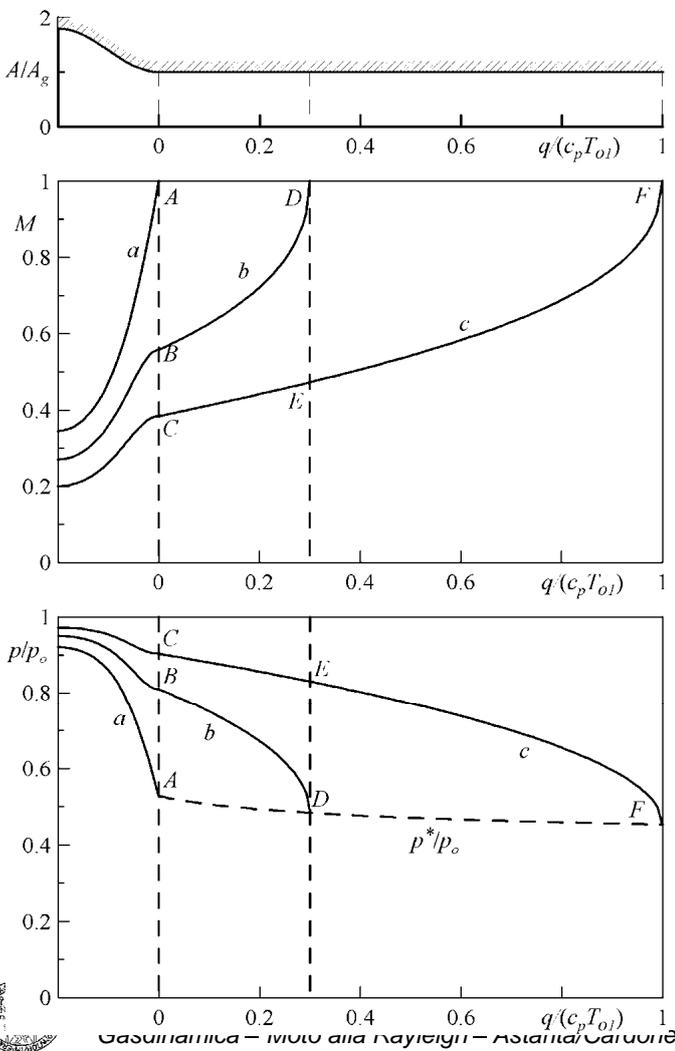
I diagrammi riportati indicano gli andamenti del numero di Mach e del rapporto di pressione in **condizioni caratteristiche** al variare della quantità di calore (**positiva**) ceduta all'unità di massa del fluido.

**Si sta, quindi, scaldando il fluido.**

Come già affermato, se si suppone  $\dot{q} = cost$ , **l'ascissa del diagramma può essere considerata proporzionale alla distanza dalla sezione di uscita dell'ugello** adimensionalizzata.



In figura sono riportate, per alcuni valori particolari della quantità adimensionale  $q/(c_p T_{01})$ , le curve caratteristiche con i relativi diagrammi di pressione, del numero di Mach e le corrispondenti curve nel piano  $T-s$ . Tutte le curve delle figure sono state tracciate per il caso di  $\gamma = 1.4$ .



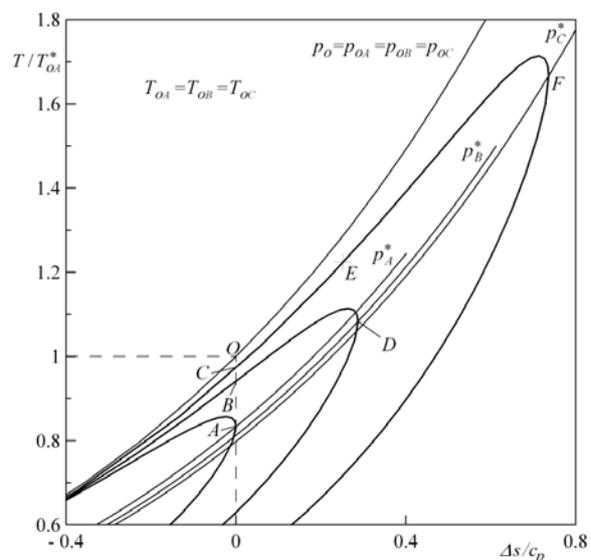
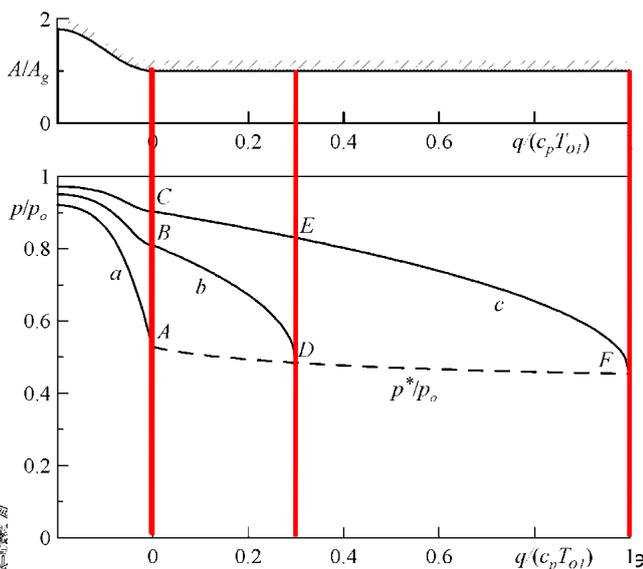
Per  $q^*/(c_p T_{01}) = 0$ , il sistema coincide con il [serbatoio-ugello convergente](#).

Per  $q^*/(c_p T_{01}) > 0$ , il numero di Mach all'uscita dell'ugello deve essere minore di uno per far aumentare al fluido la sua temperatura di ristagno.

Le curve caratteristiche sono, ad esempio, del tipo **b** dove  $M_B < 1$  e  $p_B > p_A$ .

Nella sezione di uscita del condotto si raggiunge, ovviamente, ancora  $M = 1$ .

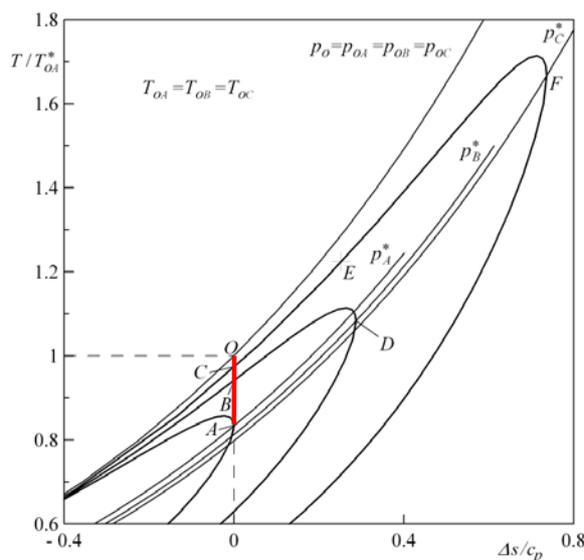
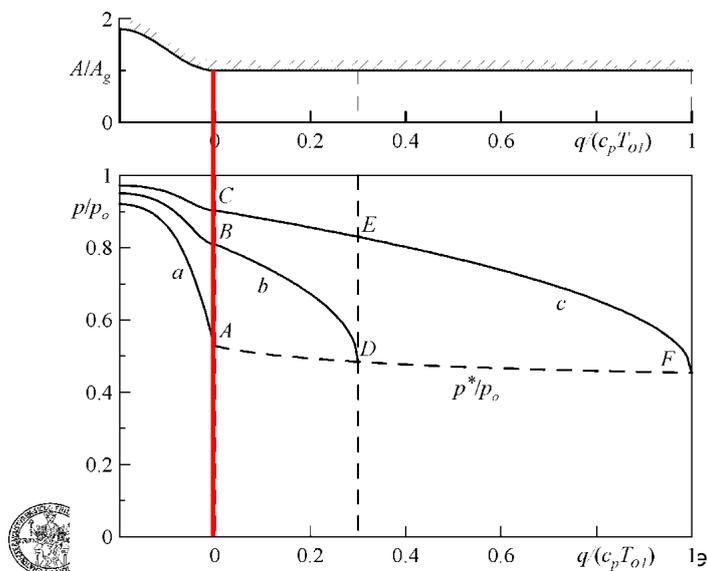
All'aumentare del rapporto  $q^*/(c_p T_{01})$ , il Mach all'uscita dell'ugello deve continuamente diminuire ( $M_C < M_B$  e  $p_C > p_B$ ) e, di conseguenza, il flusso di massa andrà anch'esso diminuendo.



Nel piano  $T$ - $s$ , la curva corrispondente alla curva  $a$  (sola espansione isoentropica nell'ugello) è rappresentata dal segmento verticale che ha origine nelle condizioni di ristagno  $O$  e ha fine nel punto in basso  $A$  coincidente con il punto di massima entropia della curva di Rayleigh più interna (condizioni soniche).

**In questo caso non si può cedere alcun calore al fluido.**

Il **flusso di massa è massimo** e la curva di Rayleigh passante per  $A$  è stata tracciata solo per completezza, non essendo rappresentativa di alcuna evoluzione del fluido.



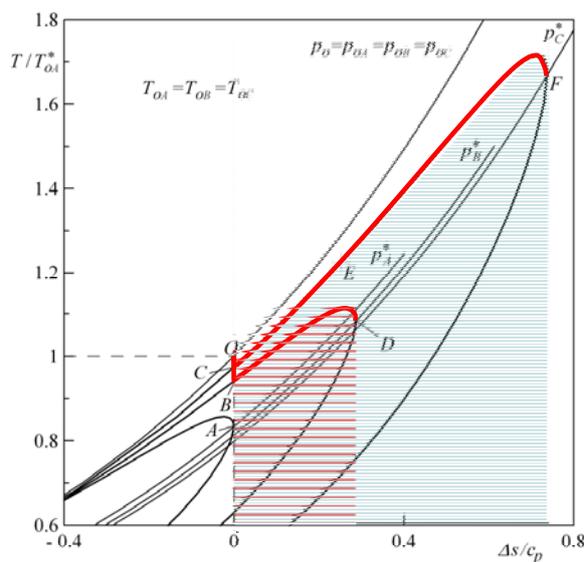
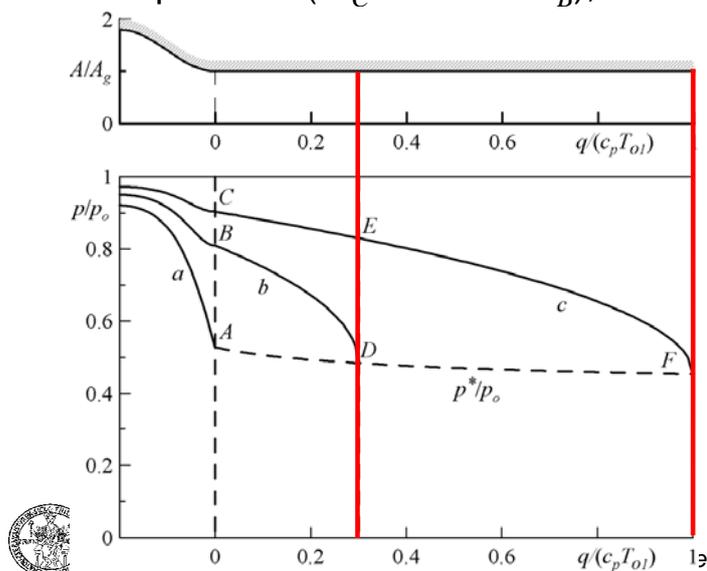
41

Dando al fluido la quantità di calore  $q^*/(c_p T_{oA}) = 0.3$  (che in termini dimensionali è pari all'area sottesa dal ramo  $BD$  della curva), l'espansione nell'ugello, partendo sempre da  $O$ , si ferma in  $B$  ( $T_o^*/T_o = 1.3$ ,  $T_o/T_o^* \approx 0.77$ ,  $M_B \approx 0.56$ ).

