

ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

E' stato visto in precedenza che *i piccoli disturbi di pressione si propagano alla velocità del suono.*

Ad esempio, *nel caso di un oggetto che si muova a velocità subsonica in aria ferma, i disturbi di pressione* causati dalla sua presenza, poiché viaggiano più velocemente dell'oggetto, *riescono a raggiungere tutti i punti del fluido prima che arrivi l'oggetto stesso.*

Ovviamente, l'aria si deve *aprire* per far passare l'oggetto).

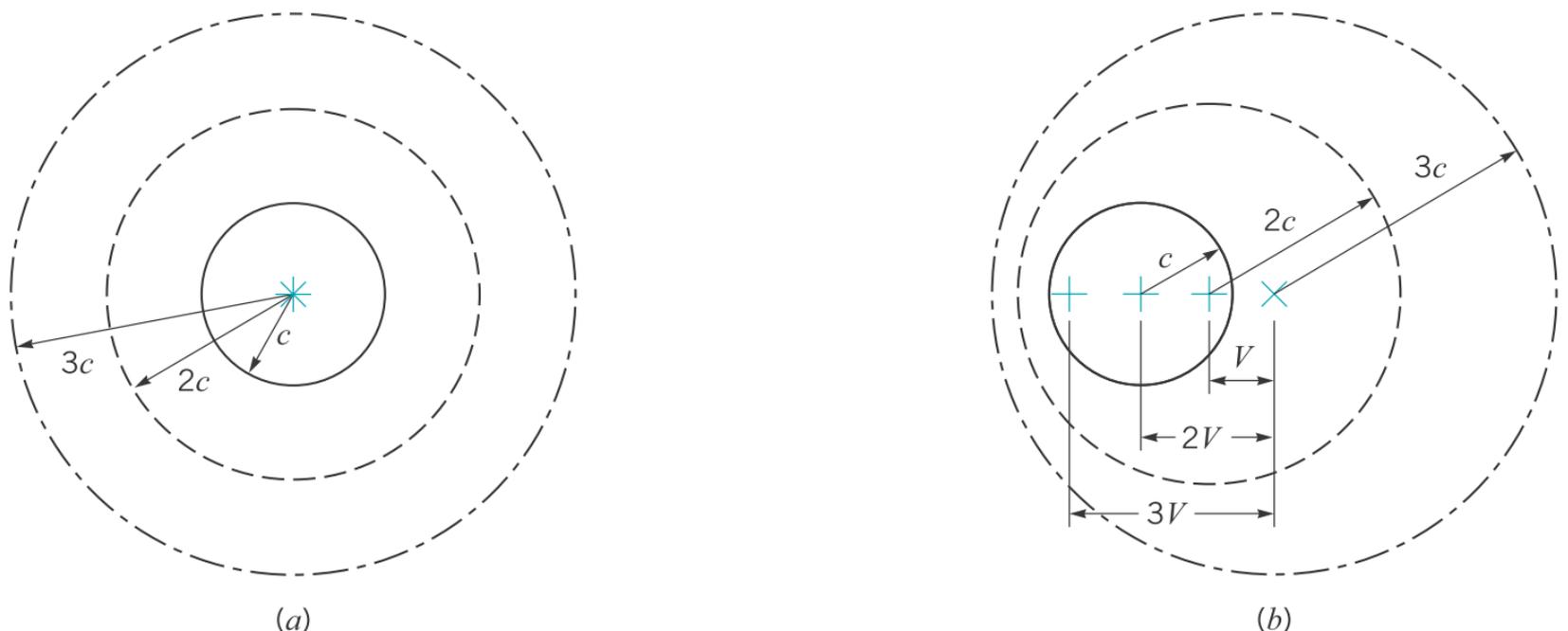
Alternativamente, *in un sistema di riferimento inerziale per il quale l'oggetto è fermo ed è investito da una corrente subsonica, questi disturbi riescono a risalire la corrente* in quanto essi viaggiano verso monte più velocemente di quanto la corrente viaggi verso valle.



Gasdinamica – Onde d'urto – Astarita/Cardone

ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Ad esempio, *nel caso di un oggetto che si muova a velocità subsonica in aria ferma, i disturbi di pressione* causati dalla sua presenza, poiché viaggiano più velocemente dell'oggetto, *riescono a raggiungere tutti i punti del fluido prima che arrivi l'oggetto stesso.*

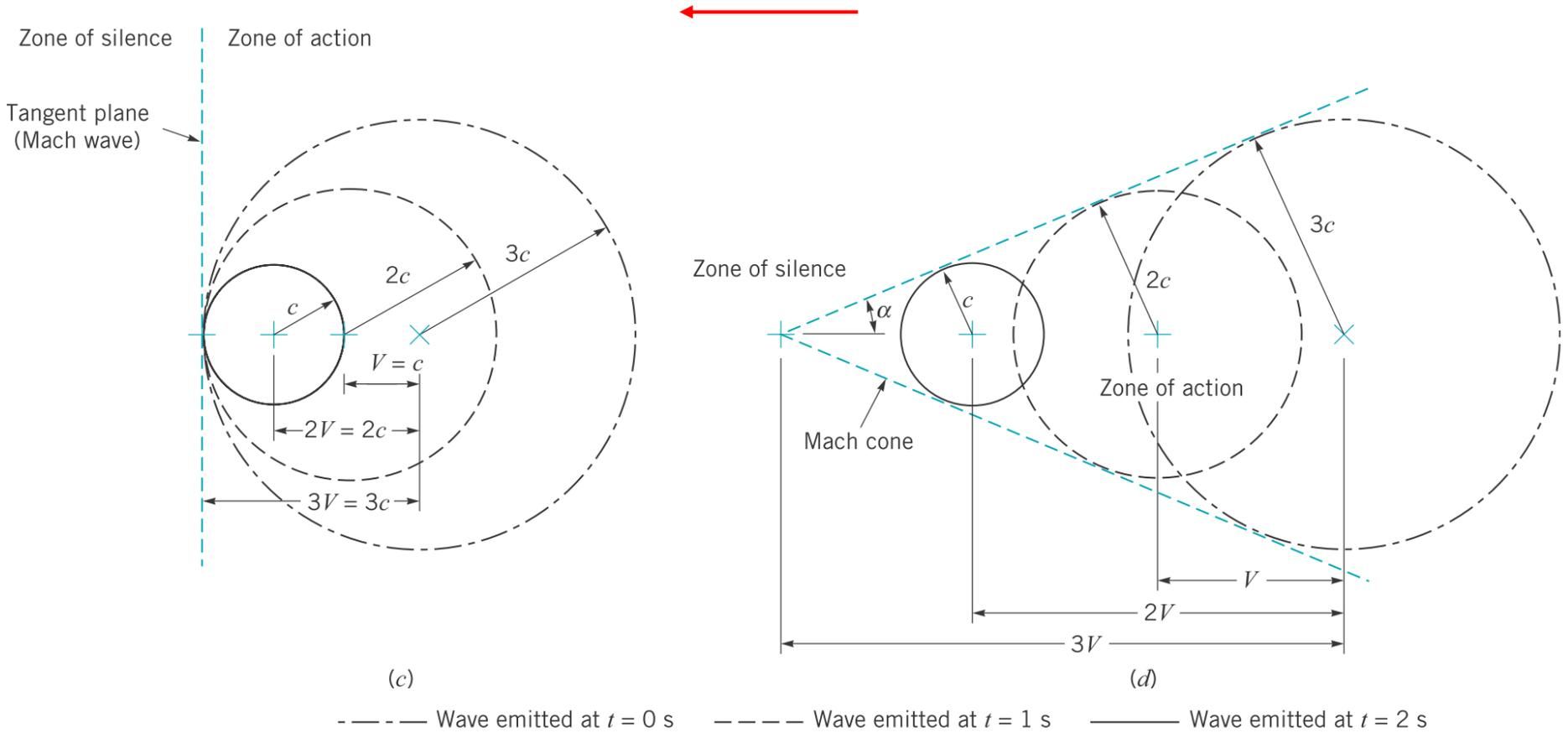


Sorgente a velocità nulla ($M=0$)

Sorgente a velocità Subsonica ($M=0.7$)

ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

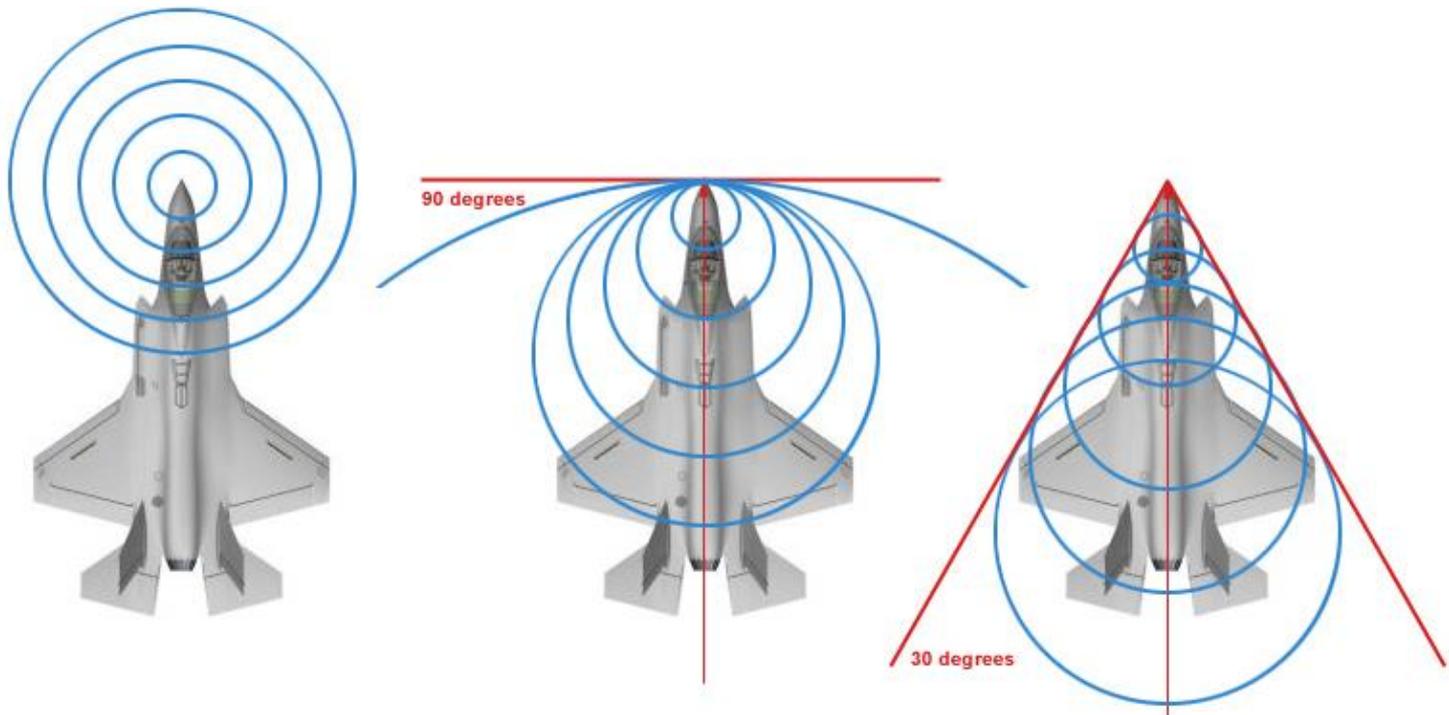
Nel caso, invece, in cui ***l'oggetto si muova a velocità supersonica, sempre in aria ferma, arriva prima l'oggetto e poi i disturbi di pressione.*** L'aria non può, quindi, essere avvisata da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.



**Sorgente a velocità
Sonica ($M=1$)**

**Sorgente a velocità
Subsonica ($M=2$)**

PROPAGAZIONE PICCOLI DISTURBI DI PRESSIONE



Speed = 0

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object remains stationary. There is no shock front.

Origin of each circle is on the tip.

Speed = Mach 1

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object also moves at the speed of sound.

The so called sonic barrier is created because all the pressure fronts created in the past moves at the same speed as the object and hence arrives at the same point as the object.

The shock front is a plane tangent to all the infinite number of pressure fronts ever formed over time and is 90 degrees from the axis of motion.

Origin of each circle is exactly the length of the circle's radius from the tip.

Speed = Mach 2

Sonic fronts leave any particular point at the speed of sound. Object moves at twice the speed of sound.

Because the object is moving twice as fast as the pressure fronts and the boundaries of all pressure fronts are tangent to a conical surface.

At Mach 2, the shock front cone is roughly 30 degrees from the axis of motion.

Origin of each circle is exactly 2 x the radius of the circle itself from the tip.

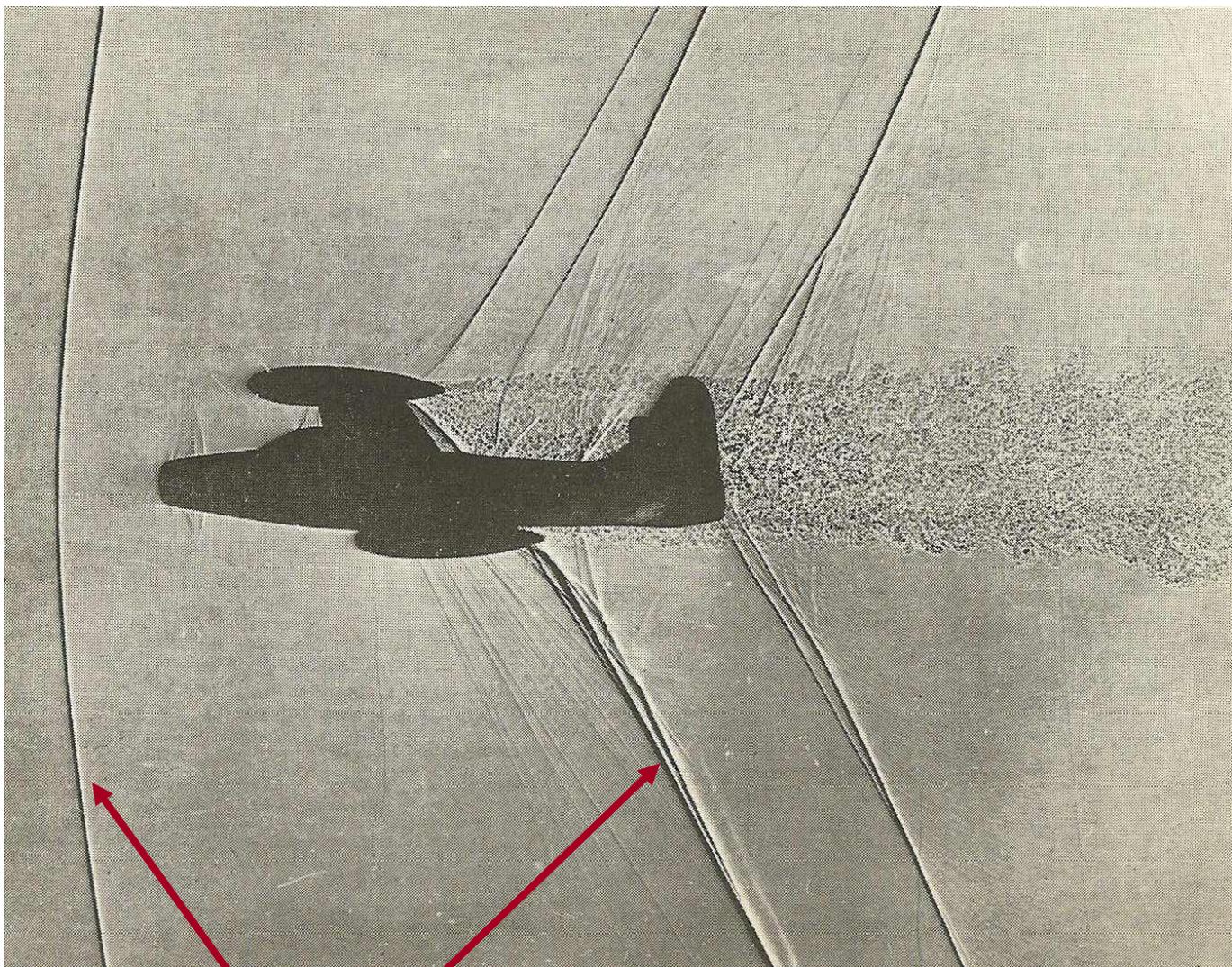
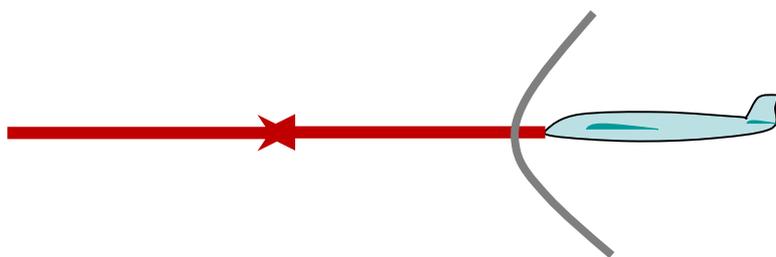
ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Viceversa, se *l'oggetto si muove a velocità supersonica, sempre in aria ferma, arriva prima l'oggetto e successivamente i disturbi di pressione*. L'aria non può, quindi, essere avvisata da questi ultimi che l'oggetto sta arrivando.

Va, peraltro, rilevato che *l'oggetto deve, in ogni caso, passare e che l'aria si deve comunque aprire* per farlo passare.

Da ciò deriva la presenza di *superfici di discontinuità (onde d'urto) che, rendendo la corrente subsonica, e/o deviando la corrente supersonica, consentono al fluido di aprirsi per far passare il corpo*.

Occorre, comunque, osservare che le onde d'urto non sono presenti solo nel caso appena descritto, ma anche in *altre situazioni fluidodinamiche*.



Shadowgraph del modello in scala 1/200 del *Thunderjet F 84* a $M = 1.05$.

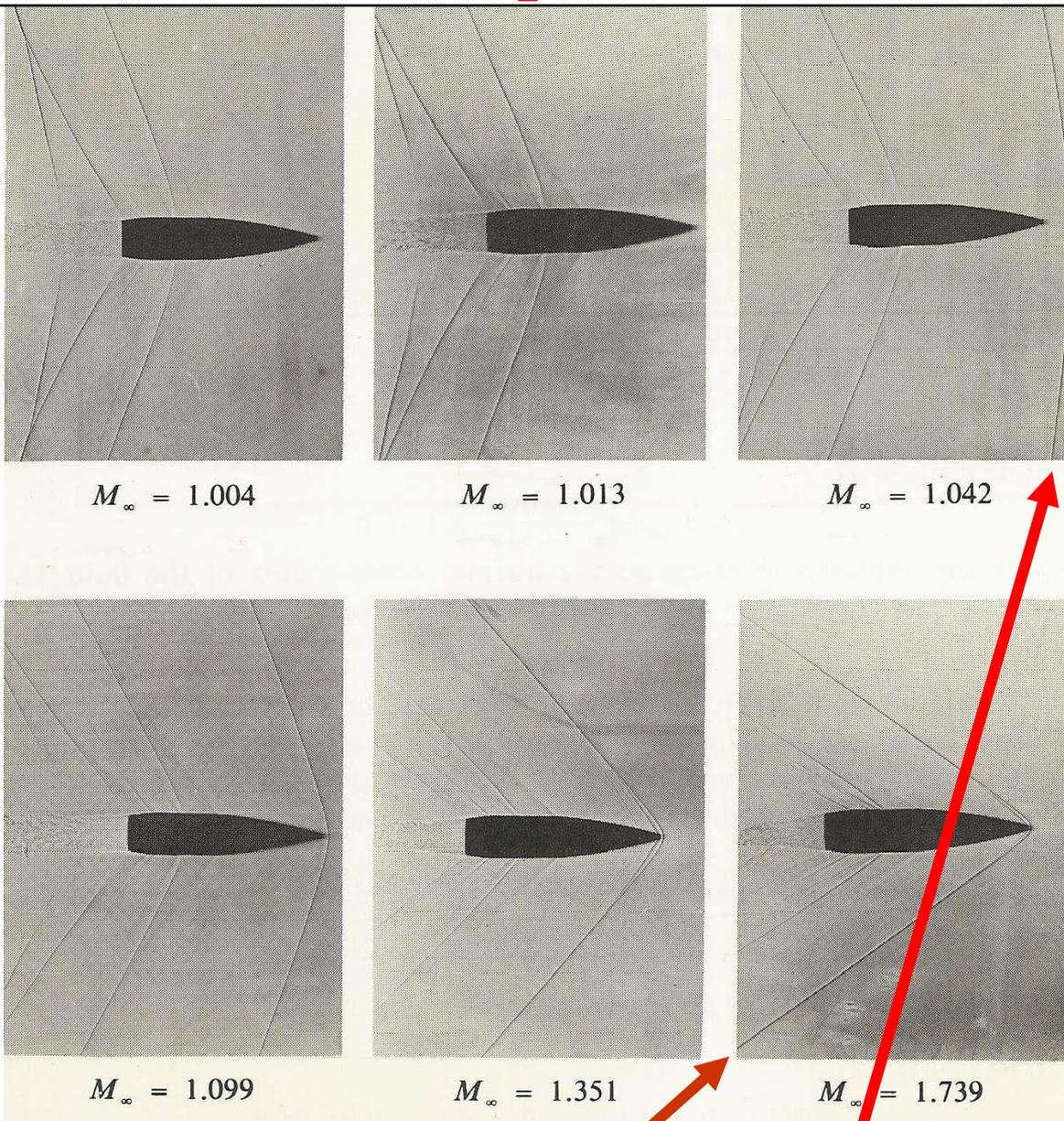
Notare come l'onda d'urto davanti all'aereo, che viaggia a $M \cong 1$, risulti praticamente normale alla corrente che lo investe.

Le altre onde che si vedono verranno esaminate dopo.





F14 rompe il muro del suono



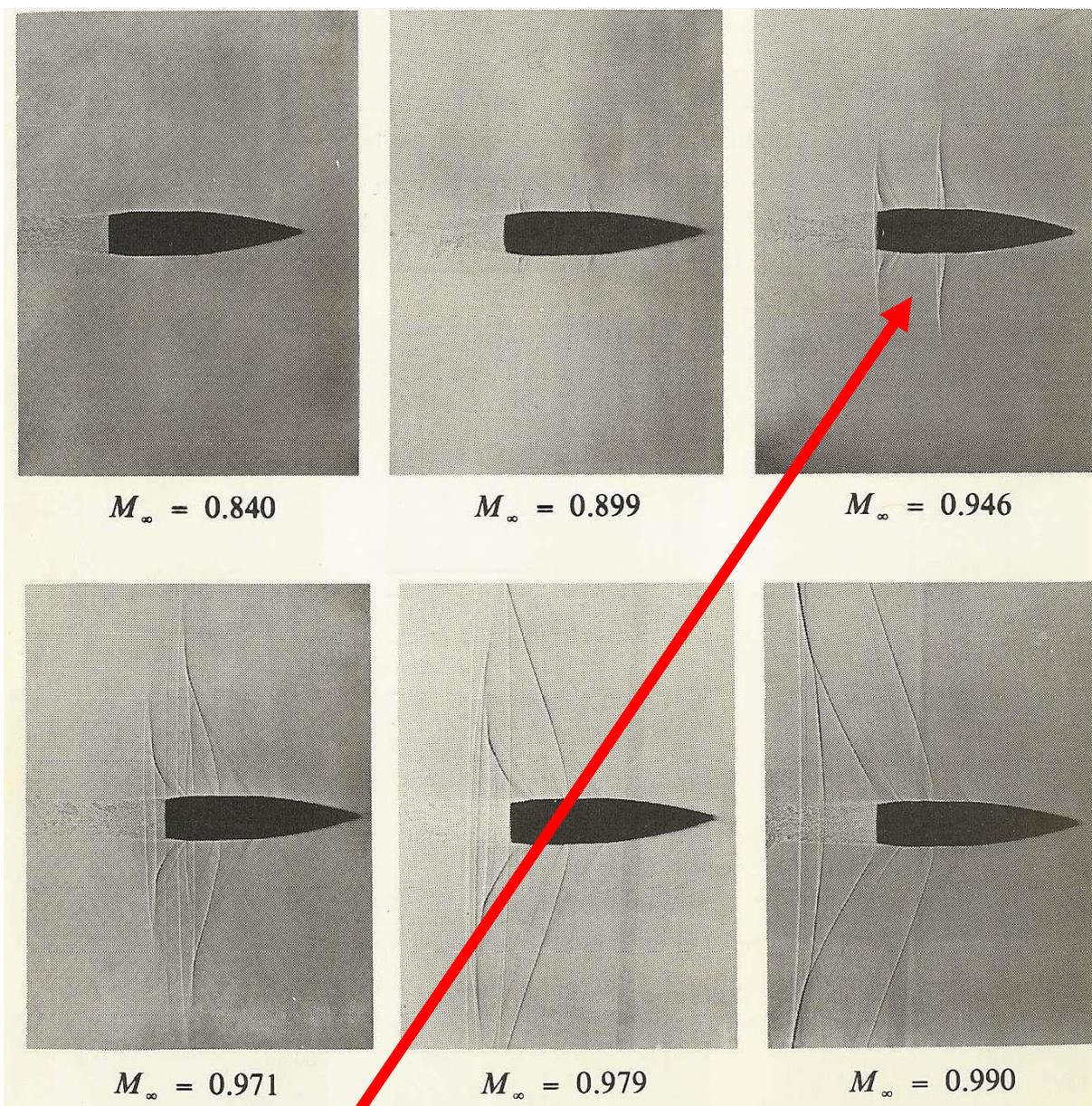
Ai bassi numeri di Mach (1.004 e 1.013) l'onda si trova molto a monte del corpo e non appare

All'aumentare del numero di Mach l'onda dapprima si avvicina al corpo e poi si piega all'indietro.

Shadowgraphs del campo di moto intorno a un proiettile in moto supersonico.

Notare l'onda d'urto staccata, quasi normale, per $M \approx 1$ e il suo progressivo inclinarsi all'aumentare del numero di Mach





Shadowgraphs del campo di moto intorno a un proiettile in moto **transonico**.

Pur essendo il moto subsonico, si può notare la presenza di onde (di Mach, o deboli onde urto) anche lì dove la corrente accelera.

Gasdinamica – Onde d'urto – Astarita/Cardone

9

ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Si vedrà tra poco che, **in un sistema di riferimento nel quale l'oggetto è fermo, perché si abbia un'onda d'urto, la corrente che lo investe deve essere supersonica** e, se la velocità di questa è costante nel tempo, **quest'onda d'urto resta anch'essa ferma (onda stazionaria)**.

Intuitivamente ne consegue che: **onde d'urto stazionarie** (ferme rispetto al sistema di riferimento) **sono possibili solo se la corrente a monte di esse è supersonica** (nello stesso sistema di riferimento).

A monte, indica **prima dell'onda**. **A valle**, indica **dopo l'onda**.

Se la corrente fosse subsonica, non sarebbe necessaria un'onda d'urto, in quanto i piccoli disturbi di pressione riuscirebbero a risalire la corrente e a farla aprire per tempo.

Come già visto, **ciò non è strettamente vero in campo transonico**.

Si vedrà anche che, **onde d'urto instazionarie** (in moto rispetto al sistema di riferimento adottato) **possono originarsi anche in una corrente non necessariamente supersonica** ma, al limite, **ferma**.

ONDE D'URTO NORMALI E OBLIQUE

Le onde d'urto possono essere, in generale, di vario tipo. Le onde d'urto si chiamano **normali**, quando sono perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda.

In caso contrario, si dicono **oblique**.

E' stato poi detto che esse possono essere **stazionarie** (se ferme rispetto al sistema di riferimento) o **instazionarie** (se si muovono).

Nel seguito saranno considerate solo le onde d'urto **adiabatiche**, nel senso che **il fluido che le attraversa non scambia energia nel modo calore tra i suoi diversi punti**.

Naturalmente, **il fluido non scambia lavoro** per l'**assenza di "eliche" nel campo di moto**.

Va comunque osservato che **onde d'urto molto forti** provocano **forti innalzamenti della temperatura** del fluido e, quindi, scambi termici per **irraggiamento**, ovvero **reazioni chimiche** (esotermiche, o endotermiche) le quali possono essere tenute in conto con una **non adiabaticità** del moto.

L'ipotesi di assenza di scambi di energia nel modo lavoro, unitamente all'adiabaticità, fa sì che **attraverso l'onda d'urto si può assumere la trasformazione come omoenergetica** ($H = cost$).



SPESSORE DI UN'ONDA D'URTO

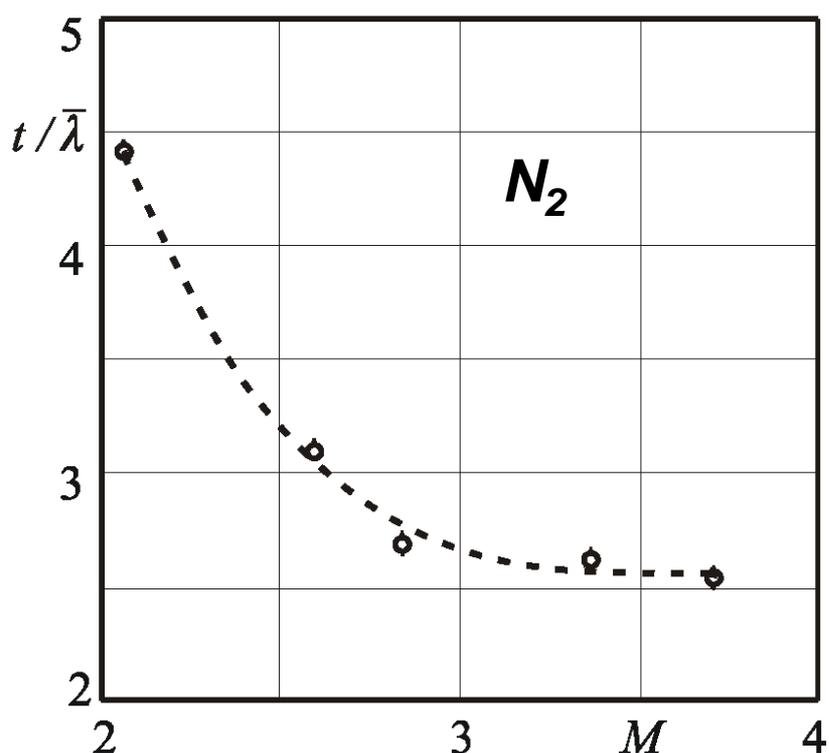
Nei campi di moto qui esaminati, le onde d'urto possono essere generalmente considerate come **superfici di discontinuità**.

Infatti, **il loro spessore risulta dell'ordine di qualche cammino libero medio molecolare**.

Nella figura a lato è riportato lo **spessore di un'onda d'urto** t , espresso in termini di cammino libero medio molecolare $\bar{\lambda}$, al variare del numero di Mach M .

Lo spessore t è stato misurato sperimentalmente nel caso di onde d'urto in una corrente di azoto N_2 .

Si ricordi che $\bar{\lambda}$ per aria in condizioni normali, è dell'ordine di $10^{-7}m$ e che l'aria è costituita prevalentemente da azoto (4/5).



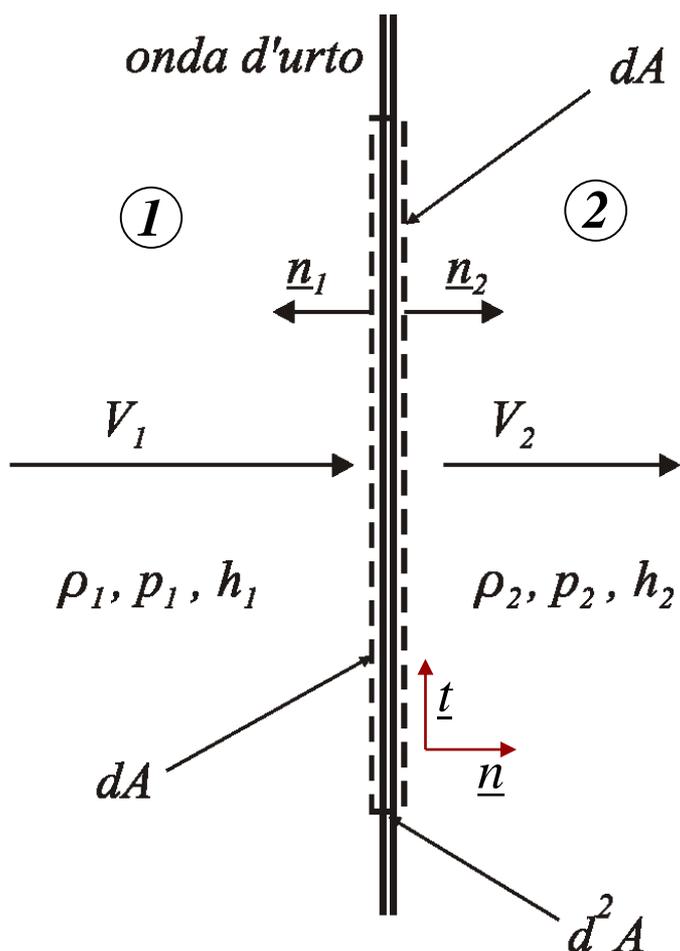
La traccia abbastanza spessa già vista nello shadograph è dovuta a fenomeni di diffrazione della luce. In effetti lo spessore dell'onda è molto sottile.



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA

Eq. Bilancio Quantità di moto

Volume di controllo



$$\dot{m}(V_2 - V_1) + p_1 A_1 n_1 + p_2 A_2 n_2 + \cancel{\dot{S}} = \cancel{\dot{M}g}$$

$$A_1 = A_2 = dA \gg \bar{\lambda}^2; \quad \mathcal{M} = 0 \quad \text{e}$$

$$\dot{S} = 0 \quad \text{perchè: } d^2 A \ll dA$$

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + dA(p_1 n_1 + p_2 n_2) = 0$$

$$V_{t1} = V_{t2} = 0 \quad \text{quindi: } \underline{V_2 \parallel V_1}$$

Nessuna deviazione della corrente

Eq. Conservazione della massa

$$\rho_1 A_1 V_1 \cdot \underline{n}_1 + \rho_2 A_2 V_2 \cdot \underline{n}_2 = 0$$

$$\text{poichè: } A_1 = A_2 = dA$$

$$\underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 = -V_1; \quad \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = V_2$$

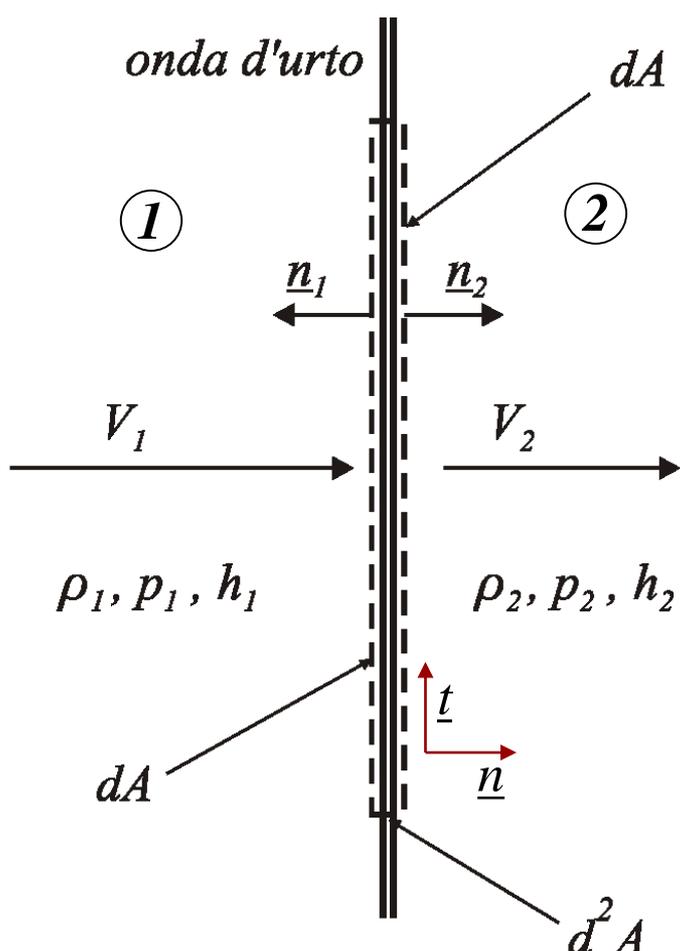
$$\text{si ha: } \boxed{\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}}$$



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

Volume di controllo



Eq. Bilancio Quantità di moto

Sostituendo: $\dot{m} = \rho_1 V_1 dA = \rho_2 V_2 dA$ nella:

$$\dot{m}(V_2 - V_1) + dA(p_1 n_1 + p_2 n_2) = 0$$

$$\text{poichè: } \underline{V}_1 \cdot \underline{n}_1 = -V_1; \quad \underline{V}_2 \cdot \underline{n}_2 = V_2$$

e proiettando normalmente all'onda, si ottiene:

$$\boxed{p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}}$$

Eq. Conservazione dell'energia

$$\dot{m} \Delta H = \dot{Q} - \dot{L}$$

tenendo conto che: $\dot{Q} = \dot{L} = 0$, si ha:

$$\boxed{h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}}$$



Quindi l'onda d'urto è una trasformazione termofluidodinamica che avviene, in pratica, attraverso una superficie (volume sottilissimo), mediante la quale ciascuna delle grandezze G , I e H resta costante.

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Per un'onda d'urto, l'equazione di bilancio della quantità di moto è questa:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = \text{cost}$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = p_2 - p_1$$

Dividendo per $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = \text{cost}$, si ottiene:

$$V_1 - V_2 = \frac{p_2}{\rho_2 V_2} - \frac{p_1}{\rho_1 V_1}$$

Ricordando poi che $a^2 = \gamma RT = \gamma p/\rho \rightarrow p/\rho = a^2/\gamma$, si perviene a:

$$\gamma(V_1 - V_2) = \frac{a_2^2}{V_2} - \frac{a_1^2}{V_1}$$



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

La $H = h + V^2/2$, in condizioni omoenergetiche, può essere scritta anche nella forma:

$$h = \gamma RT/(\gamma-1) = a^2/(\gamma-1) \rightarrow a^2 = a_o^2 - \frac{\gamma-1}{2} V^2$$

che sostituita nella relazione precedentemente trovata:

$$\gamma(V_1 - V_2) = \frac{a_2^2}{V_2} - \frac{a_1^2}{V_1} \rightarrow \gamma(V_1 - V_2) = a_o^2 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) + \frac{\gamma-1}{2} (V_1 - V_2)$$

e tenendo conto della: $V^* = a^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma-1)}{\gamma+1}} = V_\ell \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$

da luogo alla:

$$V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma+1} a_o^2 = a^{*2} \quad (V_1 - V_2)/V_1 V_2$$

Relazione di Prandtl per l'onda d'urto normale

La velocità critica del suono è la media geometrica tra quella a monte e quella a valle dell'onda d'urto.



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Introducendo un numero di Mach riferito alla velocità critica: $M^* = \frac{V}{a^*}$
(questa è l'unica eccezione al simbolo * che comporterebbe $M^*=1$)

la relazione: $V_1 V_2 = \frac{2}{\gamma+1} a_o^2 = a^{*2}$

Per $H = cost$
si ha: $a^* = cost$

diventa semplicemente:

$$M_1^* M_2^* = 1$$

Poiché si può scrivere:

$$M^{*2} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a^2}{a^{*2}} = M^2 \frac{T}{T_o} \frac{T_o}{T^*} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{\gamma+1}{2}$$

quadrando, sostituendo e risolvendo in M_2 , si ottiene infine la relazione che lega il numero di Mach a valle M_2 a quello a monte M_1 dell'onda:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}$$



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

Poiché per la stabilità termodinamica è $\gamma \geq 1$, **ad ogni valore di $M_1 > 1$, corrisponde un valore di $M_2 < 1$ e, quasi, viceversa.**

Il caso $M_1 = 1$ conduce a $M_2 = 1$, **nulla succede alla corrente.**

Per $M_1 \rightarrow \infty$, il valore limite di M_2 risulta essere:

$$M_{2\ell} = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2}$$

che per il caso particolare di $\gamma = 1.4 \rightarrow M_{2\ell} = 0.3780$

Per $M_1 \rightarrow M_{2\ell}$, **il denominatore della frazione vale zero** e $M_2 \rightarrow \infty$.

Il **quasi** deriva dal fatto che, per valori subsonici di M_1 inferiori a $M_{2\ell}$, il denominatore della frazione è negativo e il valore di M_2 risulterebbe un numero complesso.



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Utilizzando la relazione tra M_1 e M_2 , è possibile ricavare allora:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right) = \frac{H}{c_p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) (\gamma - 1 + 2/M_1^2)$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_1 (1 + \gamma M_1^2) = p_2 (1 + \gamma M_2^2) = I$$

$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$\rho_2/\rho_1 = p_2 T_1 / p_1 T_2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = (\gamma + 1) M_1^2 [2 + (\gamma - 1) M_1^2]^{-1}$$

Questi sono alcuni dei rapporti caratteristici per un'onda d'urto normale, funzione del solo numero di Mach a monte dell'onda d'urto.



