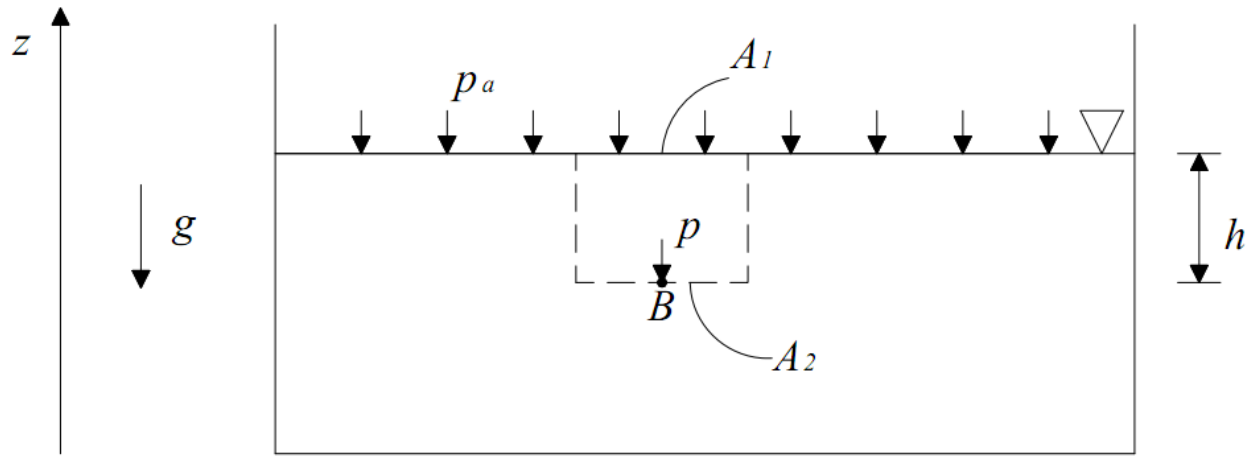
Legge di Stevino



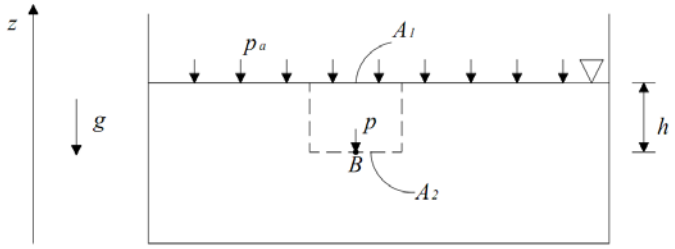
Si supponga di voler conoscere il valore della pressione in punto B, posto ad una profondità pari ad h rispetto al pelo libero dell'acqua contenuta in un recipiente.

Eq. bilancio quantità di moto

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\,\underline{g}$$

Legge di Stevino

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\,\underline{g}$$

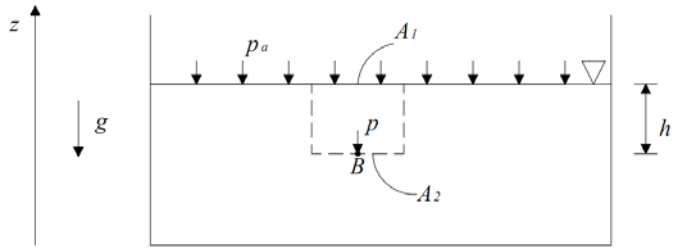


Contributo relativo alle superfici permeabili, ovvero interessate da flussi di massa

(nullo, dato che il fluido è macroscopicamente in quiete)

Legge di Stevino

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\underline{g}$$



Integrale degli sforzi superficiali (parte dissipativa τ_d e parte reversibile p) sulle pareti impermeabili del sistema

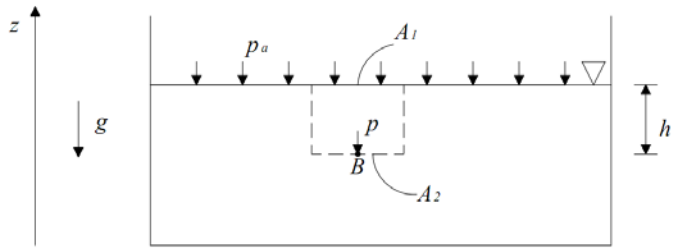
Il contributo della parte dissipativa è nullo (fluido macroscopicamente in quiete → non può esserci shear!)

fast

L'unico contributo è l'integrale delle pressioni sulle superfici impermeabili

Legge di Stevino

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\underline{g}$$



Proiettando l'equazione lungo l'asse z (supponendo che $\underline{g}$ sia costante e diretta lungo la direzione di z ma con verso opposto, e che la densità sia costante):

$$S_z = M(-g) = -\rho V_c g = -\rho A h g$$

La spinta S_z consta di due contributi, agenti sulle due basi del cilindro:

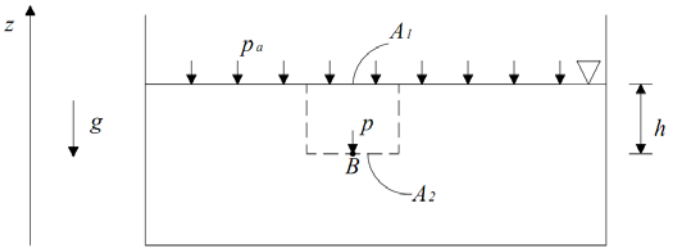
$$S_z = S_{z1} + S_{z2} = p_a A + (-pA)$$

(si è indicata con p la pressione nel punto B).

Legge di Stevino

L'equazione di bilancio diventa:

$$-\rho A h g = p_a A - pA$$



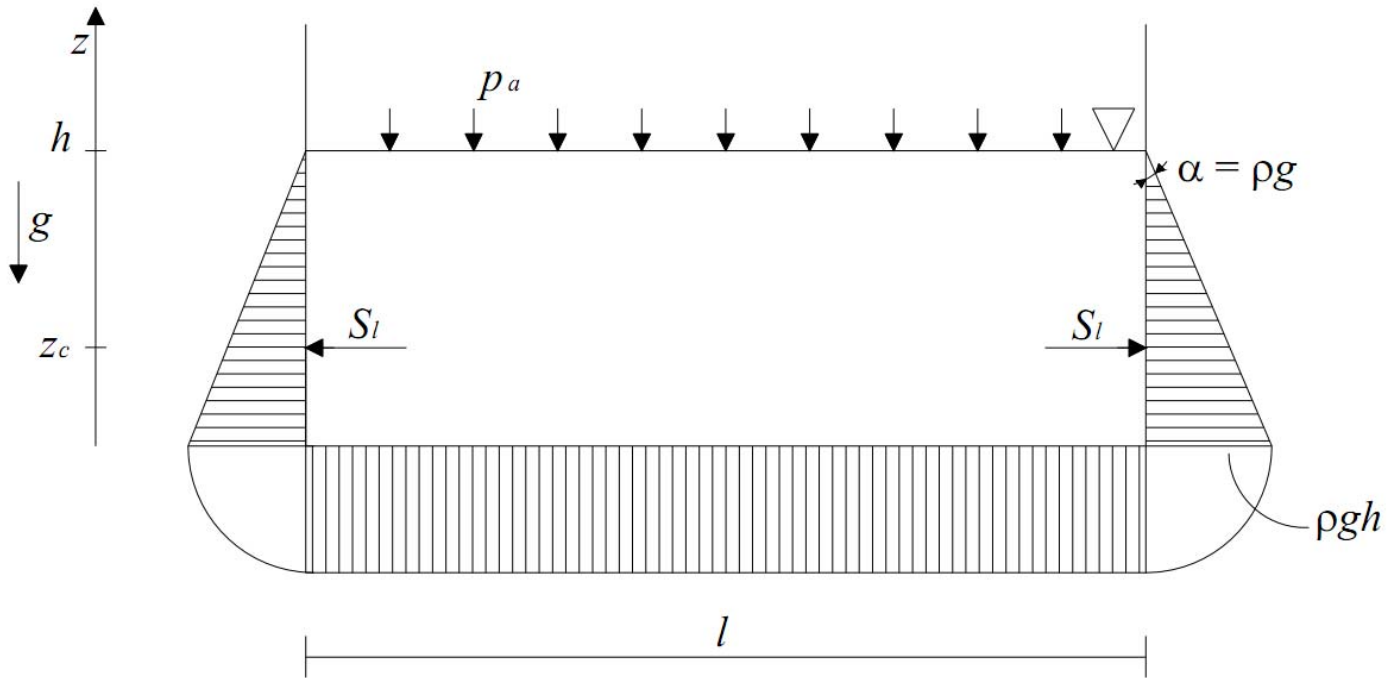
$$p = p_a + \rho g h$$

L'equazione è nota come ***Legge di Stevino per fluidi a densità costante.***

Per fluidi a densità variabile si ricorre all'integrazione dell'equazione differenziale dell'idrostatica:

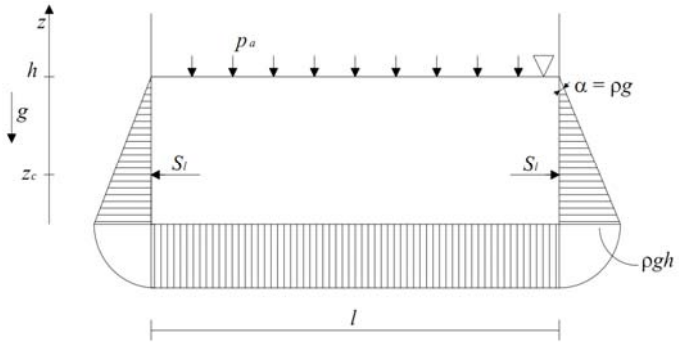
$$dp = -\rho g dz$$

Distribuzione della pressione
Spinta esercitata su parete verticale



Distribuzione della pressione
Spinta esercitata su parete verticale

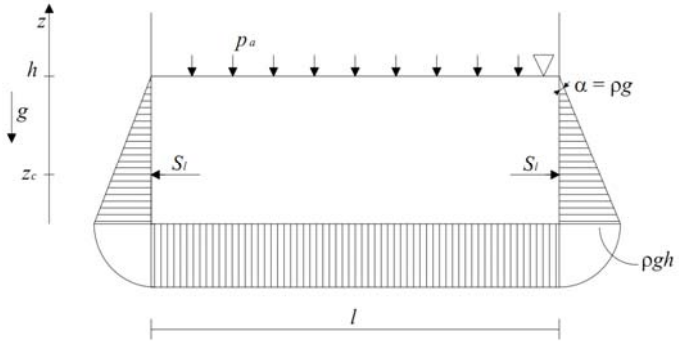
- Recipiente a base quadrata (l=2m)
- Battente: h=0.7m;
- Densità (acqua): ρ=998kg/m^3



- Massima pressione?
- Spinta sulla base?
- Spinta sulle pareti laterali?
- Punto di applicazione della spinta sulle pareti laterali?

Distribuzione della pressione
Spinta esercitata su parete verticale

- Recipiente a base quadrata (l=2m)
- Battente: h=0.7m;
- Densità (acqua): ρ=998kg/m^3



Massima pressione:

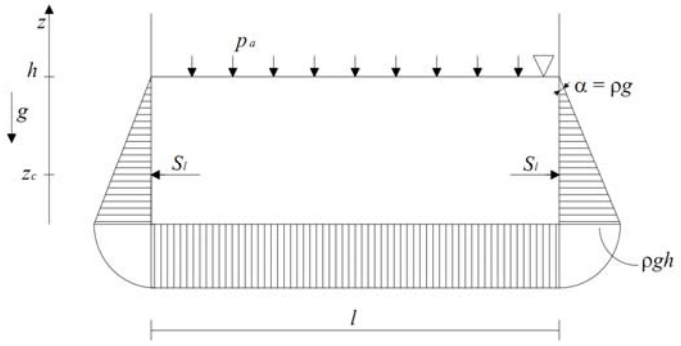
$$p_{max}=p_b=\rho gh=998\text{kg/m}^3\cdot 9.81 m/s^2\cdot 0.7m=6.85kPa$$

Spinta sulla base:

$$S_b=p_b\cdot A_b=\rho ghl^2=27.4kN$$

Distribuzione della pressione
Spinta esercitata su parete verticale

- Recipiente a base quadrata (l=2m)
- Battente: h=0.7m;
- Densità (acqua): ρ=998kg/m^3



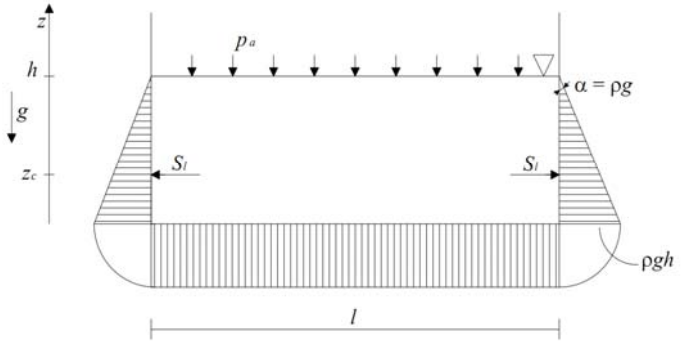
$$S_l = \int_0^h p(z)ldz = \int_0^h \rho gl(h-z)dz = \left[\rho glhz - \rho gl\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \rho gl\frac{h^2}{2} = \left(\rho g\frac{h}{2}\right)(hl) = 4.80kN$$

Pressione a metà altezza

Area efficace

Distribuzione della pressione
Spinta esercitata su parete verticale

Per identificare il centro di pressione (punto di applicazione della forza risultante) occorre identificare il punto rispetto al quale è nullo il momento esercitato dalle pressioni:

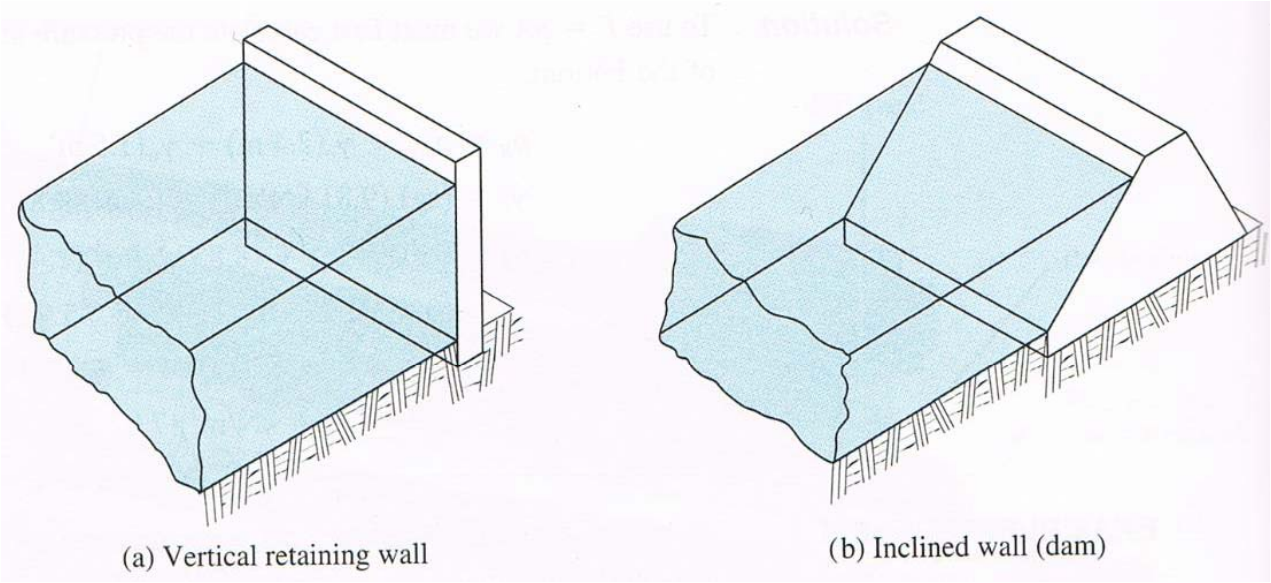


$$M_l = \int_0^h p(z)(z-z_c)ldz = \int_0^h \rho g(h-z)(z-z_c)ldz = \int_0^h \rho gl(hz - z^2 - z_c h + z_c z)dz =$$

$$= \rho gl\left[h\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - z_c hz + z_c\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \rho gl\frac{h^3}{6} - z_c\rho gl\frac{h^2}{2} = 0Nm \Rightarrow$$

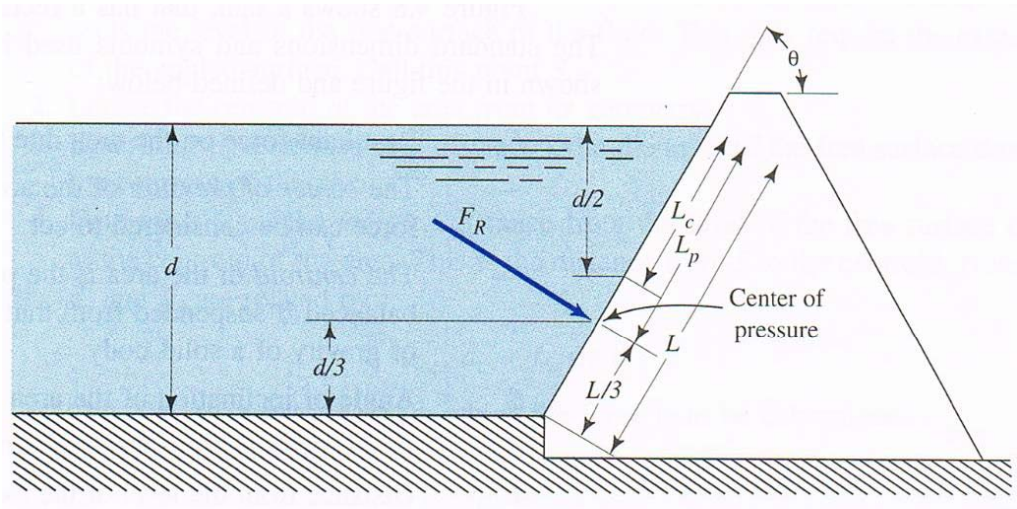
$$z_c = \frac{h}{3} = 0.23m$$

Spinta esercitata su parete obliqua – la diga



Cosa cambia se la parete è inclinata anziché verticale a parità di battente?

Spinta esercitata su parete obliqua – la diga



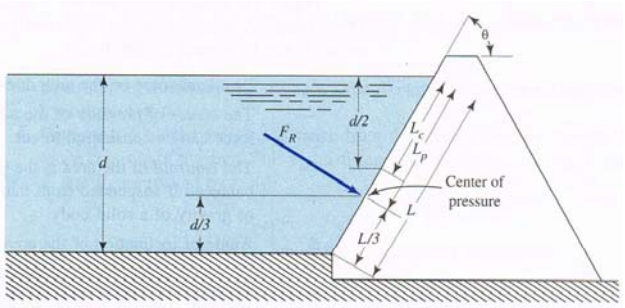
- Recipiente a base quadrata (l=2m)
- Battente: h=0.7m;
- Densità (acqua): ρ=998kg/m^3;
- Inclinazione parete: ϑ=60°.

- Spinta su parete laterale?
- Punto di applicazione della risultante?

Spinta esercitata su parete obliqua – la diga

La lunghezza della parete è:

$$L=h/sin\vartheta$$



Sostituendo la variabile z con la variabile $w=z/sin\vartheta$, il problema viene risolto in maniera analoga al caso di parete verticale:

$$S = \int_0^{h/sin\vartheta} \rho g l(h - w \cdot sin\vartheta)dw = \rho g l \left[hw - \frac{w^2}{2} \cdot sin\vartheta\right]_0^{h/sin\vartheta}$$

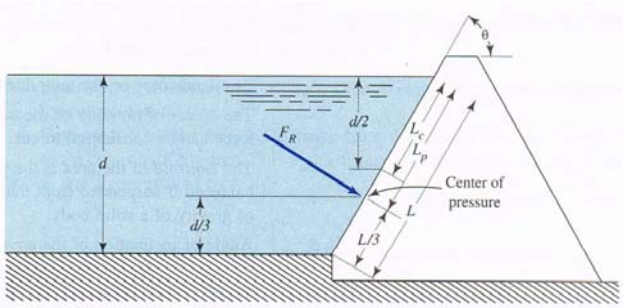
$$= \rho g l \left[\frac{h^2}{sin\vartheta} - \frac{h^2}{2sin\vartheta}\right] = \rho g l \frac{h^2}{2sin\vartheta} = 5.54kN$$

$$= \left(\rho g \frac{h}{2}\right) \cdot \left(l \frac{h}{sin\vartheta}\right)$$

Spinta esercitata su parete obliqua – la diga

Se consideriamo la componente della spinta nella direzione orizzontale :

$$S_x=S\cdot sin\vartheta$$



Ovvero il prodotto della pressione in mezzeria per l'area efficace (proiezione dell'area bagnata nella direzione verticale), come nel caso di parete verticale!