Seguendo la curva di Rayleigh passante per  $B$ , il fluido muove, poi, sino allo stato sonico rappresentato dal punto  $D$ .

**Il flusso di massa è, ovviamente, inferiore al caso precedente per la minore espansione isoentropica del fluido ( $M_B < M_A = 1$ ).**

Aumentando ancora la quantità di calore (ad es.,  $q^*/(c_p T_{oA}) = 1$ , pari all'area sottesa dal ramo  $CF$  nel piano  $T$ - $s$ ), l'espansione si arresta ancora prima, cioè nel punto  $C$  ( $M_C \approx 0.38 < M_B$ ), e il flusso di massa diminuisce ulteriormente.



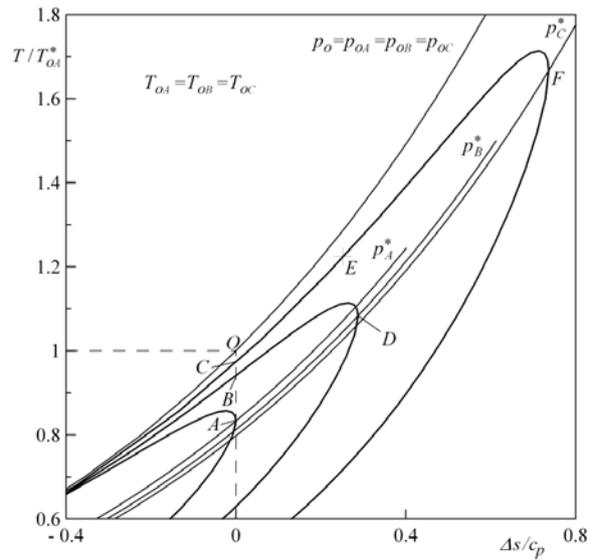
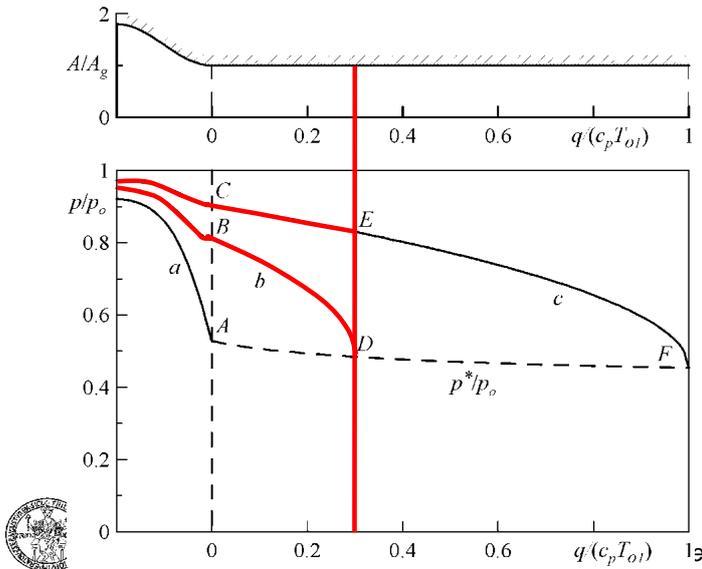
42

E' stato detto che, se il fluido riceve calore dal suo ambiente, tutte le osservazioni fatte per il moto alla Fanno sono applicabili anche al moto alla Rayleigh.

Ad esempio per  $q/(c_p T_{01}) = 0.3$ , se la pressione ambiente  $p_a$  è minore di quella del punto D, **il moto è strozzato** e si ha un ventaglio di espansione all'uscita del condotto.

Per pressioni maggiori, invece, **il moto è tutto subsonico** ed è, ovviamente, rispettata la condizione di Kutta (ad es., se  $p_a = p_E$ , si ha il funzionamento lungo la curva CE).

**Nel primo caso**  $q = q^*$ , **mentre nel secondo, ovviamente, si ha**  $q < q^*$ .



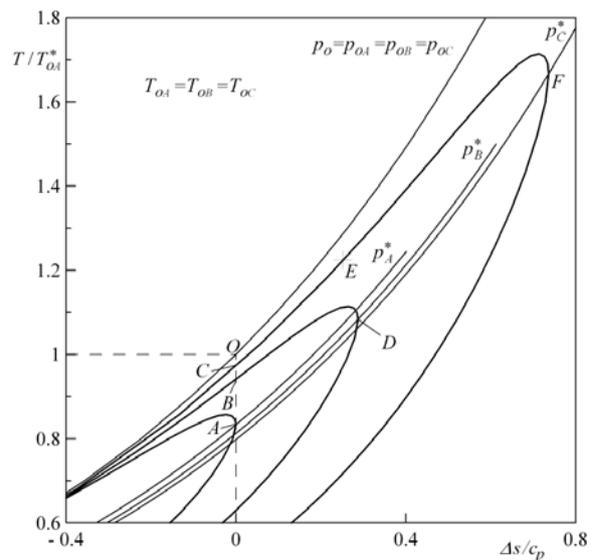
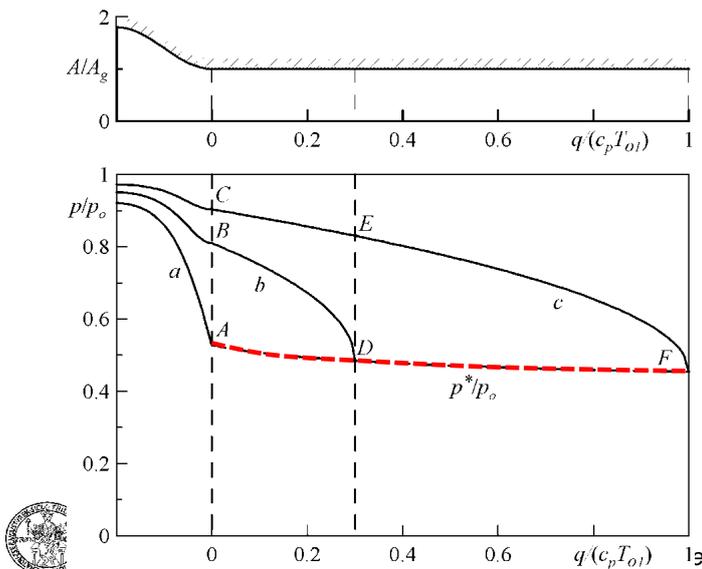
La curva tratteggiata che rappresenta l'andamento di  $p^*/p_0$  decresce leggermente all'aumentare della quantità adimensionale  $q/(c_p T_{01})$  e ciò risulta facilmente provabile sostituendo ai due fattori dell'espressione:

$$\frac{p^*}{p_0} = \frac{p^*}{p_1} \frac{p_1}{p_0} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{1 - \gamma}}$$

le seguenti formule:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \quad ; \quad p_0 = p \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

dove  $p_1$  è la pressione nella sezione di uscita dell'ugello

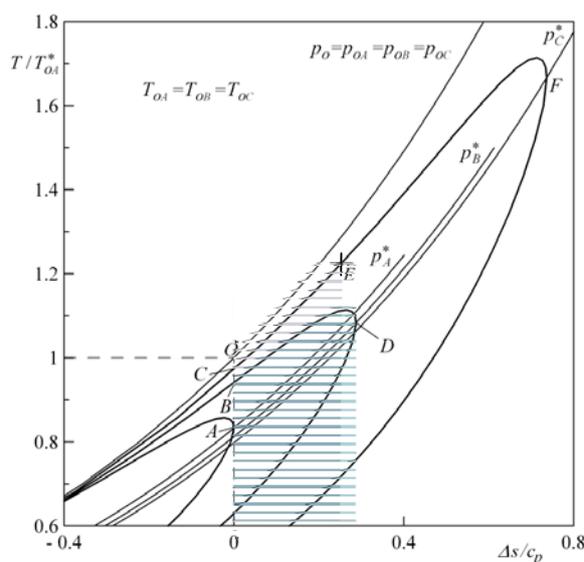
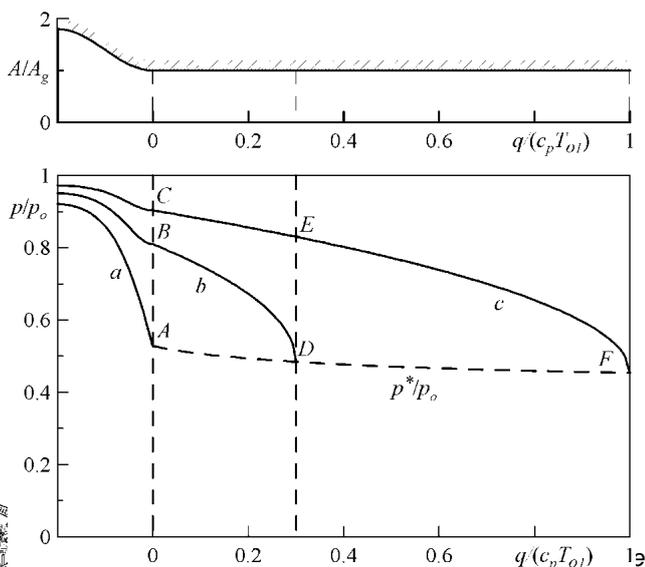


Se per il flusso di massa dei punti  $C$  ed  $F$  si da la stessa quantità di calore necessaria per evolvere da  $B$  a  $D$ , il punto  $E$  in uscita al condotto si trova sulla stessa curva di Rayleigh  $CF$ , ma a un'entropia leggermente minore di  $D$ . Infatti, il tratto di curva  $CF$  corre più in alto del tratto  $BD$  e l'area sottesa dalla curva  $CE$  deve essere uguale a quella della  $BD$ .