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

Essendo l'onda d'urto omoenergetica, si ha: $\frac{T_{o2}}{T_{o1}} = 1$

Il rapporto tra le pressioni di ristagno si può scrivere: $p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad \frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \frac{P_{o2}}{P_2} \frac{P_2}{P_1} \frac{P_1}{P_{o1}} = \frac{P_2}{P_1} (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

Sostituendo le relazioni per la pressione di ristagno, il M_2 in funzione del M_1 e l'espressione di p_2/p_1 precedentemente trovata, si ottiene **il rapporto tra le pressioni di ristagno:**

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma + 1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1 - \gamma}}$$

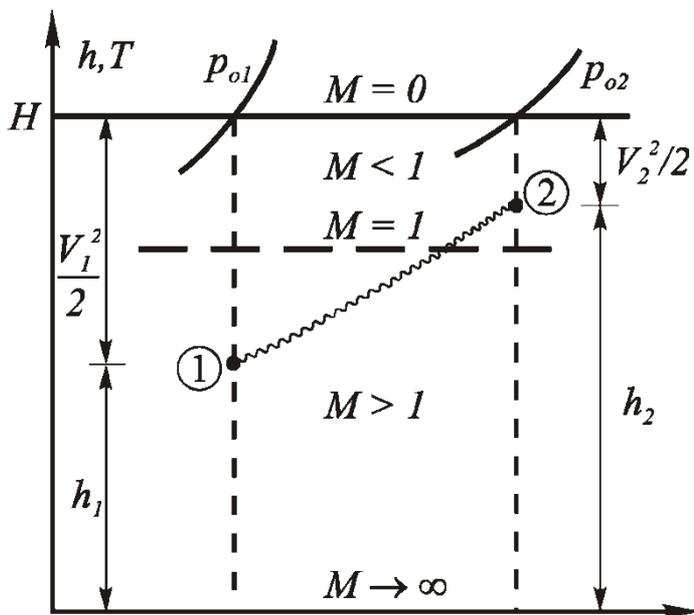
che, per $M_1 > 1$, conduce sempre a:

$$P_{o2} / P_{o1} < 1$$

per tutti i valori possibili di $\gamma > 1$ (la pressione di ristagno a valle diminuisce).



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO



Si ricordi che l'entropia è data da:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}$$

In termini delle grandezze di ristagno (**che hanno la stessa entropia**) si può scrivere ($T_{o2} = T_{o1}$):

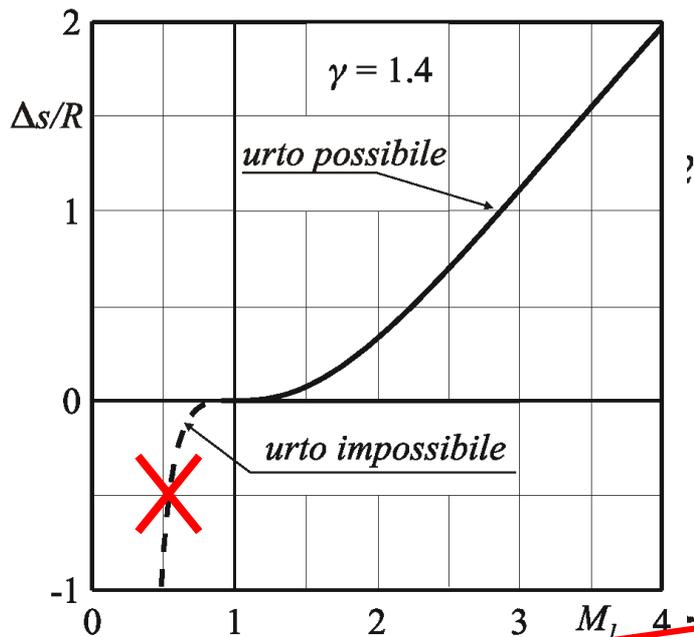
$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{P_{o2}}{P_{o1}}$$

Utilizzando, poi, la appena trovata:

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma + 1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1 - \gamma}}$$



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO



Si ricordi che l'entropia è data da:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

In termini delle grandezze di ristagno (**che hanno la stessa entropia**) si può scrivere ($T_{o2} = T_{o1}$):

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

Utilizzando, poi, la appena trovata:

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{1/\gamma}$$

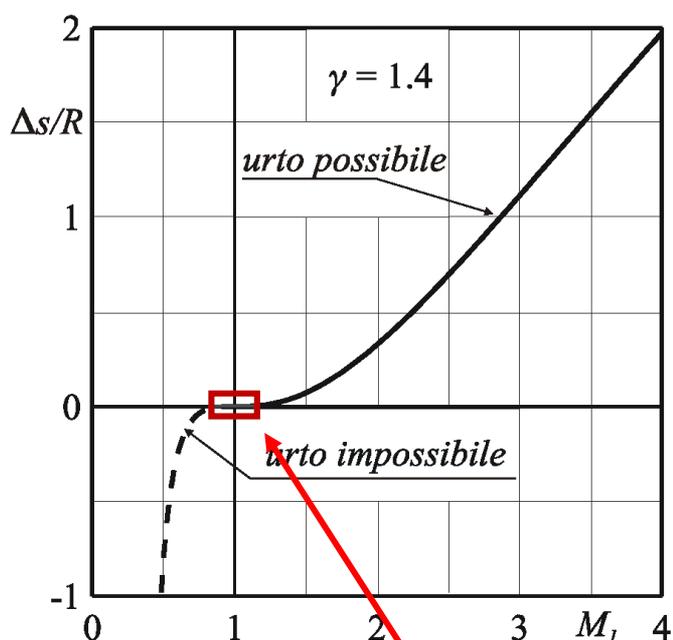
si ottiene, infine, la **variazione di entropia attraverso l'onda d'urto**:

$$\Delta s / R = (s_2 - s_1) / R = \left[-(\gamma + 1) \ln(\gamma + 1) + \ln(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1 + 2/M_1^2) \right] / (\gamma - 1)$$

relazione il cui diagramma nella figura in alto mostra quali sono **i soli urti possibili** ($M_1 > 1$) perché, essendo la trasformazione adiabatica: $\Delta s \geq 0$.



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO



Espandendo in serie di Taylor, nell'intorno di $M_1^2 = 1$, la relazione ottenuta prima:

$$\Delta s / R = (s_2 - s_1) / R = \left[-(\gamma - 1) \ln(\gamma + 1) + \ln(2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) + \gamma \ln(\gamma - 1 + 2/M_1^2) \right] / (\gamma - 1)$$

$$\ln(1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 -$$

si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{\Delta s (M_1^2 \rightarrow 1)}{R} = \frac{2}{3} \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} (M_1^2 - 1)^3$$

che per $M_1^2 = 1$ **risulta nulla insieme alle sue derivate prima e seconda rispetto a M_1^2 (punto di flesso della curva)**.

Questo fatto fa sì che **le sole onde d'urto che avvengono per $M_1 \rightarrow 1$ (onde di Mach) siano praticamente isoentropiche, cioè reversibili**.

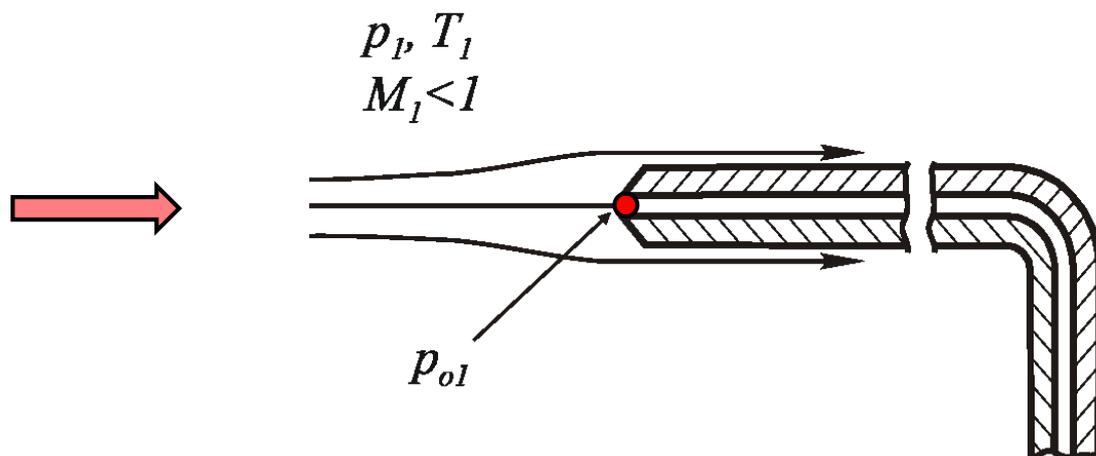
Quindi, **solo l'onda di Mach, che si ottiene quando $M_1 \rightarrow 1$, può essere sia di compressione che di espansione** poiché la trasformazione è reversibile, essendo $\Delta s = 0$. Ciò sarà applicato in seguito.



TUBO DI PITOT IN UNA CORRENTE SUBSONICA

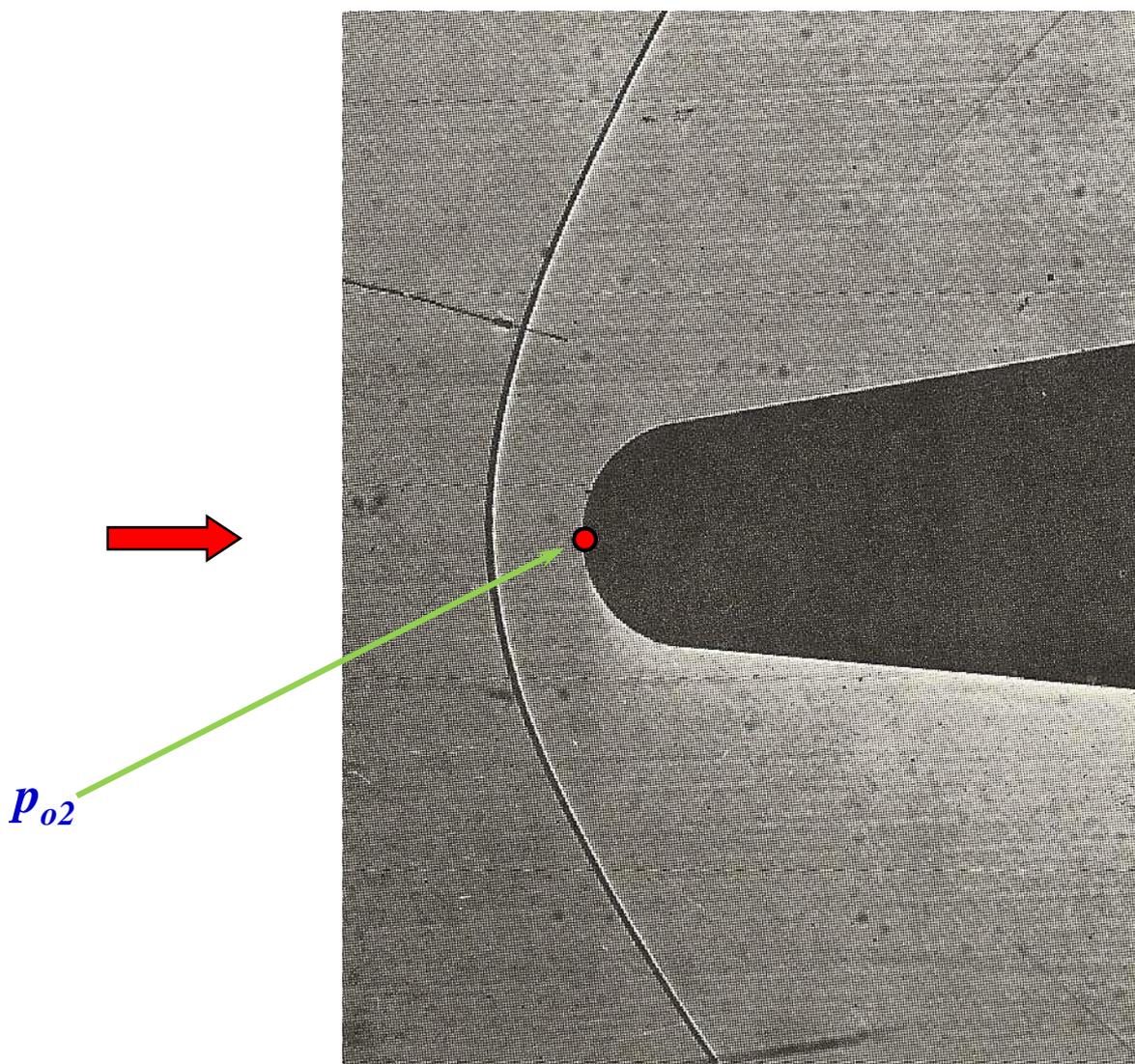
Nel tubo di Pitot investito da una corrente subsonica si può considerare che il fluido decelererà, fino al punto di misura della pressione sull'asse, isentropicamente ed omoenergeticamente, e, quindi, che lo strumento misurerà, di fatto, la pressione di ristagno della corrente.

Si potrebbe dire grossolanamente che la corrente si deve fermare nel punto rosso indicato con la freccia perché non sa se andare su o giù.



Tutto ciò non è vero per un tubo di Pitot investito da una corrente supersonica.

Cosa succede, invece, per un tubo di Pitot investito da una corrente supersonica?



Onda d'urto in un flusso supersonico su un cono smussato a $M = 1.36$.

Notare come l'onda sull'asse del cono risulti normale all'asse stesso.

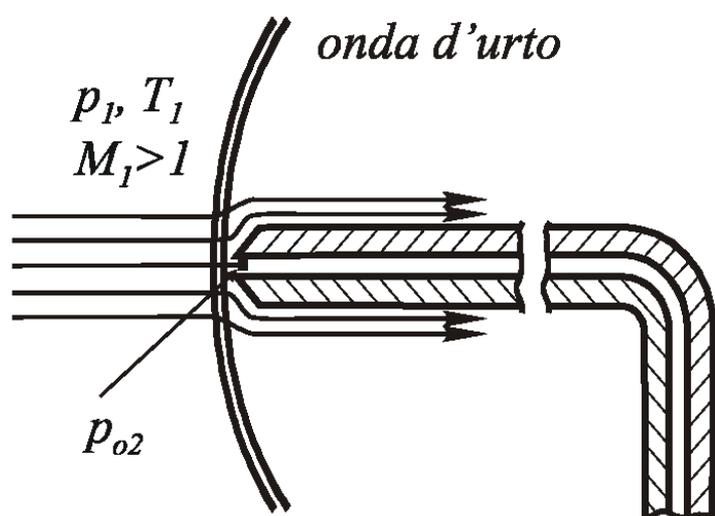


TUBO DI PITOT IN UNA CORRENTE SUPERSONICA

Come visto nell'immagine precedente, **se in una corrente supersonica è presente un corpo tozzo** (cioè che non presenta un bordo di attacco a spigolo vivo, o a punta), **davanti al corpo si genera un'onda d'urto** che, **per corpi assialsimmetrici posti ad angolo d'attacco nullo rispetto all'asse del corpo, risulta normale all'asse stesso.**

Questo è il caso del tubo di Pitot immerso in una corrente supersonica.

In questo caso, il Pitot non misurerà la pressione di ristagno della corrente, bensì **misura la pressione di ristagno p_{o2} a valle dell'onda d'urto normale presente davanti ad esso, sul suo asse.**



In un tunnel supersonico è relativamente facile misurare la pressione statica p_1 a monte dell'onda d'urto con una presa di pressione posta sulle pareti del tunnel poiché, come si è visto, le onde d'urto si portano a valle.

Quindi, il rapporto p_{o2}/p_1 , detto anche funzione di Rayleigh per il tubo di Pitot, risulta utile per la misura del numero di Mach in un tunnel supersonico.

Esso si può ricavare a partire dalla:

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \frac{p_{o2}}{p_2} \frac{p_2}{p_1}$$

Sostituendo in questa espressione le già trovate:

$$p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

si ottiene infine la:

Funzione di Rayleigh

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{2 M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$



$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{2 M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Come già detto, questa formula è chiamata **funzione di Rayleigh**.

Per $M_1 = 1$, e cioè per un' **onda di Mach** ($p_{o2} = p_{o1}$), essa dà luogo al valore:

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \frac{p_{o1}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad p_o = p \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

che corrisponde al **valore isoentropico** (tale è l'onda di Mach).

Questo valore, per $\gamma = 1.4$, risulta uguale a 1.893. Il suo reciproco è pari a 0.5283.

La figura che segue mostra **la dipendenza dei diversi rapporti adimensionali (caratteristici) delle diverse grandezze termofluidodinamiche e del numero di Mach a valle dell'onda d'urto per il caso particolare di $\gamma = 1.4$** .

Analoghi andamenti, ma con diversi valori numerici, si hanno per altri valori di γ .



ONDA D'URTO NORMALE STAZIONARIA IN UN GAS PIU' CHE PERFETTO

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) (\gamma - 1 + 2/M_1^2)$$

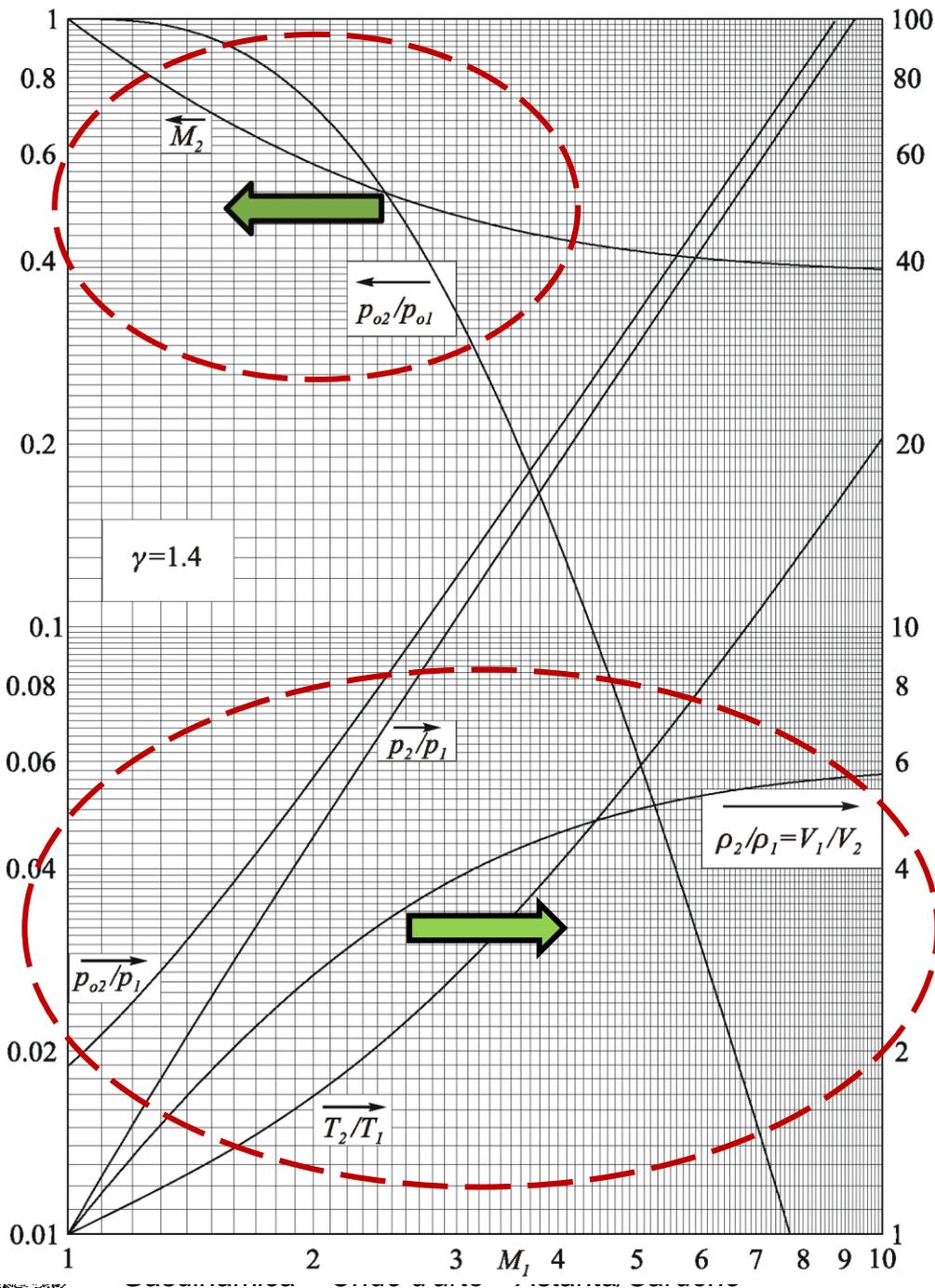
$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = (\gamma + 1)M_1^2 [2 + (\gamma - 1)M_1^2]^{-1}$$

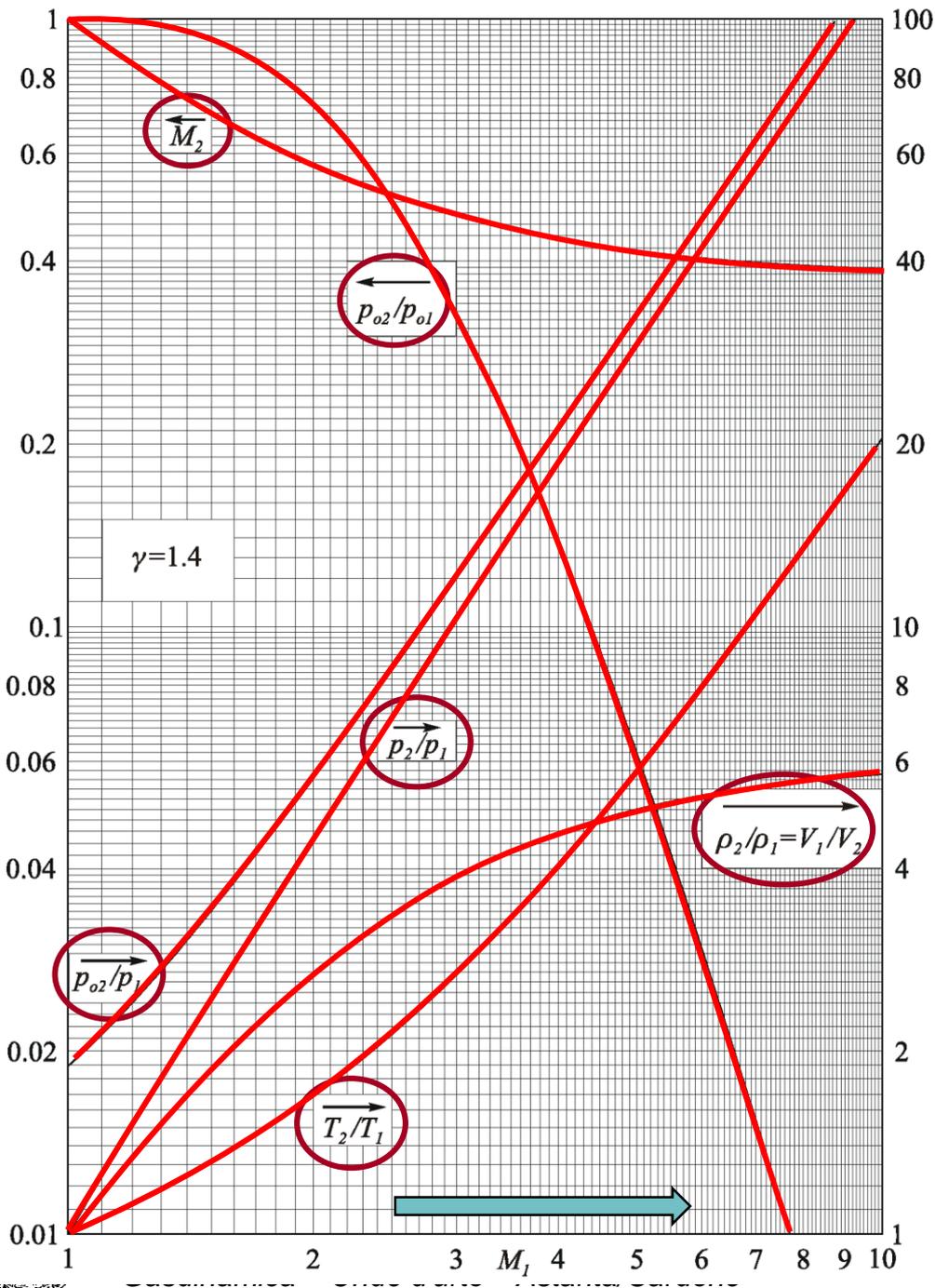
$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma + 1)} (\gamma - 1 + 2/M_1^2)^\gamma (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1 - \gamma}}$$

$$\frac{p_{o2}}{p_1} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left(\frac{2 M_1^{2\gamma}}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$





I rapporti che si leggono sulla scala di destra comportano un aumento della grandezza attraverso urto, quelli a sinistra una diminuzione.



All' aumentare del numero di Mach a monte dell'onda M_1 da 1 in su (il Mach deve essere almeno sonico), si hanno i seguenti comportamenti:

- diminuisce il numero di Mach a valle M_2 , sino al valore asintotico $M_{2\ell}$ ($\gamma = 1.4 \rightarrow M_{2\ell} = 0.3780$)
- diminuisce continuamente il rapporto tra le pressioni di ristagno (aumenta l'entropia);
- aumenta continuamente il rapporto tra le pressioni statiche;
- aumenta il rapporto tra le densità statiche sino ad un valore asintotico;
- aumenta continuamente il rapporto tra le temperature statiche (quelle di ristagno non variano);
- aumenta il rapporto p_{o2}/p_{o1} .

Valori limite per $M_1 \rightarrow \infty$ ($\gamma = 1.4$)

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2} = 0.3780$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) (\gamma - 1 + 2/M_1^2)$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)M_1^2}{\gamma + 1} = \infty$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = (\gamma + 1)M_1^2 [2 + (\gamma - 1)M_1^2]^{-1}$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} = 6$$

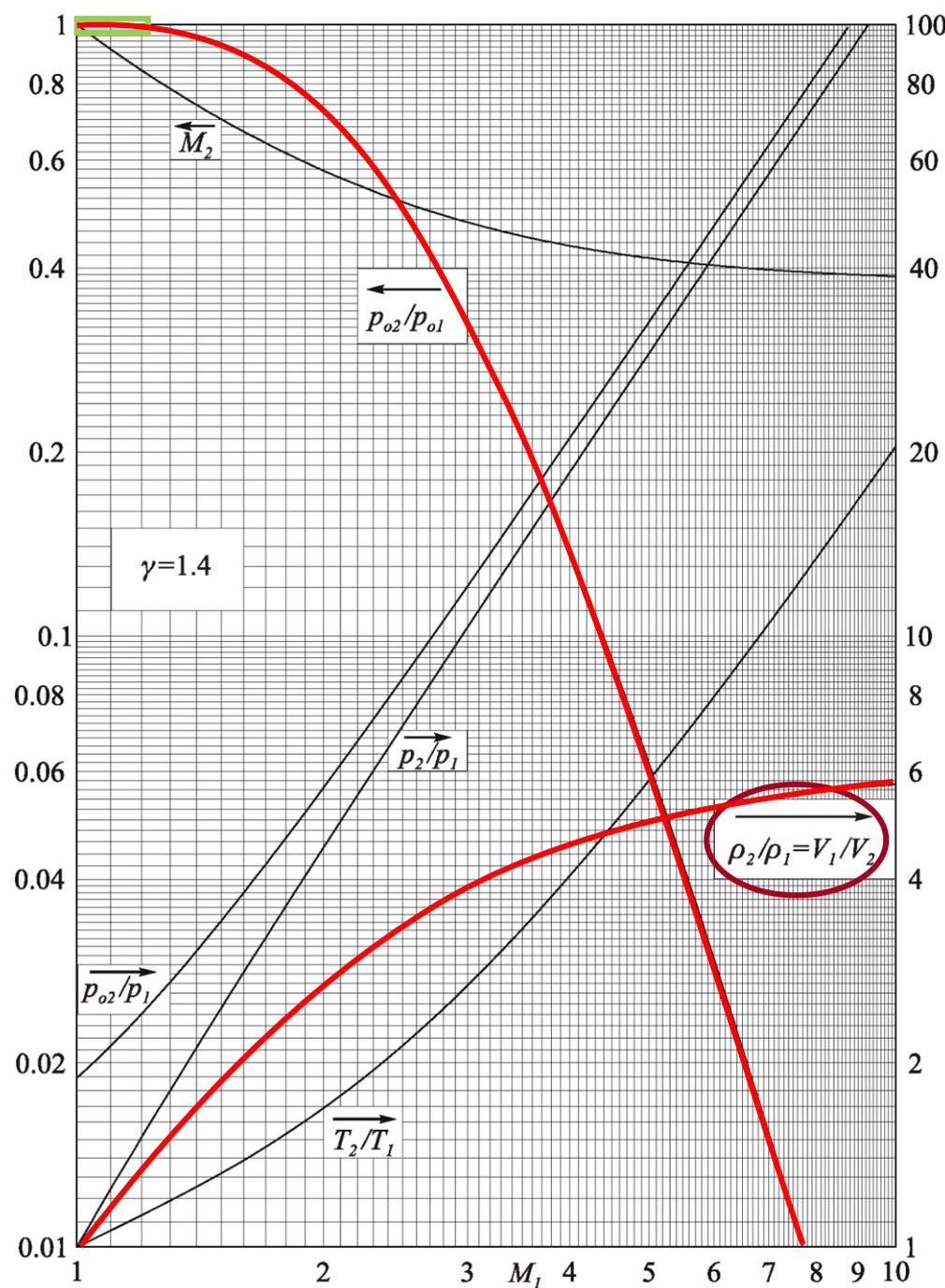
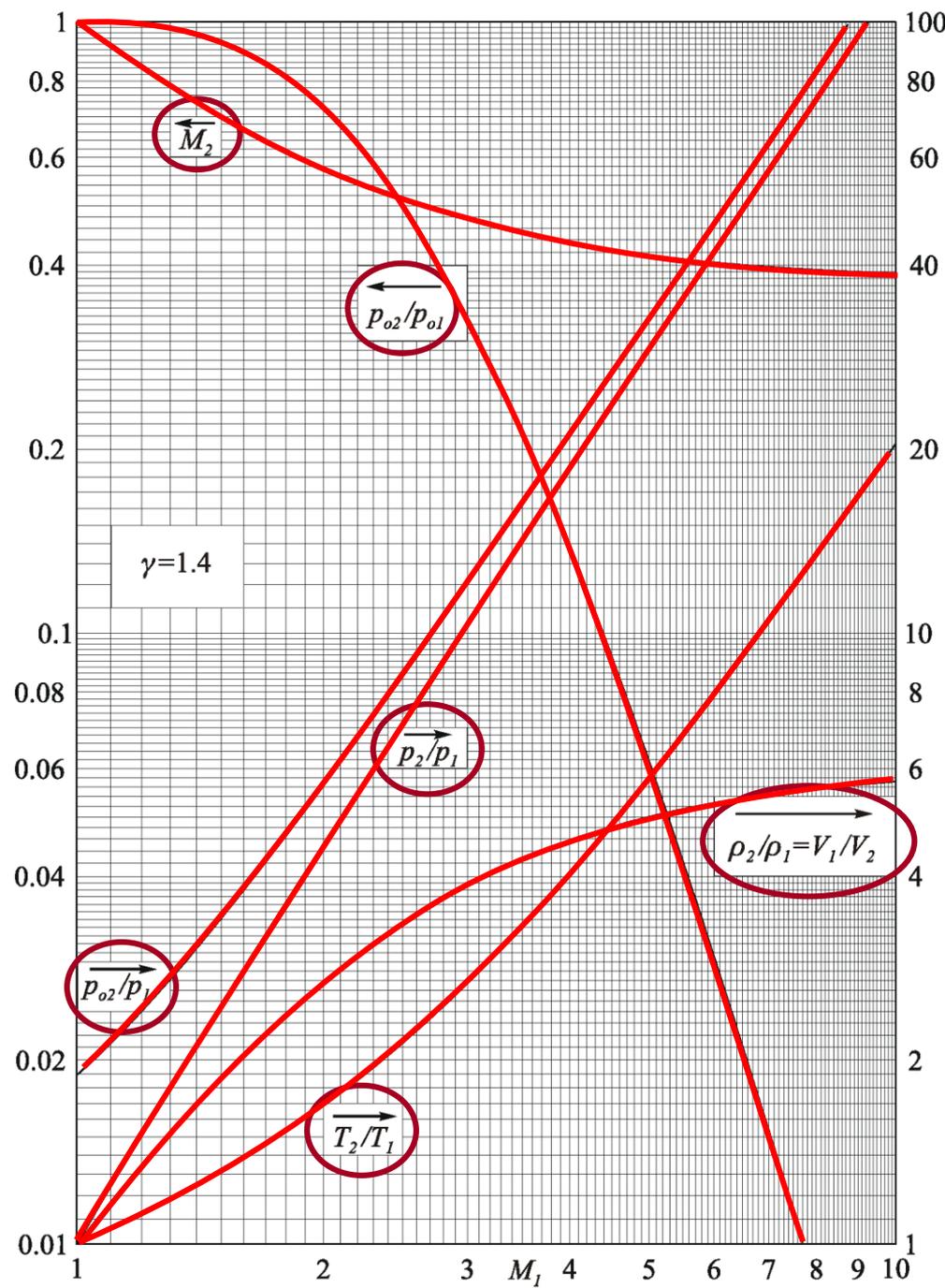
$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1)$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} = \infty$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \text{cost} (M_1^2)^{1-\gamma} = 0$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_{o2}}{p_1} = \text{cost} M_1^2 = \infty$$

33



$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} = 6$$

In una corrente (con $\gamma = 1.4$) ad elevatissimo numero di Mach (iperpersonica), la **densità a valle** di una onda d'urto normale è pari a **sei volte quella a monte** e la **velocità** della corrente diventa **un sesto di quella a monte**.

In questo caso resta comunque da controllare se è ancora valida l'ipotesi di **gas più che perfetto** a causa dell'elevato aumento di temperatura della corrente che può provocare fenomeni di **dissociazione**.

Il diagramma dimostra anche che, per **bassi valori del numero di Mach**, si ha $p_{o2}/p_{o1} \cong 1$ e che quindi l'onda d'urto può essere considerata praticamente **isoentropica**.

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{p_{o2}}{p_{o1}}$$

34

TABELLE DELLE ONDE D'URTO NORMALI

Una più dettagliata descrizione dell'andamento dei rapporti caratteristici è riportata nelle tabelle (per $M_1 = M > 1$) così come mostrato di seguito:

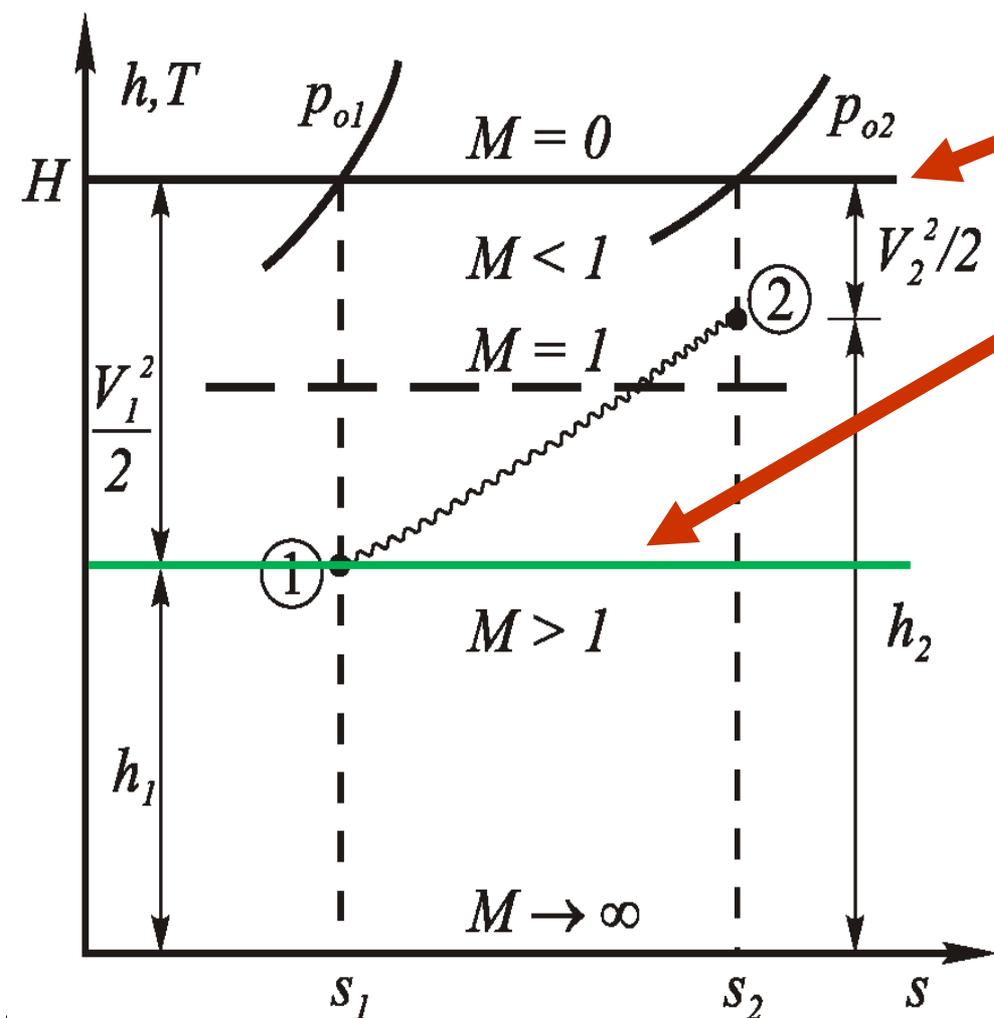
Moto Isentropico ($\gamma=1.4$)							Prandtl e Meyer		Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)							
M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	$\rho V^2/\rho_0$	A/A^*	M^*	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	P_{o2}/P_{o1}	P_1/P_{o2}		
1.00	.5283	.6339	.8333	.398	1.000	1.000	.0000	9.000	+1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283	
1.01	.5221	.6287	.8306	.3728	1.000	1.008	.4472	-1	8.193	+1	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.5160	.6234	.8278	.3758	1.000	1.017	.1257		7.864	+1	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.5099	.6181	.825	.3787	1.001	1.025	.3294		7.614	+1	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.5039	.6129	.822	.3815	1.001	1.033	.3510		7.406	+1	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039

Onde d'urto normali ($\gamma=1.4$)						
M	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	P_{o2}/P_{o1}	P_1/P_{o2}
1.00	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.5283
1.01	.9901	1.023	1.017	1.007	1.000	.5221
1.02	.9805	1.047	1.033	1.013	1.000	.5160
1.03	.9712	1.071	1.050	1.020	1.000	.5100
1.04	.9620	1.095	1.067	1.026	.9999	.5039



Sul piano $h-s$ (o $T-s$) i due punti ① e ②, rispettivamente a monte e a valle dell'onda d'urto, devono apparire così come rappresentato nella figura.

Si ricordi che attraverso l'onda d'urto: $H = h + V^2/2 = cost$ ed s aumenta.



Per un gas perfetto, una volta stabilita sul piano $h-s$ (ovvero $T-s$) la retta orizzontale $H = cost$ (risp. $T_o = cost$) relativa al livello energetico totale H della corrente, ciascun'altra retta orizzontale al di sotto di questa rappresenta il luogo dei punti per il quale le quantità h , T , $V^2/2$ (e quindi V), a e M sono costanti.

Man mano che questa retta si abbassa, il numero di Mach ad essa relativo tende ad aumentare perché la velocità del fluido V aumenta e la velocità del suono (la T) diminuisce.

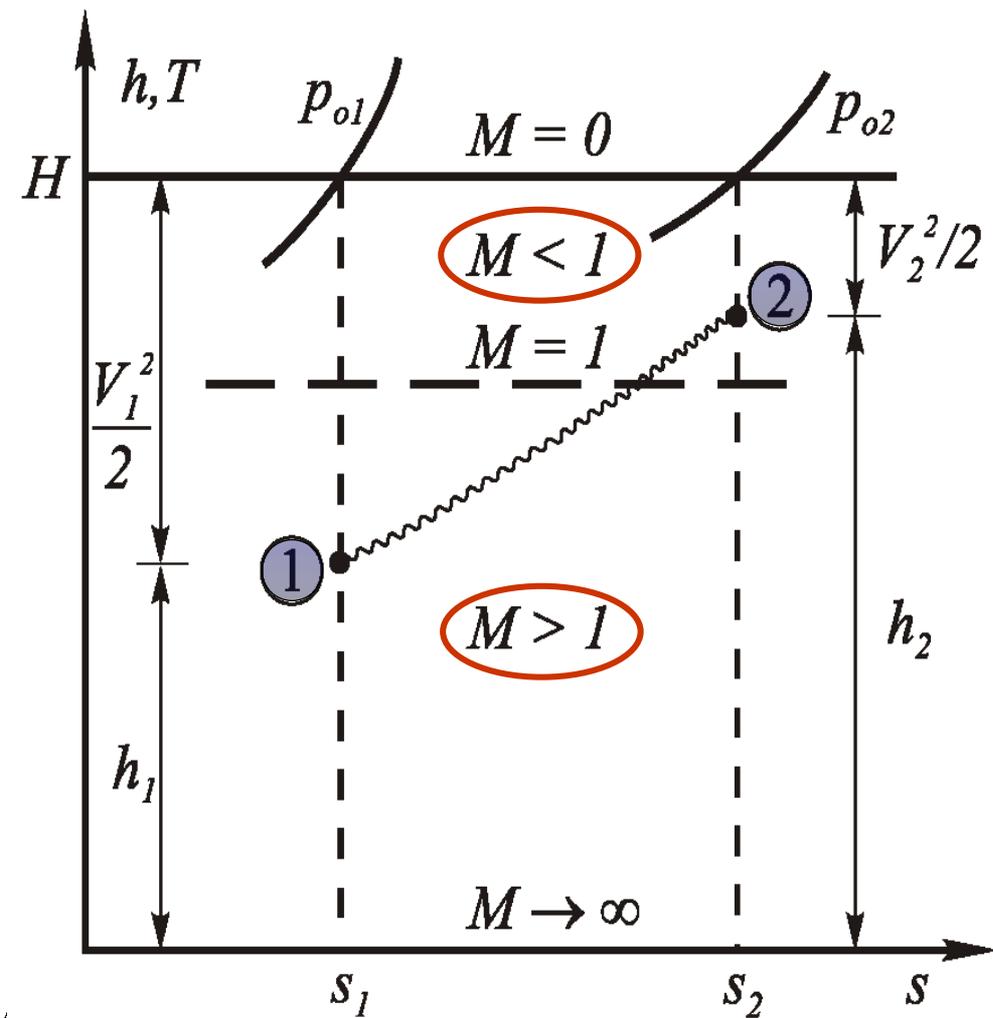


E' possibile quindi dividere il piano $h-s$, al di sotto della retta $H = cost$, in due zone mediante la retta orizzontale corrispondente a $M = 1$ (retta tratteggiata): la **superiore** caratterizzata da $M < 1$ e la **inferiore** caratterizzata da $M > 1$.