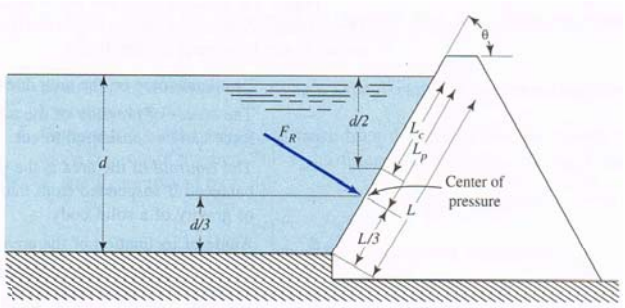
Spinta esercitata su parete obliqua – la diga

$$M = \int_0^{h/\sin\vartheta} \rho g l (h - w \cdot \sin\vartheta)(w - w_c)dw =$$

$$= \int_0^{h/\sin\vartheta} \rho g l (hw - hw_c - w^2 \cdot \sin\vartheta + w w_c \sin\vartheta)dw$$

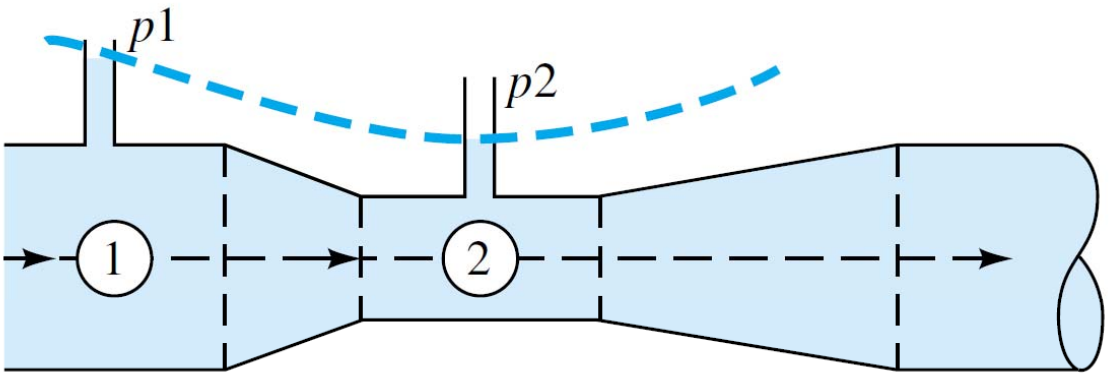
$$= \rho g l \left[h\frac{w^2}{2} - h w w_c - \frac{w^3}{3}\sin\vartheta + \frac{w^2 w_c}{2}\sin\vartheta \right]_0^{h/\sin\vartheta} =$$

$$= \rho g l \left[\frac{h^3}{2\sin^2\vartheta} - \frac{h^2 w_c}{\sin\vartheta} - \frac{h^3}{3\sin^2\vartheta} + \frac{h^2 w_c}{2\sin\vartheta} \right] = 0$$



$$w_c = \frac{1}{3}\frac{h}{\sin\vartheta} \quad \Rightarrow \quad z_c \equiv w_c \sin\vartheta \equiv \frac{1}{3}h$$

Venturimetro – misure di portata



Applicando il principio di Bernoulli lungo l'asse del condotto:

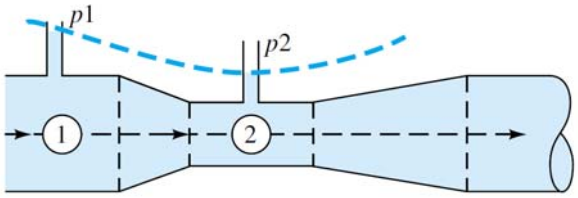
$$\frac{p_1}{\rho} + \tfrac{1}{2}V_1^2 + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \tfrac{1}{2}V_2^2 + g z_2$$

Per condotto orizzontale ($z_1 = z_2$):

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2\,\Delta p}{\rho} \qquad \Delta p = p_1 - p_2$$

Venturimetro – misure di portata

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2\,\Delta p}{\rho} \qquad \Delta p = p_1 - p_2$$



Dall'equazione di continuità:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$V_1 = \beta^2 V_2 \qquad \beta = \frac{D_2}{D_1}$$

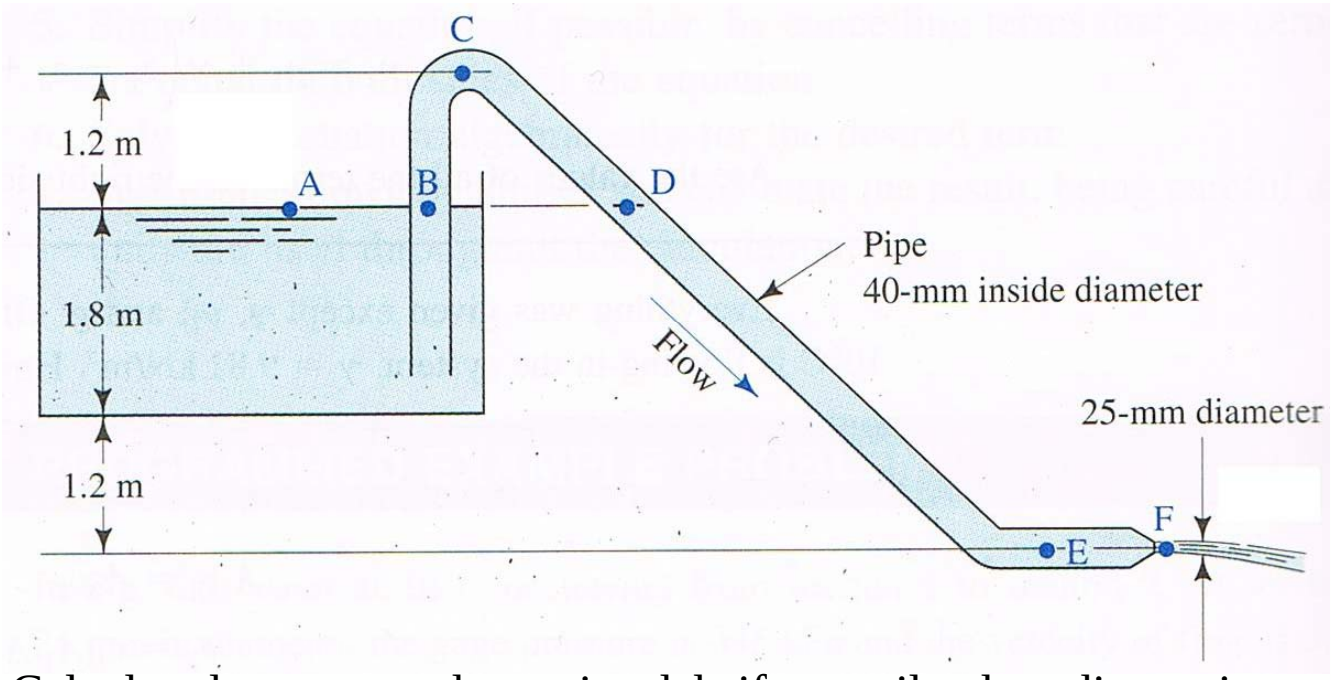
Combinando le due relazioni:

$$V_2 = \left[\frac{2\,\Delta p}{\rho(1-\beta^4)}\right]^{1/2}$$

Portata massica:

$$\dot{m} = \rho A_2 V_2 = A_2\left(\frac{2\rho\,\Delta p}{1-\beta^4}\right)^{1/2}$$