Il funzionamento lungo il tratto  $BD$ , o lungo  $CE$ , è ovviamente stabilito dal valore della pressione allo scarico.

Se la  $p_a$  è minore, o uguale alla  $p_D$ , il fluido segue sempre il tratto  $BD$ .

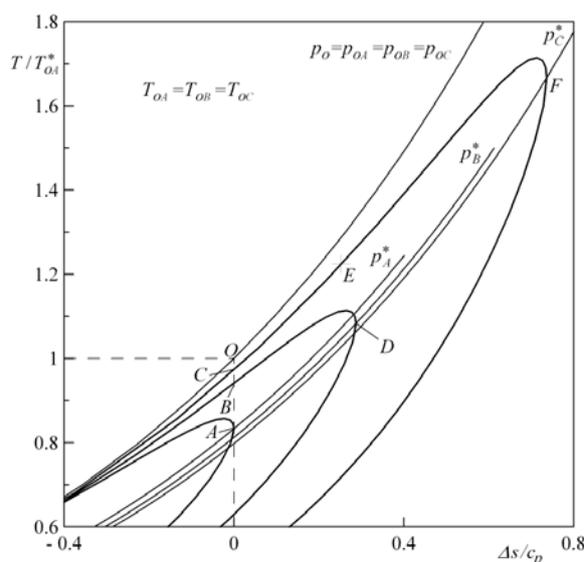
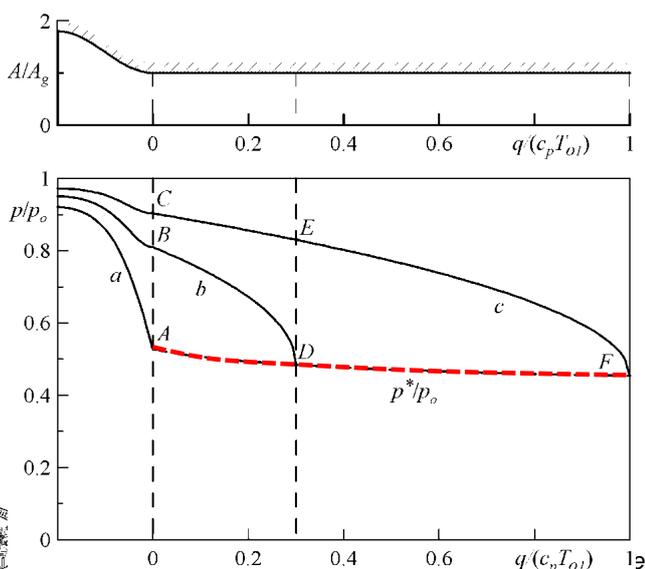
Se, viceversa, la pressione allo scarico è più alta, in particolare pari a  $p_E$ , il fluido evolve lungo il tratto  $CE$ , rispettando la condizione di Kutta.



Il piano  $T-s$  mostra anche l'andamento, a parità di  $p_o$  e  $T_o$  iniziali (cioè per pressione e temperatura nel serbatoio costanti), delle curve di Rayleigh al variare del flusso di massa  $G$ .

**Maggiore è il flusso di massa, più interna è la curva.**

Dalle diverse curve si nota anche la leggera diminuzione della  $p^*$  all'aumentare della quantità di calore che conduce alle condizioni critiche come, d'altronde, anche mostrato dal diagramma di sinistra.



La curva a tratto continuo della Fig. a) rappresenta l'andamento del rapporto tra la pressione all'uscita del condotto  $p_u$  e la pressione di ristagno nel serbatoio  $p_o$ , in funzione del rapporto tra la pressione ambiente  $p_a$  e  $p_o$ .

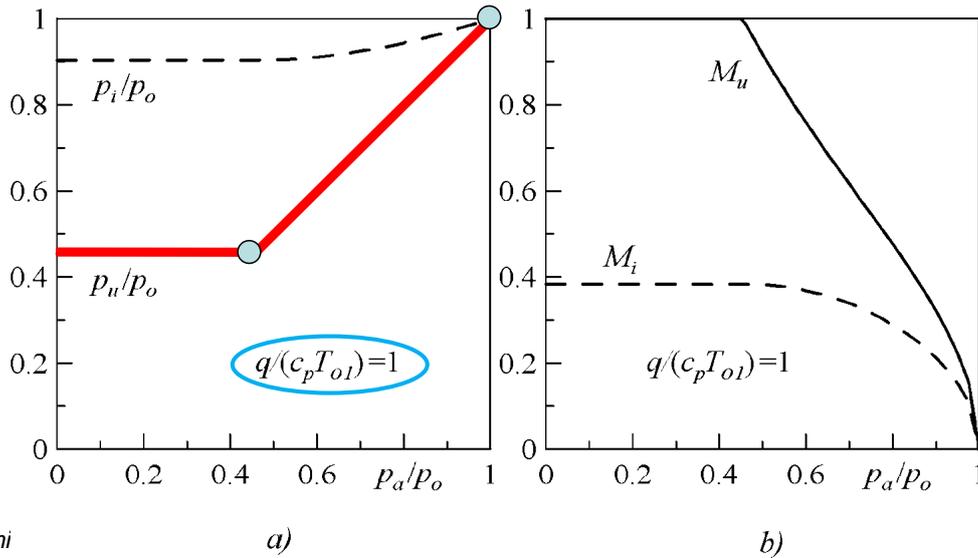
**Le curve della figura sono relative al caso di  $q/(c_p T_{o1}) = 1$  e  $\gamma = 1.4$**

Se la pressione ambiente è uguale alla pressione di ristagno,  $p_u/p_o$  è unitario.

Una diminuzione della pressione ambiente fa abbassare linearmente  $p_u/p_o = p_a/p_o$ , poiché si deve rispettare la condizione di Kutta.

Ciò si verifica fino al raggiungimento dello stato critico all'uscita del condotto.

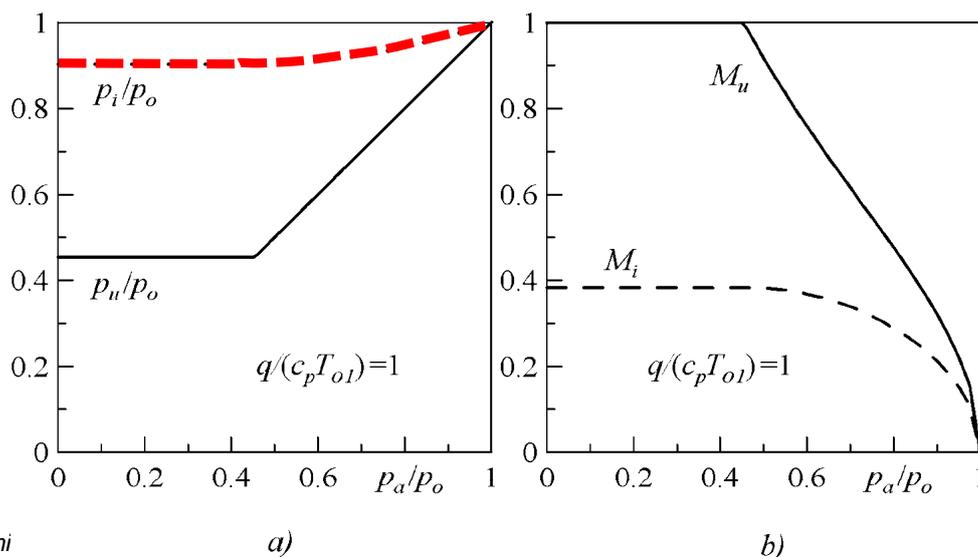
Ulteriori abbassamenti della  $p_a$  provocano lo strozzamento del sistema e la pressione all'uscita del condotto resta costante.



Comportamento simile ha il rapporto fra la pressione all'ingresso del condotto  $p_i$  e la pressione di ristagno nel serbatoio  $p_o$  (curva tratteggiata).

Per pressioni ambiente inferiori alla pressione critica, nel condotto con flusso alla Rayleigh il moto è strozzato, la curva di funzionamento del sistema non cambia e  $p_i/p_o$  rimane costante.

Invece, all'aumentare della  $p_a$  al di sopra della pressione critica, la pressione  $p_i$  cresce con legge non lineare fino a raggiungere la pressione di ristagno quando  $p_a/p_o = 1$ .

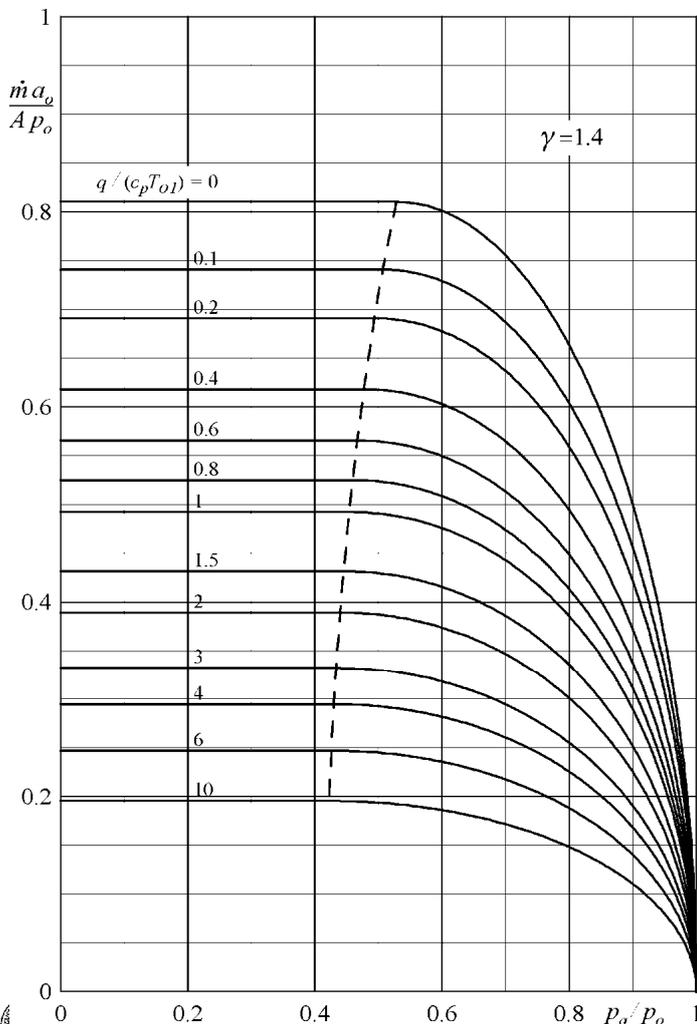
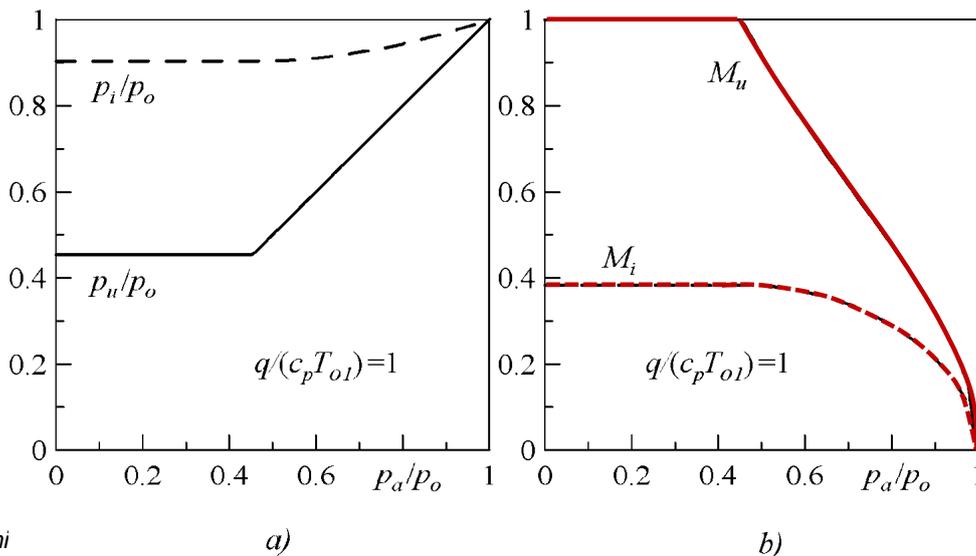