Poiché lo stato ① a monte dell'onda d'urto è quello corrispondente ad una **corrente supersonica**, il punto che lo rappresenta deve trovarsi nella **zona inferiore** ($M > 1$) così come riportato in figura.

Viceversa, il punto che rappresenta lo stato a valle ② si deve trovare nella **zona superiore** ($M < 1$) **ed a destra del punto 1** in quanto $\Delta s > 0$ (**ovviamente** $p_{o2} < p_{o1}$).

Il collegamento tra i punti ① e ② è stato indicato nel modo particolare rappresentato in figura, in quanto **non rappresenta una classica trasformazione termodinamica**.



A questo punto, si può pensare di definire l'onda d'urto come **una superficie di discontinuità attraverso la quale avviene una brusca conversione di energia cinetica ordinata in energia cinetica disordinata ad entalpia totale costante**.

La brusca diminuzione di velocità dà luogo ad un **brusco innalzamento della densità**:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = G = cost$$

della pressione:

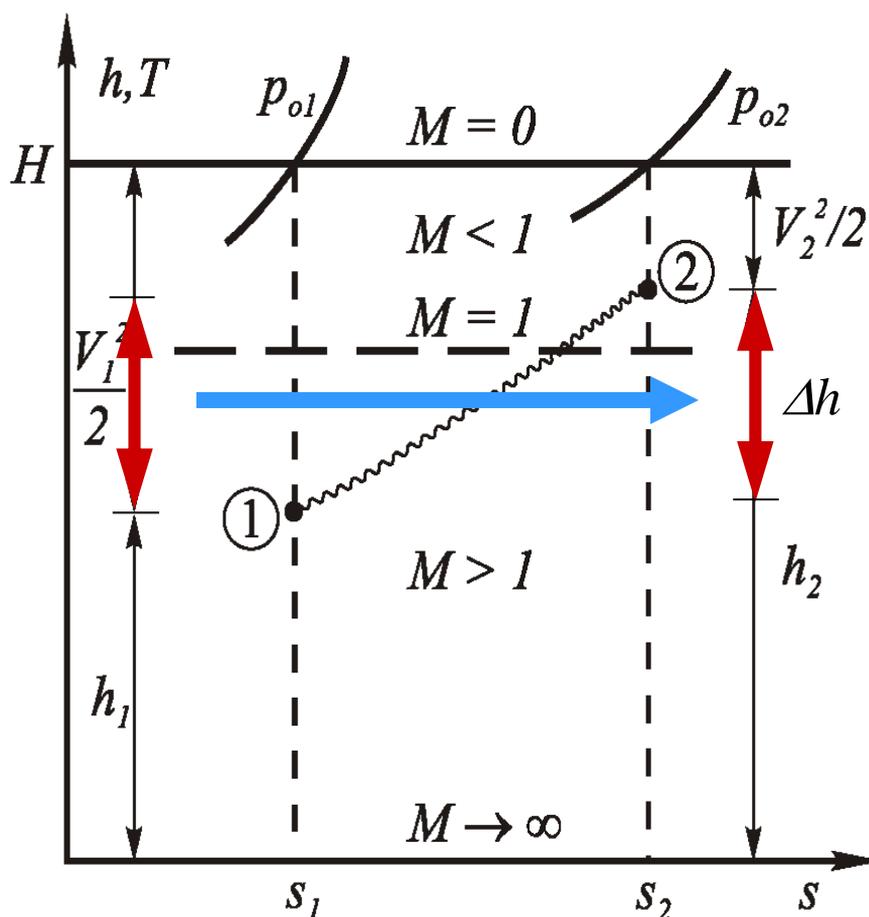
$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2 = I = cost$$

dell'entalpia (e quindi **della temperatura**):

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = cost$$

e, ovviamente, **dell'entropia**.

Invece, **la pressione di ristagno attraverso l'onda d'urto, diminuisce** ($p_{o2}/p_{o1} < 1$).



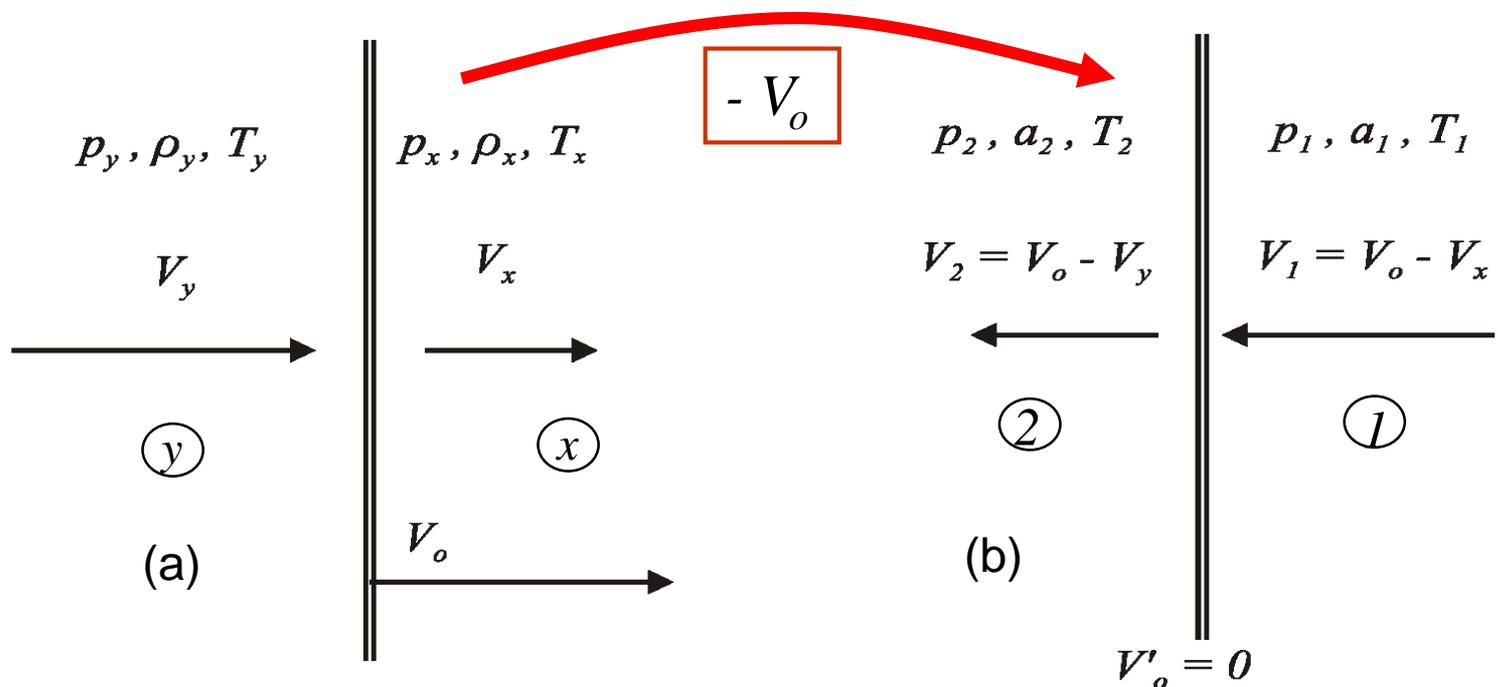
ONDA D'URTO NORMALE NON STAZIONARIA

Nella Fig. (a) è mostrata **un'onda d'urto normale che**, in un sistema di riferimento inerziale Ω , **viaggia a velocità costante V_o** in un fluido con velocità V_x **a monte** (prima del passaggio dell'onda) e V_y **a valle** (dopo l'onda).

Si suppone poi che l'onda che viaggi verso destra e che sia: $V_o > V_x$.

Per rendere l'onda stazionaria, bisogna osservarla in un sistema di riferimento Ω' (sempre inerziale) che si muova rispetto ad Ω con una velocità pari alla V_o e quindi occorre **sottrarre la V_o a tutte le velocità di figura**.

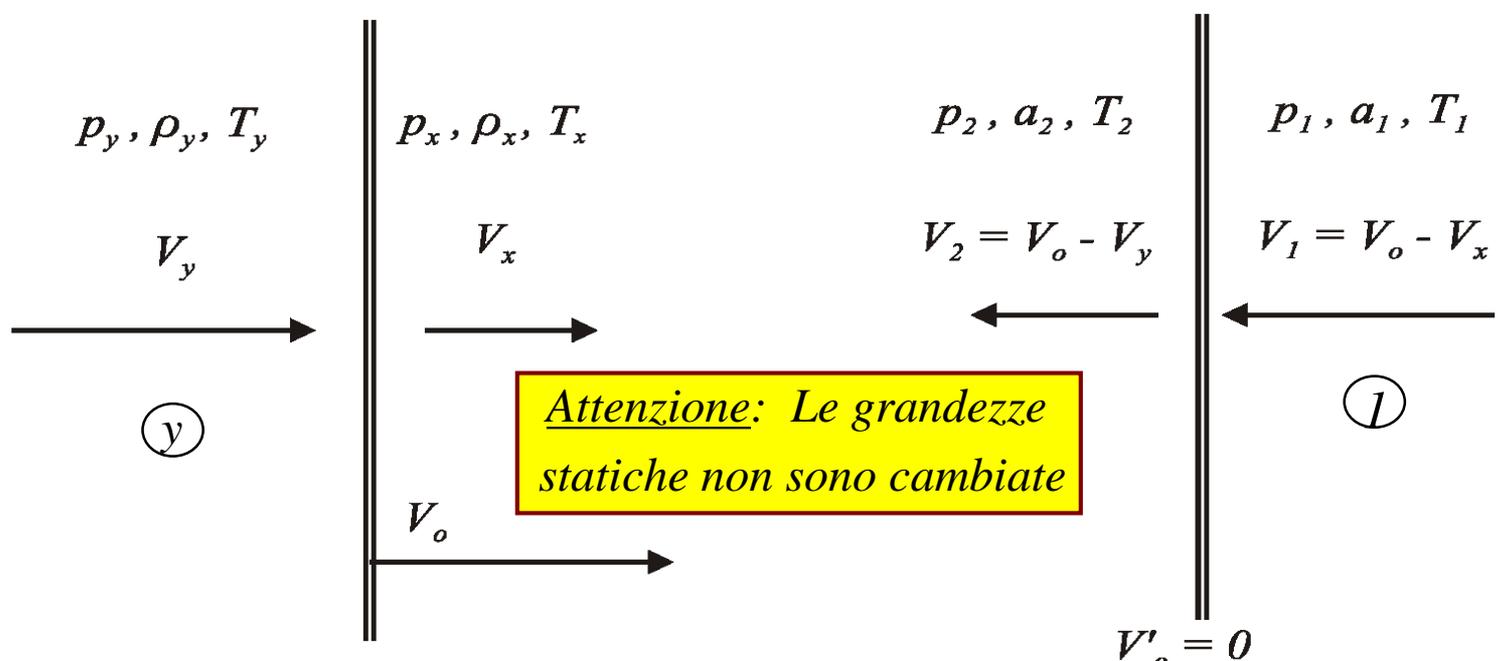
Conviene, allora **invertire i versi delle velocità**, così come fatto in Figura (b).



Occorre poi osservare che, in entrambe le figure, **le condizioni statiche della corrente** (poiché **sempre misurate con uno strumento che comunque si muove alla velocità del fluido**, cioè **solidale alle particelle di fluido**) **sono le stesse qualunque sia il sistema di riferimento**.

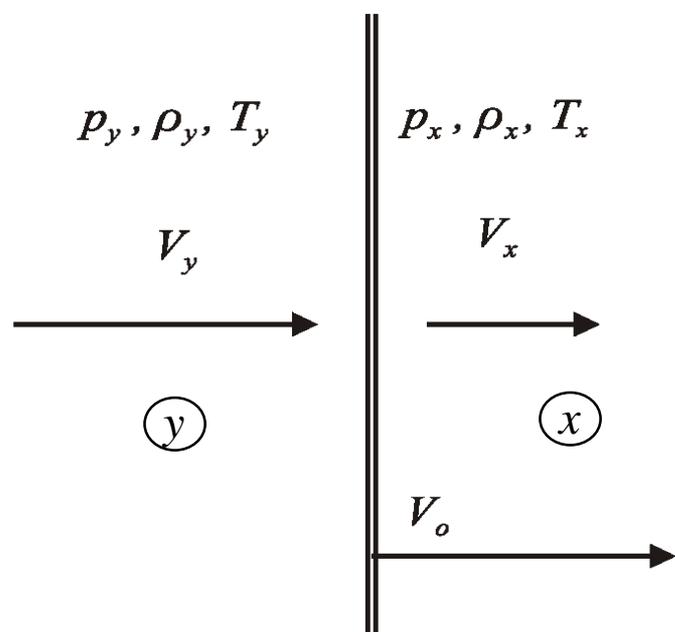
Valgono, quindi, le relazioni:

$$\begin{aligned} p_x &= p_1; & p_y &= p_2; & T_x &= T_1; \\ T_y &= T_2; & a_x &= a_1; & a_y &= a_2 \end{aligned}$$



Tenendo conto delle relazioni precedenti, ***i due numeri di Mach nel sistema di riferimento con l'onda d'urto in movimento***, risultano:

$$M_x = \frac{V_x}{a_1} \quad ; \quad M_y = \frac{V_y}{a_2}$$



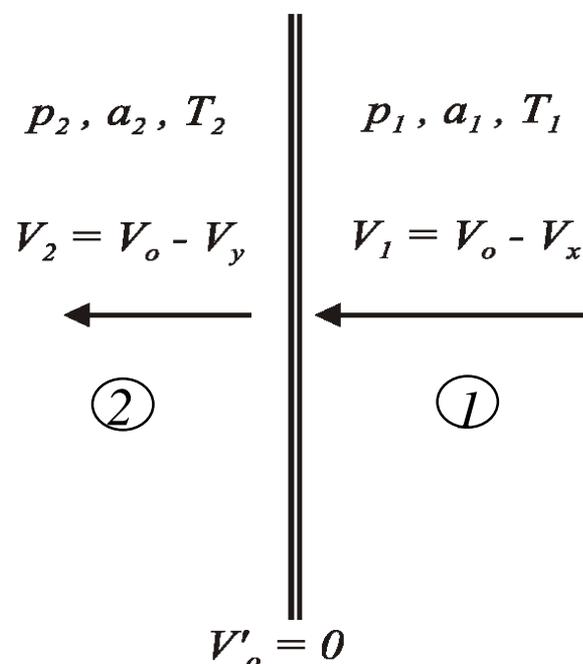
Tenendo conto delle relazioni precedenti, ***i due numeri di Mach nel sistema di riferimento con l'onda d'urto in movimento***, risultano:

$$M_x = \frac{V_x}{a_1} \quad ; \quad M_y = \frac{V_y}{a_2}$$

E, ***nel sistema con l'onda d'urto stazionaria***:

$$M_1 = \frac{V_o - V_x}{a_1} \quad ; \quad M_2 = \frac{V_o - V_y}{a_2}$$

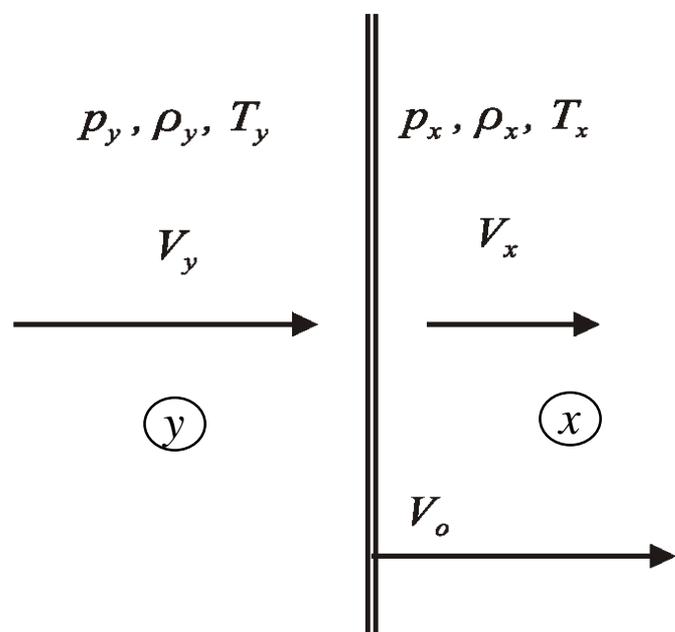
Nel sistema di riferimento con l'onda d'urto stazionaria è possibile, ora, applicare le formule già trovate in precedenza.



Per quanto riguarda le grandezze di ristagno (temperatura e pressione), per **l'onda d'urto in movimento** si ha:

$$T_{ox} = T_x \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right) \neq T_{oy} = T_y \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_y^2 \right)$$

$$p_{ox} = p_x \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} ; p_{oy} = p_y \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_y^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



Per quanto riguarda le grandezze di ristagno (temperatura e pressione), per **l'onda d'urto in movimento** si ha:

$$T_{ox} = T_x \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right) \neq T_{oy} = T_y \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_y^2 \right)$$

$$p_{ox} = p_x \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_x^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} ; p_{oy} = p_y \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_y^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

mentre, per **l'onda d'urto stazionaria**:

$$T_{o1} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) = T_{o2} = T_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)$$

$$p_{o1} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} ; p_{o2} = p_2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Si noti che T_{ox} è, in generale, diversa da T_{oy} mentre, nell'onda stazionaria: $T_{o1} = T_{o2}$. Anche per la p_o può essere $p_{ox} \leq o \geq p_{oy}$.

Pertanto, la soluzione del problema di un'onda d'urto in moto, di cui si conoscano le velocità di propagazione V_o , del suono a_x e del fluido V_x in cui si propaga, si risolve attraverso i seguenti 4 passi successivi:

- l'onda d'urto è resa stazionaria sottraendo la velocità dell'onda a quella del fluido in cui si propaga e determinando il numero di Mach a monte;
- si risolve il problema per quanto riguarda le grandezze statiche e la V_2 con le formule già ricavate per l'onda d'urto stazionaria;
- si calcolano i numeri di Mach per l'onda d'urto in movimento;
- si calcolano infine le grandezze di ristagno per l'onda d'urto in movimento;

La velocità dell'onda non è nota, ma lo sono V_x , V_y e $a_x = a_1$, la relazione:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = (\gamma + 1)M_1^2 \left[2 + (\gamma - 1)M_1^2 \right]^{-1}$$

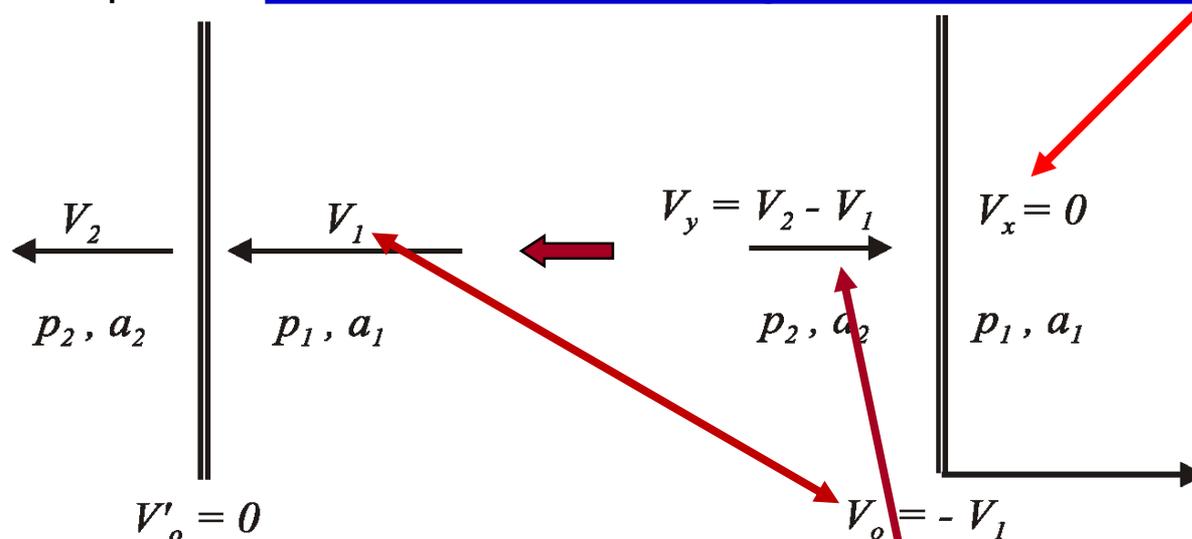
dell'onda stazionaria conduce all'espressione sulla velocità di propagazione dell'onda in funzione di queste velocità:

$$V_o = \frac{(\gamma + 1)V_y - (\gamma - 3)V_x}{4} \pm \left[a_1^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 (V_y - V_x)^2 \right]^{1/2}$$

Delle due soluzioni, occorre, evidentemente, scartare quella con il segno negativo perché priva di significato.



Un caso rilevante è quello per il quale la velocità a monte dell'onda è nulla ($V_x = 0$), cioè quando l'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete:



Dall'esame della figura si possono trarre le seguenti conclusioni:

- poiché la velocità V_1 è maggiore della V_2 , il fluido a valle di un'onda d'urto che si propaga in un fluido in quiete segue l'onda;
- poiché la velocità dell'onda V_o (in modulo) è uguale a V_1 (che, nel sistema di riferimento con l'onda stazionaria, deve essere maggiore di a_1 perché si abbia l'onda d'urto), un'onda d'urto si propaga in un fluido in quiete con una velocità maggiore della velocità del suono nello stesso fluido a_1 .
- Le T_{ox} e p_{ox} sono minori delle T_{oy} e p_{oy} rispettivamente, anche per il riscaldamento e la compressione del fluido in y (che in x non si muove).



Se nel caso precedente per il quale è ancora $V_x = 0$, si conosce la V_y e si vuole ricavare la velocità dell'onda V_o , occorre procedere in questo modo.

Dalla figura, indicando con $-V_y = V_p$, si ha:

$$V_p = V_1 - V_2$$

e dividendo tutto per a_1 :

$$\frac{V_p}{a_1} = \frac{V_1}{a_1} - \frac{V_2}{a_1} = M_1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} M_2$$

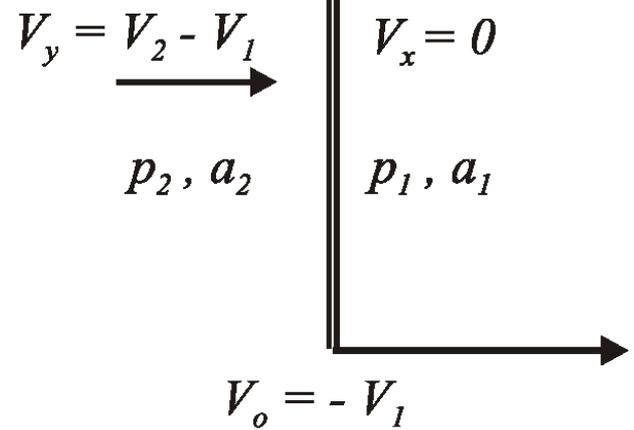
Sostituendo in questa formula:

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) (\gamma - 1 + 2/M_1^2)$$

e, ponendo $M_p = V_p / a_1$, si ha:

$$M_p = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1}$$



La
$$M_p = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1}$$

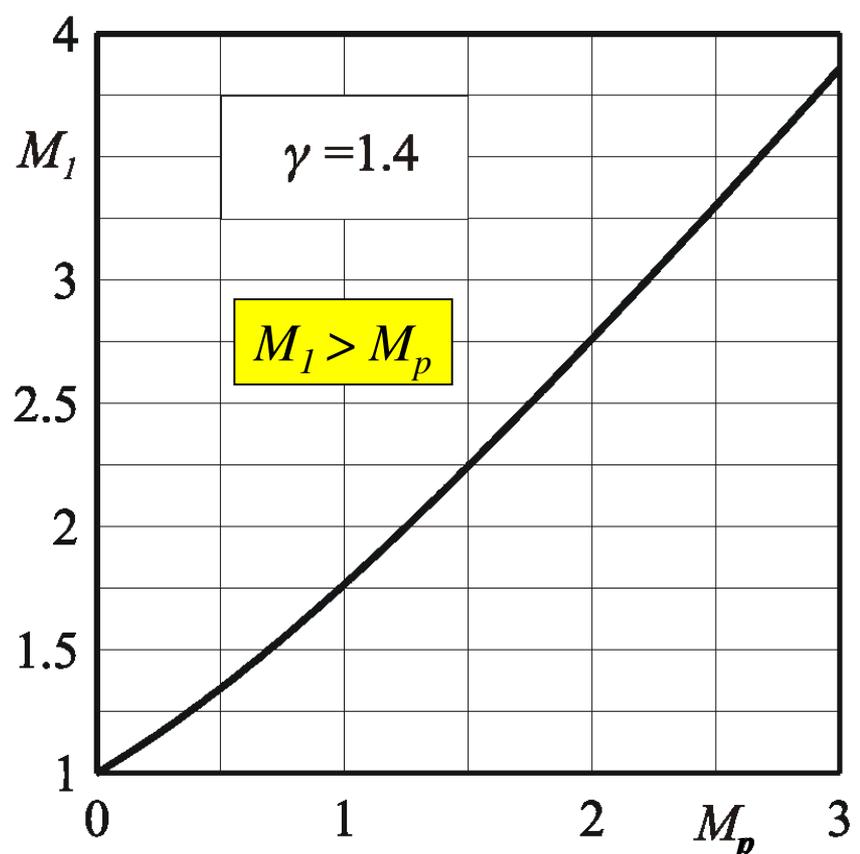
risolta in M_1 (scartando la soluzione negativa) dà luogo alla relazione:

$$M_1 = \frac{\gamma + 1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$$

che è anche rappresentata nella figura a lato per $\gamma = 1.4$.

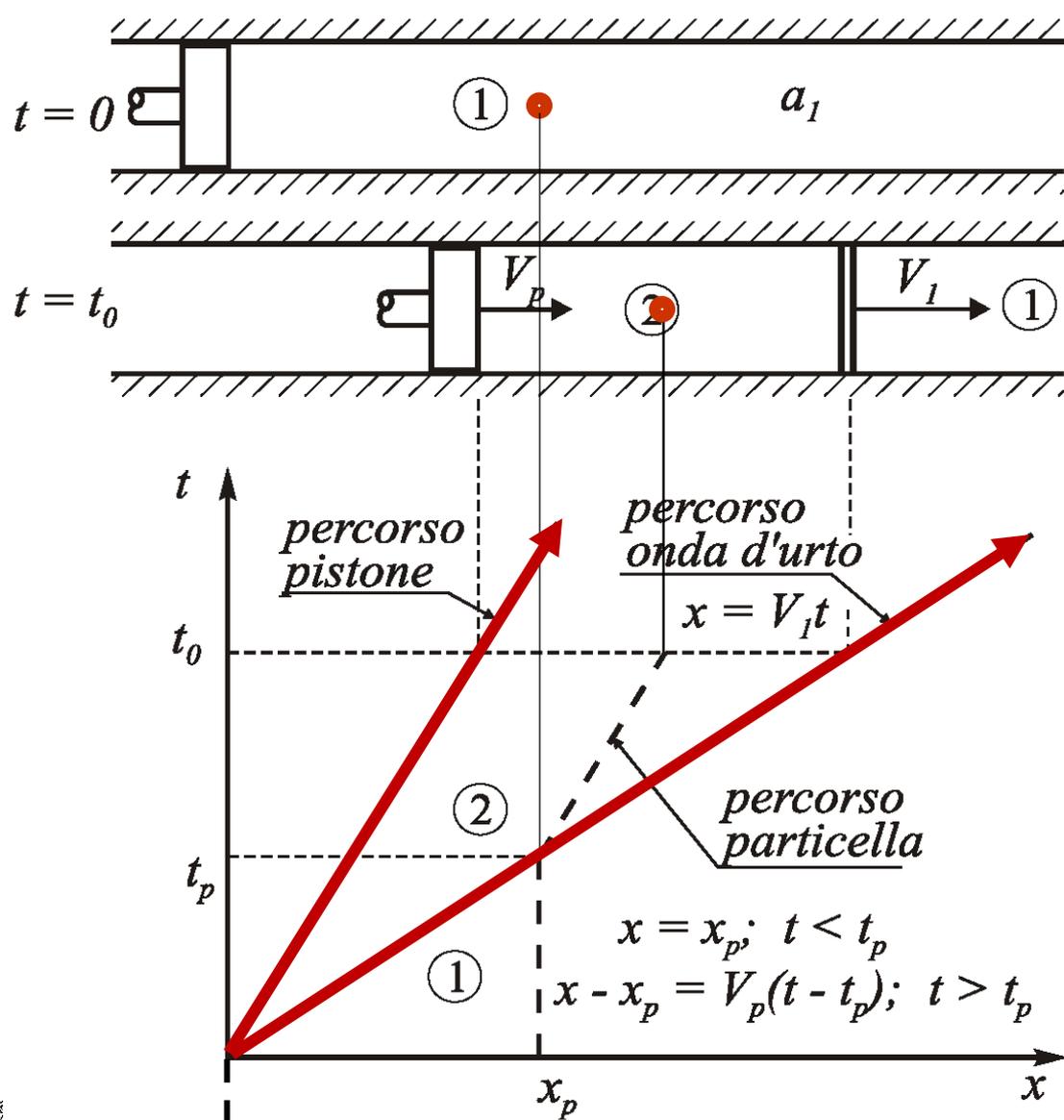
M_1 rappresenta, ovviamente, il numero di Mach, e quindi la velocità, con la quale l'onda si propaga nel mezzo in quiete.

M_p ha il pedice p perchè, come si vedrà tra poco, può assumere il significato di numero di Mach di un pistone che si muove in un condotto.



$$M_1 = \frac{\gamma + 1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}$$

$$M_1 > M_p$$



La relazione precedente consente di determinare la velocità di propagazione dell'onda d'urto nella situazione di figura in cui un pistone, **a partire dall'istante $t = 0$, è improvvisamente accelerato in un condotto alla velocità V_p .**

Nello stesso istante, parte un'onda d'urto normale dalla superficie del pistone con una velocità $V_1 = V_o$, che accelera il fluido a valle di essa alla velocità V_p .

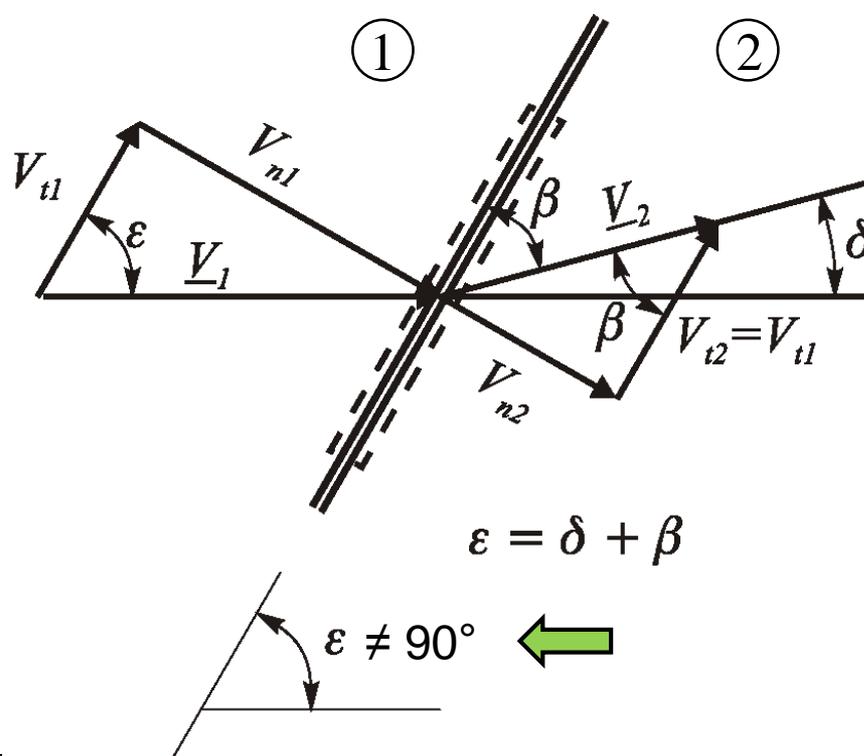
Nella regione ① il fluido è fermo, nella regione ② muove a velocità V_p .

ONDA D'URTO OBLIQUA STAZIONARIA

Nella figura è mostrato il volume di controllo relativo al caso di **un'onda d'urto obliqua stazionaria inclinata di un angolo $\varepsilon \neq 90^\circ$ (detto angolo d'urto)** rispetto alla direzione della corrente a monte.

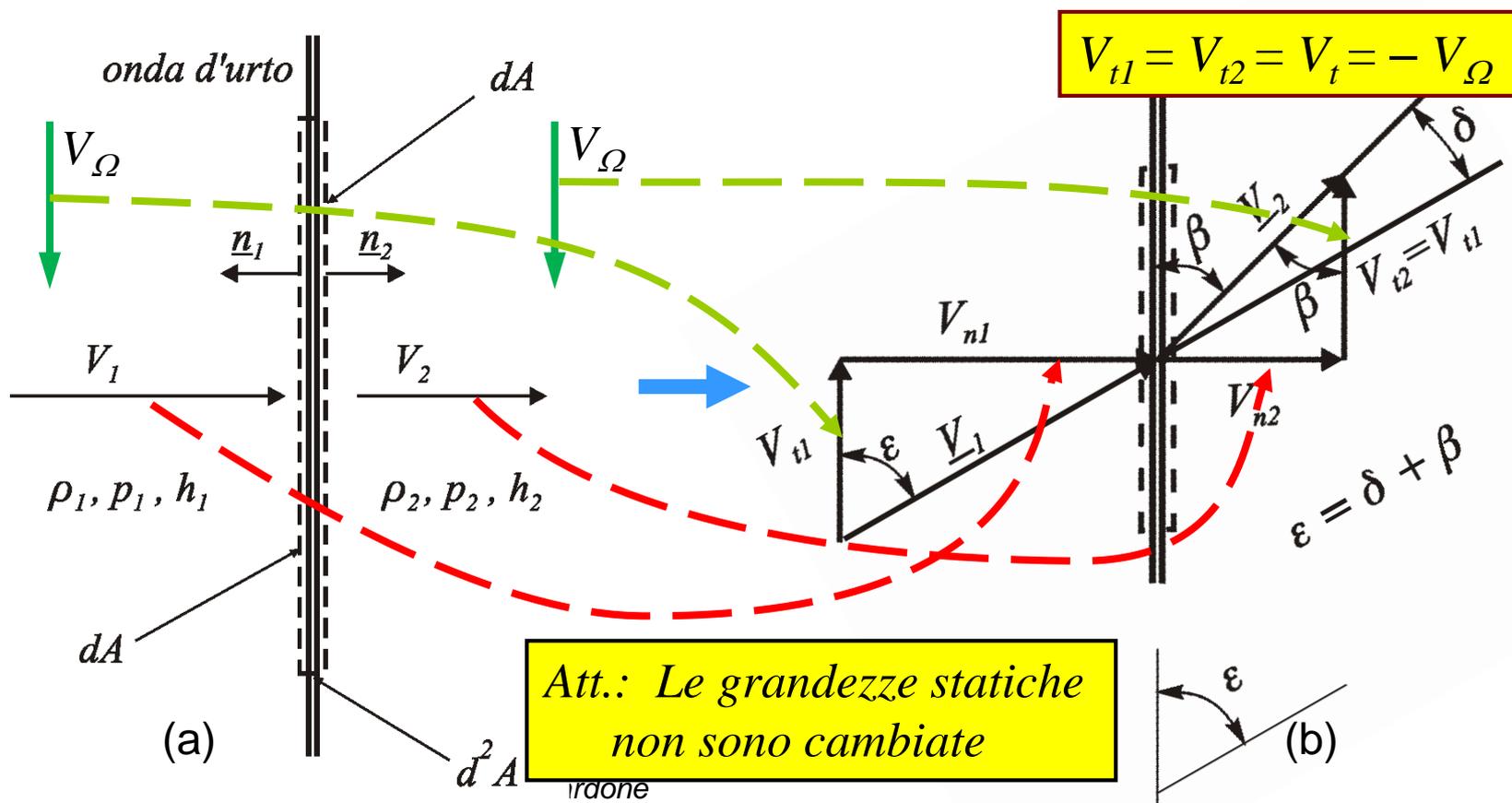
L'onda d'urto obliqua **non è più normale** rispetto alla V_1 .

Questo caso si può derivare da quello dell'onda d'urto normale stazionaria, cambiando il sistema di riferimento inerziale rispetto al quale si scrivono le equazioni del bilancio.

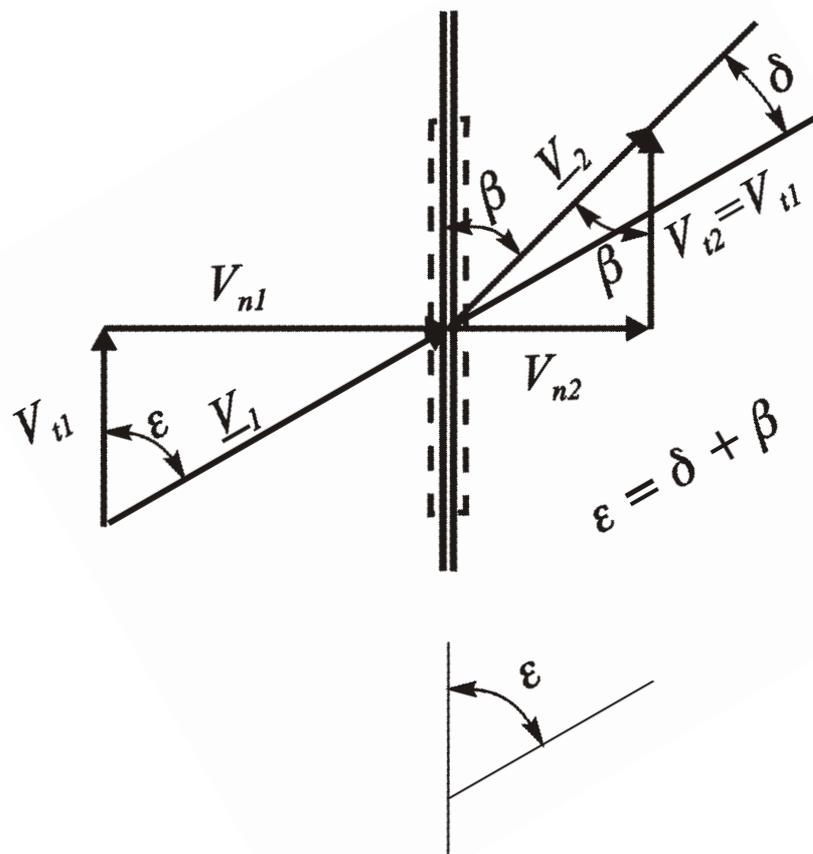


Si consideri nuovamente il volume di controllo dell'onda d'urto normale
 Se, ora, un nuovo sistema di riferimento si muove rispetto a quella inerziale di Fig.(a) dall'alto verso il basso (parallelamente all'onda d'urto) con velocità V_Ω costante, **anche questo sistema sarà inerziale.**

Per l'osservatore solidale a questo nuovo sistema, sia il fluido a monte che quello a valle dell'onda appariranno dotati, oltre che delle preesistenti rispettive velocità V_1 e V_2 , normali all'onda, **anche di una velocità parallela all'onda che è la stessa per entrambi i fluidi** ed è pari a:



Quindi, intuitivamente, è possibile trattare l'onda d'urto obliqua con le stesse relazioni dell'onda d'urto normale purchè si considerino solamente le componenti normali V_{n1} e V_{n2} delle velocità a monte e a valle.



Sostituendo allora V_{n1} e V_{n2} rispettivamente al posto di V_1 e V_2 nell'**equazione di conservazione della massa**, per un'onda d'urto **obliqua** si ottiene:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}}$$

L'**equazione del bilancio della quantità di moto** dà luogo a:

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 - p_2 + \rho_2 V_2^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2}$$

che ovviamente rappresenta la **proiezione, in direzione normale** all'onda d'urto, dell'equazione vettoriale:

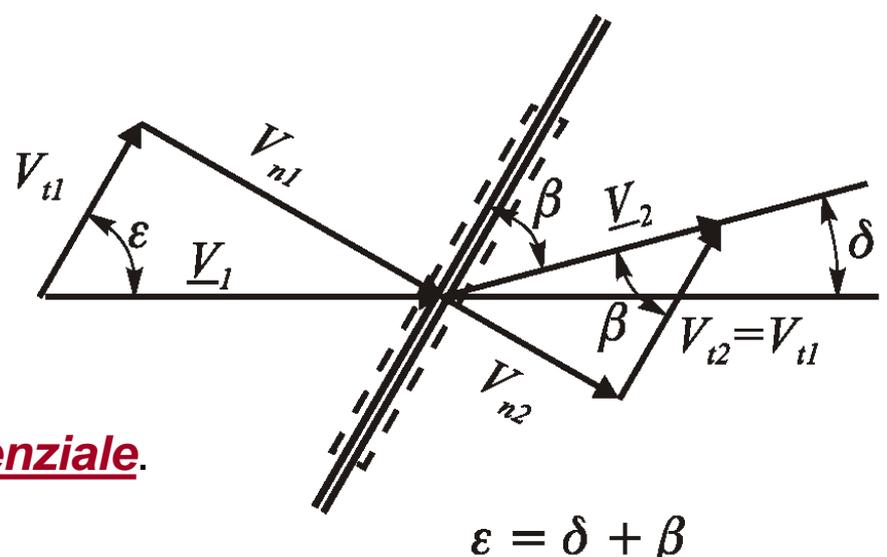
$$dm(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + dA(p_1 \underline{n}_1 + p_2 \underline{n}_2) = 0$$

L'**altra proiezione, nella direzione tangenziale** all'onda d'urto, dà luogo invece alla:

$$\rho_1 V_{n1} V_{t1} = \rho_2 V_{n2} V_{t2}$$

che, per l'equazione di continuità, mostra:

$$\boxed{V_{t1} = V_{t2}}$$



$$\epsilon = \delta + \beta$$

costanza della componente tangenziale.