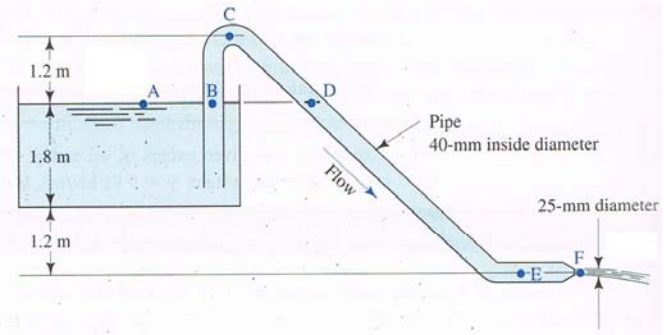
Il sifone



Calcolare la portata volumetrica del sifone, e il valore di pressione e velocità nei punti A, B, C, D, E, F, sapendo che p_A=1*atm*.

Il sifone

Consideriamo i punti A ed F. Assumendo che la sezione del serbatoio sia molto più grande di quella di uscita dell'ugello, possiamo assumere V_A=0



Applicando il principio di Bernoulli:

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = p_F + \rho g z_F + \frac{1}{2}\rho V_F^2 \quad \Rightarrow \quad V_F = 7.67\ m/s$$

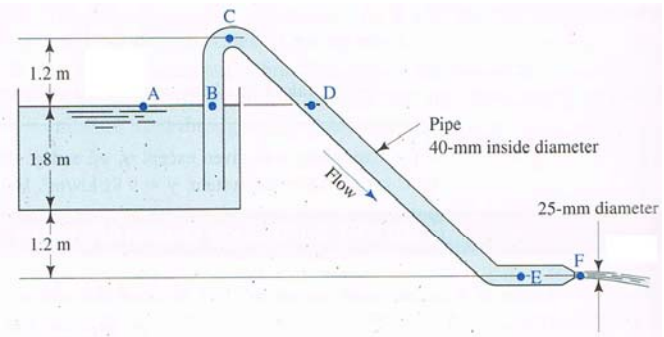
Possiamo calcolare la portata volumetrica (assumiamo che la sezione del tubo sia circolare):

$$Q = A_F V_F = \pi \frac{D_F^2}{4} V_F = 3.77 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$$

Il sifone

Determiniamo le condizioni nel punto B. La V_B può essere determinata essendo nota la portata volumetrica:

$$V_B = \frac{Q}{A_B} = 3.00\ m/s$$



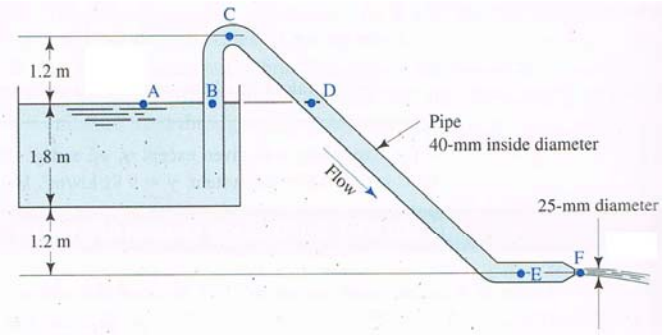
Applicando il principio di Bernoulli tra le sezioni A e B:

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = p_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 \quad \Rightarrow \quad p_B = 96.8kPa$$

Due punti alla stessa quota hanno pressioni differenti in quanto il fluido è in moto!

Il sifone

Determiniamo le condizioni nel punto C. La V_C coincide con la V_B, dato che la sezione del tubo è costante.



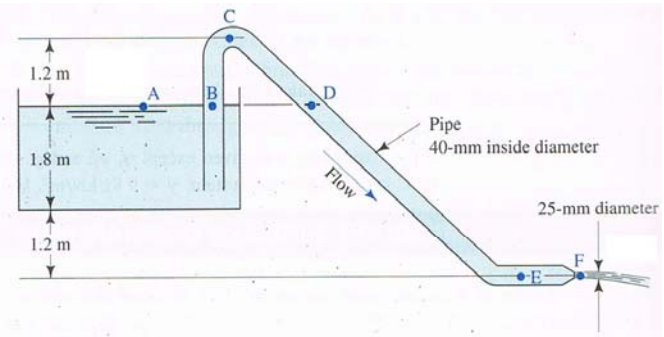
Applicando il principio di Bernoulli tra le sezioni A e C:

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = p_C + \rho g z_C + \frac{1}{2}\rho V_C^2 \quad \Rightarrow \quad p_C = 85.1 kPa$$

Il punto C è il punto di minima pressione; affinché il sifone funzioni, la collocazione di tale punto va scelta in maniera opportuna (problemi di cavitazione, etc.)

Il sifone

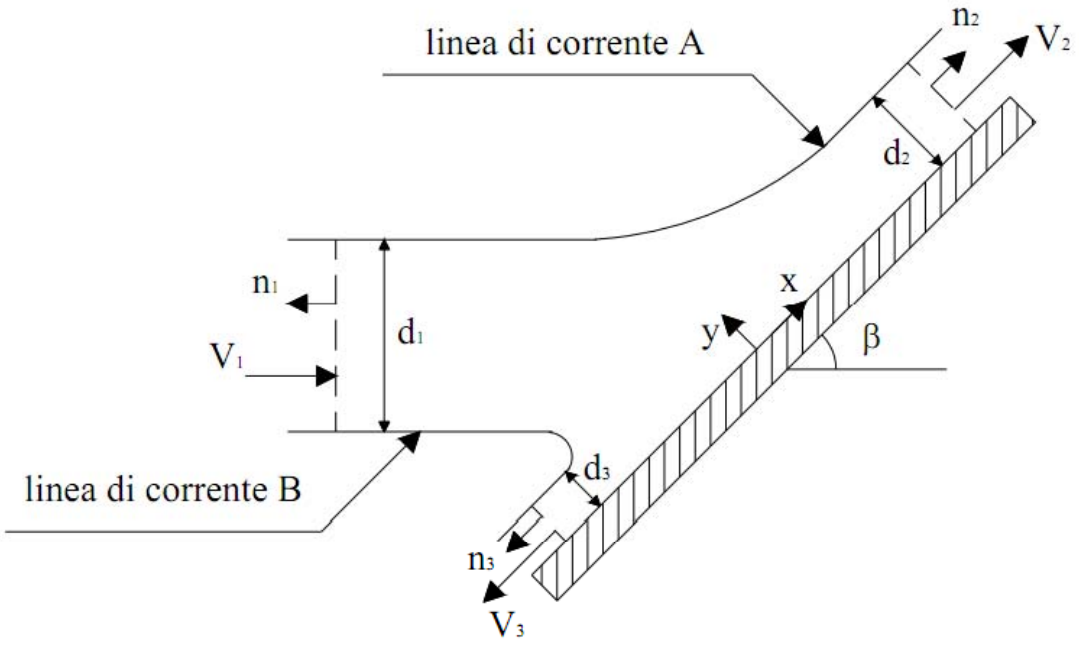
Nel punto D, le condizioni sono le stesse del punto B dato che quota e velocità del fluido coincidono.