In Fig. b), sempre per  $q/(c_p T_{01}) = 1$  e  $\gamma = 1.4$ , sono tracciati, in funzione di  $p_a/p_o$  i due numeri di Mach:

- all'ingresso  $M_i$  (curva tratteggiata)
- all'uscita  $M_u$  (curva continua) del condotto,.

Entrambi sono costanti per  $p_a$  minore, o uguale, alla pressione critica ( $p_a/p_o \leq 0.45$ ), in particolare  $M_u = 1$  e  $M_i \approx 0.38$ .

Essi decrescono, fino ad annullarsi, per pressione ambiente tendente a quella di ristagno.



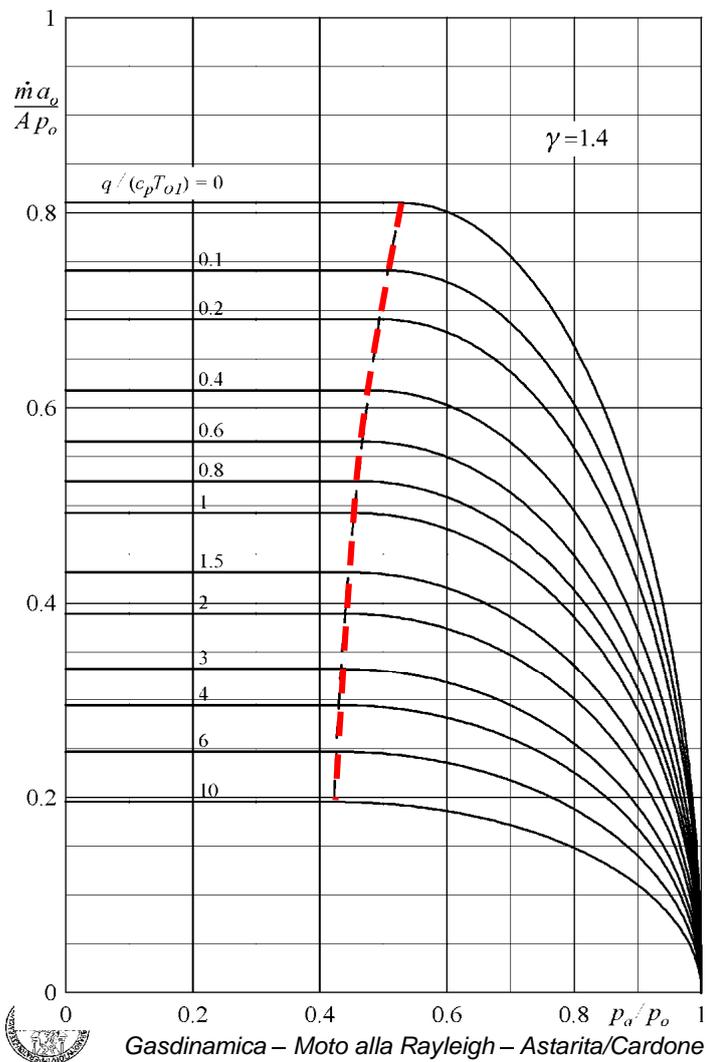
I diagrammi a lato mostrano, per il caso di  $\gamma = 1.4$ , l'andamento della **portata di massa dimensionale, attraverso condotti in cui si ha moto alla Rayleigh collegati ad un serbatoio mediante un ugello convergente, in funzione della pressione ambiente**, per diversi valori del parametro adimensionale  $q/(c_p T_{01})$ .

**Le quantità  $p_o$  ed  $a_o$  sono rispettivamente la pressione e la velocità del suono nel serbatoio** (di ristagno).

Sulle ordinate è in pratica riportato **il fattore di efflusso  $\Psi$** , già definito per gli ugelli e come già fatto per Fanno.

**All'aumentare di  $q/(c_p T_{01})$ , il moto strozza per pressioni ambiente via via leggermente più basse** e questo evidenzia la diminuzione della lunghezza del tratto orizzontale, a portata costante





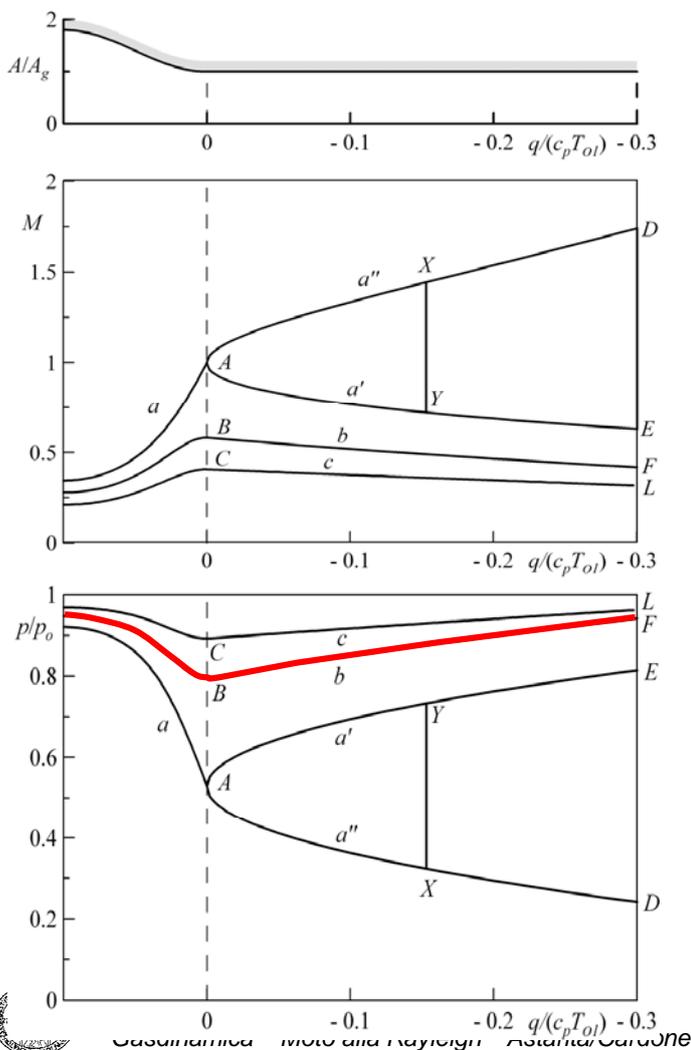
La curva tratteggiata divide ciascun diagramma nelle due parti:

- una in cui la portata è costante,
- l'altra nella quale decresce.

Essa rappresenta proprio il luogo dei valori della pressione ambiente che danno luogo alla condizione critica all'uscita del condotto, cioè allo strozzamento del sistema.

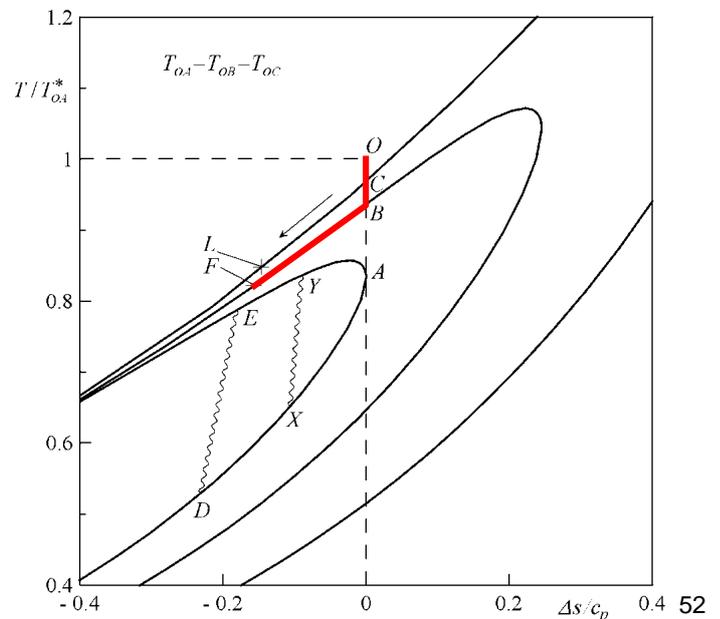
L'andamento di questa curva, seppure crescente, a differenza del moto alla Fanno, non è lineare e non parte dal valore nullo.

Il valore della portata massima diminuisce all'aumentare della quantità di calore ceduta all'unità di massa di fluido.



Se il flusso d'energia nel modo calore è negativo ( $-1 < q/(c_p T_{01}) < 0$ ) e se le condizioni all'uscita dell'ugello sono subsoniche (curve *b*, o *c*), il fluido evolve verso entropie decrescenti  $B \rightarrow F$ .