La costanza della componente tangenziale della velocità, associata alla riduzione della componente normale, genera la deviazione della corrente di un angolo δ (detto **angolo di deviazione della corrente**).

La sostituzione di V_{n1} e V_{n2} rispettivamente al posto di V_1 e V_2 nella:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = H = \text{cost}$$

conduce a una forma strana dell'**equazione di conservazione dell'energia** (l'energia cinetica non ha componenti!) e in particolare:

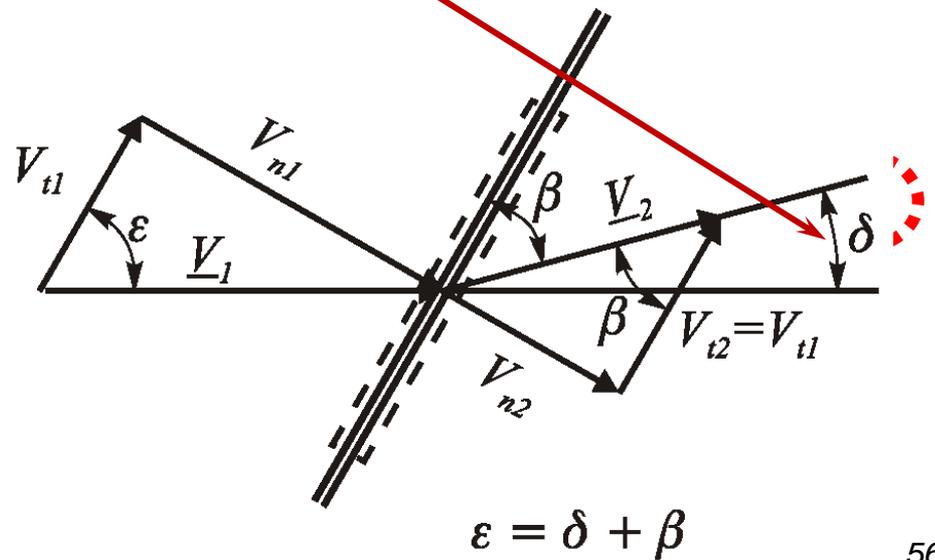
$$h_1 + \frac{V_{n1}^2}{2} = h_2 + \frac{V_{n2}^2}{2}$$

ma: $V_{t1} = V_{t2}$

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

$$p_1 + \rho_1 V_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 V_{n2}^2$$

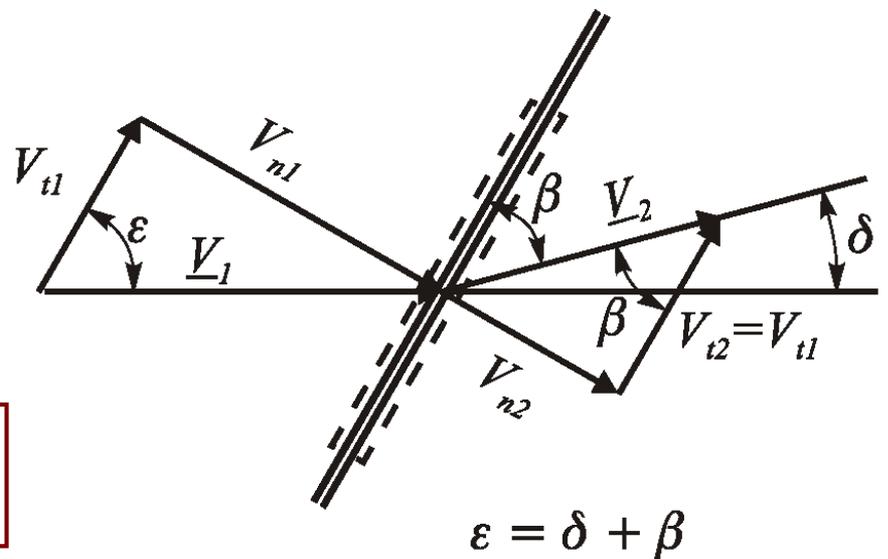
Un'onda d'urto obliqua è quindi riconducibile ad un'onda d'urto normale purché si considerino le sole componenti normali della velocità V_{n1} e V_{n2} .



$$\epsilon = \delta + \beta$$

Per poter calcolare un'onda d'urto obliqua, si introduce quindi **la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda d'urto** definita come:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \epsilon}{a_1} = M_1 \sin \epsilon$$



$$\epsilon = \delta + \beta$$

L'introduzione di M_{n1} , **che ovviamente deve essere maggiore o uguale ad 1**, risulta particolarmente utile per questo motivo:

I parametri termofluidodinamici (statici) a valle dell'onda d'urto obliqua (inclinata rispetto alla corrente con un angolo ϵ) **risultano identici a quelli a valle di un'onda d'urto normale** ($\epsilon = 90^\circ$) **per la quale il numero di Mach a monte sia proprio uguale a M_{n1} .**

Ovviamente, **anche il numero di Mach a valle andrà riguardato come componente normale del numero di Mach a valle** dell'onda d'urto obliqua:

$$M_{n2} = \frac{V_{n2}}{a_2} = \frac{V_2 \sin \beta}{a_2} = M_2 \sin \beta = M_2 \sin(\epsilon - \delta)$$

Ne consegue che tutte le relazioni viste per le onde d'urto normali stazionarie sono ancora valide, purché M_1 e M_2 siano rispettivamente sostituiti con le quantità $M_{n1} = M_1 \sin \varepsilon$ e $M_{n2} = M_2 \sin \beta$.

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad \rightarrow \quad M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon + 2}{(2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \sin^2 \beta}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 - \gamma + 1) \quad \rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = (\gamma + 1)^{-2} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \left[\gamma - 1 + 2(M_1^2 \sin^2 \varepsilon) \right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left[2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right]^{-1}$$

$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left(\gamma - 1 + 2M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right)^\gamma (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$



$$\frac{P_{o2}}{P_{o1}} = \left[(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} \left(\gamma - 1 + 2M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right)^\gamma (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1) \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Occorre qui osservare esplicitamente che **non è formalmente corretto ricavare il rapporto delle pressioni di ristagno, dalla relazione relativa alle onde d'urto normali** poiché questa non tiene conto della componente tangenziale della velocità.

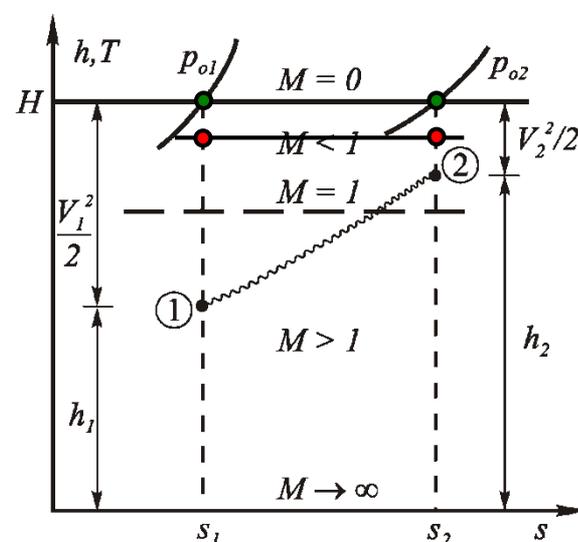
Tuttavia, se sul piano h - s si individuano i due stati di ristagno normali (in rosso), essi risulteranno allineati in orizzontale, così come lo saranno i due stati totali (in verde) i quali si ottengono aggiungendo ai primi lo stesso contributo entalpico relativo all'uguale componente tangenziale della velocità.

Gli stati totali avranno, ovviamente, lo stesso salto entropico di quelli normali.

La relazione precedente è quindi giustificata dalla:

$$s_2 - s_1 = -R \ln \frac{P_{o2}}{P_{o1}}$$

Per un gas più che perfetto si ha: stesso salto entropico, stesso rapporto delle pressioni di ristagno.



$$\frac{p_2}{p_1} = (\gamma + 1)^{-1} (2\gamma M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \gamma + 1)$$

Si nota che, per dati M_1 e p_1 , l'aumento di pressione attraverso l'onda d'urto dipende dall'angolo ε che l'onda forma con la direzione della corrente a monte.

In particolare, l'onda d'urto normale dà luogo al massimo aumento di pressione attraverso l'urto ($\sin^2 \varepsilon = 1$). Al diminuire di ε , la quantità $\sin^2 \varepsilon$ diminuisce anch'essa, e quindi il rapporto p_2/p_1 diminuisce.

Il valore limite (inferiore) dell'angolo d'urto:

$$\varepsilon_{min} = \mu = \arcsin(1/M_1)$$

dà luogo a $p_2/p_1 = 1$, che corrisponde al caso di un'onda di Mach ($M_{n1} = 1$) che non produce alcun aumento di pressione della corrente.

Valori di $\varepsilon < \mu$ non sono possibili perché la componente normale del numero di Mach a monte dell'onda risulterebbe inferiore all'unità.

Si ricordi a tal proposito la relazione già vista:

$$M_{n1} = \frac{V_{n1}}{a_1} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{a_1} = M_1 \sin \varepsilon$$



Resta ora da determinare l'espressione che lega M_1 , ε e δ . Si ha:

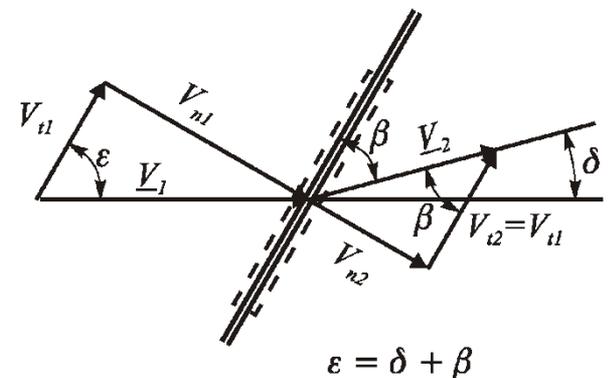
$$V_{t1} = V_{t2} \quad ; \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\cancel{V_{t2}} \cos \varepsilon}{\cos \beta \cancel{V_{t1}}} = \frac{\cos \varepsilon}{\cos \beta}$$

e ricordando:

$$\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$$

si ottiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{V_1 \sin \varepsilon}{V_2 \sin \beta} = \frac{\cos \beta \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon \sin \beta} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \beta} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan(\varepsilon - \delta)}$$



Sostituendo nella:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left[2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right]^{-1}$$

si ricava:

$$\frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \varepsilon} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan(\varepsilon - \delta)}$$

$\tan(x - y) = (\tan x - \tan y) / (1 + \tan x \tan y)$

da cui sviluppando e semplificando si ottiene, infine, l'angolo di deviazione δ :

$$\tan \delta = \left(\frac{\gamma + 1}{2(\sin^2 \varepsilon - 1/M_1^2)} - 1 \right)^{-1} \cot \varepsilon$$



$$\tan \delta = \left(\frac{\gamma + 1}{2 \left(\sin^2 \varepsilon - 1/M_1^2 \right)} - 1 \right)^{-1} \cot \varepsilon$$



Da questa relazione, è interessante notare che la deviazione della corrente è nulla sia nel caso per il quale:

$$\cot \varepsilon = 0 \rightarrow \varepsilon = 90^\circ \qquad \cot \varepsilon = 1/\tan \varepsilon$$

corrispondente all'onda d'urto normale, così come nel caso in cui:

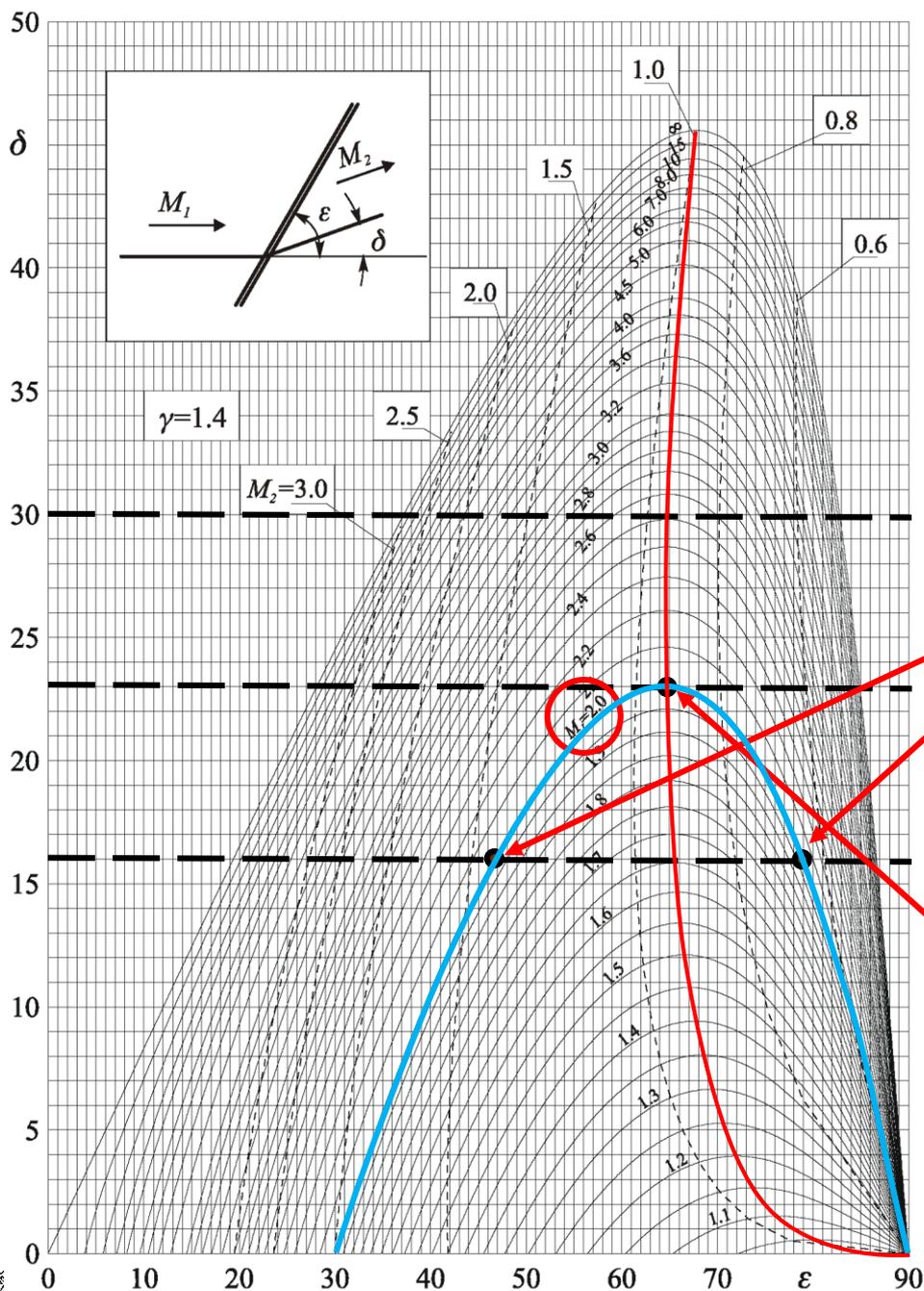
$$\sin^2 \varepsilon_{min} - 1/M_1^2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad M_1 \sin \varepsilon_{min} = 1$$

relativo a quella che è stata già definita onda di Mach, la cui inclinazione (nel seguito sempre indicata con il simbolo μ) risulta come già scritto pari a:

$$\varepsilon_{min} = \mu = \arcsin(1/M_1)$$

L'onda di Mach, dunque, è quella per la quale il numero di Mach normale è pari ad 1 per cui essa non comporta alcuna variazione finita delle proprietà termofluidodinamiche del fluido.

Vediamo ora graficamente la dipendenza di δ da ε e M_1 .



Per un dato numero di Mach e per

$$\tan \delta = \left(\frac{\gamma + 1}{2 \left(\sin^2 \varepsilon - 1/M_1^2 \right)} - 1 \right)^{-1} \cot \varepsilon$$

d'urto ε ;

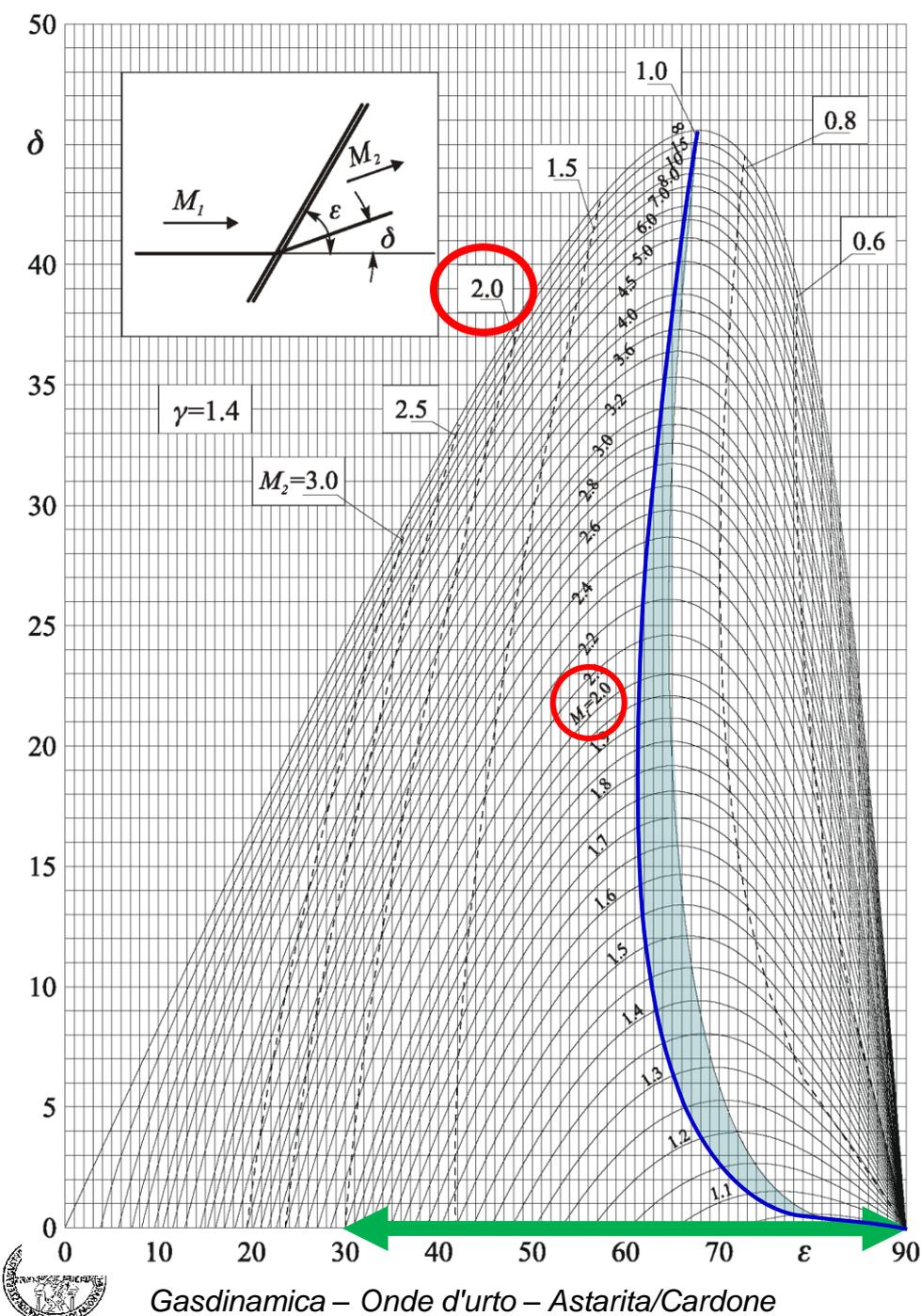
- **una sola soluzione** (all'apice della curva del dato numero di Mach);
- **nessuna soluzione.**

Nel caso delle due soluzioni, la prima (valore di ε più basso) è detta **soluzione debole** mentre l'altra **soluzione forte**.

Infatti, per un dato numero di Mach a monte dell'onda d'urto, **valori maggiori di ε corrispondono ad un più elevato numero di Mach normale e di conseguenza ad una più alta intensità di urto.**

La **soluzione unica** corrisponde al caso di **massima deviazione possibile della corrente** δ_{max} per un dato numero di Mach.





L'assenza di soluzioni per $\delta > \delta_{max}$ sta a significare che, se alla corrente è imposta una deviazione maggiore di quella massima possibile per quel dato numero di Mach, non si può deviare la corrente con una semplice onda d'urto obliqua. Si vedrà poi cosa succede.

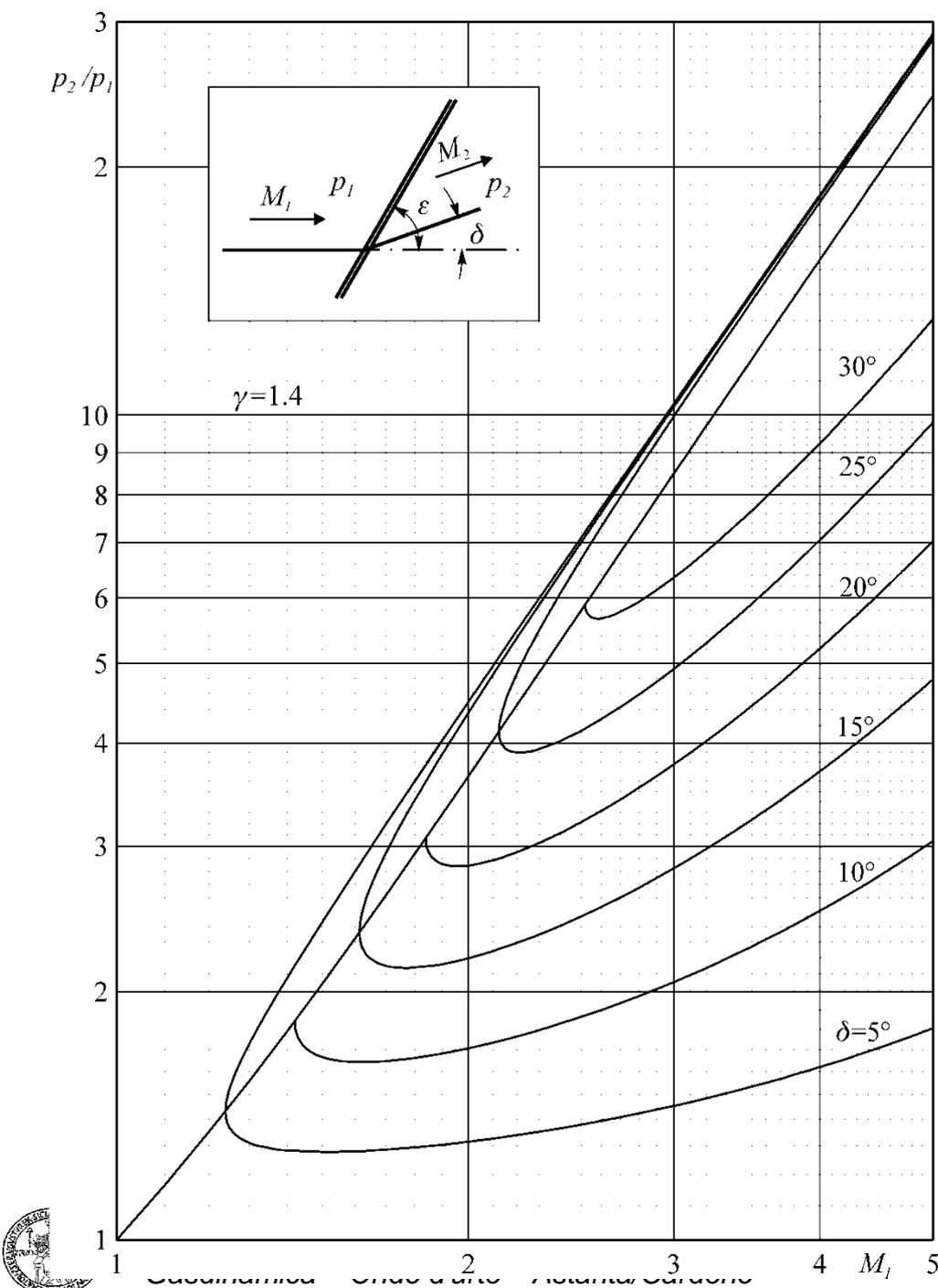
In figura sono anche indicati (curve tratteggiate) alcuni valori di M_2 .

In particolare la curva $M_2 = 1$ mostra:

la soluzione forte conduce sempre ad un valore di $M_2 < 1$,

la soluzione debole dà luogo quasi sempre a $M_2 > 1$, salvo che nella falce vicino all'angolo di deviazione massima della corrente per la quale $M_2 < 1$.

L'angolo ϵ varia tra μ e 90° .

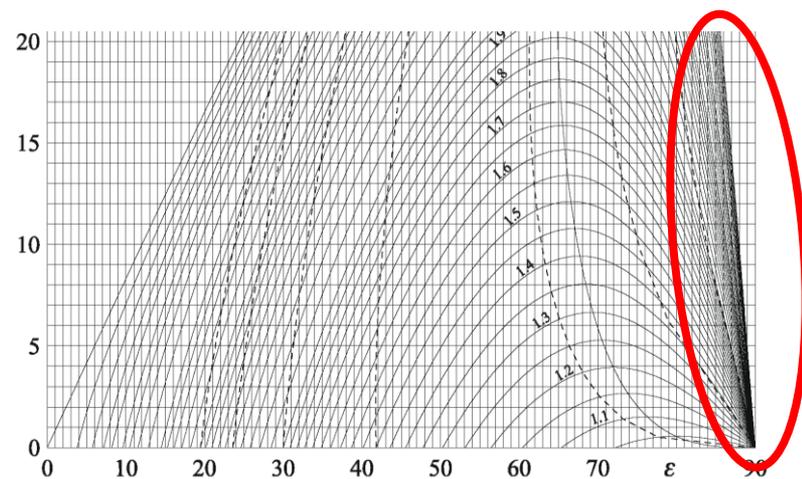


Nella figura a lato è diagrammato, in scala bilogaritmica il rapporto delle pressioni in funzione del numero di Mach a monte dell'onda, per diversi valori dell'angolo di deviazione δ .

La soluzione forte e quella debole sono separate dalla curva luogo dei massimi delle curve della figura precedente.

La soluzione forte dà luogo ad una compressione abbastanza indipendente da δ .

A tal proposito si ricordi la forte pendenza delle curve soluzione forte.



MOTO SUPERSONICO SU UN DIEDRO

Si consideri un flusso supersonico uniforme (per semplicità considerato **non viscoso**) su una parete che ad un certo punto devia bruscamente di un angolo δ per la presenza di una **concavità**, ovvero di un **diedro infinito** con angolo di semiapertura anche esso uguale a δ .

In dipendenza dai valori di M_1 e di δ , sono possibili i tre comportamenti prima descritti: **due soluzioni** con valori distinti dell'angolo ε ; **una sola soluzione, nessuna soluzione**.



a) **Concavità angolosa**

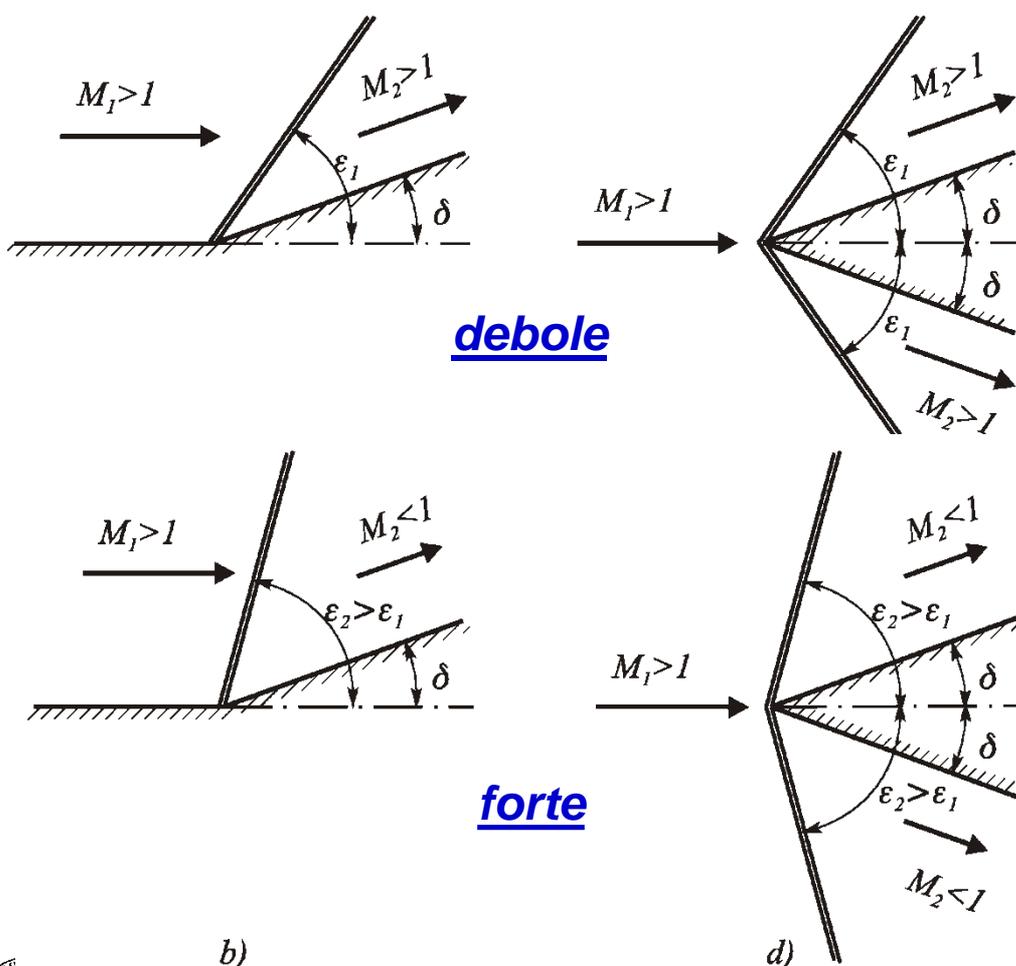
b) **Diedro (bidimensionale piano)**

Una prima possibilità è quella in cui l'angolo di deviazione δ cui la corrente deve essere soggetta risulta **minore dell'angolo di deviazione massima** corrispondente al valore di M_1 .

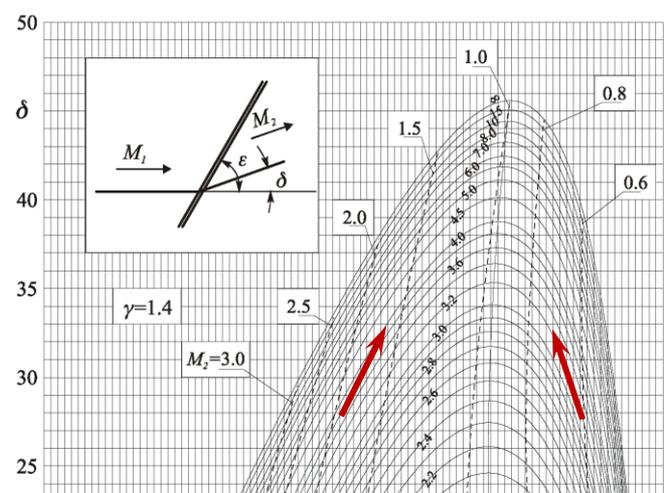


In questo caso particolare ($\delta < \delta_{max}$) sono teoricamente possibili entrambe le soluzioni, **debole e forte**.

L'esperienza mostra che la **soluzione che fisicamente accade in questi casi è quella debole**.



All'aumentare dell'angolo di deviazione δ , e/o al diminuire del numero di Mach a monte, i due angoli di inclinazione ε delle onde d'urto, relativi alla soluzione debole e a quella forte, tendono ad avvicinarsi sino a che coincidono e la soluzione diventa unica.



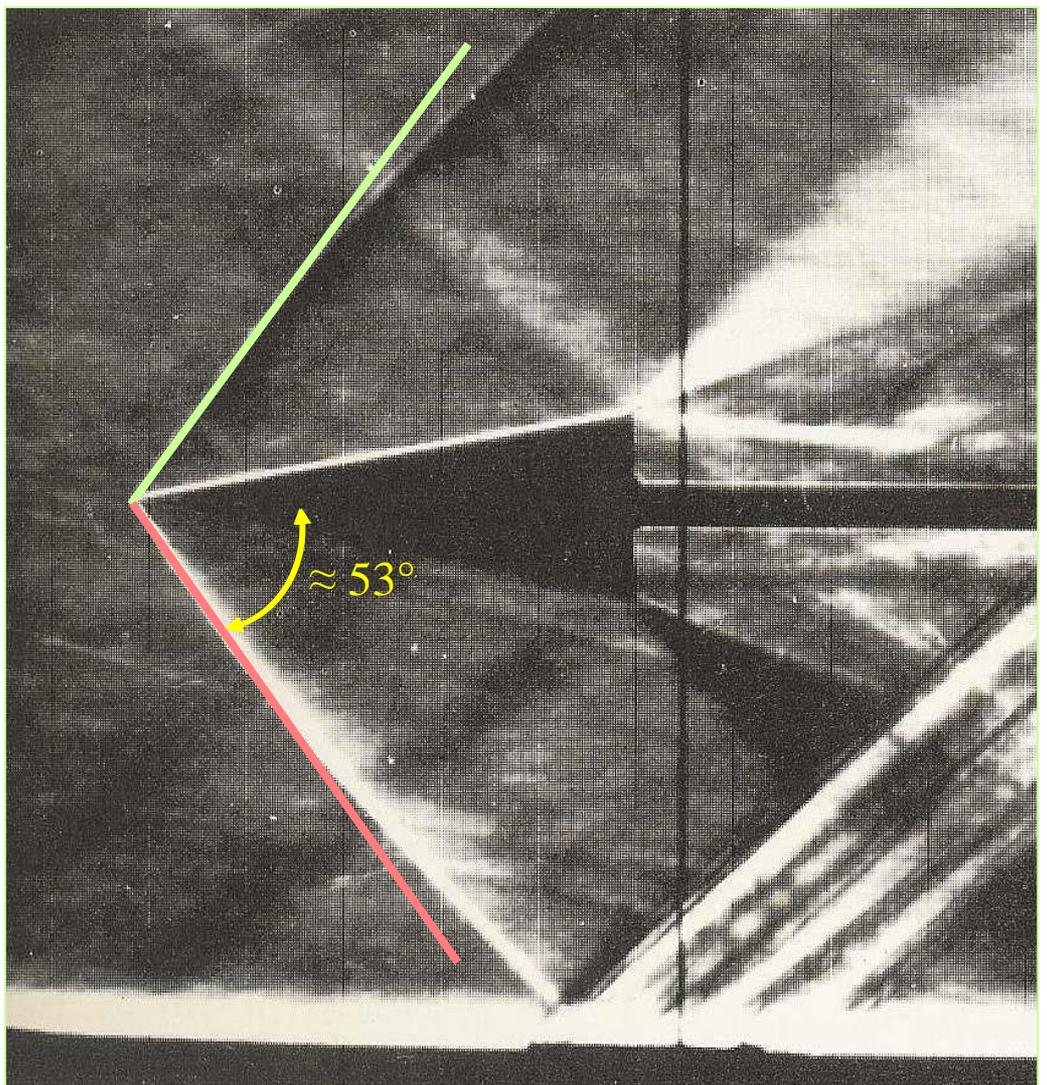
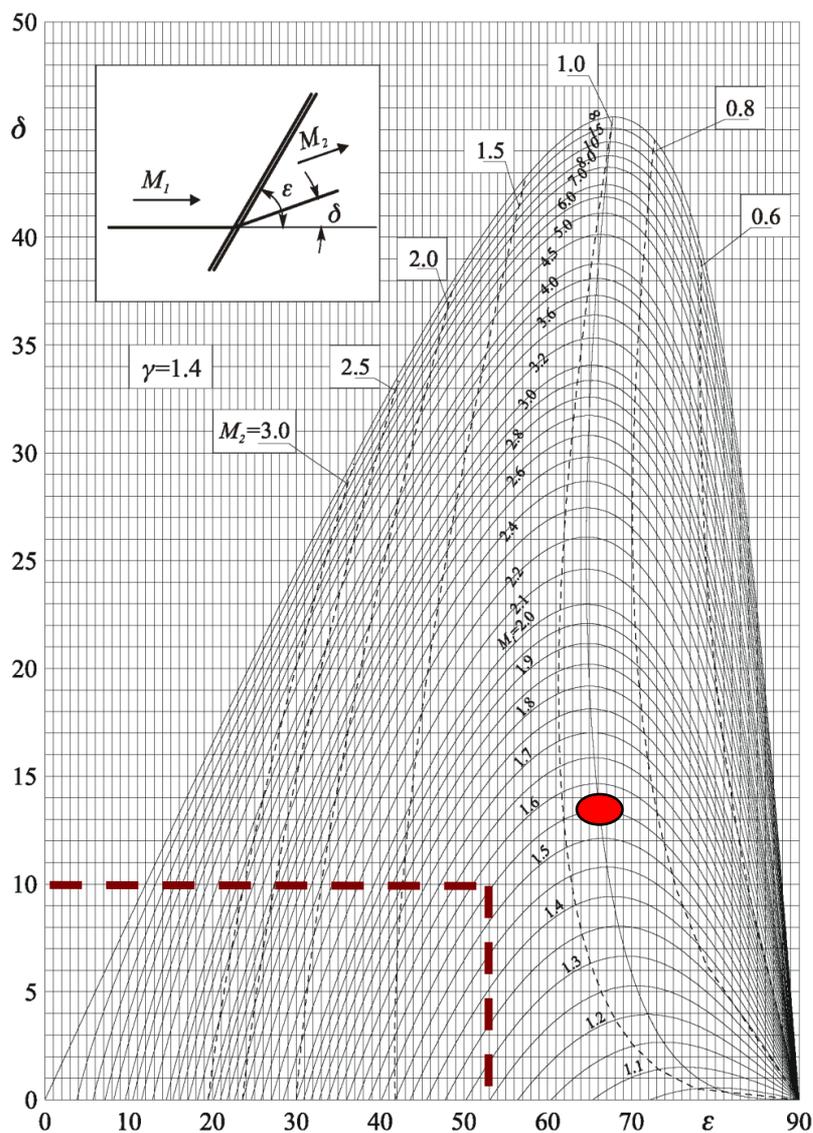
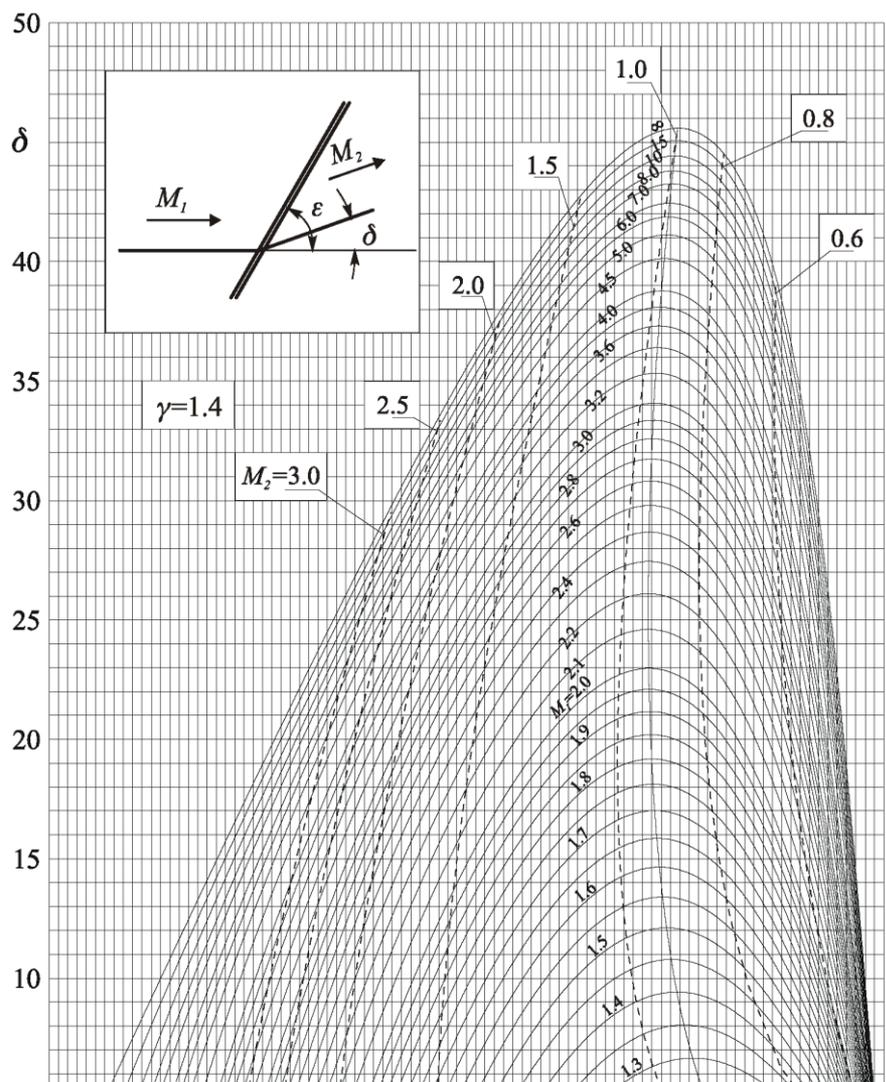


Immagine Schlieren di un flusso supersonico di aria su un diedro con $M_1 = 1.56$ e $\delta = 10^\circ (< \delta_{max})$.