Applicando il principio di Bernoulli tra le sezioni A e E:

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = p_E + \rho g z_E + \frac{1}{2}\rho V_E^2 \quad \Rightarrow \quad p_E = 126 kPa$$

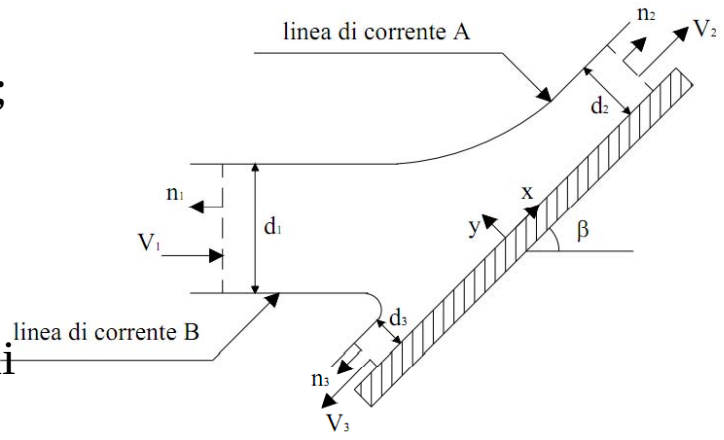
Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete



Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete

Ipotesi:

- Moto bidimensionale;
- Moto incompressibile (ρ=cost);
- Moto stazionario (St>>1);
- Forze viscose trascurabili (Re>>1);
- Effetti delle forze gravitazionali trascurabili (Fr>>1).



Dati:

V_1=10m/s d_1=10cm β=45°

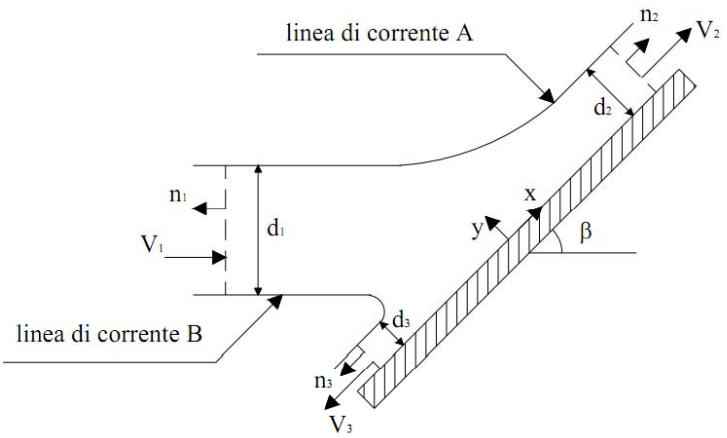
Calcolare la spinta:

$\boldsymbol{S}$=?

Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete

Dall'applicazione dell'equazione di Bernoulli lungo le linee di corrente A e B, è evidente che:

$V_1=V_2$ $V_1=V_3$



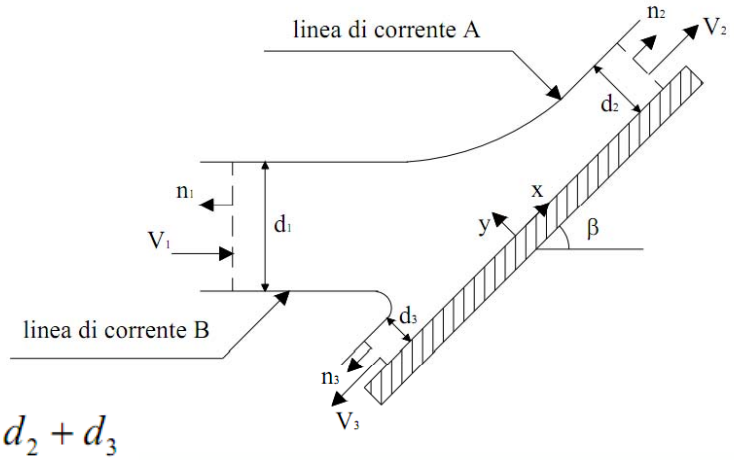
$$p_a + \rho\frac{V_1^2}{2} = p_a + \rho\frac{V_2^2}{2} \Rightarrow V_1 = V_2 \text{ linea di corrente A}$$

$$p_a + \rho\frac{V_1^2}{2} = p_a + \rho\frac{V_3^2}{2} \Rightarrow V_1 = V_3 \text{ linea di corrente B}$$

Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete

Dall'equazione di continuità, è altrettanto evidente che:

$d_1=d_2+d_3$



$$-\rho V_1 d_1 + \rho V_2 d_2 + \rho V_3 d_3 = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 + d_3$$

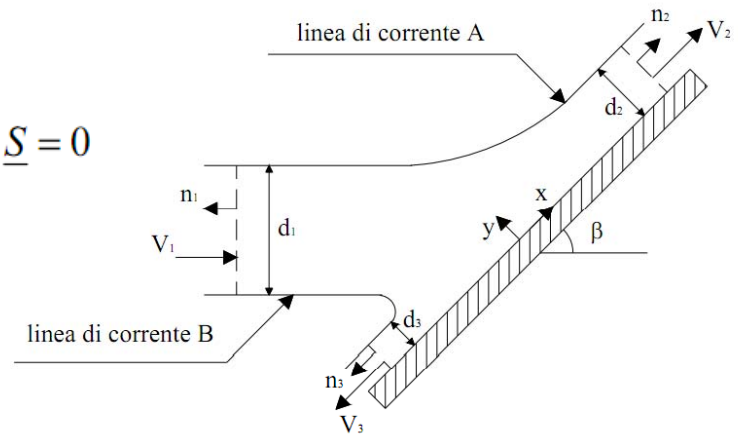
Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\underline{g}$$

$$\rho V_1^2 d_1 \underline{n}_1 + \rho V_2^2 d_2 \underline{n}_2 + \rho V_3^2 d_3 \underline{n}_3 + \underline{S} = 0$$