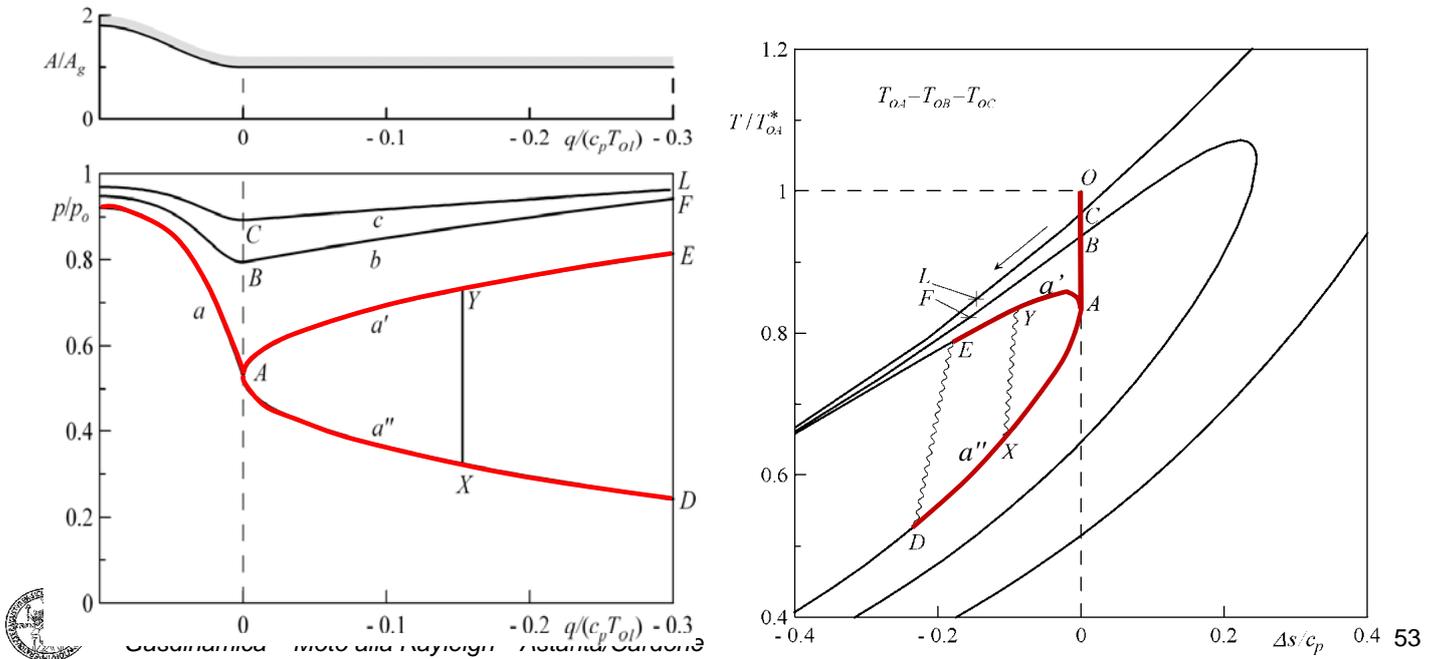
Il fluido fa ciò decelerando, aumentando la sua pressione, diminuendo il suo numero di Mach e sarà rispettata la condizione di Kutta all'uscita del condotto.



**Se, invece, l'ingresso nel condotto è sonico, il fluido può seguire sia il ramo subsonico  $a'$  che quello supersonico  $a''$  della curva di Rayleigh.**

Più dettagliatamente, se la pressione ambiente è minore di quella del punto  $D$ , il fluido segue la curva supersonica  $AD$  (curva  $a''$ ) ed all'uscita del condotto è presente un ventaglio di espansione.

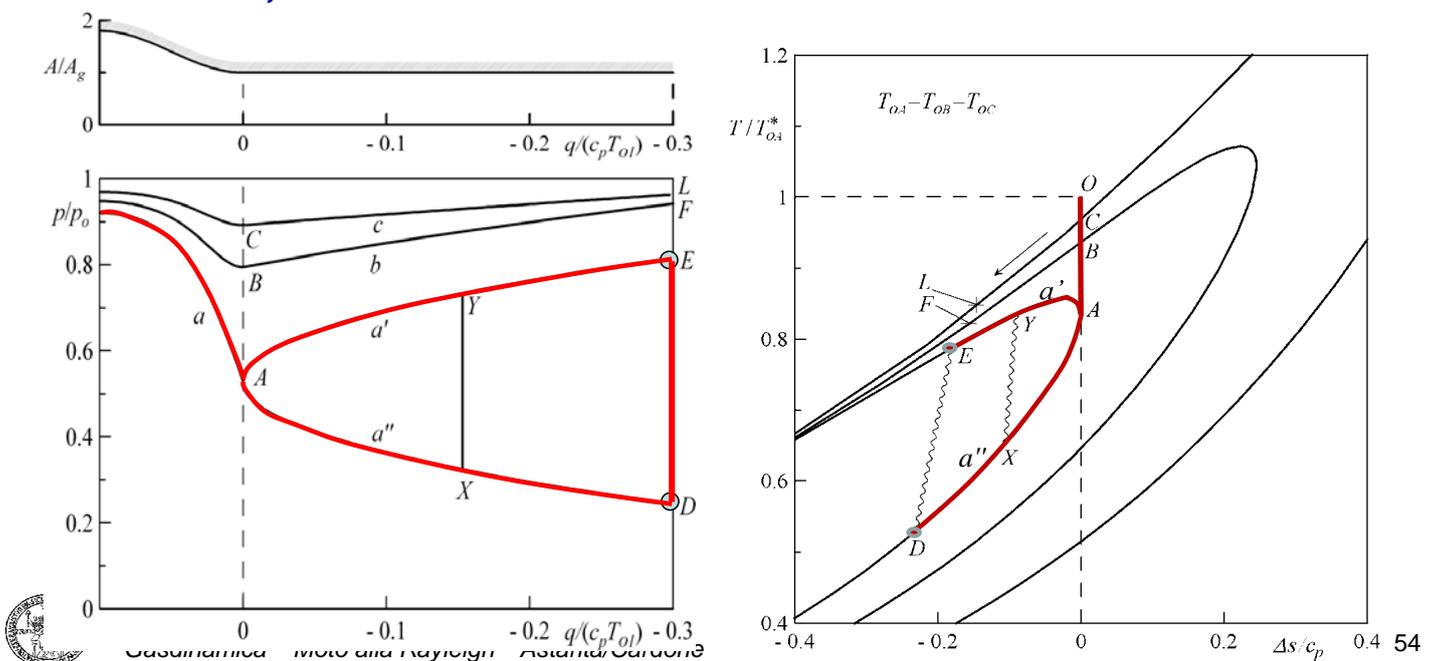
Partendo sempre dal punto  $A$ , se la pressione allo scarico è pari a  $p_E$ , poiché deve essere rispettata la condizione di Kutta, l'evoluzione del fluido può avvenire lungo la curva  $a'$  che conduce al punto  $E$ .



Occorre, peraltro, osservare che i punti  $D$  ed  $E$  hanno la stessa entalpia totale  $H$  perché, partendo dalla condizione comune  $A$ , al fluido si sottrae la stessa quantità di calore sia seguendo la curva  $a'$  che la curva  $a''$ .

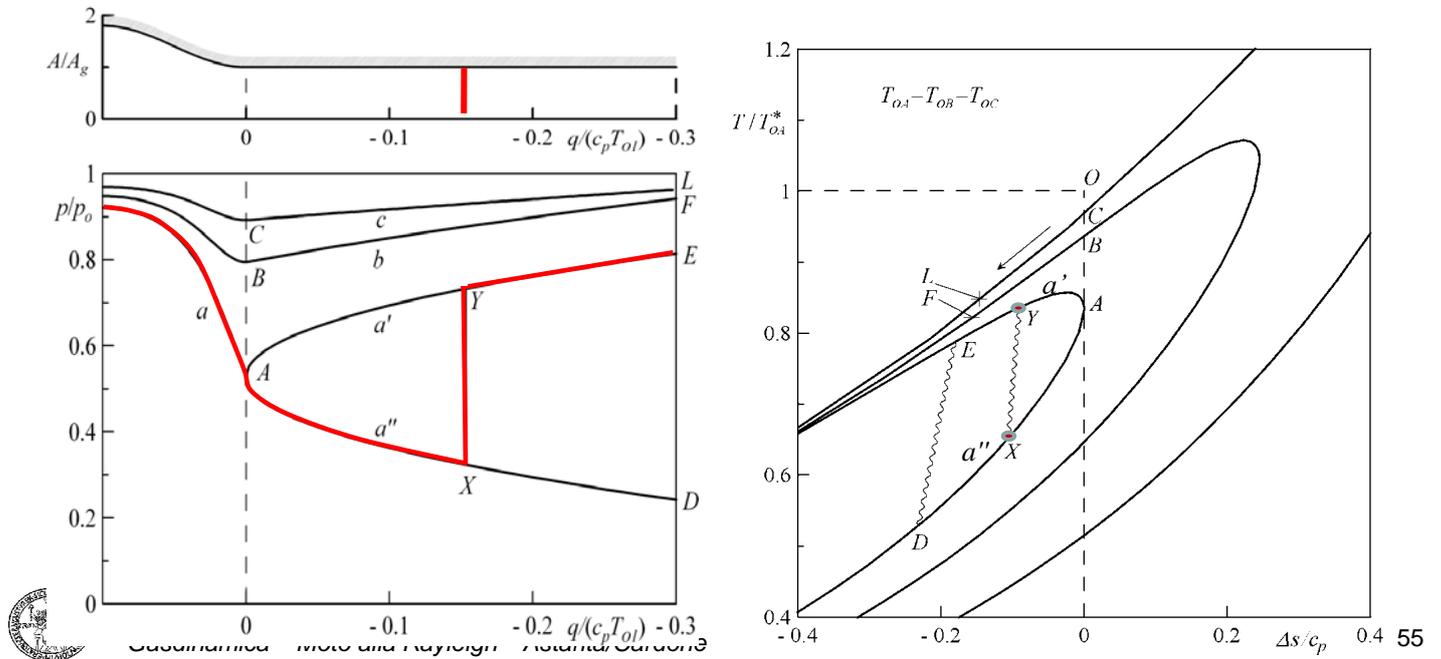
Poiché i punti  $D$  ed  $E$  hanno anche gli stessi  $G$  ed  $I$  (per il modello di moto alla Rayleigh), essi rappresentano gli stati **a monte** ( $D$ ) e **a valle** ( $E$ ) di un'onda d'urto normale presente nella sezione di uscita del condotto a sezione costante.