Si noti che la soluzione in questo caso è la debole



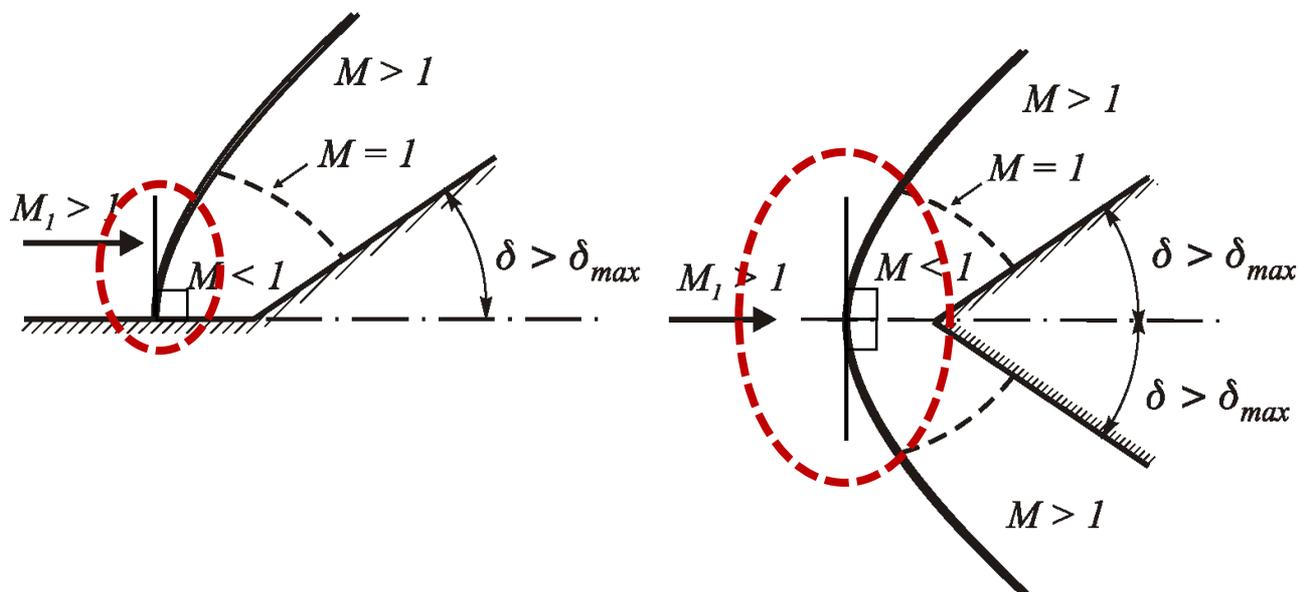
Per $\delta > \delta_{max}$ non esiste un'onda d'urto obliqua in grado di deviare la corrente dell'angolo δ . Nel caso di $\gamma = 1.4$, ciò accade, ad es., qualunque sia il numero di Mach a monte della corrente, se $\delta > 45.58^\circ$ (limite per $M \rightarrow \infty$).



Per $\delta > \delta_{max}$ non esiste un'onda d'urto obliqua in grado di deviare la corrente dell'angolo δ . Nel caso di $\gamma = 1.4$, ciò accade, ad es., qualunque sia il numero di Mach a monte della corrente, se $\delta > 45.58^\circ$ (limite per $M \rightarrow \infty$).

L'onda d'urto allora si stacca dal punto angoloso e si sposta a monte di quest'ultimo (**onda d'urto staccata**).

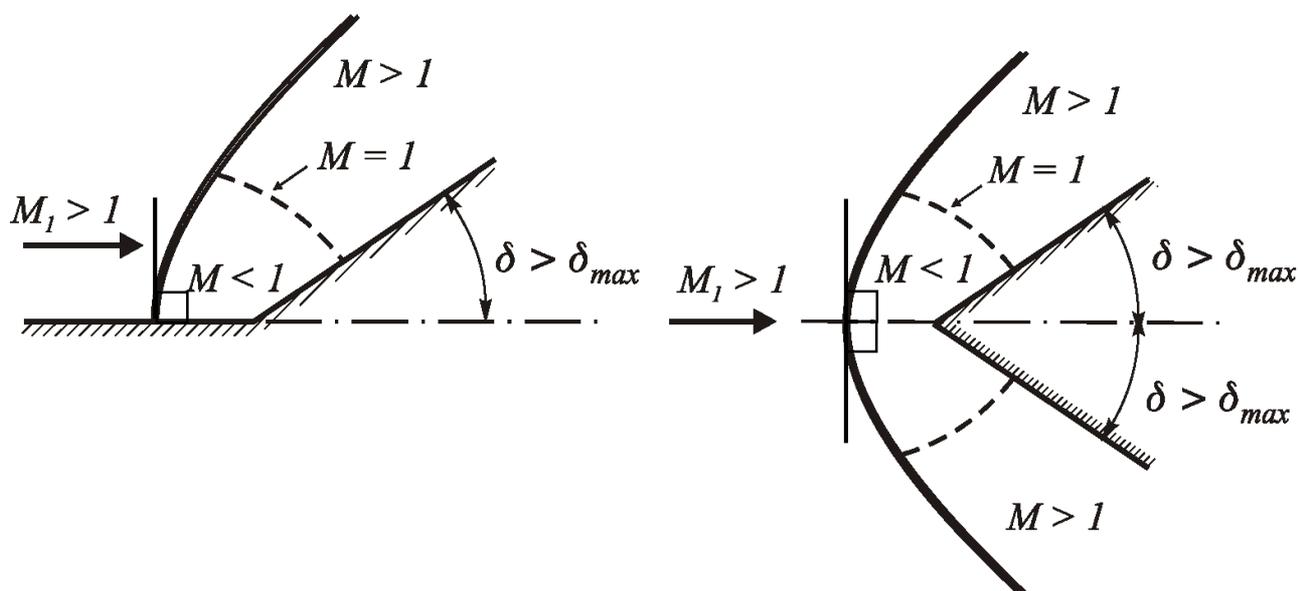
Poiché nel caso di flusso su parete, su questa (o sul piano di mezzeria del diedro nel caso del diedro) **la corrente non deve essere deviata**, e poiché le uniche onde che non deviano la corrente sono quelle normali o quelle di Mach, l'onda d'urto sulla parete (o sul piano di mezzeria del diedro) deve essere **necessariamente normale** alla direzione della corrente.



L'onda d'urto, che sulla parete, o sul piano di mezzeria, è normale alla corrente e presenta alti valori di ε nelle sue vicinanze, rende il moto subsonico permettendo, perciò, al flusso di deviare di un angolo maggiore di δ_{max} .

Man mano che ci si allontana dalla parete (o dal piano di mezzeria) l'onda d'urto diventa progressivamente meno verticale (ε diminuisce), e quindi meno forte, ed il numero di Mach, a valle di essa, tende ad aumentare sino a poter diventare supersonico.

Le linee tratteggiate rappresentano le **linee soniche** (sulle quali $M = 1$).



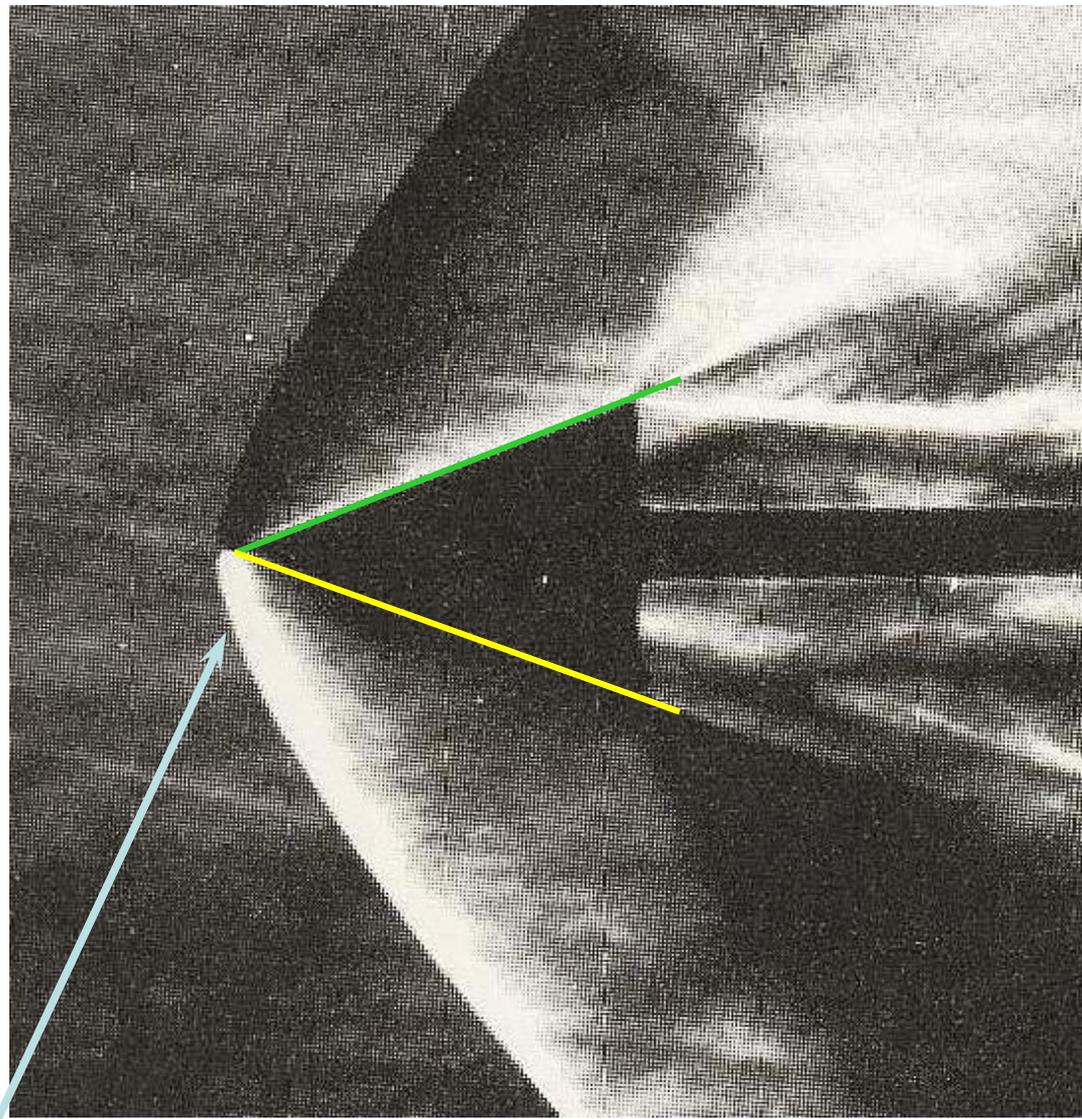
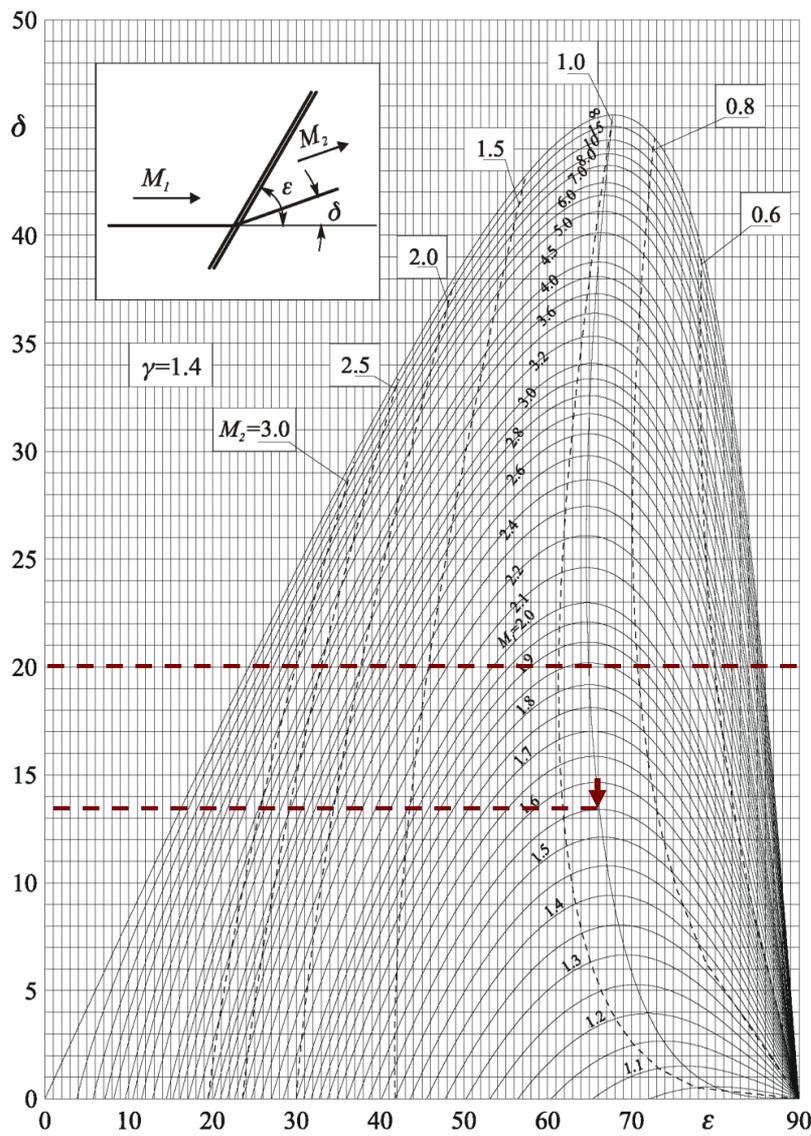


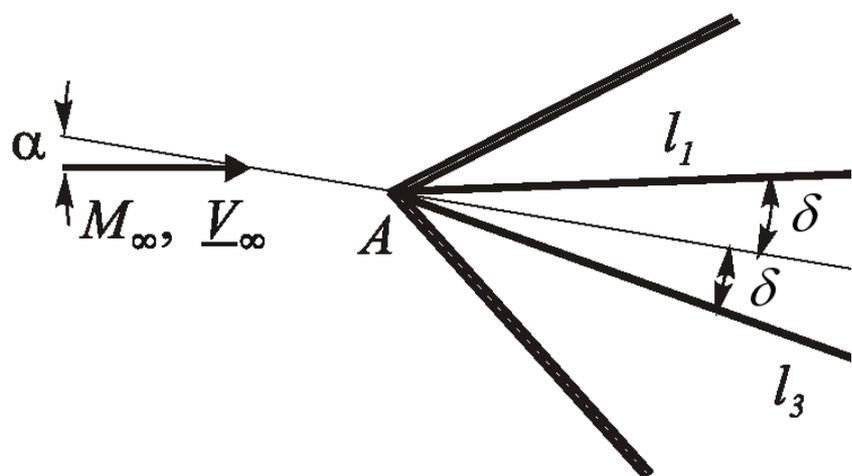
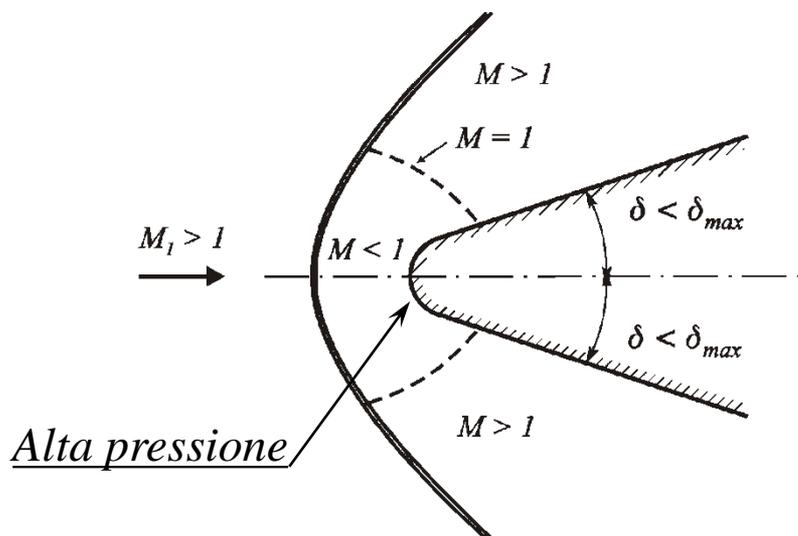
Immagine Schlieren di un flusso supersonico di aria su un cuneo con $M_1 = 1.56$ e $\delta = 20^\circ (> \delta_{max})$. *Si noti l'onda d'urto staccata al vertice.*

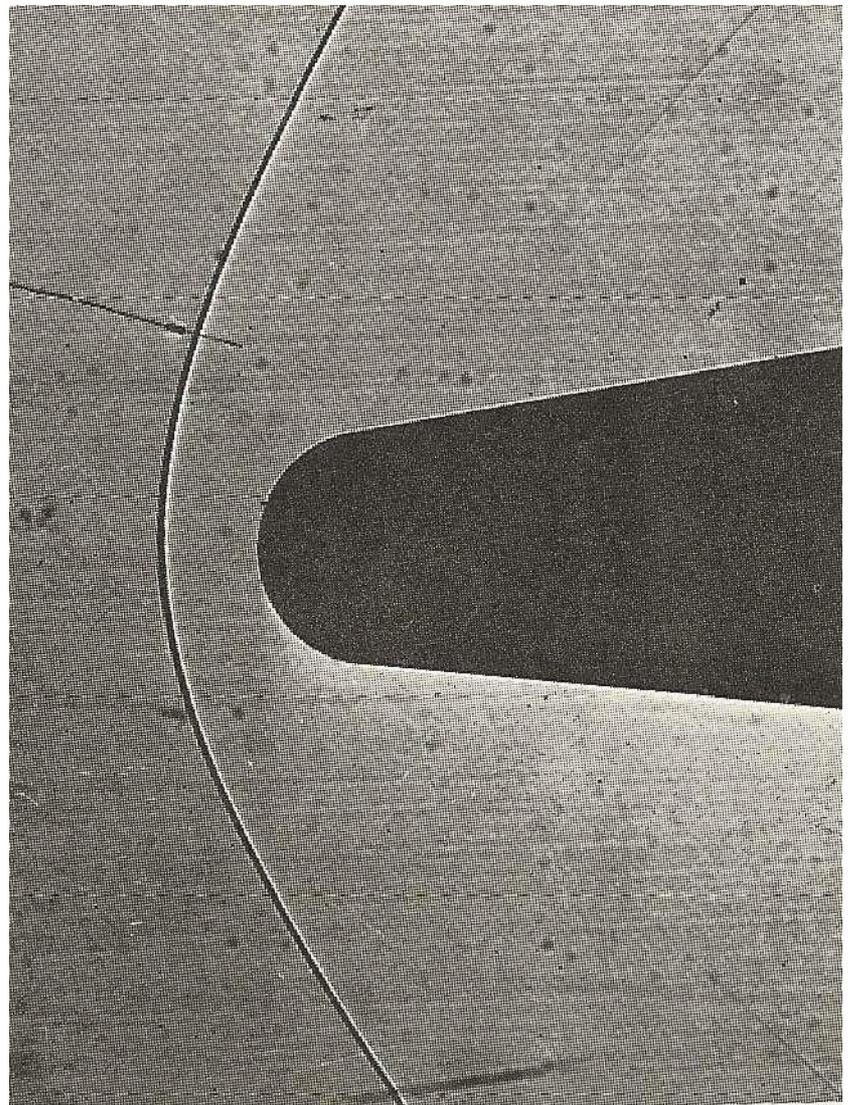
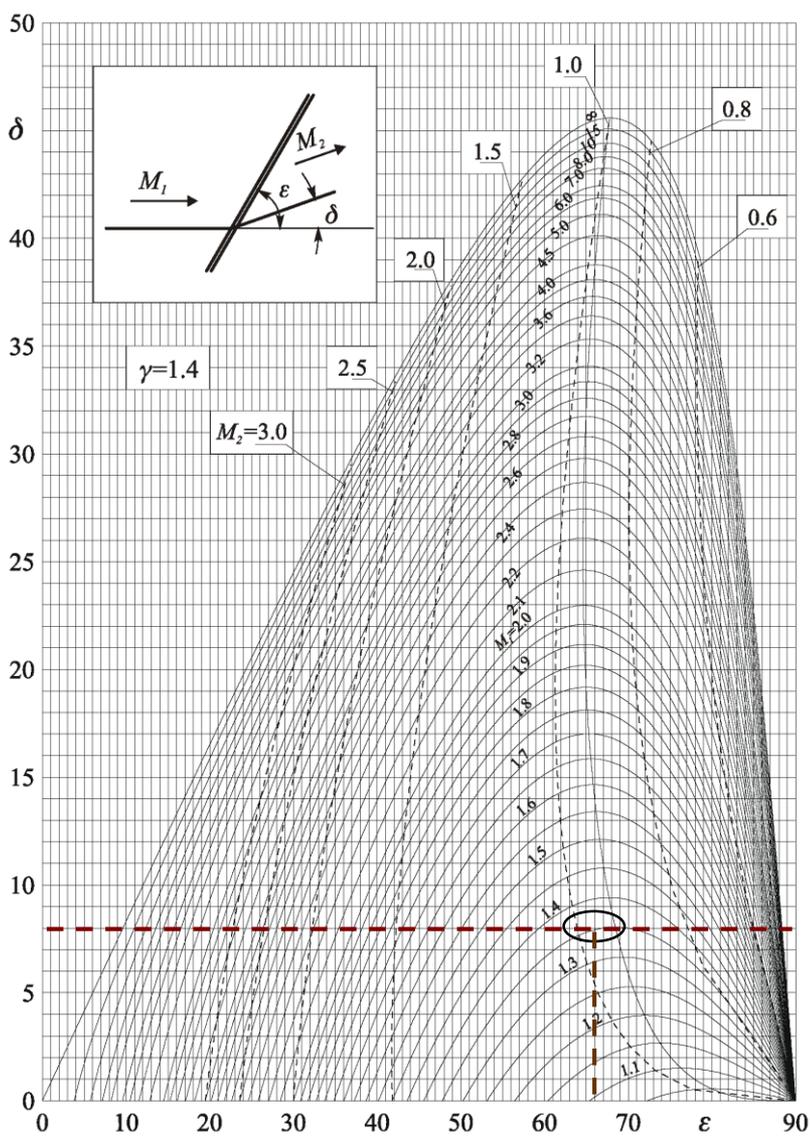
Ovviamente, l'onda obliqua in prossimità del vertice è una soluzione forte

Va poi fatto osservare che un corpo definito **tozzo (non affilato)**, in una corrente supersonica, anche nel caso in cui l'angolo di inclinazione delle sue pareti a valle del bordo di attacco risulti minore dell'angolo di deviazione massimo, comporterà senz'altro la presenza di un'onda d'urto staccata dal corpo in quanto l'angolo di deviazione sull'asse risulta maggiore di δ_{max} .

In ogni caso, **se un corpo in regime supersonico deve avere un basso coefficiente di resistenza, è preferibile che il suo bordo di attacco sia quanto più possibile affilato in modo da non generare elevate deviazioni della corrente che lo investe e alte compressioni della stessa in una estesa zona frontale del corpo.**

Tale è il caso del bordo di attacco di profili alari degli aerei supersonici.



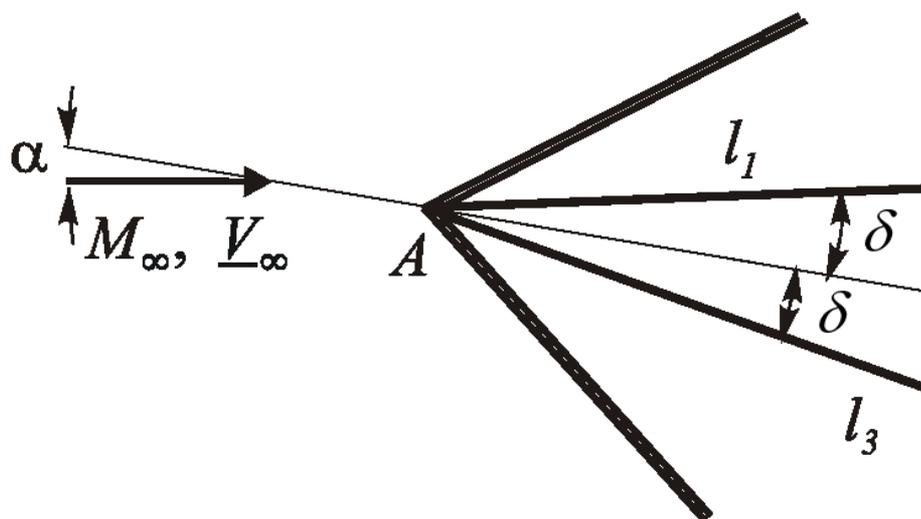


Shadowgraph di un'onda d'urto nel flusso supersonico su un diedro smussato, $\delta = 8^\circ$, a $M_1 = 1.36$. *Notare come l'onda d'urto risulti ben staccata dal corpo.*



Si deve infine porre in evidenza che, nel caso di un diedro con angolo di semiapertura δ posto ad un angolo di attacco α rispetto alla direzione della corrente supersonica, se i due angoli di deviazione della corrente (rispettivamente $\delta - \alpha$ per la zona superiore e $\delta + \alpha$ per la zona inferiore) sono entrambi inferiori a δ_{max} , le due soluzioni per i campi di moto superiore ed inferiore sono indipendenti una dall'altra, cioè, a differenza di quanto accade in moto subsonico, i due moti non si influenzano.

Nel caso in cui, invece, la deviazione fosse più elevata (ad es. se $\delta + \alpha$ per $\alpha > 0$ risultasse maggiore dell'angolo δ_{max}), l'onda d'urto si staccerebbe dal diedro ed il campo di moto inferiore influenzerebbe il superiore e viceversa.



LA RELAZIONE DI PRANDTL E LA POLARE D'URTO

Dalla relazione ricavata in precedenza:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{n1}}{V_{n2}} = (\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left[2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \varepsilon \right]^{-1}$$

tenendo conto del fatto che: $V_{n1} = V_1 \sin \varepsilon = M_1 a_1 \sin \varepsilon \rightarrow M_1 \sin \varepsilon = V_{n1}/a_1$

si ottiene l'espressione:

$$\frac{V_{n1}}{V_{n2}} = \frac{(\gamma + 1)V_{n1}^2/a_1^2}{2 + (\gamma - 1)V_{n1}^2/a_1^2} \rightarrow 1 = \frac{(\gamma + 1)V_{n1}V_{n2}}{2a_1^2 + (\gamma - 1)V_{n1}^2}$$

e quindi:

$$V_{n1}V_{n2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}V_{n1}^2 + \frac{2}{\gamma + 1}a_1^2$$

Ricordando, poi, che:

$$V_1^2 = V_{n1}^2 + V_t^2$$

si ottiene:

$$V_{n1}V_{n2} = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}V_t^2$$



$$V_{n1}V_{n2} = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} \right) - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}V_t^2$$

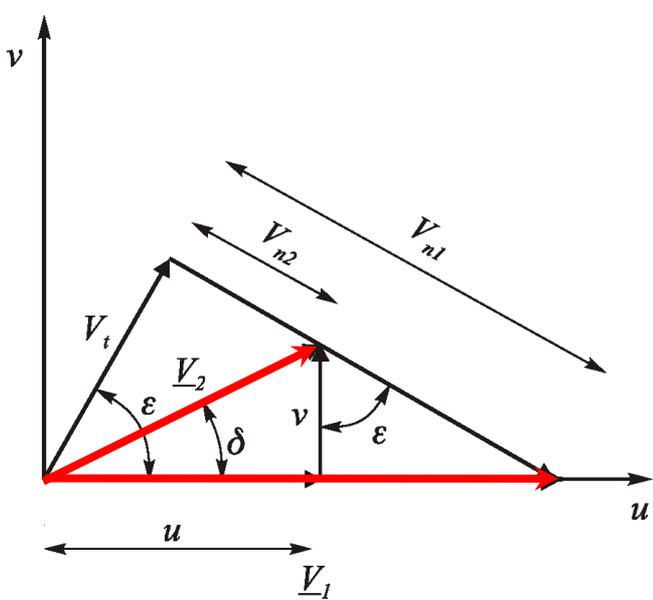
Tenendo presente che la quantità in parentesi è pari ad H e della:

$$V^* = a^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma - 1)}{\gamma + 1}} = V_\ell \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

si ha infine:

$$V_{n1}V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}V_t^2$$

che rappresenta la **Relazione di Prandtl per un'onda d'urto obliqua.**



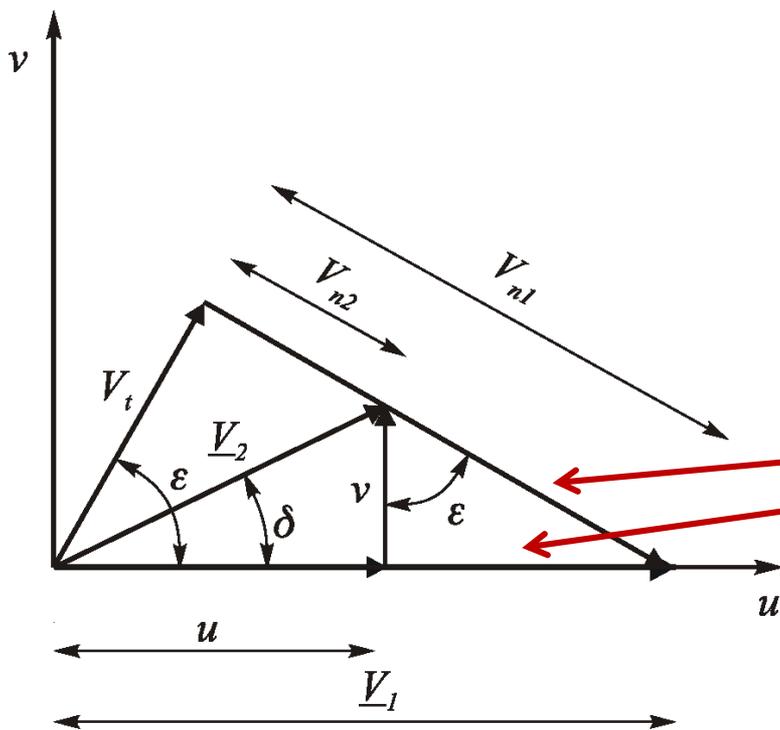
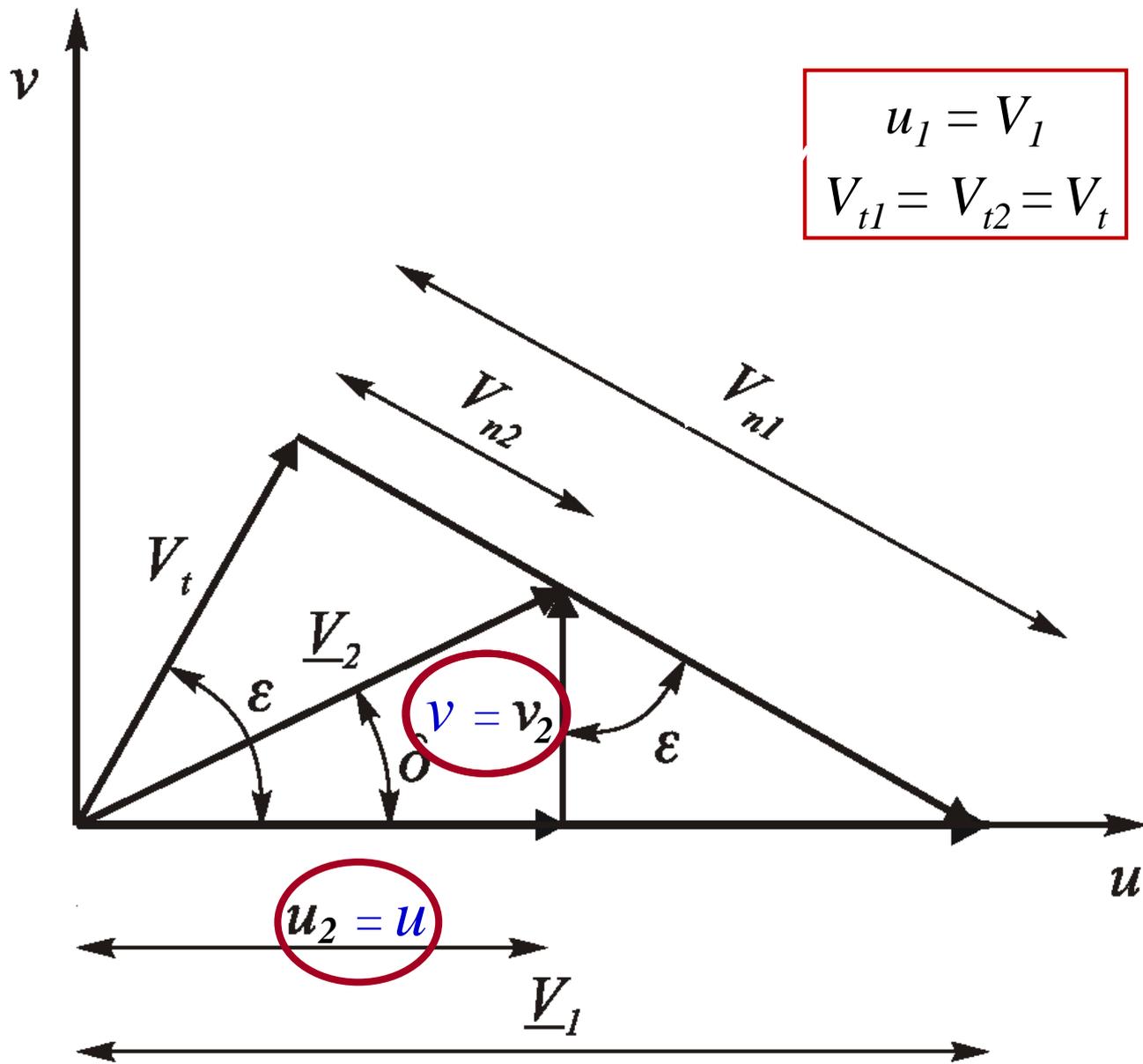
Questa relazione, per $V_t = 0$, coincide con quella già trovata per l'onda d'urto normale.

Nella figura accanto sono state indicate le due velocità a monte ed a valle dell'onda d'urto obliqua e le loro componenti normali e tangenziale. Infatti, per la V_2 sono state indicate le due componenti u , in direzione della V_1 , e v normale ad essa.

Il piano ($u-v$) si chiama **piano odografo.**



Velocità prima e dopo l'onda d'urto sul piano odografo



Con riferimento alla figura si ottiene:

$$V_t = V_1 \cos \varepsilon$$

$$V_{n1} = V_1 \sin \varepsilon$$

$$V_{n2} = V_1 \sin \varepsilon - \frac{v}{\cos \varepsilon}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{V_1 - u}{v}$$

Sostituendo nella relazione di Prandtl:

$$V_{n1} V_{n2} = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_t^2$$

si ottiene:

$$V_1^2 \sin^2 \varepsilon - v V_1 \tan \varepsilon = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_1^2 \cos^2 \varepsilon$$

in cui si possono utilizzare le formule trigonometriche di conversione:

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{\tan^2 \varepsilon}{1 + \tan^2 \varepsilon} = \frac{(V_1 - u)^2}{v^2 + (V_1 - u)^2}$$

$$\cos^2 \varepsilon = 1 - \sin^2 \varepsilon = \frac{v^2}{v^2 + (V_1 - u)^2}$$



Sostituendo allora le relazioni precedenti nella:

$$V_1^2 \sin^2 \varepsilon - vV_1 \tan \varepsilon = a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V_1^2 \cos^2 \varepsilon$$

si ottiene:

$$v^2 \left(a^{*2} + 2V_1^2 / (\gamma + 1) - V_1 u \right) = (V_1 - u)^2 (V_1 u - a^{*2})$$

che risolta in v conduce infine a:

$$v^2 = (V_1 - u)^2 \frac{V_1 u - a^{*2}}{2V_1^2 / (\gamma + 1) - V_1 u + a^{*2}}$$

Per ogni valore di a^* e di $V_1 > a^*$, la precedente espressione rappresenta, sul piano odografo ($u-v$), il luogo dei punti a valle dell'onda d'urto obliqua.

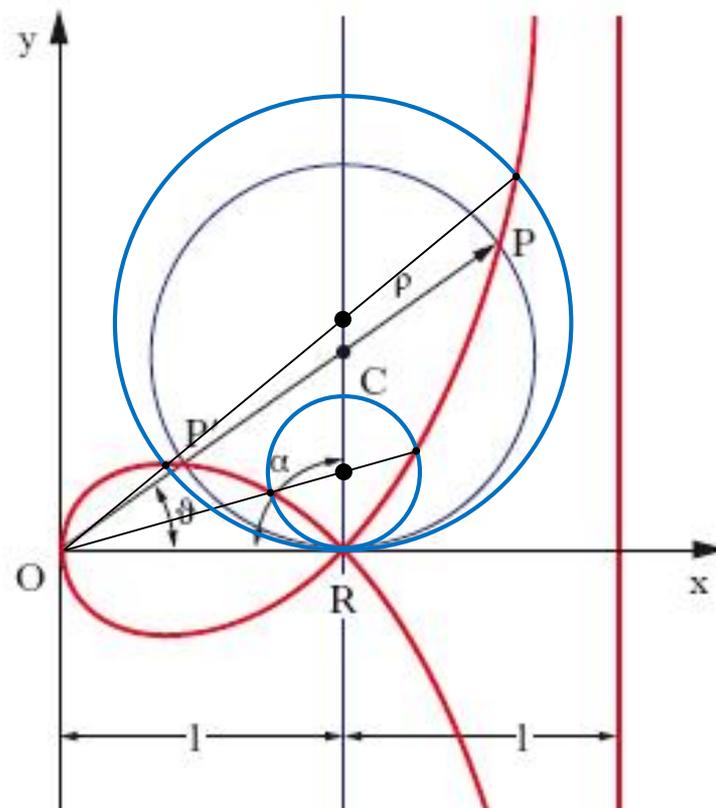
La formula precedente dà **due valori** di v , uno positivo l'altro negativo, corrispondenti alla deviazione verso l'alto o verso il basso.