Proiettando lungo la direzione x (tangenziale alla parete), e considerando che, se gli sforzi viscosi sono trascurabili, S_x=0:

$$-\rho V_1^2 d_1 \cos\beta + \rho V_2^2 d_2 - \rho V_3^2 d_3 = 0$$



Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\underline{g}$$

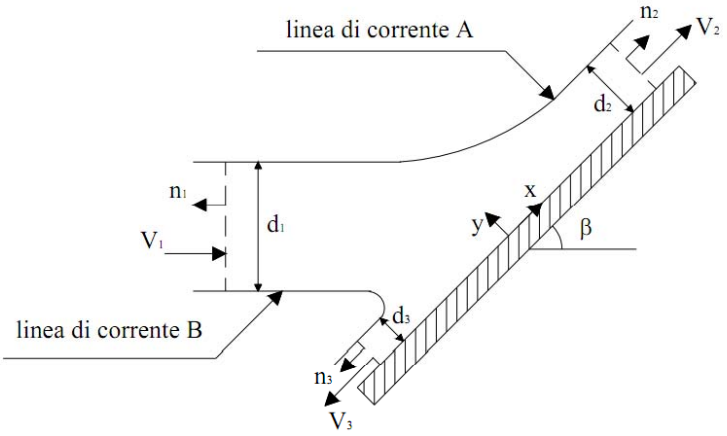
Ricordando che

$$V_1 = V_2 = V_3$$

$$d_1 = d_2 + d_3$$

$$-\rho V_1^2 d_1 \cos\beta + \rho V_2^2 d_2 - \rho V_3^2 d_3 = 0$$

si ottiene:

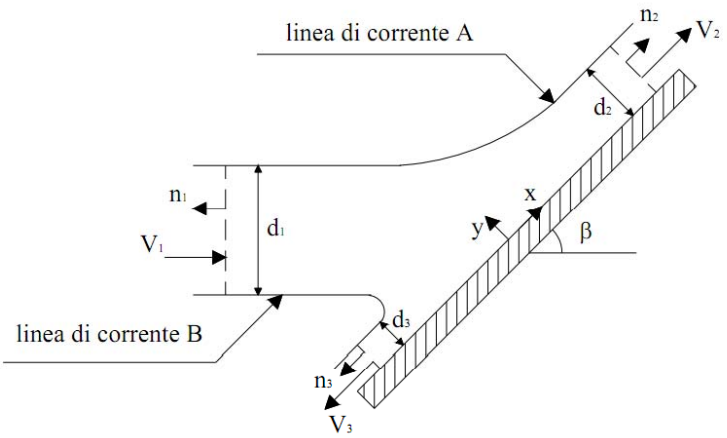


$$\left.\begin{aligned} d_1\cos\beta &= d_2 - d_3 \\ d_1 &= d_2 + d_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} d_2 &= \frac{d_1}{2}(1+\cos\beta) = \frac{0.10}{2}(1+\cos 45°) = 8.54cm \\ d_3 &= \frac{d_1}{2}(1-\cos\beta) = \frac{0.10}{2}(1-\cos 45°) = 1.46cm \end{aligned}$$

Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\underline{g}$$

Proiettando lungo la direzione y (ortogonale alla parete), e considerando che le sezioni rette 2 e 3 sono ortogonali a tale direzione:

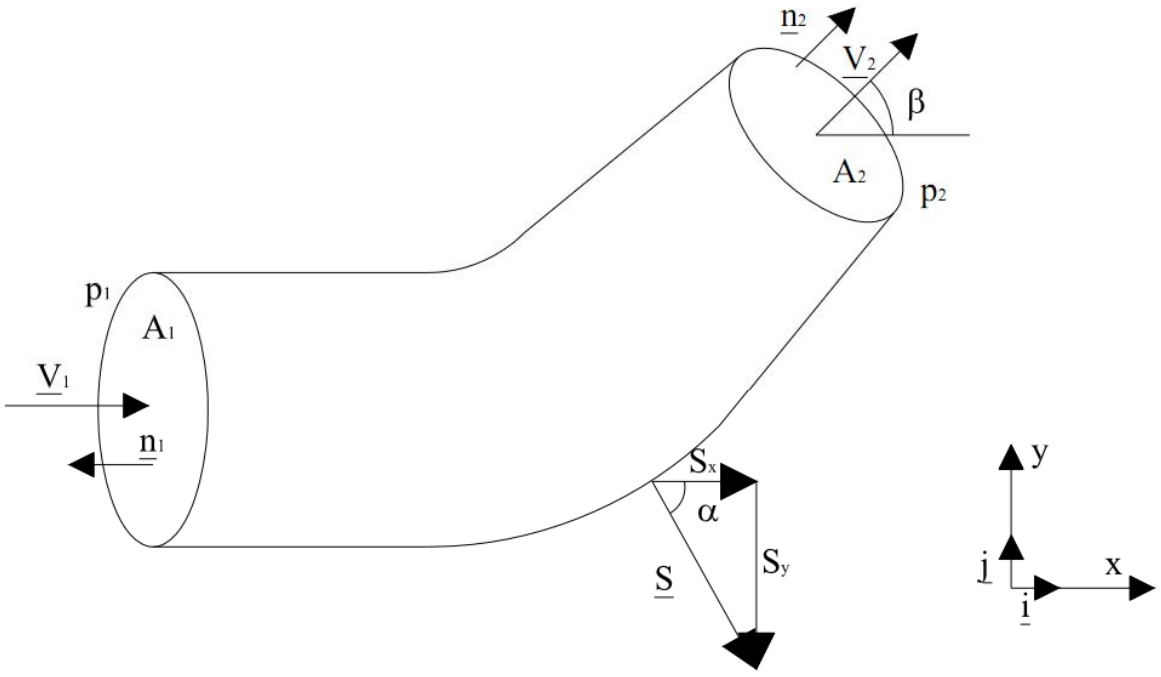


$$\rho V_1^2 d_1 \sin\beta + S = 0 \Rightarrow$$

$$S = -\rho V_1^2 d_1 \sin\beta = -\dot{m} V_1 \sin\beta = -998 \cdot 10^2 \cdot 0.10 \cdot \sin 45° = -7.06 kN$$

Cosa succede quando la corrente è ortogonale alla parete?

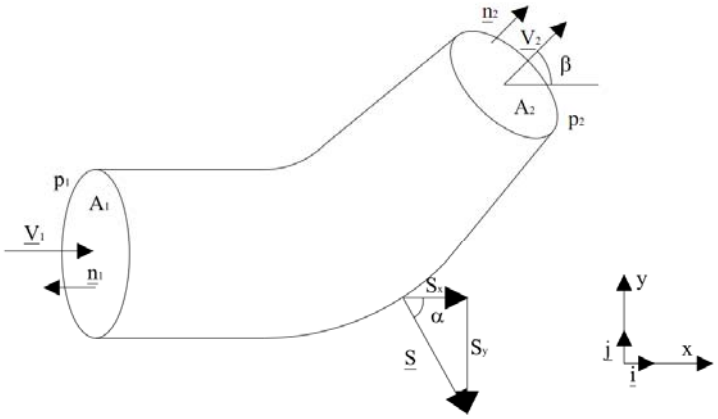
Spinta su una curva



Spinta su una curva

Ipotesi:

- Moto incompressibile (ρ=cost);
- Moto stazionario (St>>1);
- Forze viscose trascurabili (Re>>1);
- Effetti delle forze gravitazionali trascurabili (Fr>>1).