**Quindi, per  $p_a = p_E$ , sono possibili entrambi i funzionamenti sia seguendo la curva  $a'$ , che la curva  $a''$  con un'onda d'urto all'uscita del condotto.**



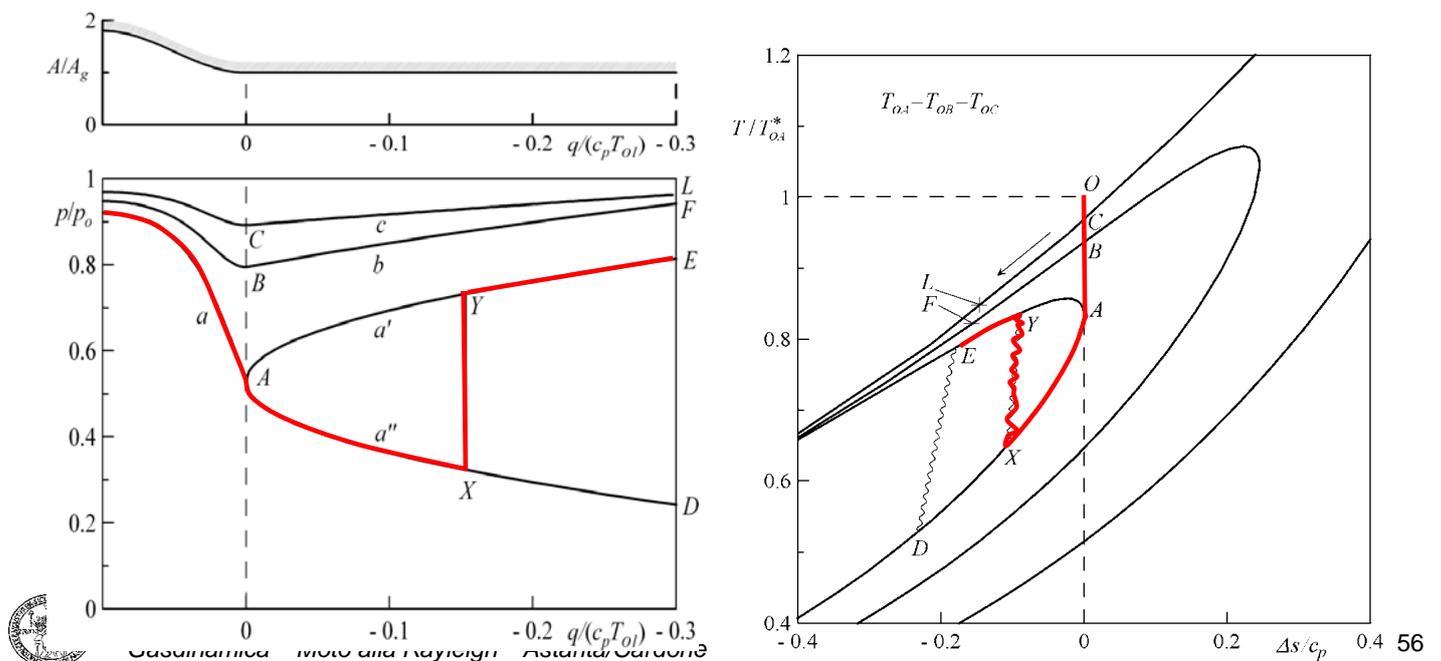
In realtà, le condizioni di funzionamento per pressione ambiente uguale a quella del punto  $E$  sono ancora più **indeterminate** potendosi avere non solo un funzionamento lungo la curva  $AD$  (curva  $a''$ ) con onda d'urto all'uscita del condotto, o lungo la curva subsonica  $AE$  (curva  $a'$ ), ma anche un funzionamento lungo curve del tipo  $AXYE$  con un'onda d'urto in una **qualunque** sezione del condotto.

**Infatti essendo l'onda d'urto adiabatica, le coordinate dei punti  $X$  e  $Y$  lungo l'asse delle ascisse sono le stesse tra gli stati a monte ed a valle dell'onda stessa, avendo essi uguale entalpia totale.**



La figura a destra mostra le condizioni di funzionamento sul piano di Gibbs.

Si noti che **il punto  $O$  rappresenta ancora le condizioni di ristagno del fluido e la curva di Rayleigh che passa per il punto  $A$  è quella corrispondente alle condizioni di flusso strozzato nell'ugello.**

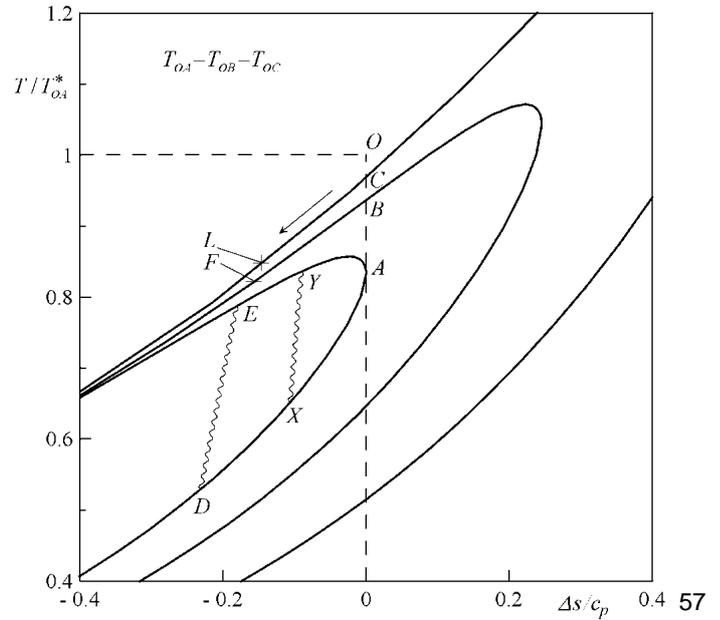
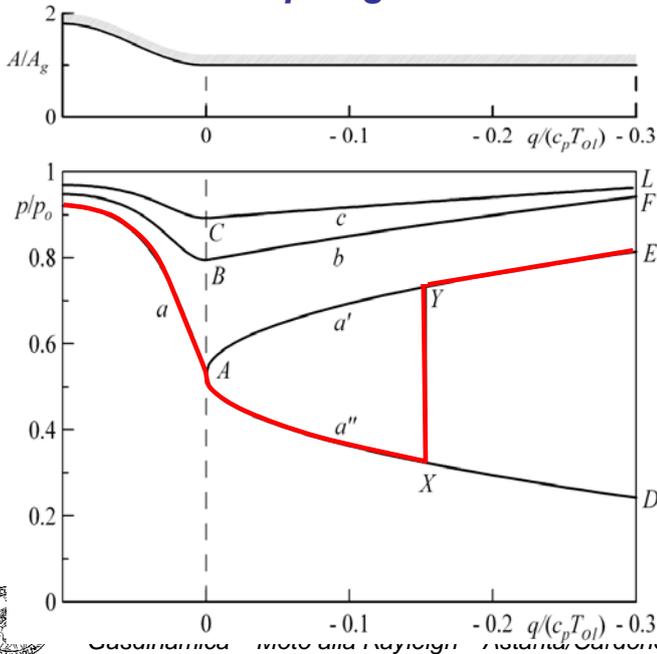


La posizione dell'onda d'urto nel condotto è pertanto metastabile.

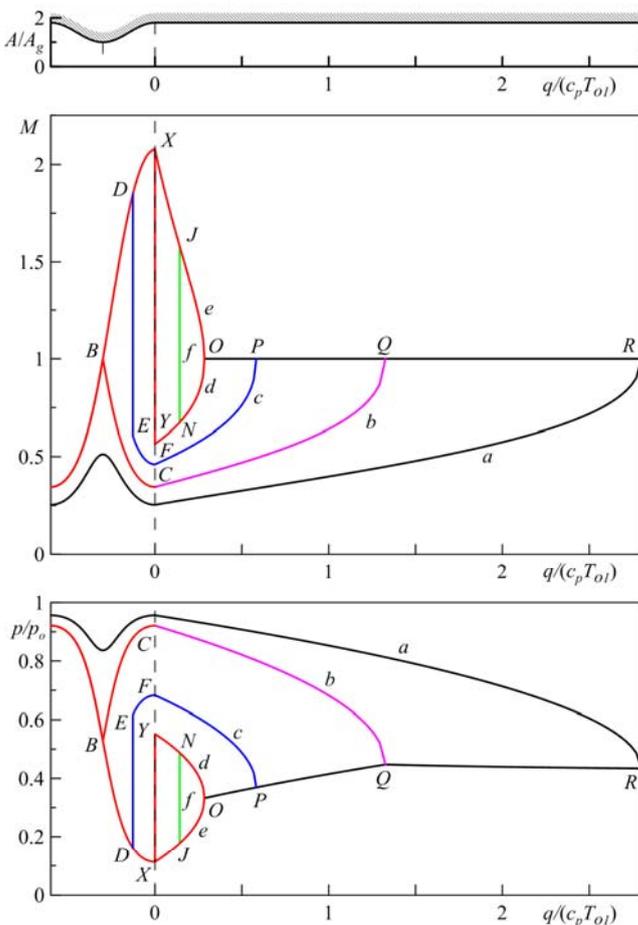
Il reale funzionamento del sistema sarà determinato da altre condizioni, non esclusa l'andamento della temperatura di parete adiabatica e le variazioni dello scambio termico lungo il condotto ad essa connesse.

Invece, per tutti i valori della pressione ambiente compresi tra quelli dei punti  $D$  ed  $E$ , le condizioni del fluido all'uscita del condotto restano bloccate al punto  $D$ .

A valle della sezione di uscita del condotto, si ottengono tutte le condizioni di funzionamento che si hanno all'uscita di un ugello convergente divergente e cioè le varie tipologie di onde d'urto oblique già descritte.