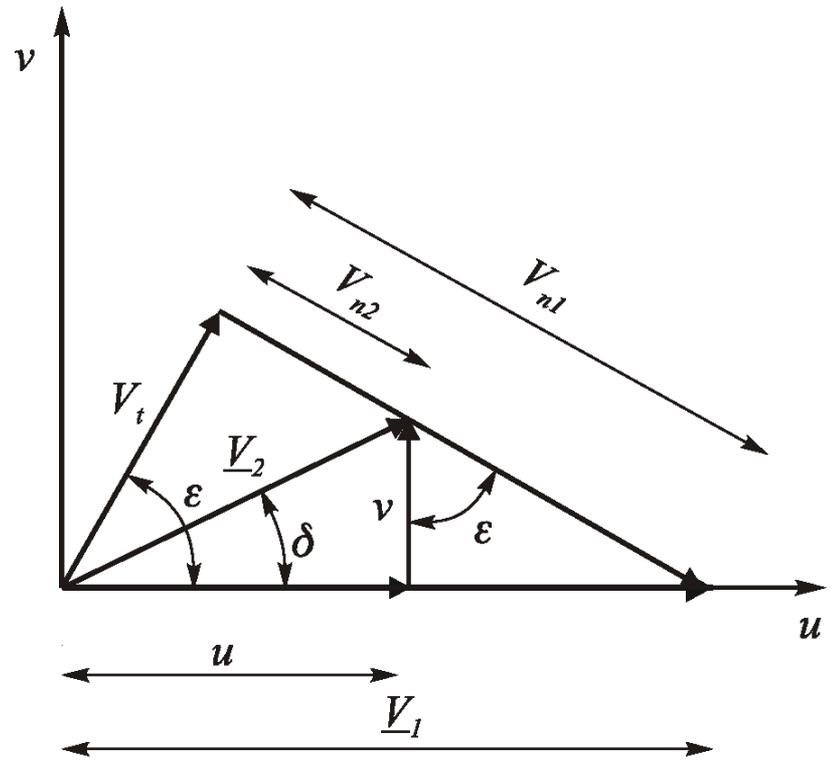
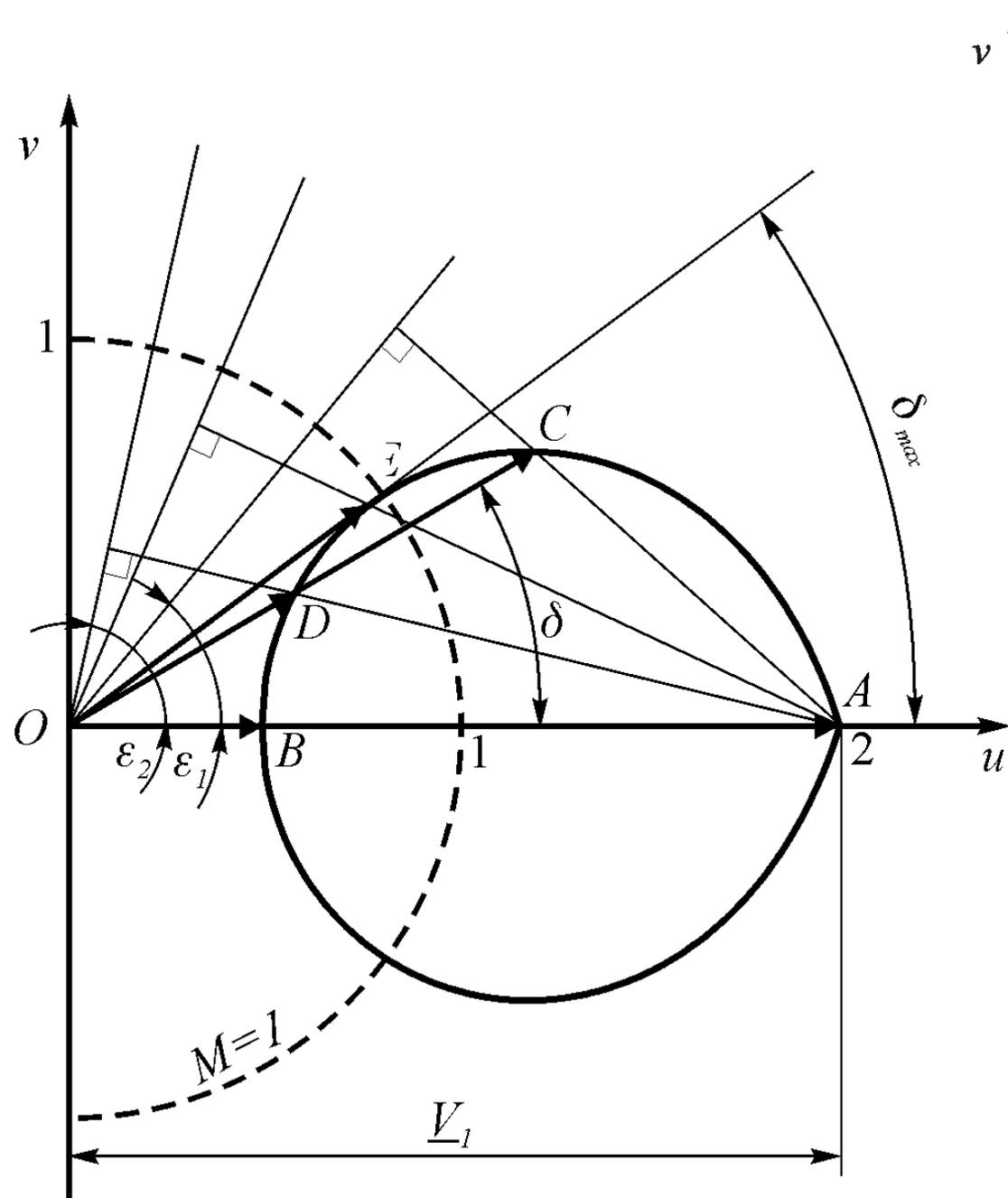
Il luogo di punti, sul piano odografo ($u-v$), a valle dell'onda d'urto obliqua, è chiamato curva strofoide, o polare d'urto.

Questo luogo di punti è riportato nella figura seguente.



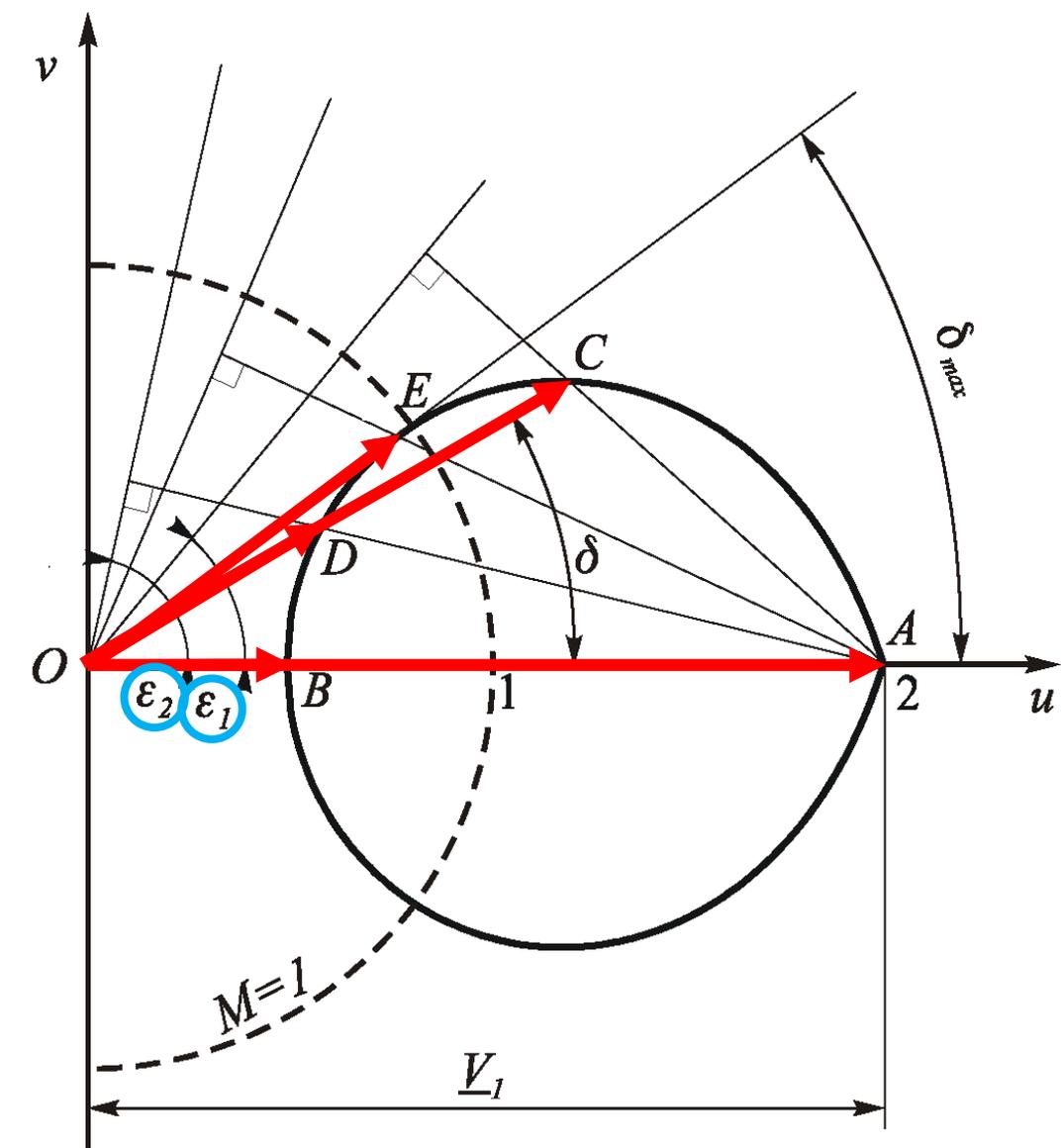
La **strofoide** si trova descritta nella corrispondenza di **Evangelista Torricelli**, intorno al 1645, anche se sembra sia stata studiata precedentemente dal matematico francese **de Roberval**. La curva fu anche studiata da **Barrow**, intorno al 1670, il quale fu il maestro di Newton. Il nome strofoide, fu coniato da uno scrittore francese, **Montucci**, nel 1846, e deriva dal greco *strophos* che significa "cintura con anello atto a portare la spada" (<http://progettomatematica.dm.unibo.it/Curve%20celebri/modern/strofoide.htm>).





Curva strofoide

$$v^2 = (V_1 - u)^2 \frac{V_1 u - a^{*2}}{2V_1^2 / (\gamma + 1) - V_1 u + a^{*2}}$$



Come già discusso, per ogni angolo di deviazione δ minore di δ_{max} , ci sono due soluzioni per la \underline{V}_2 :

la **soluzione debole** OC che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo ϵ_1 ;

la **soluzione forte** OD che dà luogo all'onda inclinata rispetto alla corrente dell'angolo $\epsilon_2 > \epsilon_1$.

Nel caso in cui $\delta = 0$, le due soluzioni si riducono:

all'**onda di Mach** OA

all'onda d'**urto normale** OB .

Nella figura è stata anche indicata l'**unica soluzione** OE esistente per $\delta = \delta_{max}$.

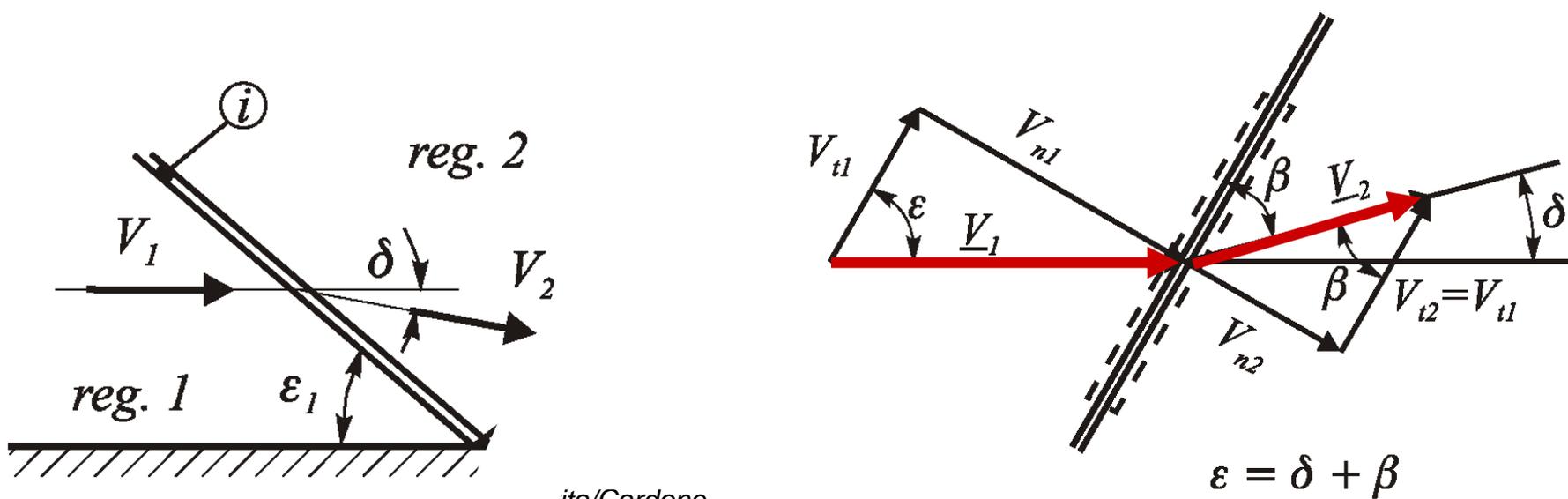


RIFLESSIONE DI ONDE D'URTO PIANE SU UNA SUPERFICIE O SU UN PIANO DI SIMMETRIA

Poiché, attraverso l'onda d'urto obliqua, la componente tangenziale della velocità non cambia mentre quella normale diminuisce, la conseguenza macroscopica di tutto ciò è che il vettore velocità a valle dell'onda devia rispetto alla sua direzione iniziale e, in particolare, tende a ruotare verso l'onda d'urto stessa; la corrente cioè tende ad adagiarsi sull'onda.

Tutto questo comporta che un'onda d'urto obliqua incidente su una superficie piana (ovvero su un piano di simmetria del campo di moto) deve necessariamente riflettersi.

Si consideri ad esempio il caso rappresentato nella figura, nella quale è mostrata l'onda d'urto obliqua i che incide con un angolo ε_1 sulla superficie piana orizzontale (o, che è lo stesso, su un piano di simmetria).



ita/Cardone

84

Prima dell'onda d'urto (reg. 1) la corrente è parallela alla superficie. L'onda d'urto obliqua i devia la corrente di un angolo δ verso la parete.

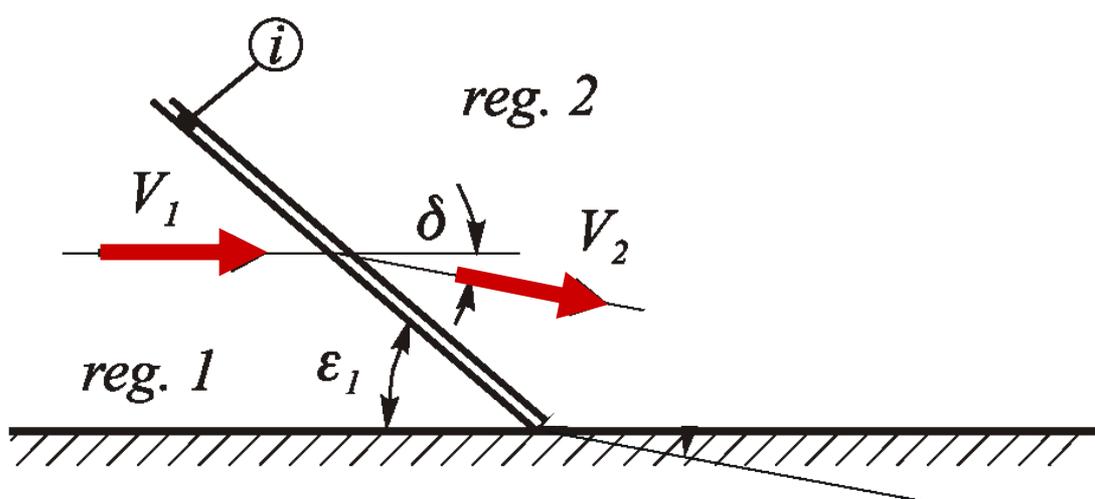
L'entità della deviazione è, come già visto, funzione del Mach a monte e dell'angolo di inclinazione dell'onda, oltre che del valore di γ .

Poiché la direzione della corrente nella regione 2 è incompatibile con la presenza della parete, a valle dell'onda d'urto incidente i deve necessariamente esistere un evento che raddrizza la corrente (deviandola verso l'alto di un angolo pari a $-\delta$), riportandola quindi parallela alla parete.

Questo evento è un'altra onda d'urto obliqua r , che parte dal punto di incidenza dell'onda i sulla parete e che viene detta onda riflessa.

Ovviamente sarà $M_1 > M_2 > M_3$ (e anche $V_1 > V_2 > V_3$ e $p_3 > p_2 > p_1$).

Una riflessione del tipo indicato in figura si chiama riflessione regolare.



85

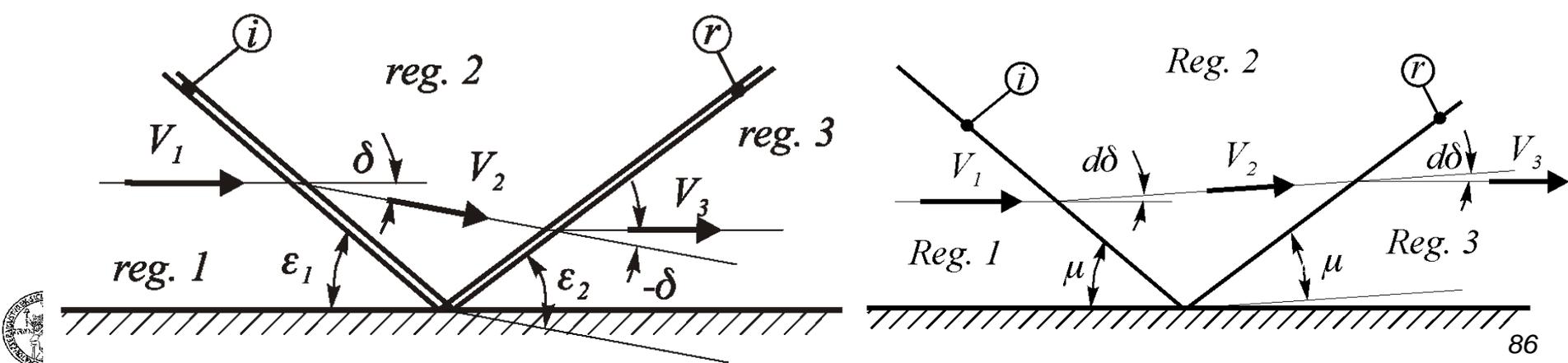
È opportuno qui osservare che non si tratta di una riflessione speculare in quanto, in generale, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 - \delta$, bensì ε_2 dovrà essere tale che l'onda riflessa abbia una intensità che consenta alla corrente di raddrizzarsi.

I due angoli ε_1 e ε_2 sono uguali solo se l'onda d'urto è un'onda di Mach. Infatti, quanto prima detto vale anche per un'onda di Mach con la differenza che l'angolo di deviazione δ è infinitesimo e quindi: $\varepsilon_1 = \mu_1 = \varepsilon_2 = \mu_2$ e $\delta = 0$.

Ovviamente, un'onda di Mach di compressione (deviazione infinitesima verso il basso) si riflette come onda di Mach di compressione (deviazione infinitesima verso l'alto), come in un'onda d'urto obliqua, ma con intensità dell'urto infinitesima.

Si può anticipare che un'onda di Mach di espansione (per la stessa situazione di figura), che ha una prima deviazione infinitesima **verso l'alto**, si riflette come onda di Mach di espansione, con una deviazione infinitesima **verso il basso**.

In conclusione, le onde di Mach si riflettono sulla superficie piana come onde dello stesso tipo (compressione \rightarrow compressione, espansione \rightarrow espansione).



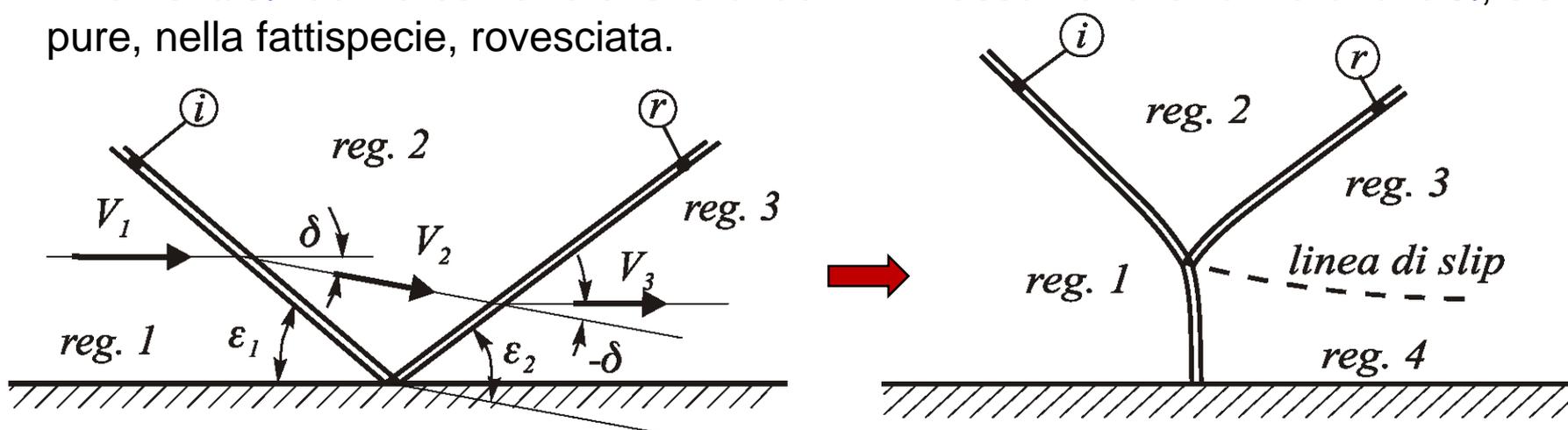
Poichè $M_2 < M_1$, si può verificare che, pur essendo $M_2 > 1$, il δ da imporre per raddrizzare la corrente risulti maggiore del δ_{max} corrispondente al valore di M_2 (si ricordi che δ_{max} è una funzione crescente del numero di Mach). Ciò può infatti accadere all'aumentare di ε_1 , il che comporta, a parità di M_1 , diminuzioni del valore di M_2 .

Allora, non si ha più la riflessione regolare dell'onda d'urto, ma una riflessione cosiddetta alla Mach (o riflessione a λ) rappresentata nella figura a destra.

In questo caso, solo la regione 1 è caratterizzata da un moto uniforme (velocità indipendente dalla posizione).

Nelle regioni 2, 3, e 4, poiché la corrente attraversa onde d'urto oblique con inclinazione variabile, il vettore velocità varierà da punto a punto.

Il nome "a λ " deriva dal fatto che le onde d'urto assumono la forma di una λ , sia pure, nella fattispecie, rovesciata.



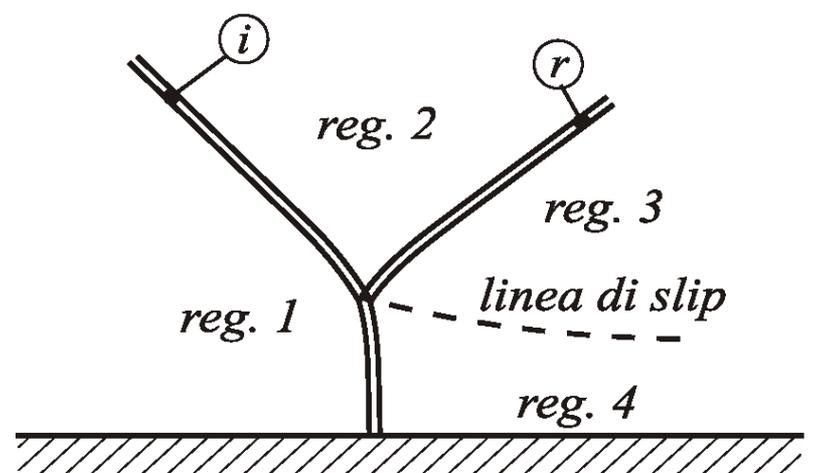
Il campo di moto nelle regioni 2, 3 e 4 risulta rotazionale per la presenza di gradienti di entropia.

La **linea di slip** ha la peculiarità che attraverso di essa **il modulo della velocità (tranne la sua direzione che resta la stessa) e le proprietà termodinamiche della corrente (tranne la pressione che resta la stessa) presentano bruschi salti**.

Ciò è dovuto alla diversa evoluzione fluidodinamica cui sono soggetti i filetti fluidi posti a cavallo della linea di slip.

Quest'ultima, che è anche linea di corrente, **non inizia con tangente parallela alla parete**, consentendo così (attraverso la seconda onda d'urto) **una minore deviazione** (raddrizzamento) della corrente (verso l'alto) dalla regione 2 alla 3.

Si noti, inoltre, che in questo caso la linea di slip non può essere retta, poiché nelle regioni 3 e 4, a causa della variabilità dell'inclinazione dell'urto, esiste un gradiente positivo di pressione, diretto verso la parete, che deve essere bilanciato dalla forza centrifuga.

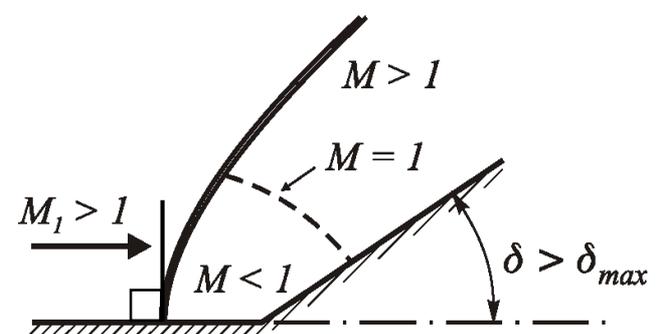
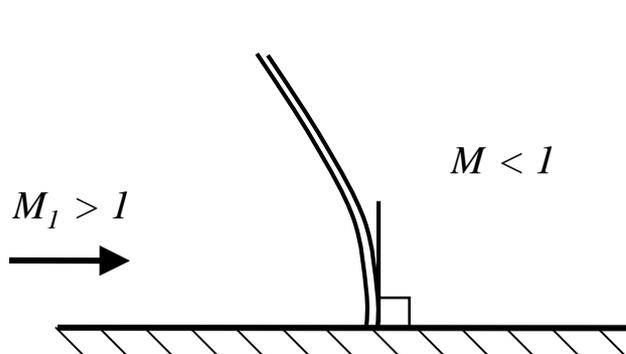


Qualora, per la forte inclinazione dell'onda (verso la verticale), a valle dell'onda d'urto, il moto risultasse subsonico (perché ha luogo una soluzione forte), cioè, $M_2 < 1$, è ovvio che non può avere luogo alcuna riflessione.

In tal caso, l'onda d'urto dovrà, ancora una volta, finire sulla parete con una tangente verticale (cioè, con un'onda d'urto ivi normale) perché la corrente non può essere deviata in prossimità della parete stessa.

Si ripropongono, quindi, le stesse condizioni della corrente supersonica che deve essere deviata con un angolo superiore all'angolo di deviazione massimo consentito dal suo numero di Mach.

Tutte le volte che non è possibile una riflessione regolare dell'onda, essa dovrà, necessariamente essere normale alla parete.

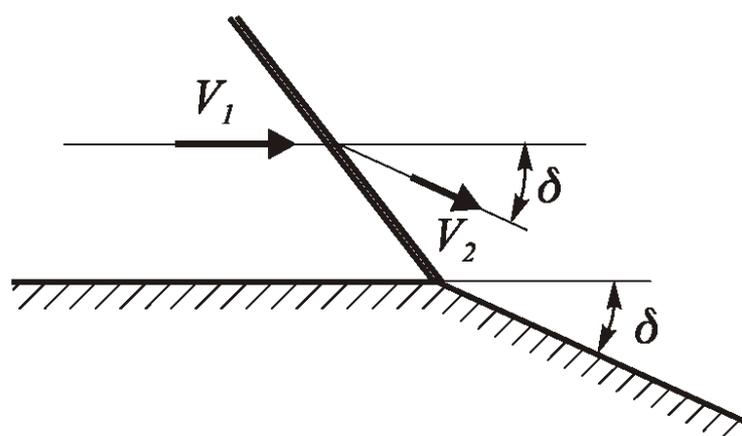


Oltre al caso già menzionato di onda d'urto normale ($\varepsilon = 90^\circ$) per il quale l'onda d'urto non si riflette, **esiste solo un altro caso, molto particolare** e del tutto teorico, **nel quale un'onda d'urto obliqua che incide su di una parete non si riflette** ed è quello rappresentato nella figura che segue.

In questa circostanza la parete a valle del punto di incidenza dell'onda forma, con la parete a monte, un angolo esattamente uguale all'angolo δ di deviazione della corrente provocata dall'onda d'urto.

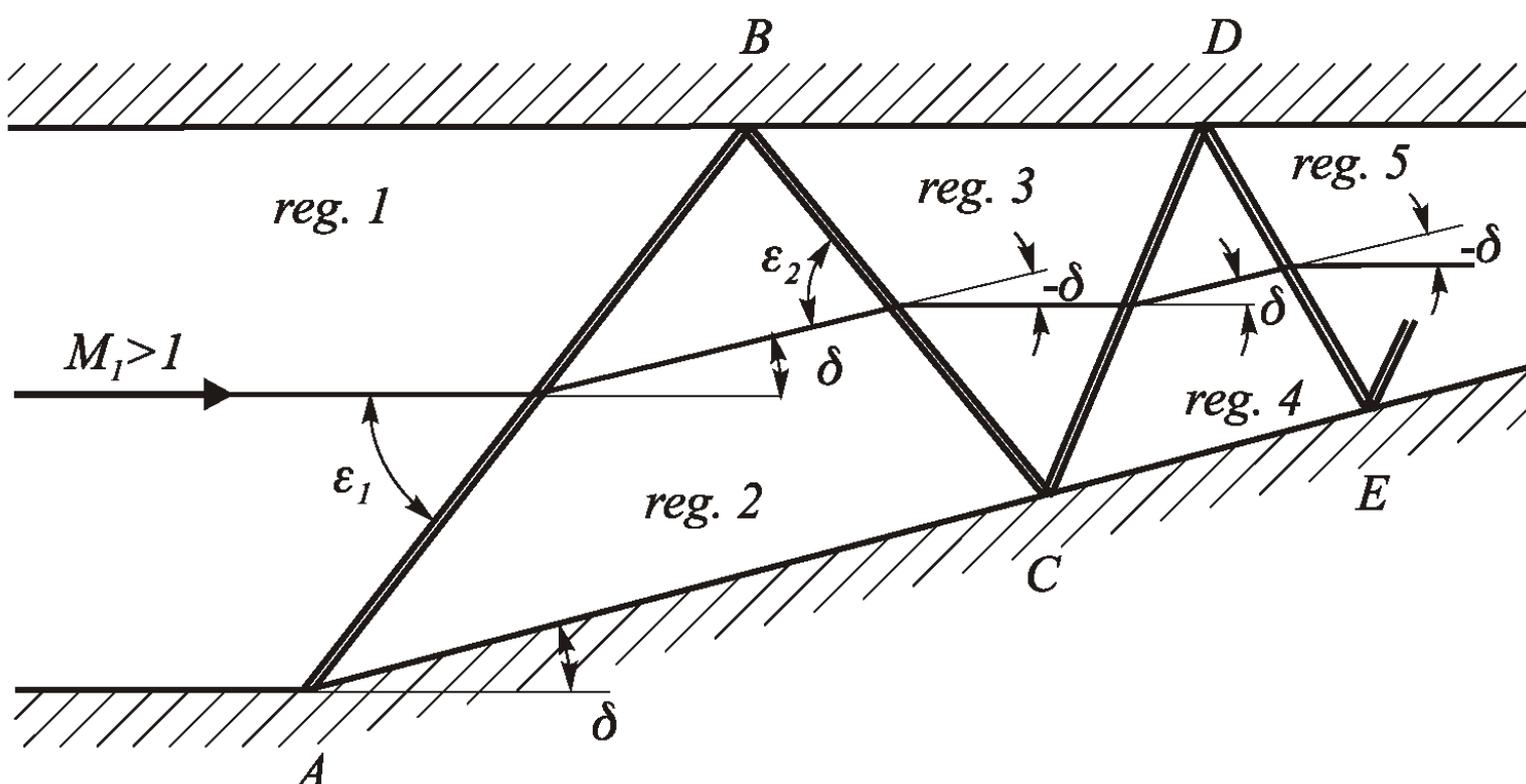
Si osserva che, angoli della parete minori di δ danno luogo ad un'onda riflessa (sia pure più debole che nel caso di parete piana), sino, eventualmente, all'onda normale, qualora la deviazione sia superiore al δ_{max} necessario dopo l'onda.

Si vedrà, che angoli maggiori di δ debbono generare un ventaglio di espansione alla Prandtl e Meyer.



Un altro caso interessante di riflessione di onde d'urto oblique (deboli) è quello rappresentato in figura, per il quale una corrente a $M_1 > 1$ fluisce in un canale in cui, ad un certo punto, una delle pareti forma una concavità caratterizzata da un angolo δ .

Al fine di avere una corrente che si mantenga a lungo supersonica, si supponga che **l'angolo δ sia di valore relativamente piccolo** e che, viceversa, **M_1 sia sufficientemente alto**.

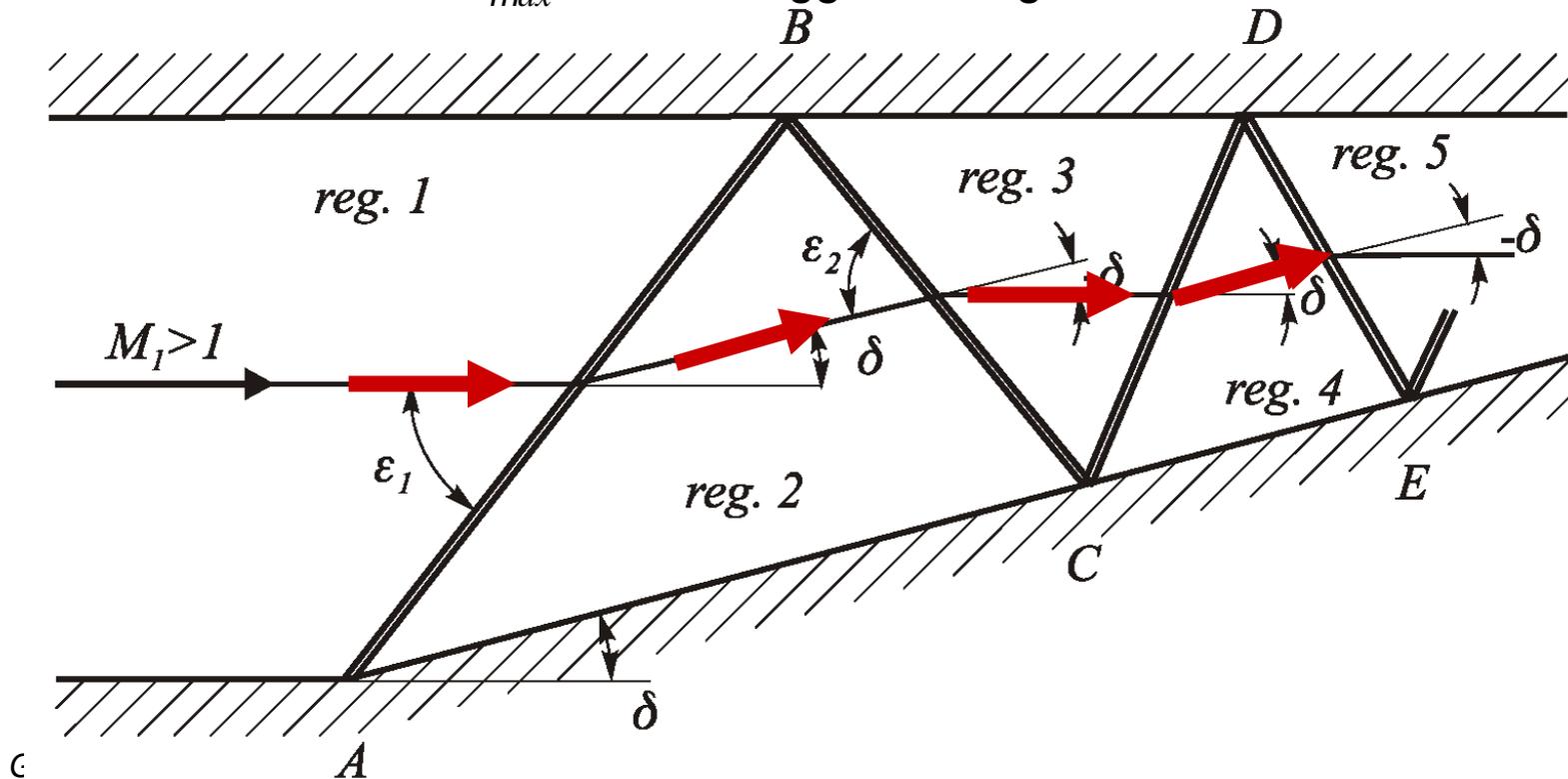


La prima onda d'urto (tra le regioni 1 e 2) parte dallo spigolo A, devia la corrente di δ , rendendola parallela alla parete inferiore.

Quest'onda va a impingere nel punto B (parete superiore) ove si riflette in un'altra onda che devia la corrente di $-\delta$, riportandola orizzontale.

L'onda riflessa che parte da B, si riflette a sua volta nel punto C della parete inferiore) con un'onda (la CD) che devia ancora la corrente di un angolo δ .

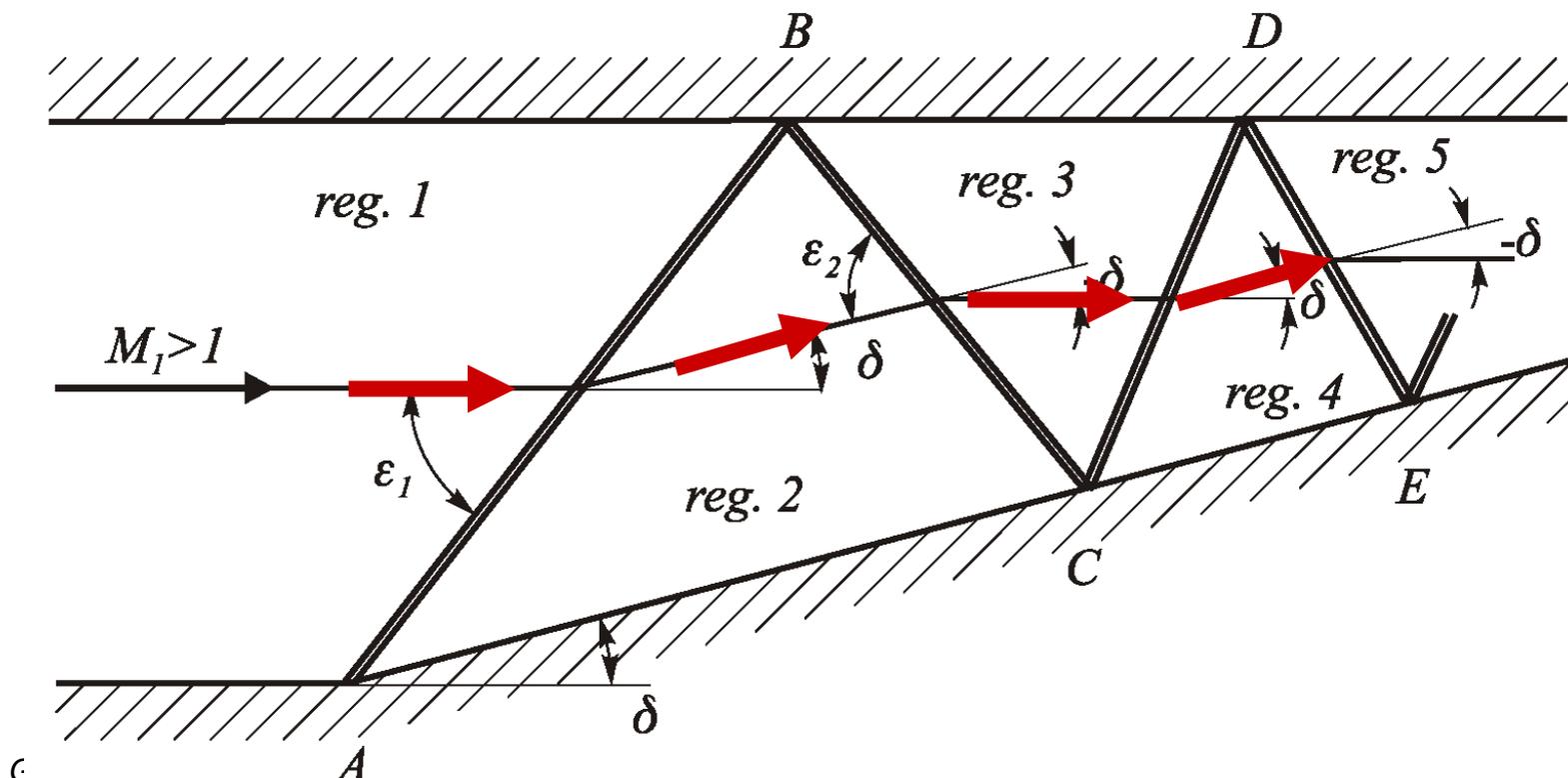
E' chiaro che questo comportamento continua fino a che il numero di Mach (che per i successivi urti, sia pure obliqui, va progressivamente diminuendo) è tale che il relativo valore di δ_{max} risulta maggiore, o uguale, di δ .



Occorre anche osservare che, per la stessa continua diminuzione del numero di Mach, l'onda CD (rispettivamente l'onda DE) risulterà più inclinata verso l'alto (cioè più verticale) dell'onda AB (rispettivamente dell'onda BC).

Va rilevato che, per piccoli angoli δ , si ha $\varepsilon \rightarrow \mu$ e quindi la compressione dovuta a ciascuna onda d'urto può considerarsi praticamente isoentropica.

Si ritrova pertanto, nel caso bidimensionale, quanto già anticipato nel caso unidimensionale e cioè che, in una corrente supersonica che fluisce isoentropicamente ed omoenergeticamente in un condotto convergente, il numero di Mach diminuisce.