Dati:

- $p_1 = 101.3kPa$
- $V_1 = 10m/s$
- $A_1 = 0.30m^2$
- $A_2 = 0.20m^2$
- $\beta = 30°$
- $\rho = 998kg/m^3$

Calcolare la spinta:

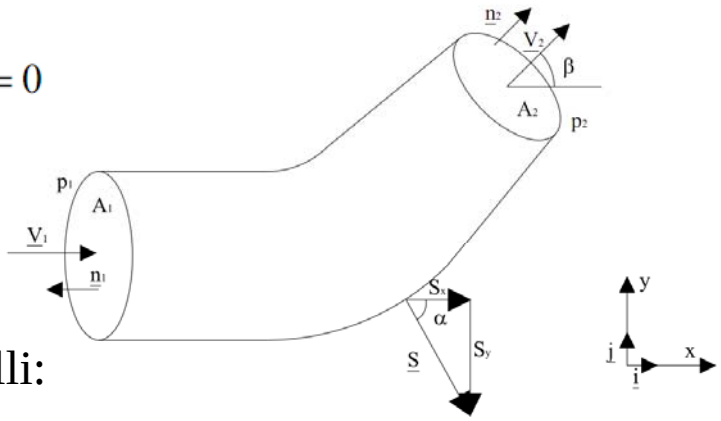
S=?

Spinta su una curva

Dall'equazione di continuità:

$$\rho A_1 \underline{V}_1 \underline{n}_1 + \rho A_2 \underline{V}_2 \underline{n}_2 = -\rho A_1 V_1 + \rho A_2 V_2 = 0$$

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{0.30}{0.20} \cdot 10 = 15m/s$$



Applicando il teorema di Bernoulli:

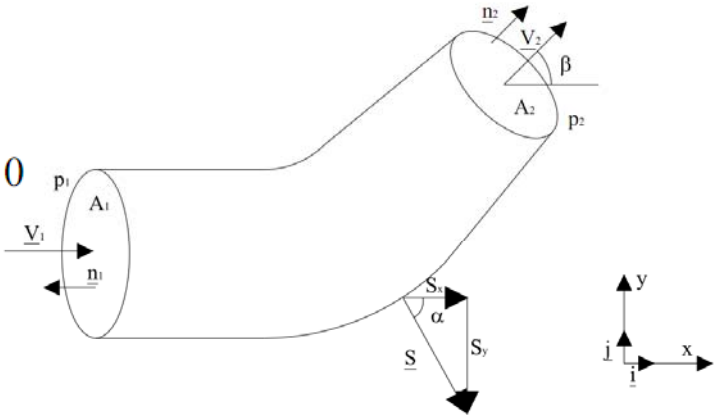
$$p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = 1.01 \cdot 10^5 + 998 \frac{10^2}{2}\left[1 - \left(\frac{0.30}{0.20}\right)^2\right] = 0.39 \cdot 10^5 \, Pa$$

Spinta su una curva

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\underline{g}$$

$$(p_1 + \rho V_1^2)A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho V_2^2)A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = 0$$



Proiettando in direzione x:

$$(\underline{n}_1 \underline{i} = -1; \underline{n}_2 \underline{i} = \cos\beta)$$

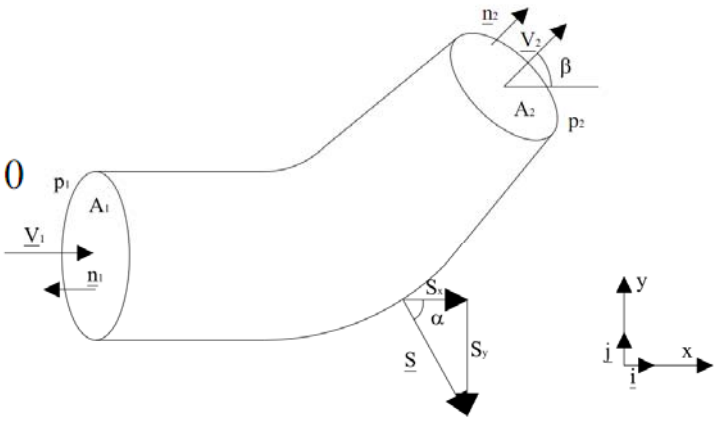
$$-(p_1 + \rho V_1^2)A_1 + (p_2 + \rho V_2^2)A_2 \cos\beta + S_x = 0 \Rightarrow$$

$$S_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\beta + \dot{m}(V_1 - V_2 \cos\beta)$$
$$= 1.01 \cdot 10^5 \cdot 0.30 - 0.39 \cdot 10^5 \cdot 0.20 \cdot \cos 30° + 3.0 \cdot 10^3 (10 - 15\cos 30°) = 14.5kN$$

Spinta su una curva

$$\sum_{i=1}^{m} A_i(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\underline{g}$$

$$(p_1 + \rho V_1^2)A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho V_2^2)A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = 0$$



Proiettando in direzione y:

$$(\underline{n}_1 \underline{j} = 0; \underline{n}_2 \underline{j} = \sin\beta)$$

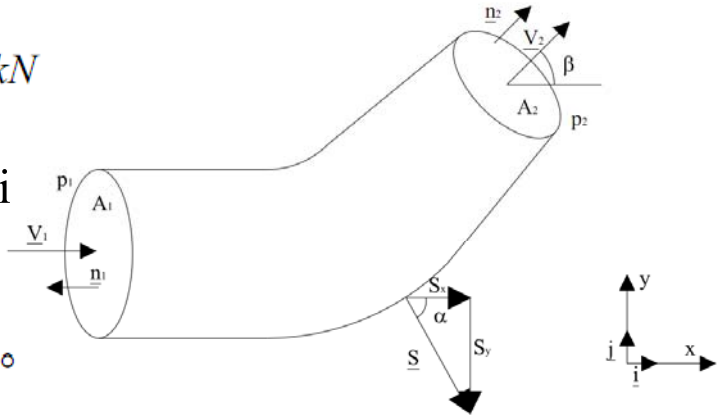
$$-(p_1 + \rho V_1^2)A_1 + (p_2 + \rho V_2^2)A_2 \cos\beta + S_x = 0 \Rightarrow$$

$$S_y = -(p_2 + \rho V_2^2)A_2 \sin\beta =$$
$$= -(0.39 \cdot 10^5 + 998 \cdot 15^2) \cdot 0.20 \cdot \sin 30° = 26kN$$

Spinta su una curva

La spinta totale avrà modulo:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{14.5^2 + (-26)^2} = 29.8kN$$

e sarà inclinata rispetto all'asse y di un angolo:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{S_y}{S_x}\right) = \arctan\left(\frac{-26}{14.5}\right) = -60.9°$$