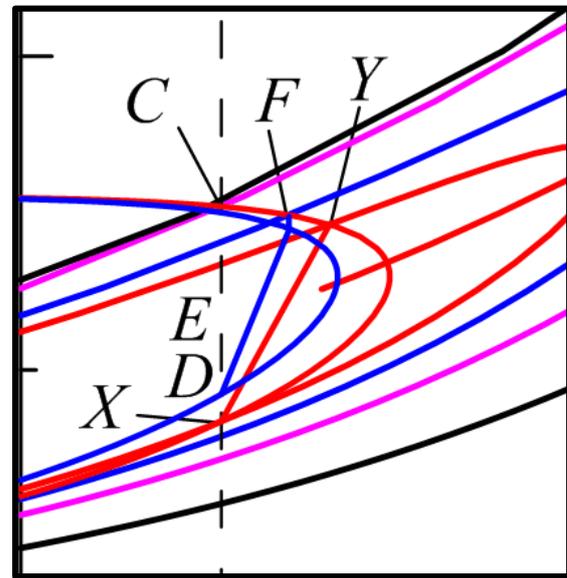
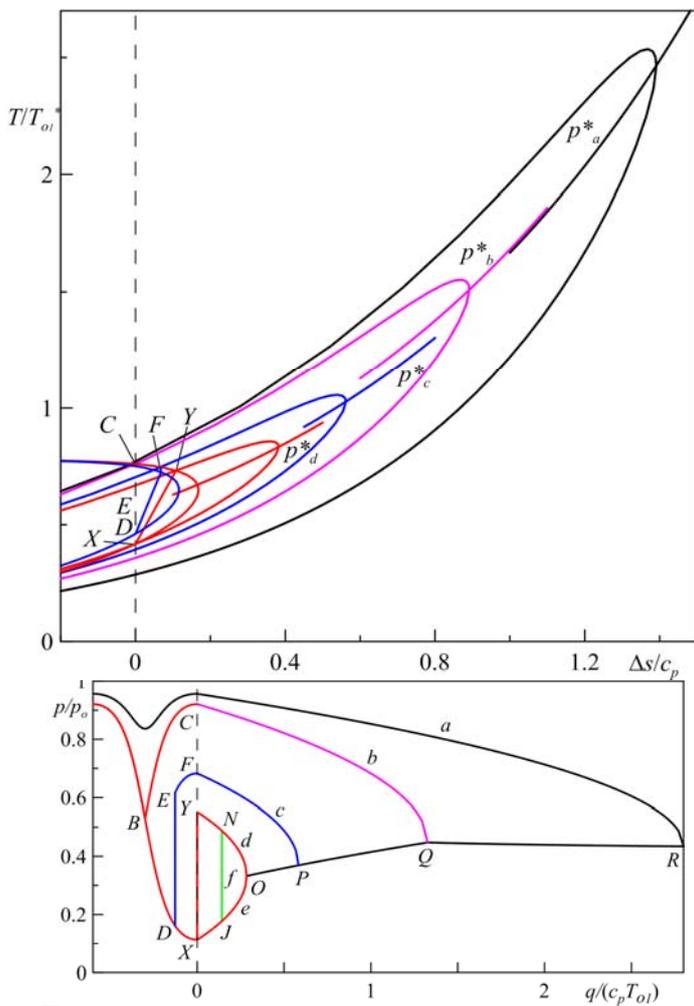
## CONDOTTO CON SCAMBIO TERMICO COLLEGATO AD UN UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE



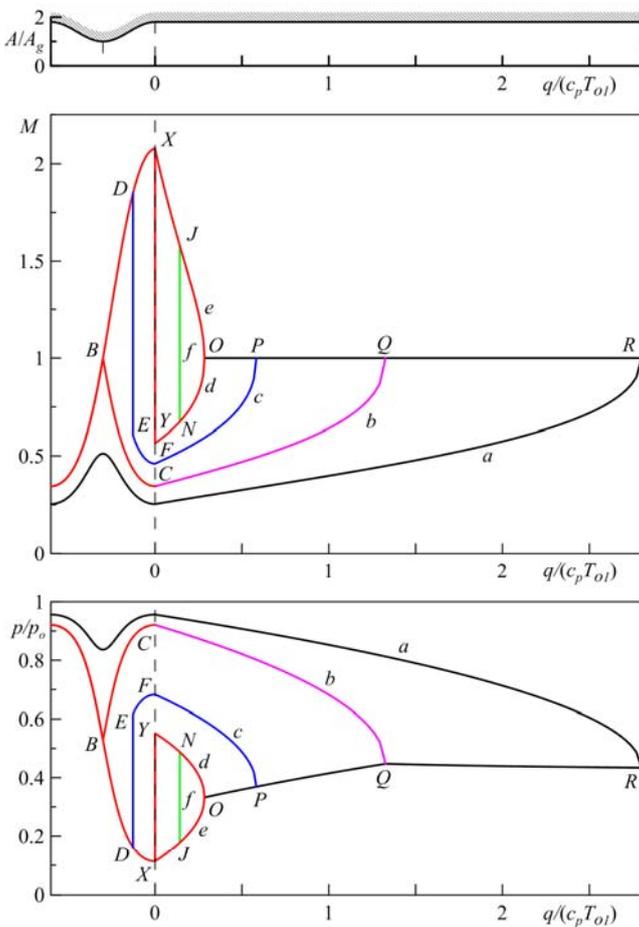
Un condotto alla Rayleigh collegato ad un ugello convergente divergente, sottoposto a un **flusso di energia nel modo calore positivo**, si comporta in modo simile a quello descritto per il moto alla Fanno e in figura si riportano le curve caratteristiche.

Nei punti  $C$ ,  $Y$  e  $X$  del diagramma in basso sono chiaramente visibili i tre rapporti critici di pressione del solo ugello convergente divergente  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ .

La sostanziale differenza con il moto alla Fanno è che, anche per moto strozzato, **al variare delle condizioni di funzionamento nell'ugello convergente divergente**, bisogna tener conto del fatto che **all'uscita dell'ugello (all'ingresso del condotto) varia l'impulso specifico  $I$  per cui la curva di Rayleigh lungo la quale il fluido evolve cambia anch'essa.**



$$q^*_1 > q^*_2 = q^*_3$$



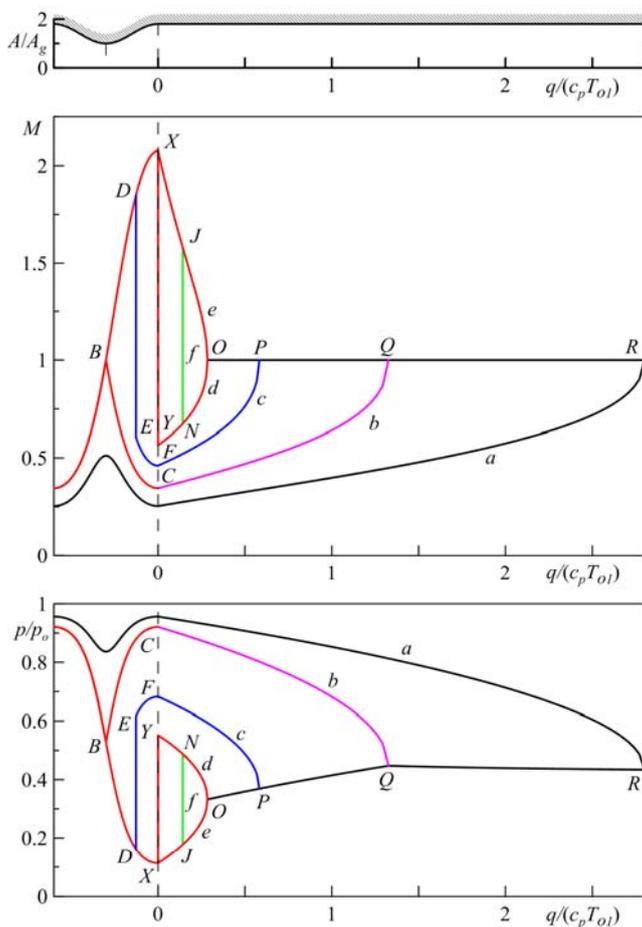
**Ad ogni punto di funzionamento all'uscita dell'ugello strozzato, corrisponde in generale una diversa curva di Rayleigh.**

**In particolare, al diminuire della pressione di uscita dal rapporto  $r_1$  al rapporto  $r_2$  (dal punto C al punto Y) l'impulso specifico diminuisce e le curve di Rayleigh (che hanno tutte lo stesso flusso di massa  $G$ ) sono sempre più interne.**

Così come mostrato in precedenza, **anche la pressione critica diminuisce.**

**Attenzione:** Nel caso del sistema descritto al paragrafo precedente, la variazione della curva di Rayleigh è associata ad una simultanea variazione di  $G$  ed  $I$  e la pressione critica aumenta man mano che la curva diventa sempre più interna.



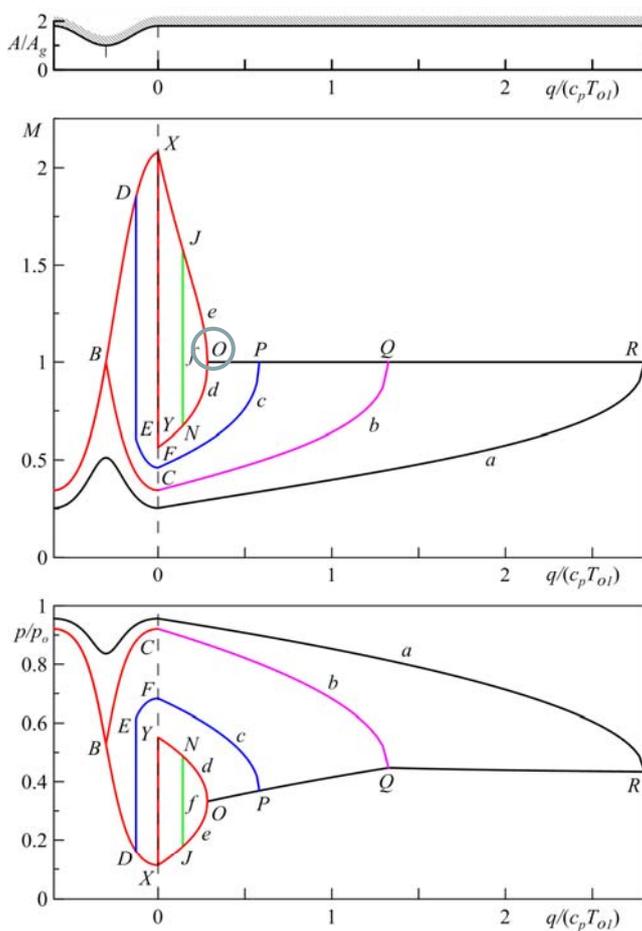


Come nel caso di moto alla Fanno, **quando il regime di moto nell'ugello è alla Venturi (curve a), il funzionamento è analogo a quello descritto in precedenza per l'ugello semplicemente convergente.**

Occorre ricordare che, **al diminuire della lunghezza del condotto** (della quantità di calore  $q$ ), **la pressione critica tende debolmente ad aumentare.**

Questo comportamento si ha fino a che la lunghezza del condotto non risulta esattamente uguale a quella per la quale si hanno le **condizioni critiche** anche nella sezione di gola dell'ugello (punto  $Q$ ).