INTERSEZIONE DI ONDE D'URTO OBLIQUE

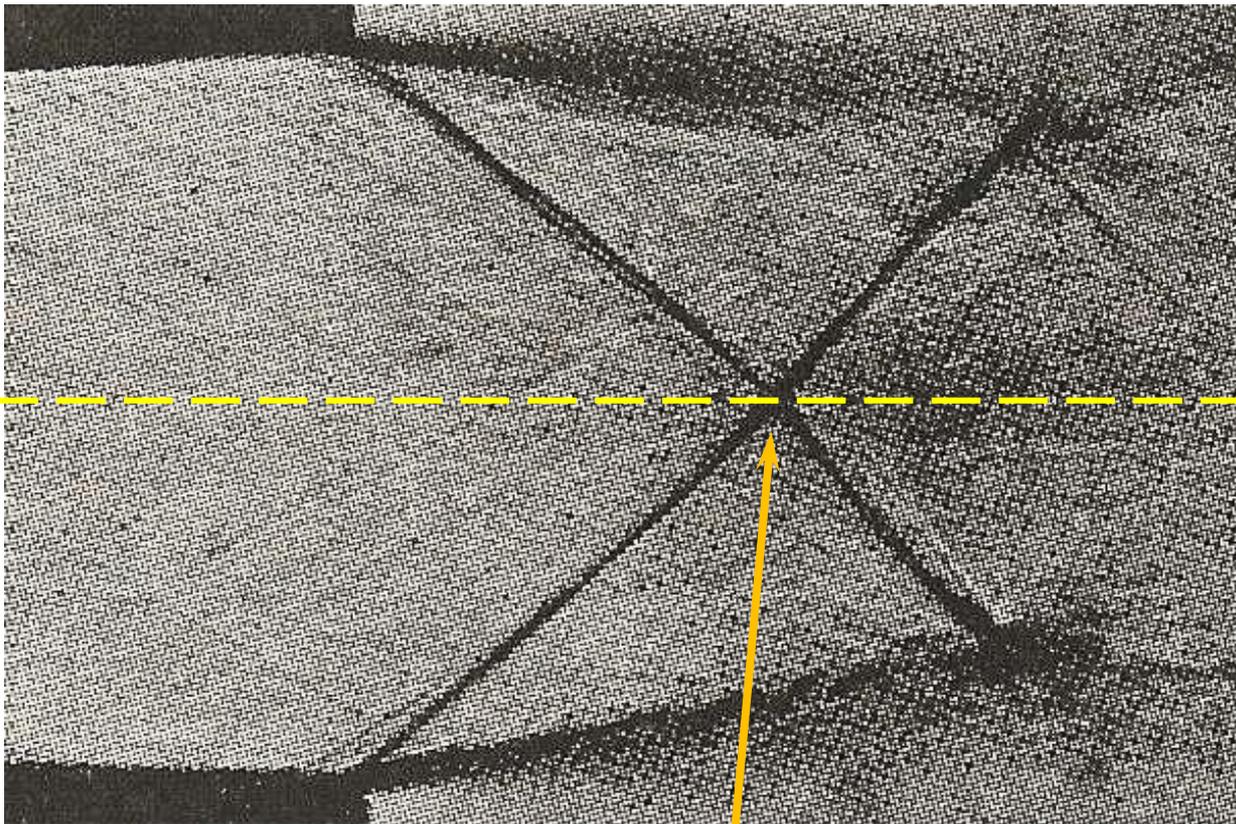


Foto Schlieren che mostra l'intersezione di onde d'urto oblique all'uscita di un ugello supersonico

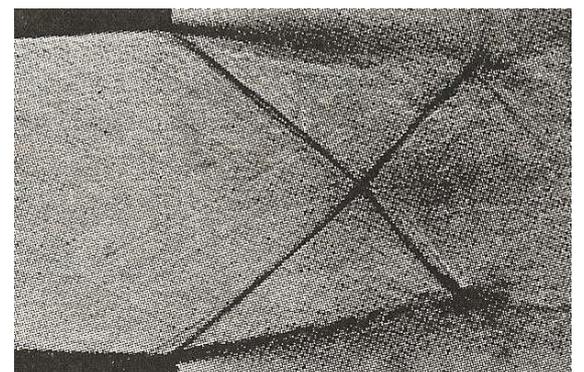
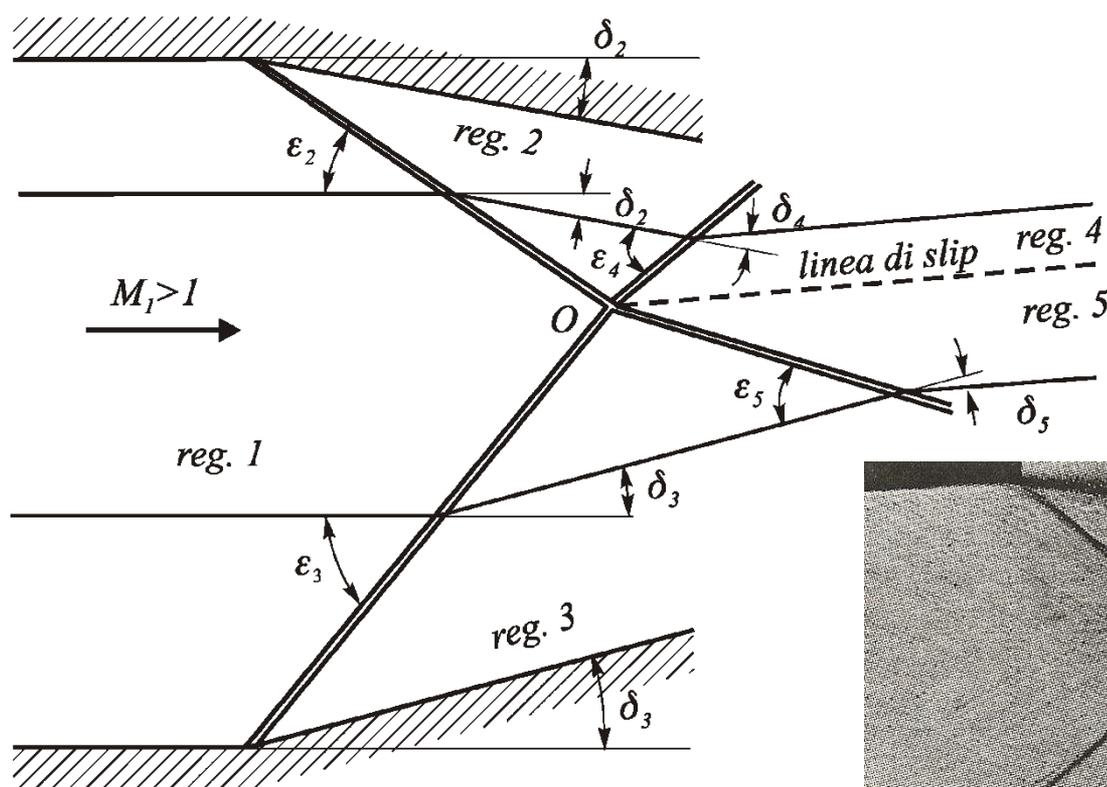


INTERSEZIONE DI ONDE D'URTO OBLIQUE

Due onde d'urto oblique deboli, aventi in generale una diversa inclinazione rispetto alla corrente a monte, **si possono intersecare in un punto O** , come visto nello schlieren precedente e illustrato in figura.

In questo caso, la corrente, che fluisce in un condotto con $M_1 > 1$, subisce due deviazioni δ_2 e δ_3 (in generale, diverse tra loro) a causa di due onde d'urto oblique, a loro volta inclinate degli angoli ε_2 e ε_3 rispetto alla corrente stessa.

Come visto, **le deviazioni possono non dipendere da presenza di pareti.**

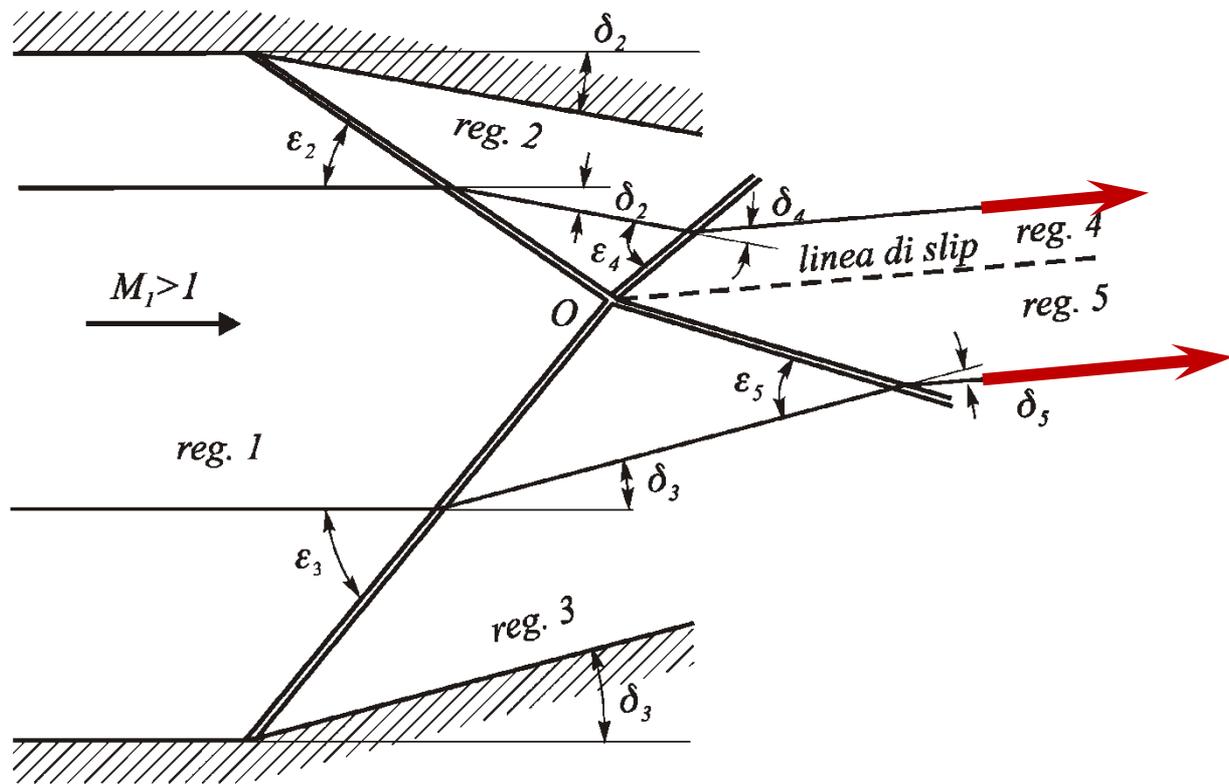


Le due correnti supersoniche, che si generano in seguito agli urti, **nelle due regioni 2 e 3 avranno in generale proprietà diverse** ma, soprattutto **saranno caratterizzate da due direzioni diverse**.

Risulta pertanto necessario che queste due nuove correnti siano a loro volta deviate in modo che alla fine esse abbiano la stessa direzione.

Nelle correnti supersoniche, queste ulteriori deviazioni sono possibili solo mediante **riflessione** con altre due onde d'urto oblique, come indicato in figura.

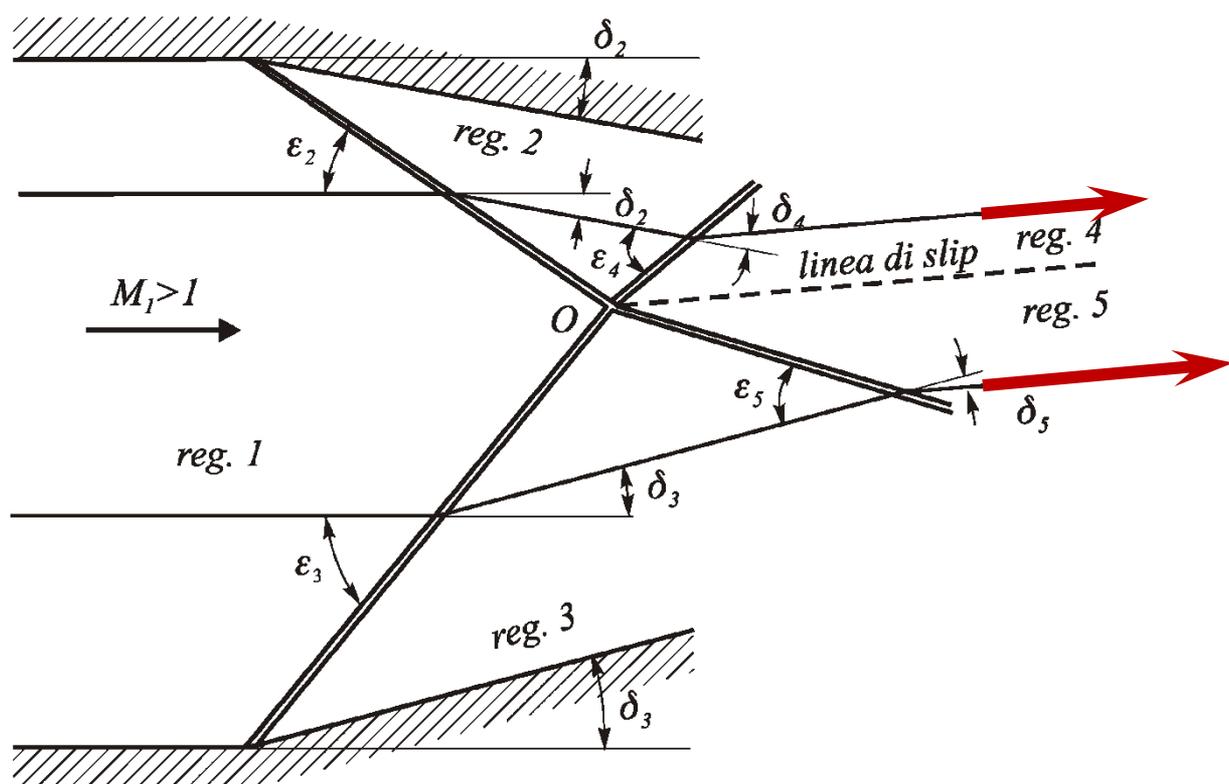
Una intersezione del tipo rappresentato in figura si dice **intersezione regolare**.



Le uniche due condizioni che le correnti nelle regioni 4 e 5 devono rispettare sono che esse abbiano la **stessa direzione** e la **stessa pressione statica**.

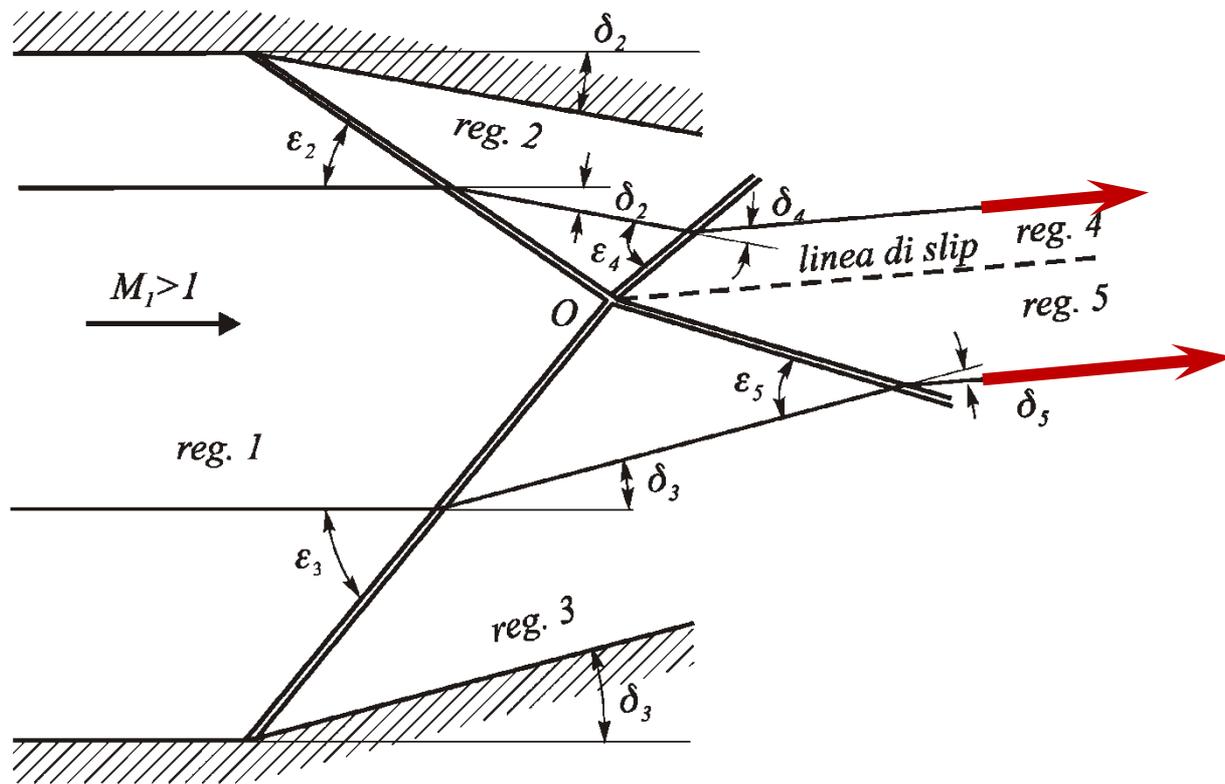
Per la risoluzione del problema occorre procedere per tentativi.

Si può assumere una **direzione comune di tentativo** delle due correnti nelle due regioni 4 e 5 (cioè, stabilire i valori di δ_4 e δ_5 , ovviamente non indipendenti tra loro perché deve essere: $\delta_2 + \delta_3 = \delta_4 + \delta_5$) e controllare se le due pressioni risultano uguali tra di loro. Variando detta direzione, e cioè le due deviazioni δ_4 e δ_5 , **la soluzione cercata si ottiene quando si verifica** $p_4 \approx p_5$.



La linea che separa le regioni 4 e 5 è, ovviamente, una **linea di slip** in quanto, attraverso essa, sono in generale discontinui sia il modulo del vettore velocità, che la temperatura e la densità (cioè, con valori diversi per le due correnti).

Per avere una intersezione regolare, **è necessario** innanzitutto che le due onde intersecantisi siano di tipo **debole** (per avere numero di Mach a valle di esse supersonico) e, inoltre, che i numeri di Mach a valle siano tali da **consentire poi una deflessione del vettore velocità pari a δ_4 e δ_5** , (cioè, questi ultimi devono essere non superiori ai relativi angoli di deviazione massima).



Qualora quest'ultima condizione non si verificasse, si avrà una **intersezione alla Mach, o a doppio λ** , così come mostrato nello schlieren a destra.

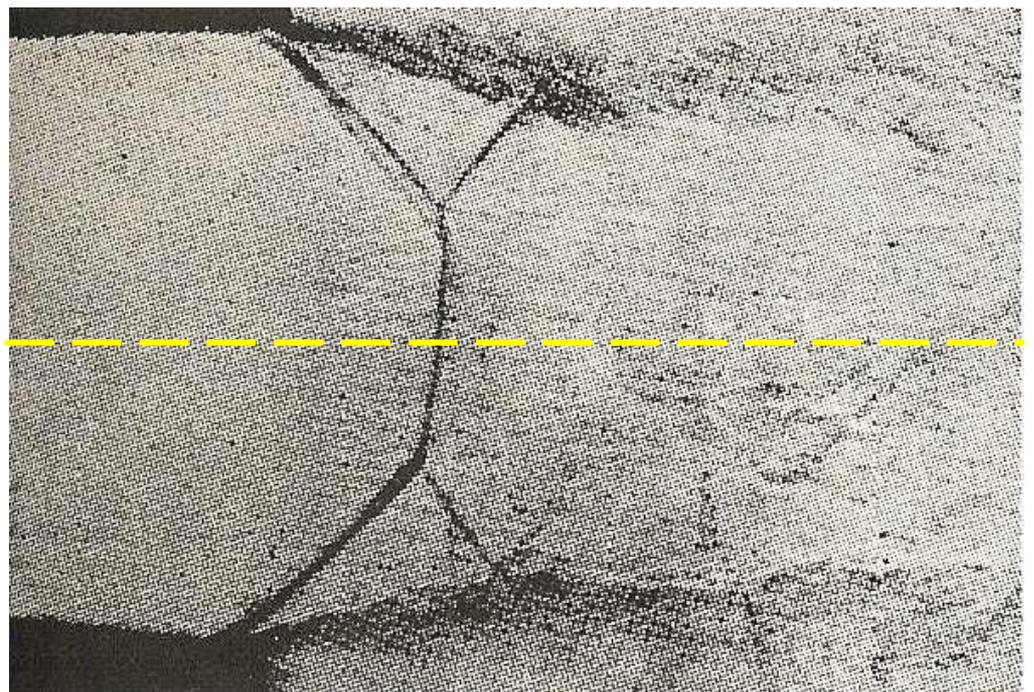
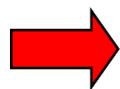
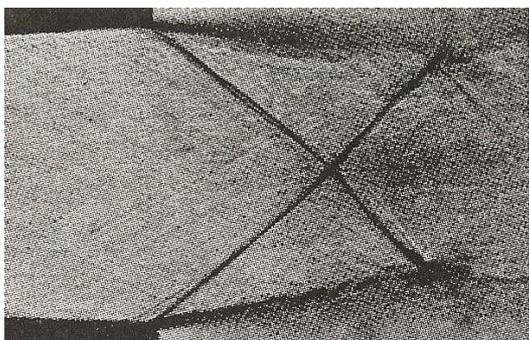
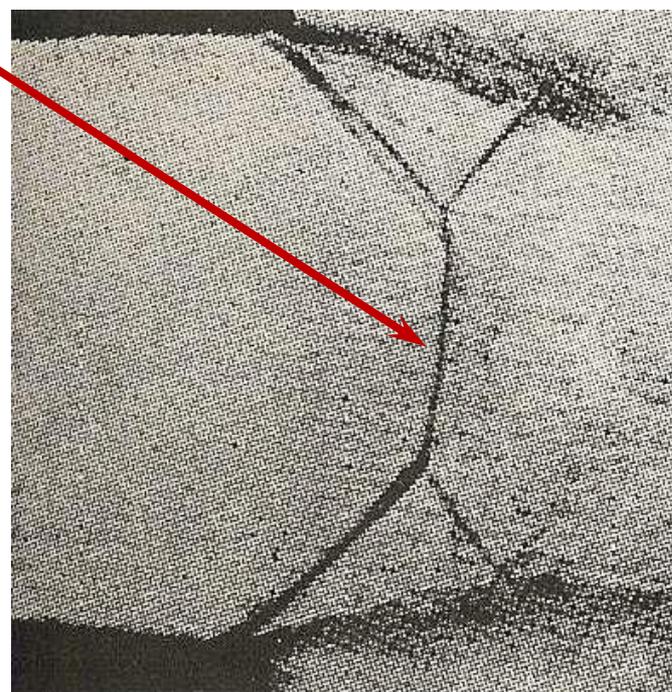
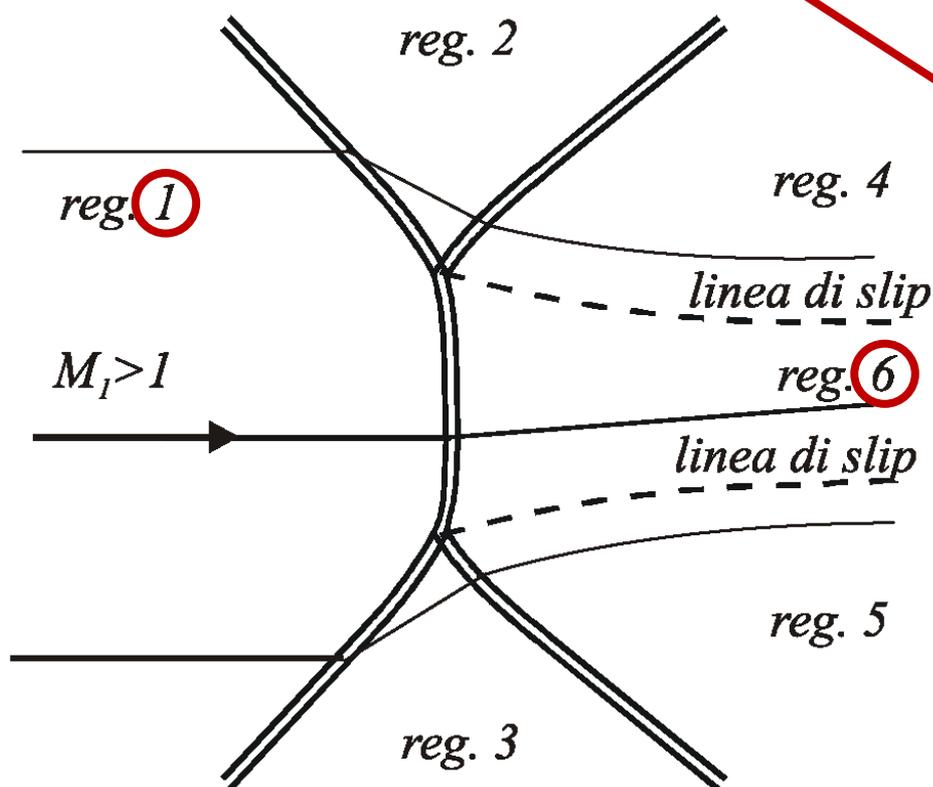


Foto schlieren che mostra l'intersezione di onde d'urto nel modo a doppio λ all'uscita di un ugello supersonico.



L'**intersezione alla Mach**, praticamente, altro non è che una **doppia riflessione a λ** con la presenza di **due linee (superfici) di slip**.

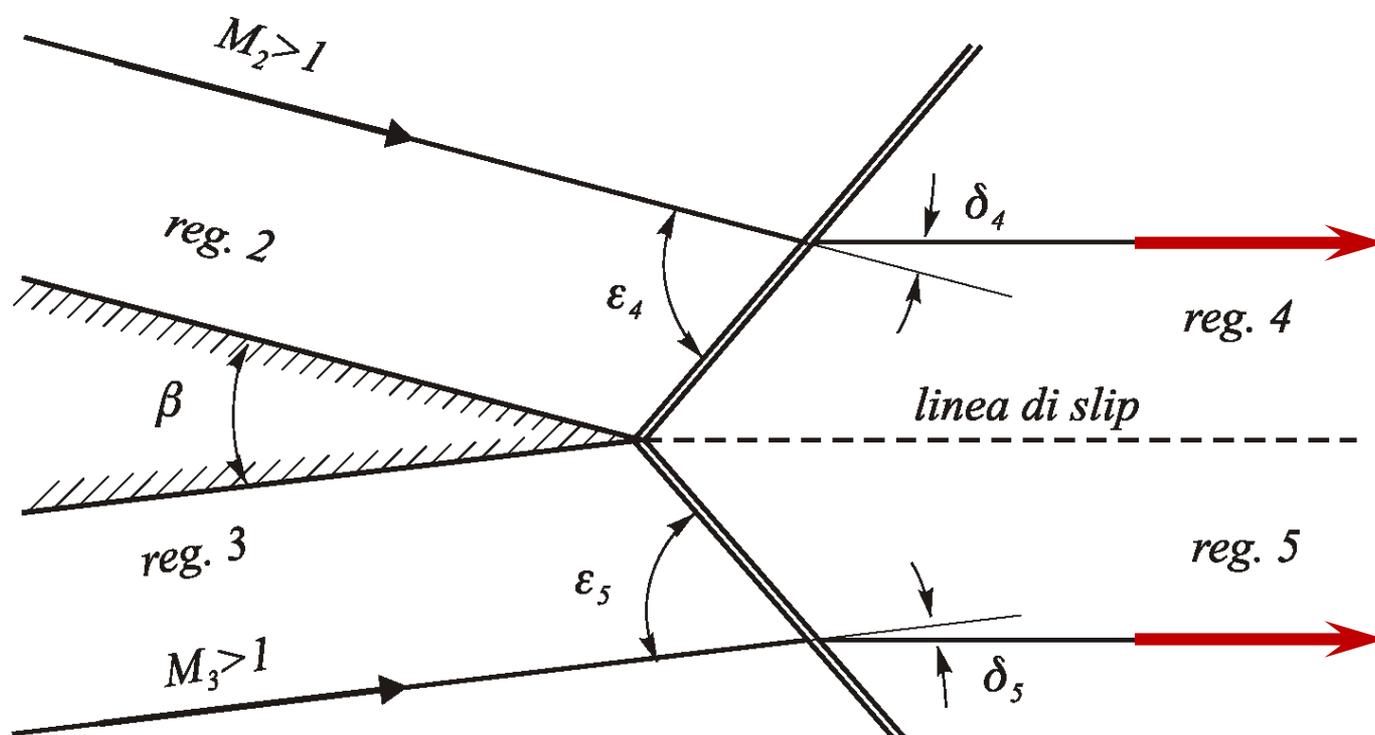
L'onda d'urto **quasi normale** che separa le regioni 1 e 6 è anche detta **onda d'urto di Mach** e, nel caso di moto assialsimmetrico, **disco di Mach**.



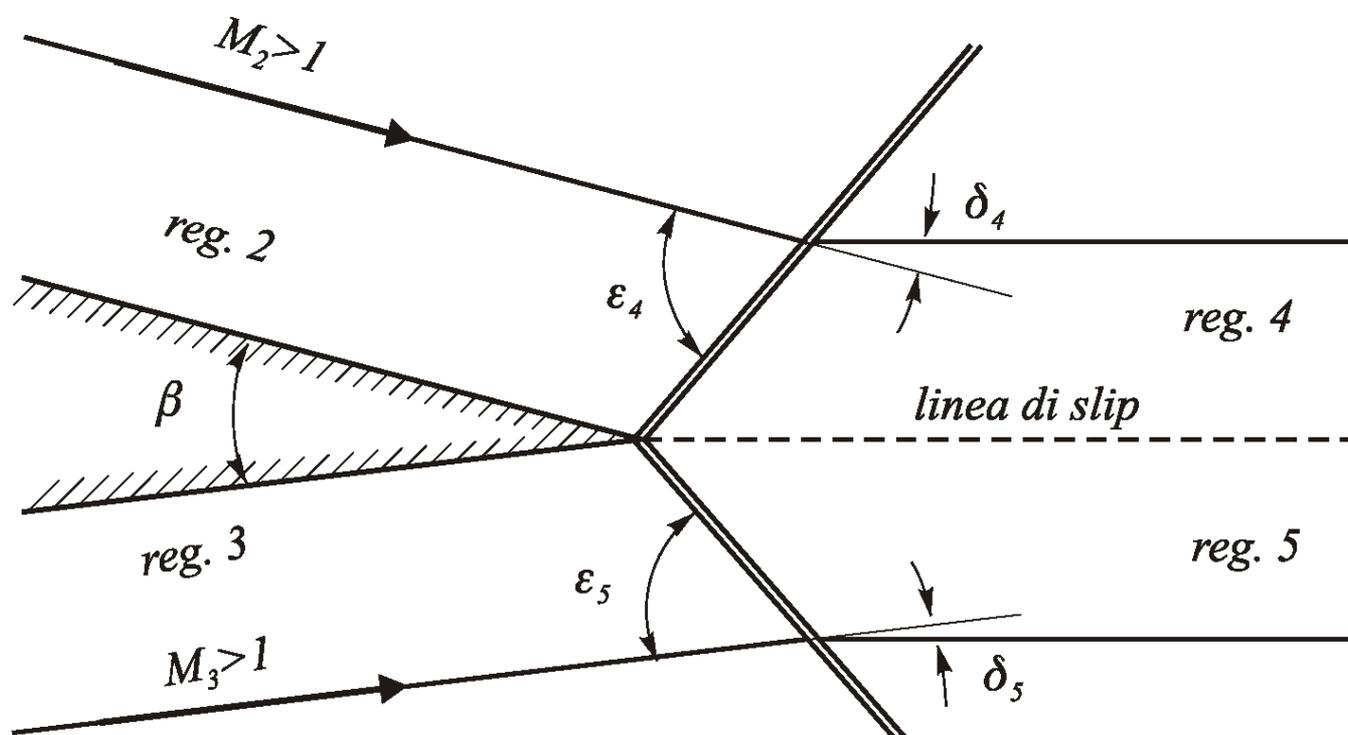
Quanto discusso in questo contesto torna particolarmente utile anche nel caso in cui **due correnti supersoniche, aventi inizialmente due direzioni diverse, si trovino a confluire**.

Tale è, ad esempio, la situazione sul **bordo di uscita di un profilo alare supersonico** rappresentata in figura.

Anche in questo caso, per trovare la direzione comune delle due correnti nelle regioni 4 e 5 (e cioè le due inclinazioni delle onde d'urto ε_4 e ε_5), occorre procedere per tentativi tenendo presente che dovrà essere $\delta_4 + \delta_5 = \beta$ e $p_4 = p_5$.



Attenzione: Come si vedrà in seguito, in dipendenza dei valori dei parametri termofluidodinamici delle due correnti che lambiscono il diedro e dell'angolo β , una delle due onde d'urto oblique potrebbe anche essere sostituita da un ventaglio di espansione che verrà sviluppato nella trattazione successiva.



ONDE D'URTO CONICHE

In precedenza sono state analizzate in dettaglio le onde d'urto oblique ed è stato supposto che la fenomenologia fisica fosse bidimensionale piana.

Spesso, questa ipotesi non è applicabile. Infatti, in molte applicazioni pratiche, esiste, ad es., simmetria assiale, come nella parte prodiera di un aereo, o di un missile, supersonici, o nelle prese d'aria supersoniche con spina conica.

Conviene, pertanto, studiare, sia pure dal solo punto di vista dei risultati, il moto stazionario di una corrente supersonica che investe un cono ad angolo d'attacco nullo.

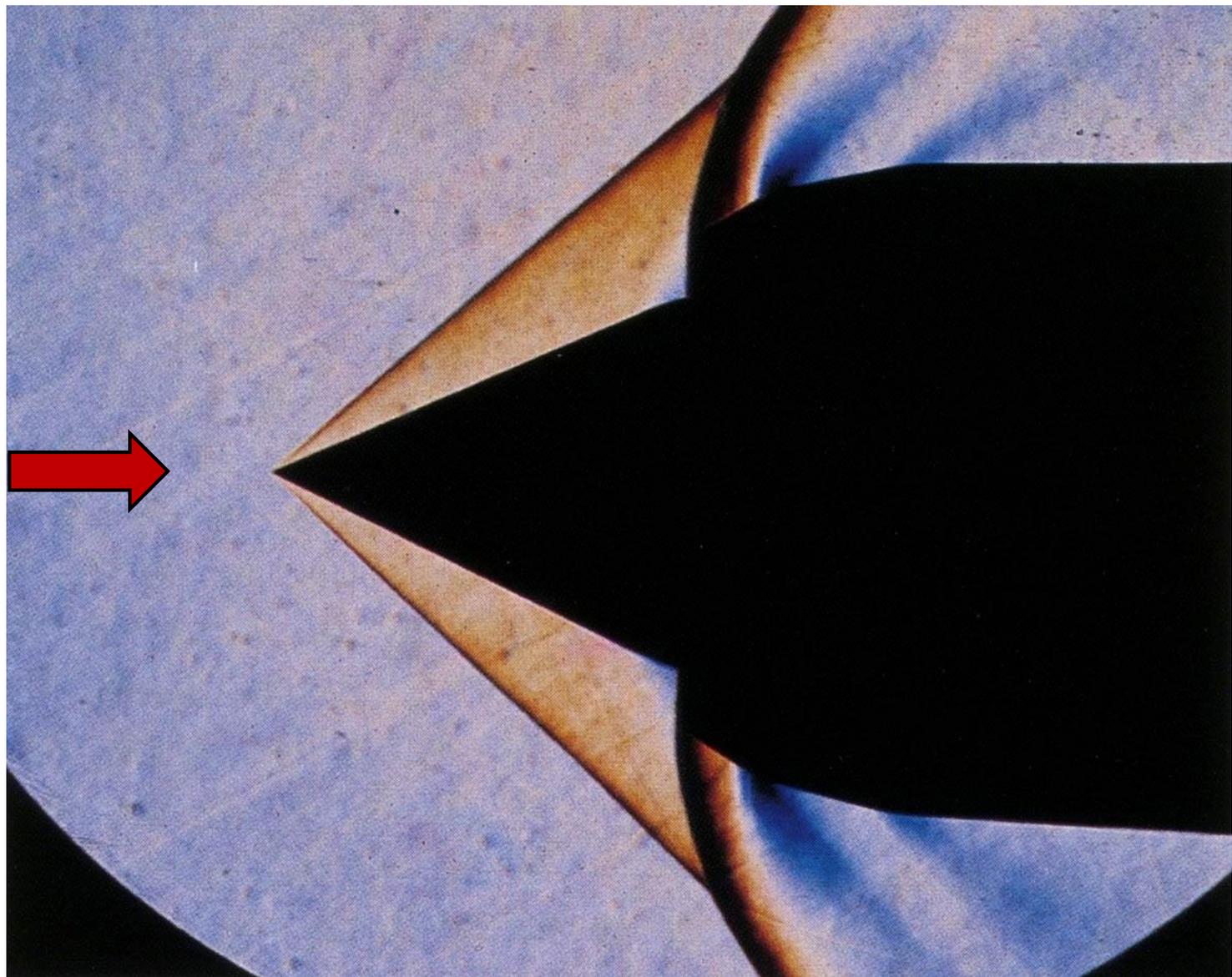
Quest'ultima ipotesi, peraltro restrittiva, è necessaria poiché la presenza di un angolo d'incidenza non nullo provoca la perdita della simmetria assiale, cioè della bidimensionalità assialsimmetrica, comportando una notevole complicazione della trattazione.

Per studiare il campo di moto generato da una corrente supersonica che investe un cono indefinito ad angolo d'attacco nullo, si devono risolvere le equazioni del bilancio locali sfruttando le semplificazioni che derivano dall'ipotesi di assialsimmetria.

In questa trattazione, si ignoreranno le sottigliezze analitiche discutendo in dettaglio solo le ipotesi ed i risultati dell'analisi.



ONDA D'URTO CONICA IN UNA PRESA D'ARIA SUPERSONICA CON SPINA CONICA (AIR INLET)



$$M = 2$$

$$\delta = 24^\circ$$



Gasdinamica – Schlieren a colori di una presa d'aria supersonica
Onde d'urto – Astarita/Cardone

104

ONDE D'URTO CONICHE

Le ipotesi che si formulano per le onde coniche semplici sono le seguenti:

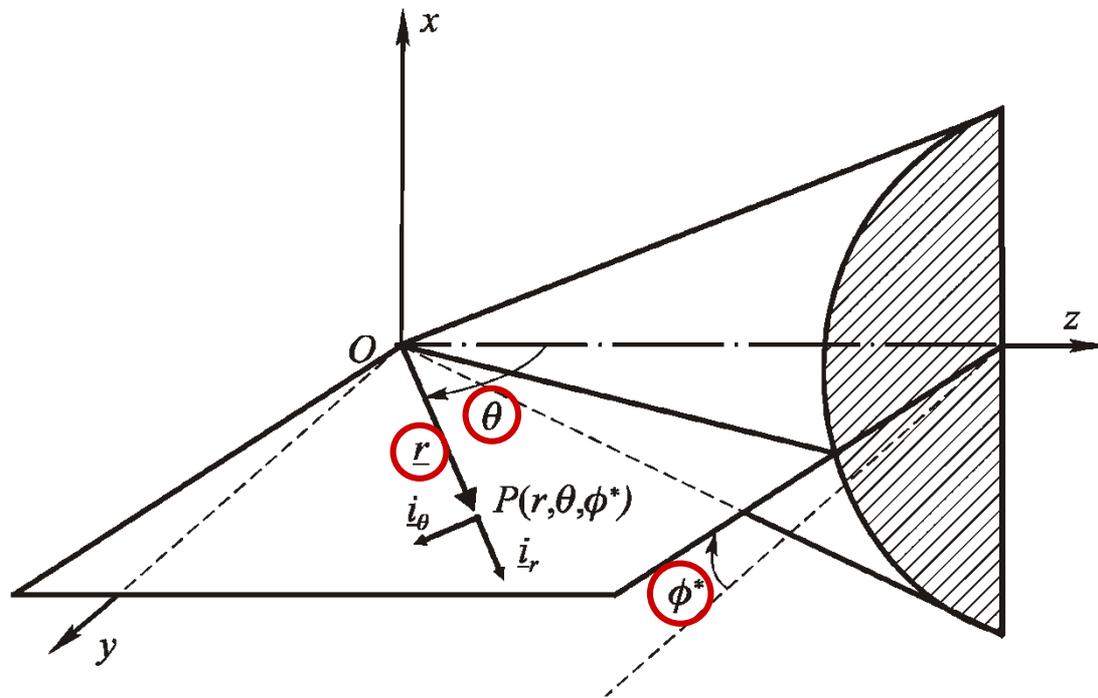
- Il campo di moto è simmetrico rispetto all'asse del cono. Quest'ipotesi comporta due risultati fondamentali:
 - il primo è che la proiezione del campo di moto su un piano che comprende l'asse del cono non è influenzata dalla scelta del piano stesso e cioè, in un sistema di riferimento di tipo cilindrico, è indipendente dalla coordinata azimutale;
 - il secondo è che, se si applicasse il bilancio del momento della quantità di moto prima e dopo l'onda d'urto, la componente normale a questo piano del vettore velocità risulterebbe identicamente nulla.
- Oltre ad essere omoenergetico, il moto è omoentropico (ad entropia costante) sia prima che dopo l'onda d'urto pur essendo diversa l'entropia prima e dopo l'urto. Ovviamente, affinché sia verificata quest'ipotesi, è necessario che l'onda d'urto sia conica e attaccata al vertice del cono, altrimenti l'angolo ε varia.