**Per successive diminuzioni di  $q$** , di nuovo le curve di funzionamento sono analoghe a quelle già viste per il moto alla Fanno con onda d'urto nel divergente dell'ugello, ma **con una progressiva diminuzione della pressione critica.**

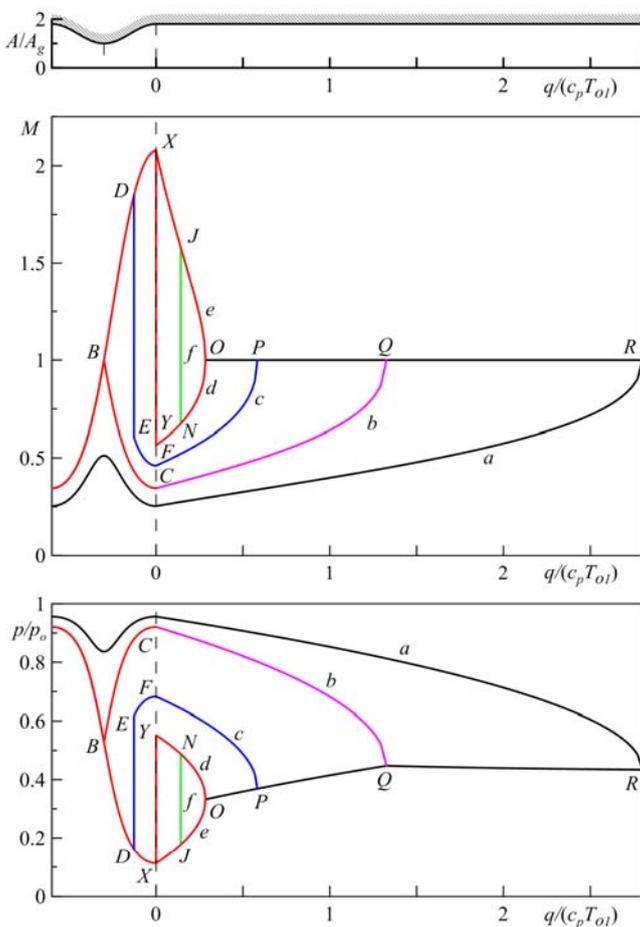


Infatti, **il diminuire di  $q$**  dal valore relativo al punto  $Q$  a quello relativo al punto  $O$  provoca una continua diminuzione dell'impulso specifico nella sezione di uscita dell'ugello.

Si ha quindi **uno spostamento su curve di Rayleigh sempre più interne.**

Quando, però, la lunghezza del condotto (la quantità di calore  $q$ ) è esattamente uguale a quella corrispondente al punto  $O$ , è chiaro che il regime di funzionamento caratteristico del sistema risulta **indeterminato** perché al punto  $O$  si può pervenire sia seguendo la curva  $d$  ( $XYNO$ ), che seguendo la curva  $e$  ( $XJO$ ).

Inoltre, anche una qualunque curva del tipo  $f$  ( $XJNO$ ) continua ad essere soluzione del problema.

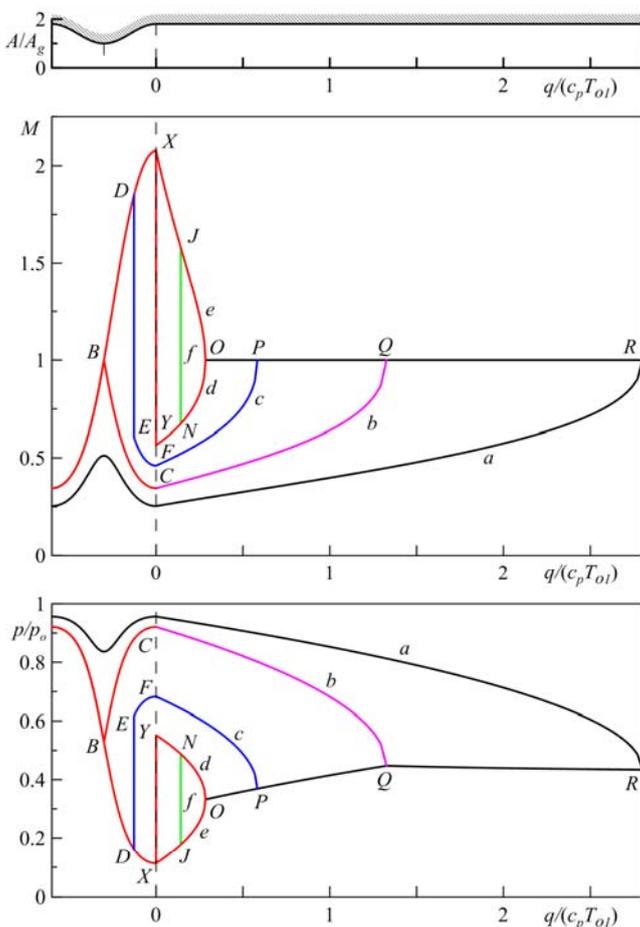


Per dimostrare che la quantità di calore critica per il caso corrispondente al rapporto di pressione  $r_3$  è uguale a quella che si ha con il funzionamento con onda d'urto all'uscita dell'ugello (rapporto  $r_2$ ), o in qualsiasi sezione del condotto, **si può procedere nello stesso modo già discusso in precedenza per il caso in cui il fluido è raffreddato.**

Se, in particolare, si suppone che **l'onda d'urto si trova all'uscita dell'ugello**, la temperatura di ristagno del fluido rimane invariata nel passare dallo stato a monte a quello a valle dell'onda, quindi **la massima quantità di calore scambiabile seguendo la curva d, o quella seguendo la curva e, risulta la stessa.** Infatti, per la:

$$\frac{T_{o2}}{T_{o1}} - 1 = 4 \frac{\dot{q}}{c_p T_{o1} G} \frac{L_{12}}{D_e} = \frac{q}{c_p T_{o1}}$$

applicata fra la sezione iniziale e quella critica, la lunghezza critica sarà la stessa.

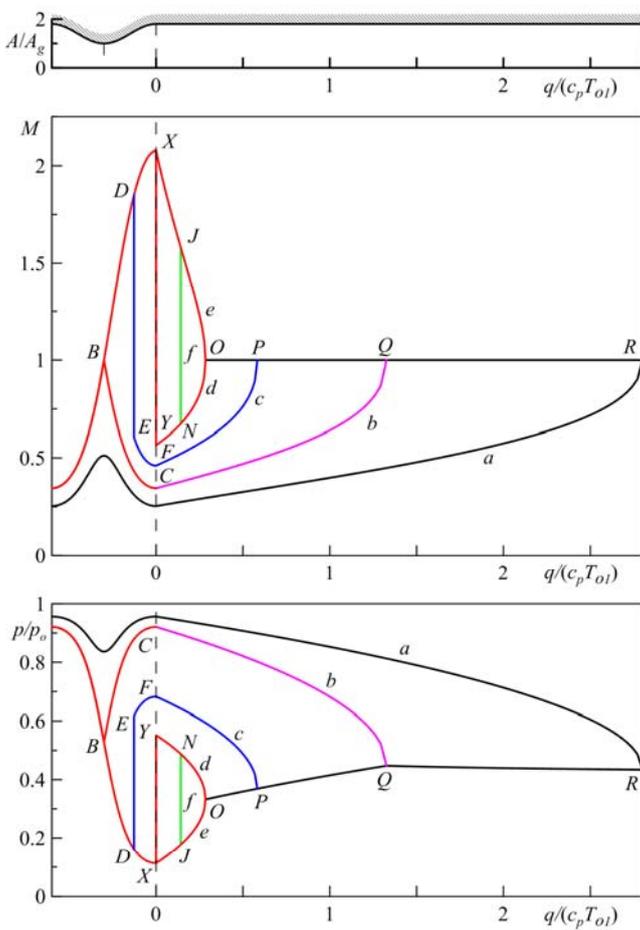


Lo stesso ragionamento è valido anche per un'onda d'urto **ovunque posizionata all'interno del condotto.**

Quindi, se il punto all'uscita del condotto, definito dalla quantità di calore ceduta al fluido e dalla pressione ambiente, coincide con il punto O, **un'onda d'urto nel condotto alla Rayleigh è metastabile.**

Bisogna esplicitamente notare che **solo in queste condizioni può essere presente un'onda d'urto nel condotto.**

Infatti, se la pressione ambiente (rispettivamente, la quantità di calore) fosse leggermente maggiore, a parità di quantità di calore (rispettivamente, di pressione ambiente), l'onda si troverebbe nella parte divergente dell'ugello.

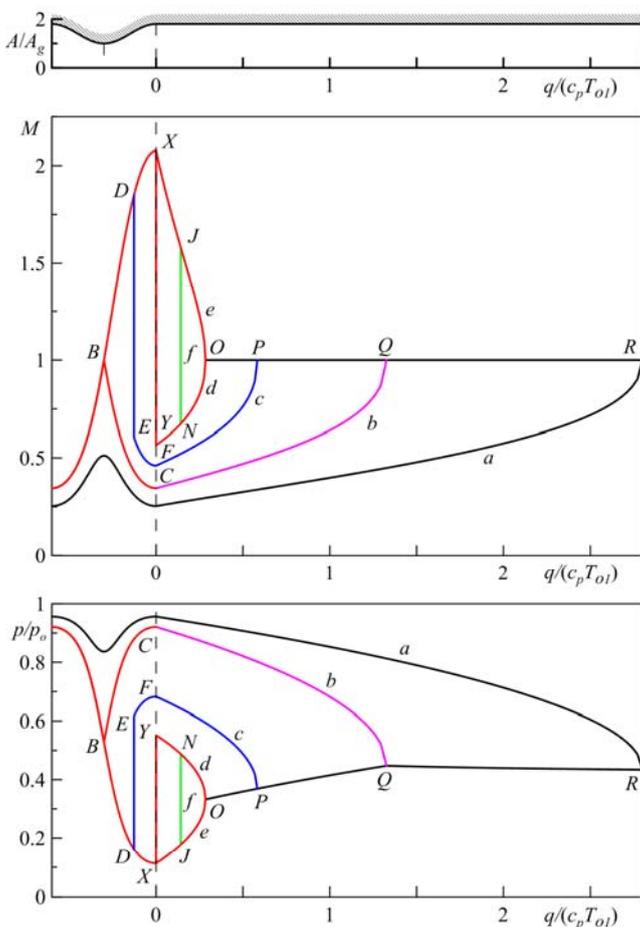


Ovviamente, **per pressioni ambiente inferiori, le condizioni all'uscita resterebbero bloccate a quelle del punto O** per cui l'incertezza del funzionamento rimarrebbe.

Per quantità di calore inferiori a quella corrispondente al punto O, ad es. quella relativa ai punti J, o N, il comportamento del sistema risulta più articolato.

**Per valori della pressione ambiente inferiori a quello del punto J, il condotto scarica nelle condizioni relative al punto J** e si ha un ventaglio di espansione nella sezione di uscita.

**Per valori della  $p_a$  compresi tra quelli dei punti J e N, si ha un'onda d'urto obliqua all'uscita del condotto** e in particolare un'onda di Mach per il punto J che, man mano che la pressione  $p_a$  sale, diventa sempre più normale alla corrente.



**Per  $p_a = p_N$ , sono possibili sia le evoluzioni del fluido lungo le curve BXYN e BXJN, che quelle che prevedono un'onda d'urto normale ovunque posizionata nel condotto tra X e J.**

**Man mano che la pressione ambiente sale a partire dal valore  $p_N$ , l'onda d'urto risale il divergente dell'ugello sino a diventare un'onda di Mach posizionata in gola.**

**Per pressioni ambiente ancora maggiori, l'ugello segue un comportamento alla Venturi.**