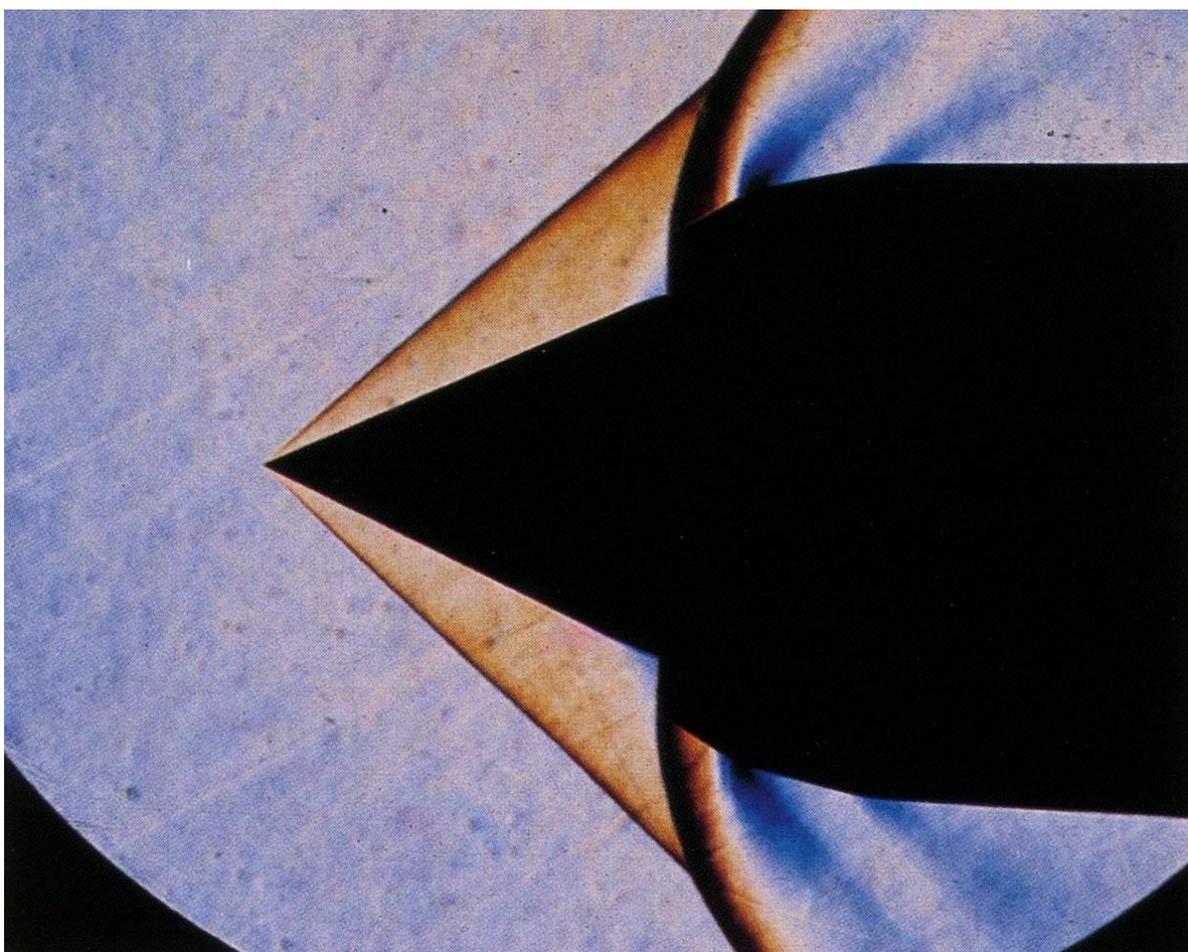
- Essendo stato supposto il cono indefinito, poiché non esiste alcuna lunghezza caratteristica rispetto alla quale adimensionalizzare, le restanti due variabili spaziali delle coordinate cilindriche (si veda la prima ipotesi) possono comparire solo come rapporto fra le stesse.

Quest'ipotesi è equivalente a dire che, se si considera un sistema di riferimento di tipo sferico, come quello mostrato in figura, tutte le grandezze termofluidodinamiche devono essere funzione della sola variabile θ .

Ciò rinforza l'ipotesi che, nel caso che si sta analizzando, l'onda d'urto debba essere conica e attaccata al vertice del cono.



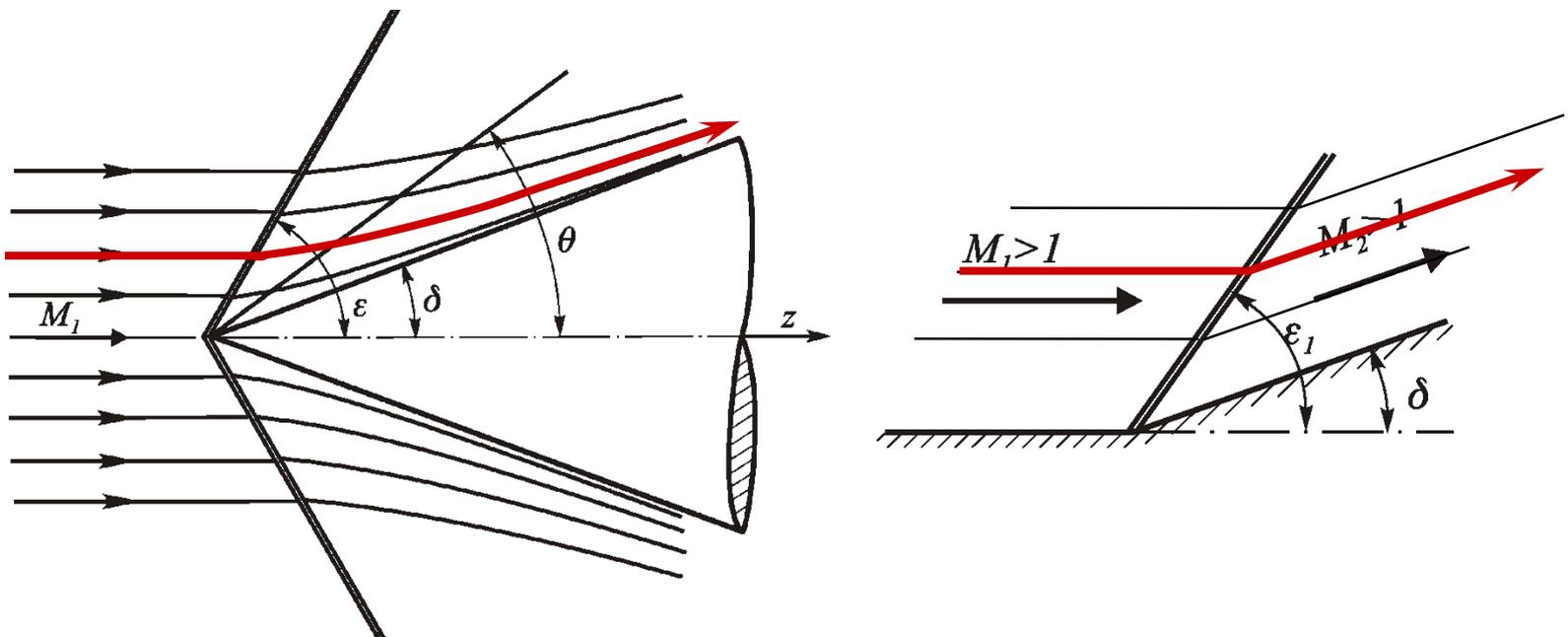
In effetti, per onde d'urto attaccate al vertice di un cono a angolo d'attacco nullo e alti numeri di Reynolds locali, queste tre ipotesi sono abbastanza verificate sperimentalmente (si ricordi l'onda d'urto sulla presa d'aria).



Nel caso di un **diedro**, dopo l'onda d'urto, **le linee di corrente sono dritte e parallele alla superficie del diedro**.

Invece, come mostrato dalla figura, dopo l'onda d'urto, per il **cono** **le linee di corrente sono curve e convergenti tra loro**.

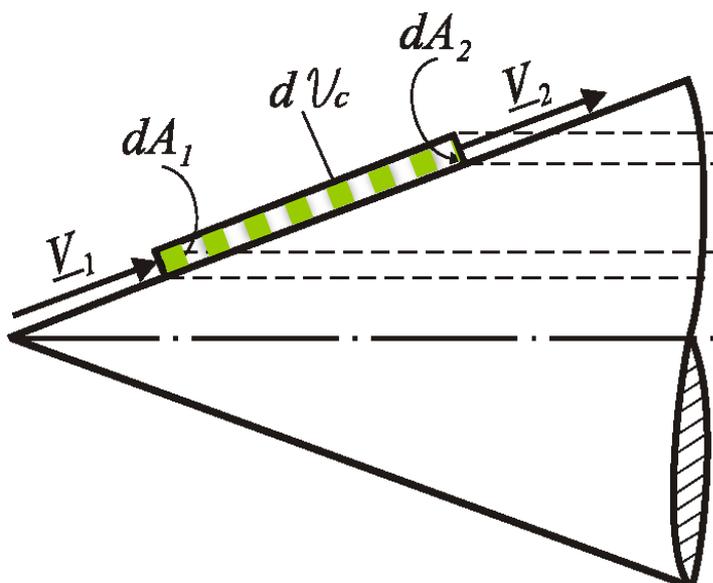
Il fatto che le linee di corrente convergano, e che **di conseguenza la deviazione a valle dell'onda d'urto debba essere minore di δ** , può essere spiegato dimostrando che esse non possono né essere parallele tra loro, né divergere.



Per dimostrare che le linee di corrente non possono essere parallele tra loro, si consideri il **volume di controllo** rappresentato nella figura a sinistra, nel quale il fluido entri dalla sezione di area dA_1 e ne esca da quella di area dA_2 (avente la stessa altezza)

Si supponga poi, per assurdo, che il fluido stesso si muova parallelamente alla generatrice del cono.

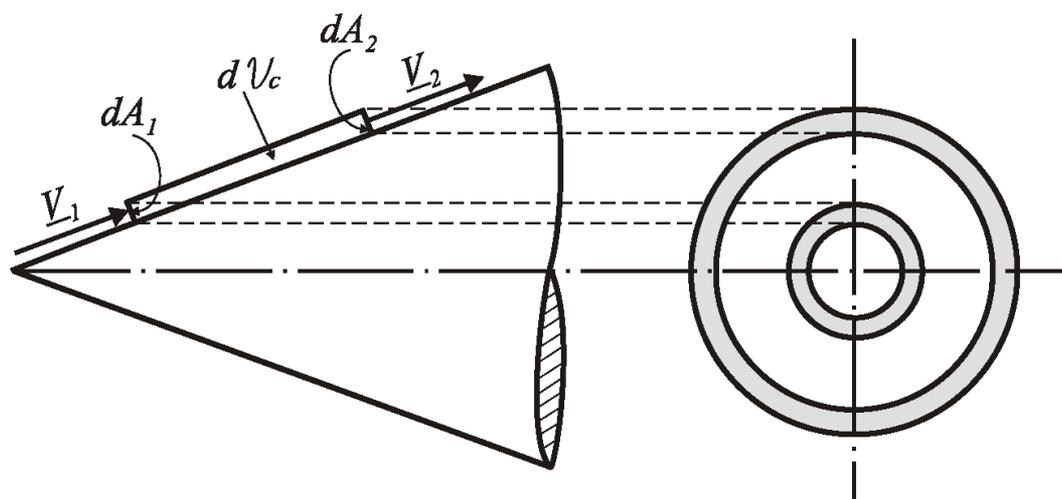
Come si vede chiaramente nella vista laterale (figura a destra), l'area dA_2 è maggiore della dA_1 .



Per la:

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

a supersonico (ma analogo subsonico), un aumento (o diminuzione) della pressione



Se ora si fa riferimento a questo tubo di flusso elementare è facile convincersi che M **creocerebbe** all'aumentare dello spazio percorso a partire dall'onda il che risulterebbe in contrasto con la terza ipotesi, perché comporterebbe, un **continuo aumento del numero di Mach sulla superficie del cono**.

A maggior ragione le linee di corrente **non possono divergere** tra loro, altrimenti anche l'altezza del tubo di flusso aumenterebbe comportando un conseguente maggior aumento di area. Dunque le linee di corrente devono per forza essere **convergenti** per mantenere sulla superficie del cono le stesse condizioni di pressione e di numero di Mach.

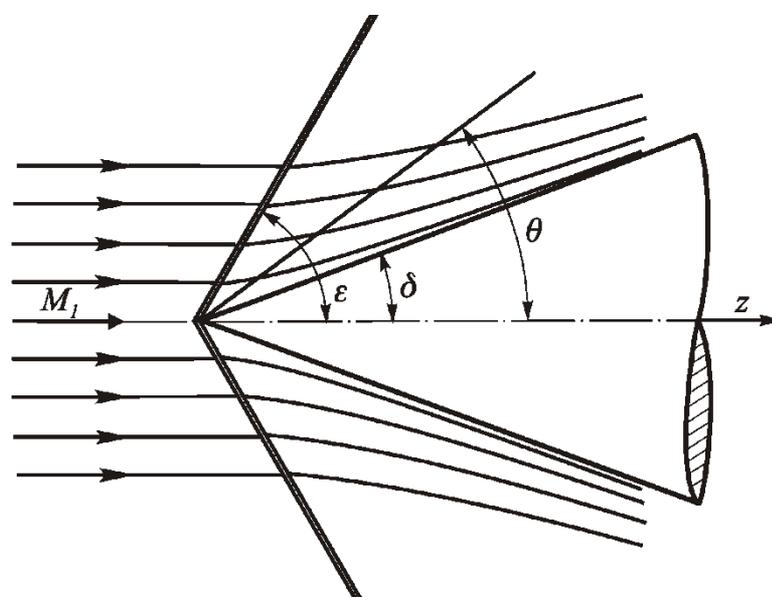


Il convergere delle linee di corrente a valle dell'onda d'urto provoca una variazione delle variabili termofluidodinamiche che, per le ipotesi fatte, devono seguire una **trasformazione isoentropica**.

In particolare, **nell'evoluzione che porta il fluido dalle condizioni immediatamente dopo l'onda d'urto a quelle sul cono, la pendenza delle linee di corrente cresce** (finché queste non diventano, relativamente molto a valle, parallele alla superficie del cono), **il numero di Mach diminuisce e la pressione aumenta**.

L'ulteriore deviazione della corrente e la compressione che avvengono nella regione a valle dell'onda fanno sì che, **a parità di angolo di deviazione δ e di Mach della corrente a monte, l'onda d'urto sia meno intensa**.

Ovvero, a parità di angolo d'urto ε e numero di Mach M_1 , **l'angolo finale di deviazione della corrente δ dell'onda conica risulta maggiore di quello corrispondente alla deviazione dovuta all'onda d'urto piana**.



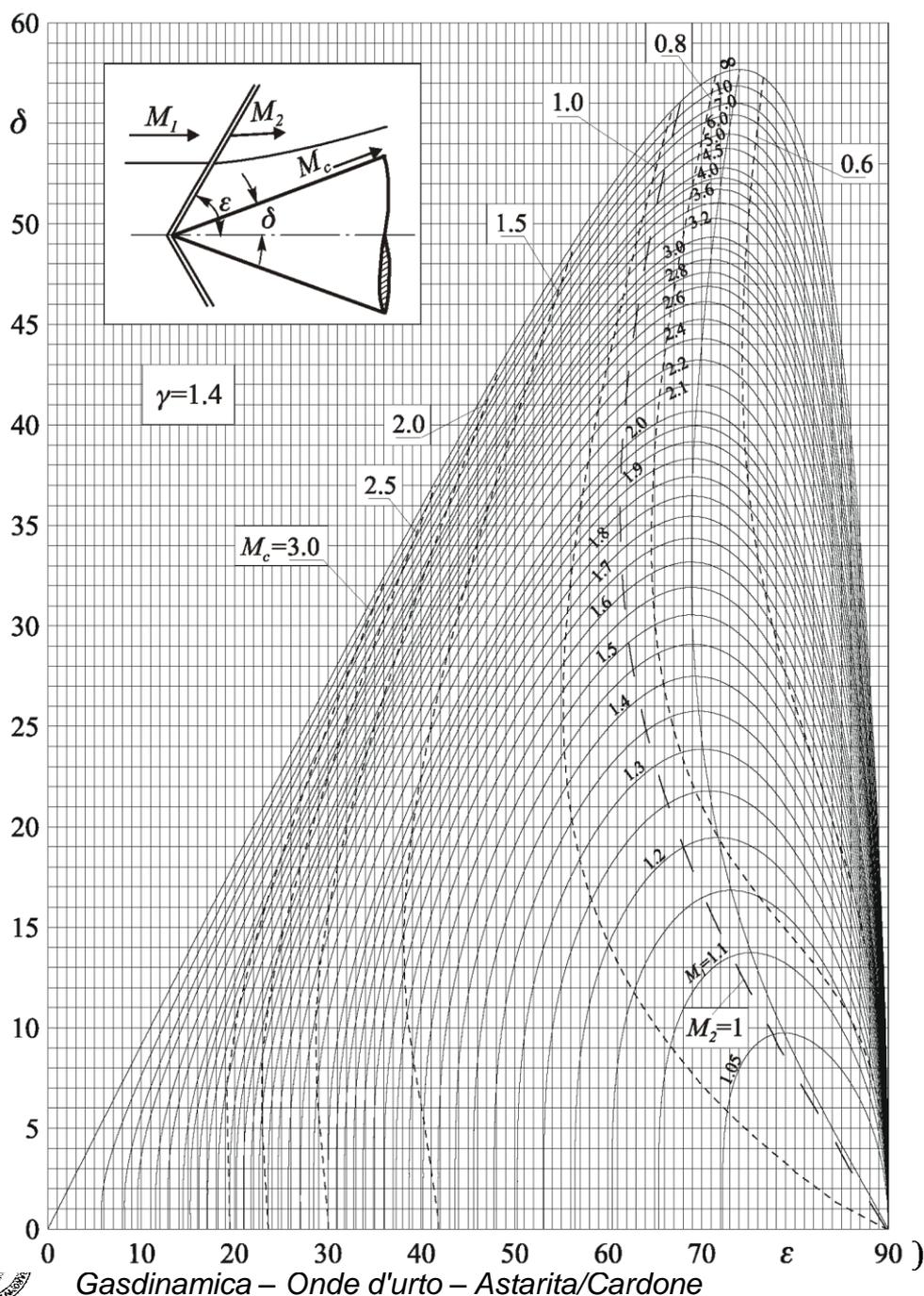
Essendo l'angolo d'urto costante, per il teorema di Crocco, l'ipotesi di omoentropicità implica [l'irrotazionalità del campo di moto a valle dell'onda](#).

Esplicitando questa condizione ed il bilancio di massa locale in coordinate sferiche, si giunge ad un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che prende il nome di [equazione di Taylor-Maccoll](#).

I risultati dell'integrazione numerica dell'equazione di Taylor-Maccoll sono presentati di seguito sotto forma di diagrammi, per il caso particolare di $\gamma = 1.4$.

In queste figure è stato diagrammato il [semiangolo del cono \$\delta\$](#) ([angolo di deviazione finale della corrente](#)) in funzione dell'[angolo d'inclinazione dell'onda d'urto \$\varepsilon\$](#) per diversi valori del numero di Mach a monte dell'onda M_1 .

Questi diagrammi sono equivalenti a quelli per le onde d'urto oblique piane e tutti i commenti già fatti per le onde bidimensionali piane valgono, evidentemente, anche per le onde d'urto coniche.



L'angolo δ rappresenta il semiangolo del cono.

Ciascuna curva a tratto intero del diagramma si riferisce ad un ben determinato valore del numero di Mach.

Anche in questo caso il valore di ε può variare tra l'angolo di Mach μ e 90° .

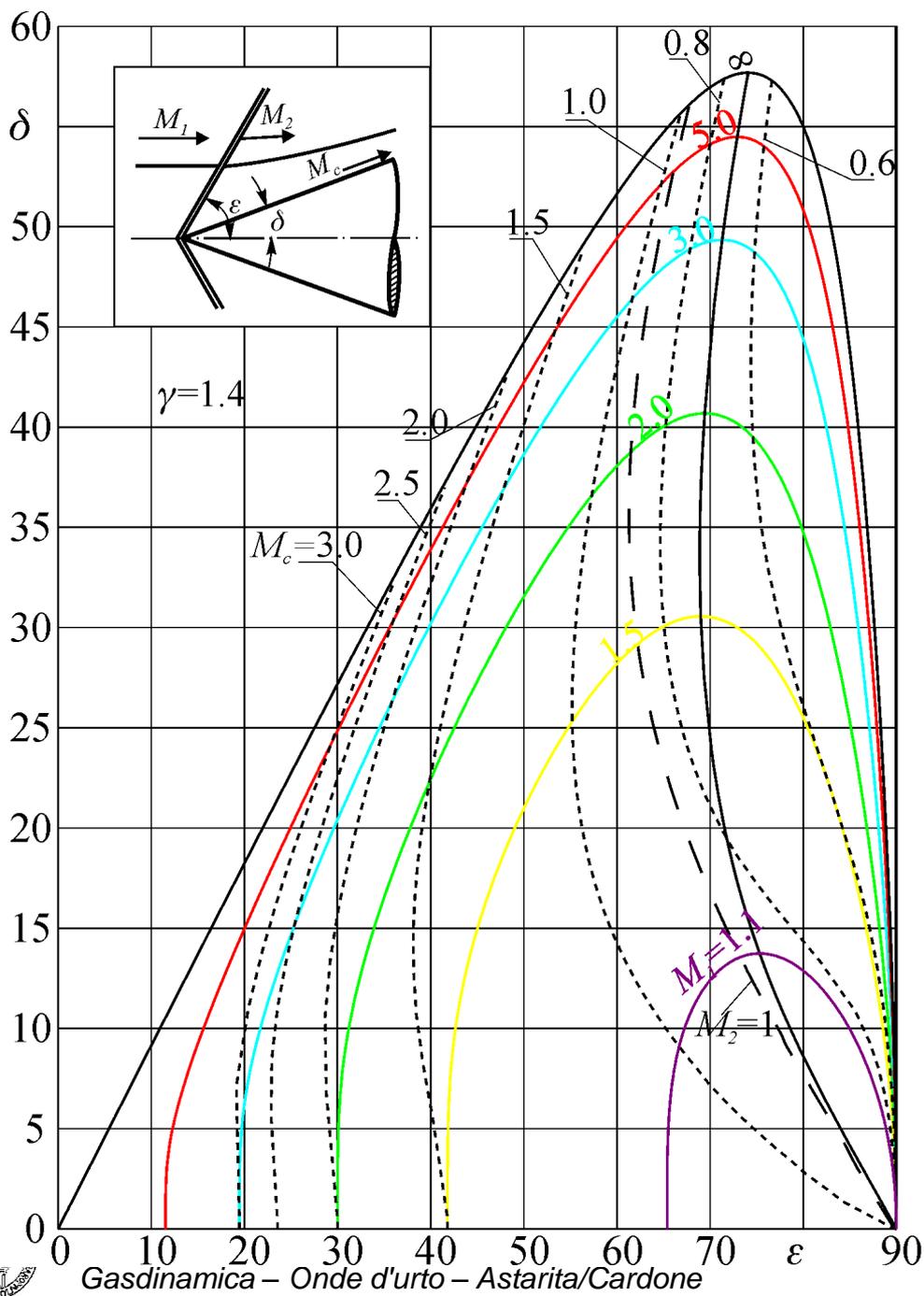
[Per un dato numero di Mach](#), al crescere del valore di δ , [si hanno tre possibilità](#):

[due soluzioni](#) con valori distinti dell'angolo di inclinazione dell'onda d'urto ε ;

[una sola soluzione](#) (all'apice della curva corrispondente al particolare numero di Mach);

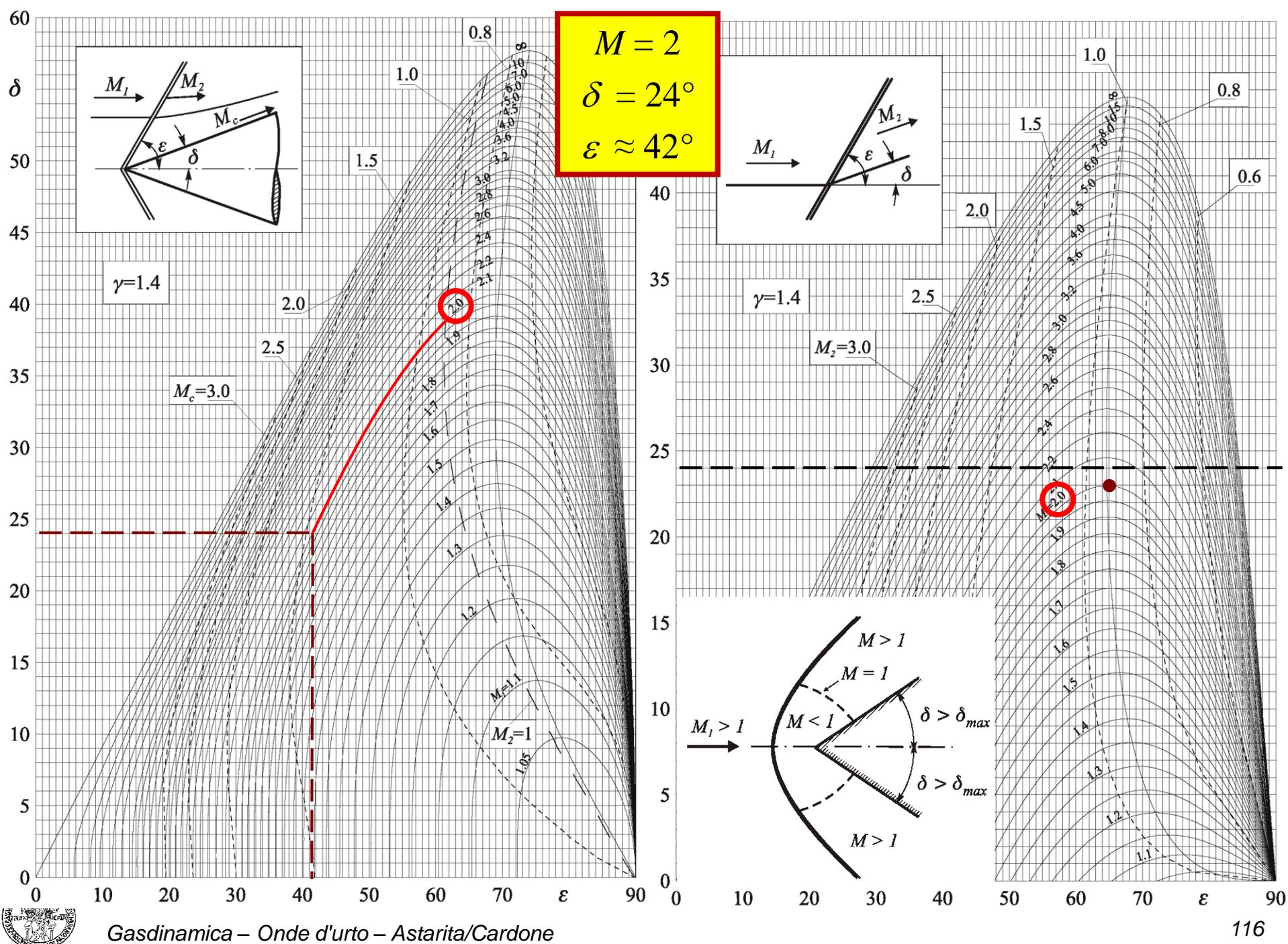
[nessuna soluzione](#).

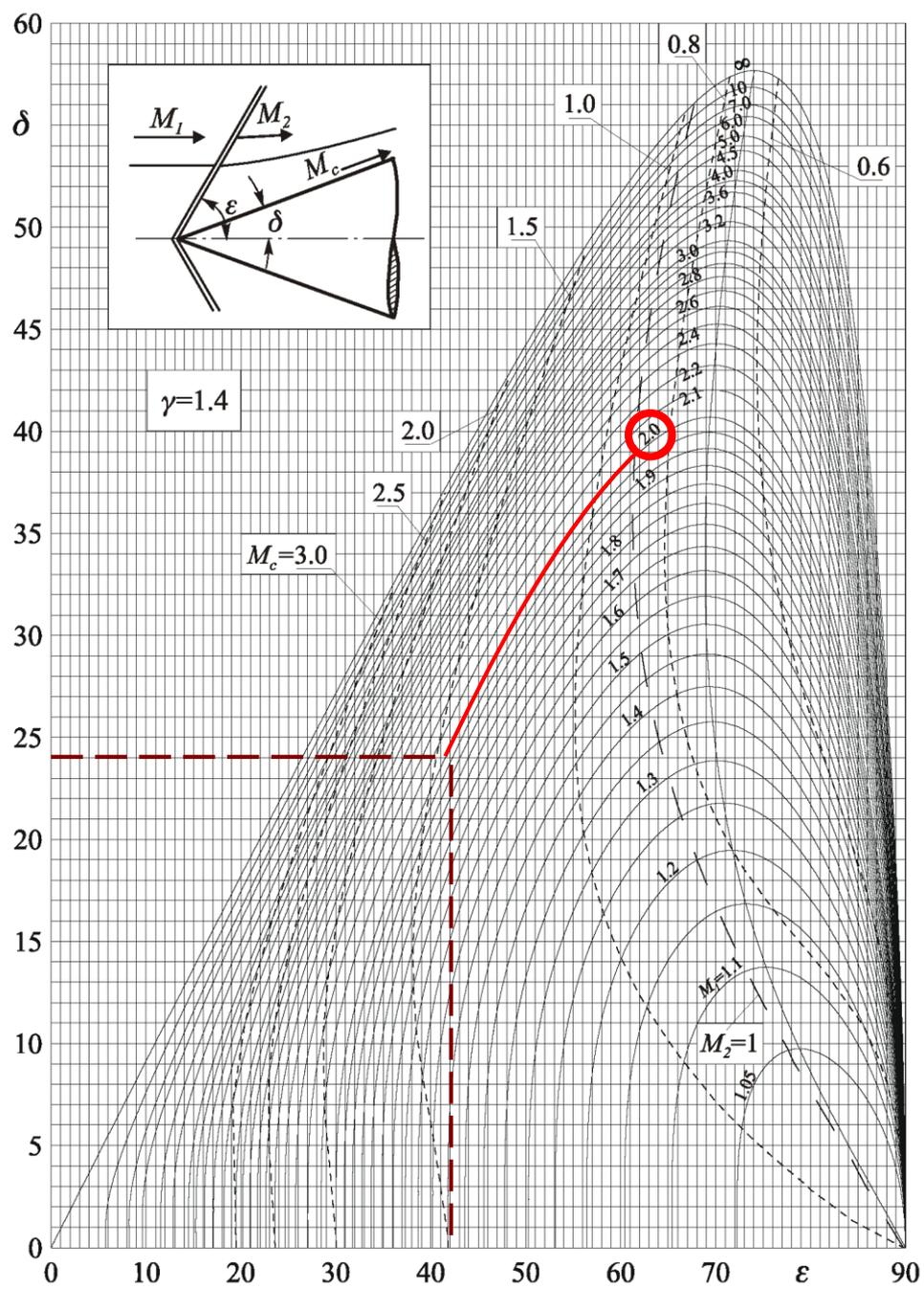




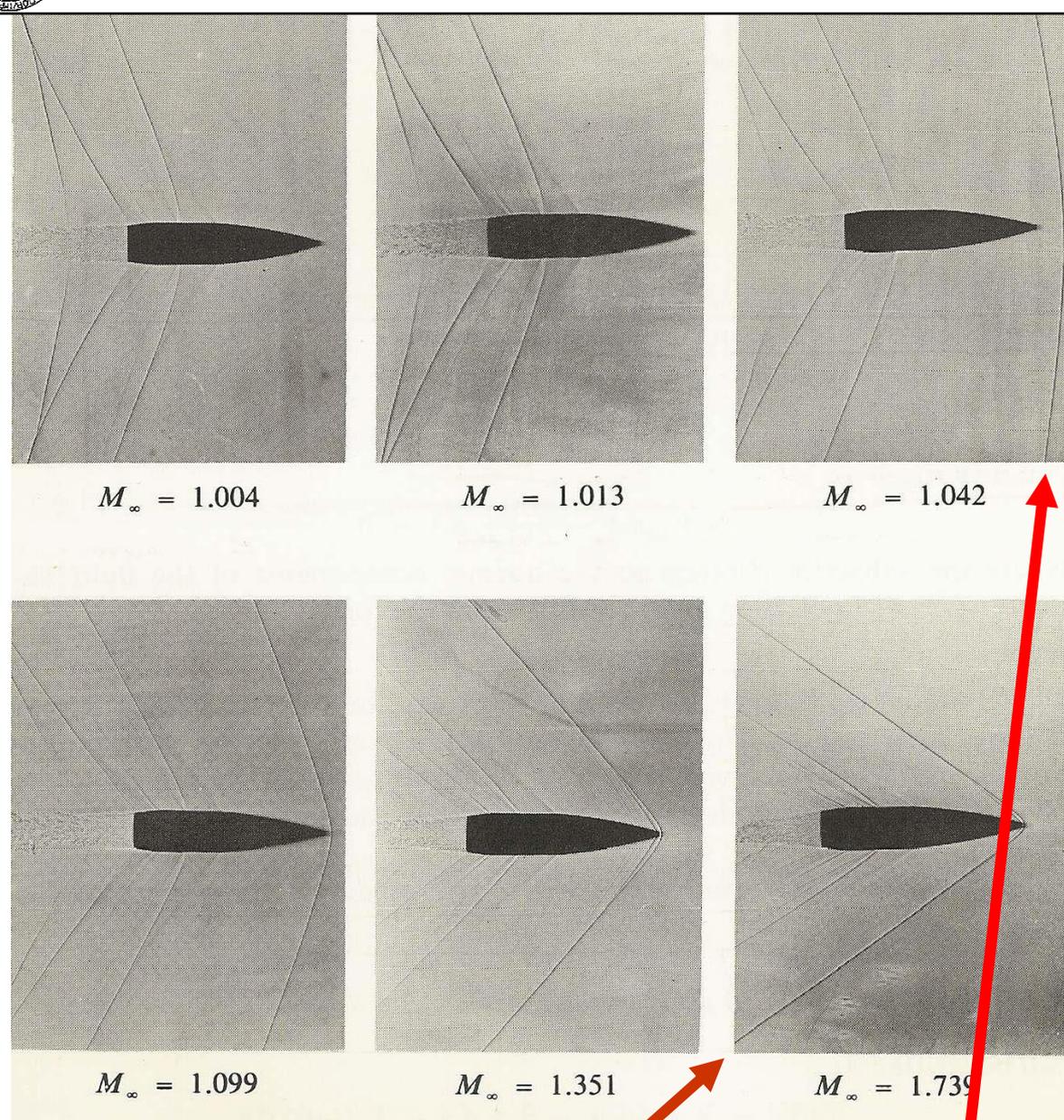
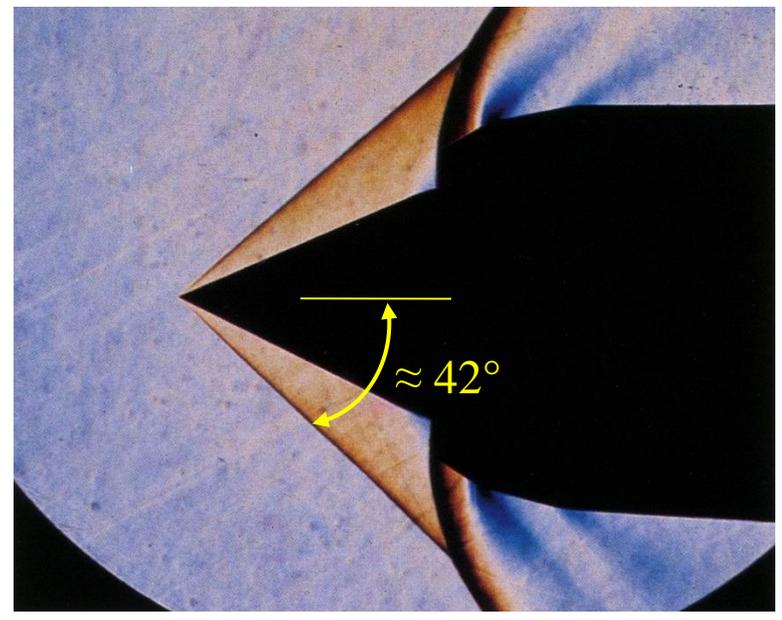
Si noti che, con l'eccezione di $M_2 = 1$ (curva tratteggiata a tratto lungo), nella figura precedente **non sono state diagrammate le curve a M_2 costante** (cioè il numero di Mach subito a valle dell'onda d'urto), bensì quelle a M_c (numero di Mach sulla superficie del cono) costante (curve tratteggiate a tratto breve).

Infatti, essendo il moto a valle dell'onda d'urto isoentropico, noto M_c e le condizioni a valle dell'onda d'urto, tramite le tabelle del flusso isoentropico, si possono determinare tutte le grandezze termofluidodinamiche sulla superficie del cono che sono quelle che interessano.

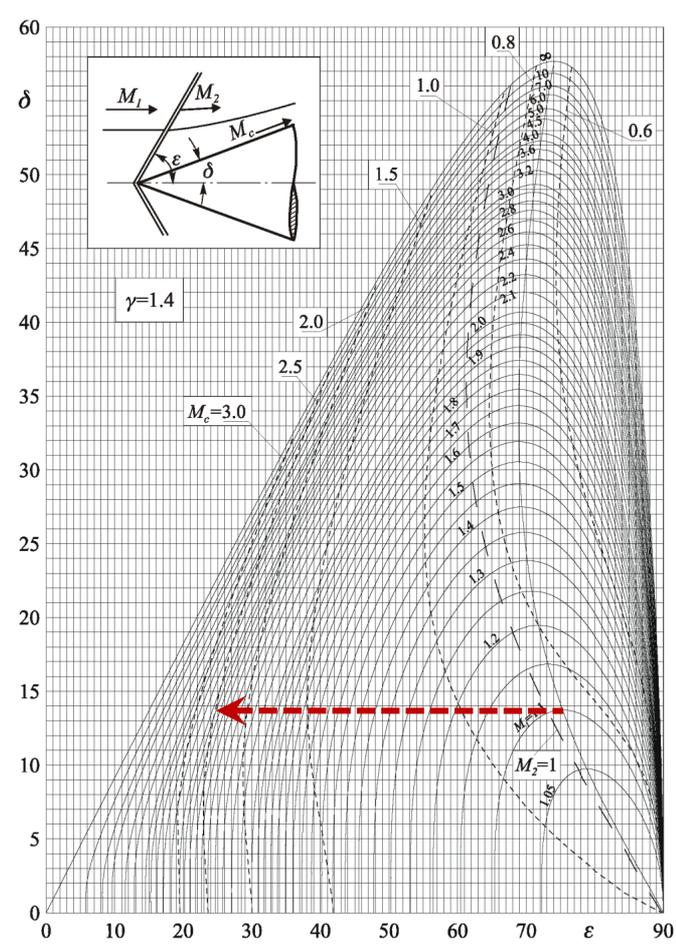




$M = 2$
 $\delta = 24^\circ$
 $\epsilon \approx 42^\circ$



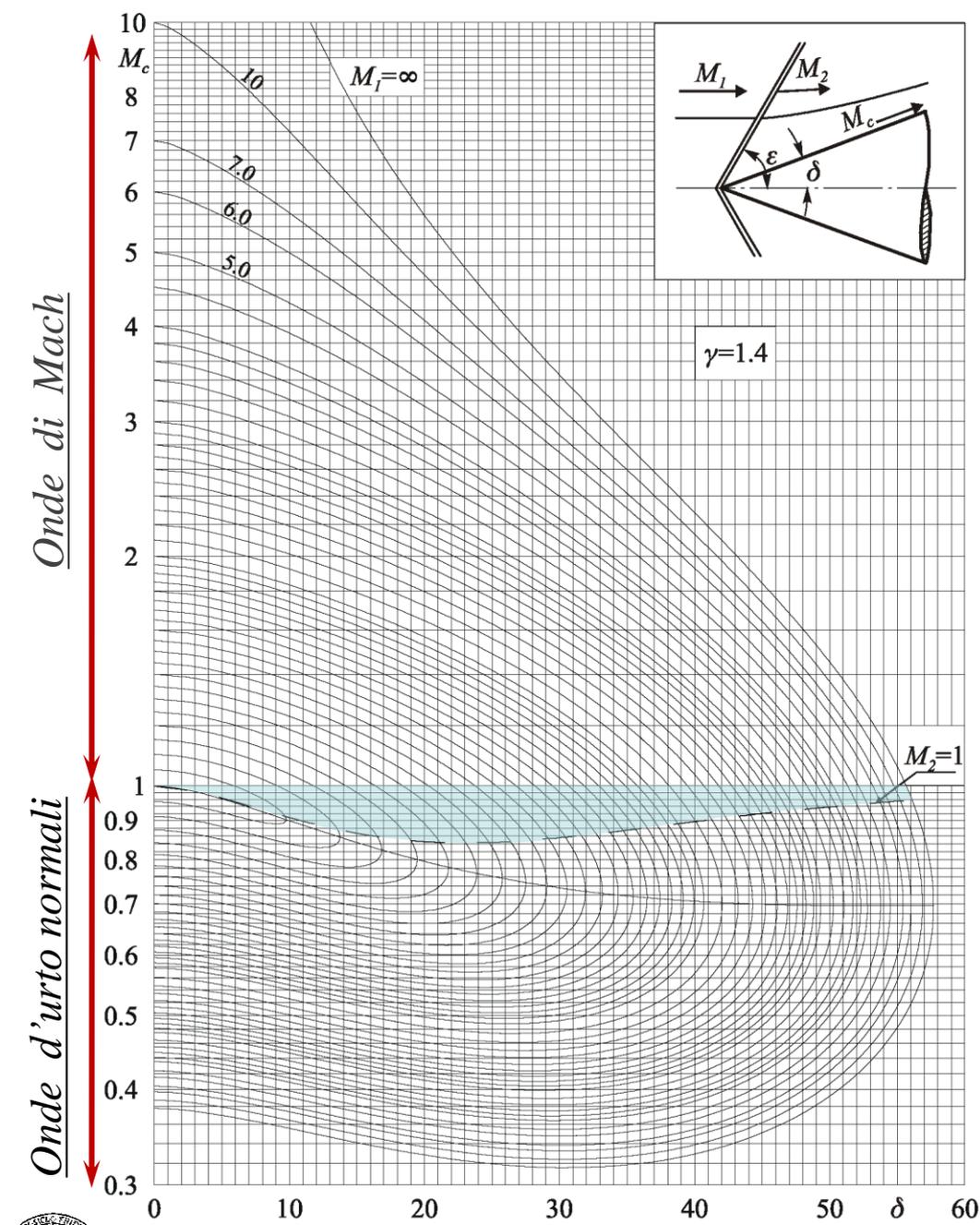
All'aumentare del numero di Mach l'onda dapprima si avvicina al corpo e poi si piega all'indietro.



Shadowgraphs del campo di moto intorno a un proiettile in moto **supersonico**.

Notare l'onda d'urto staccata, quasi normale, per $M \cong 1$ e il suo inclinarsi all'aumentare del numero di Mach





Nella figura a lato, è più dettagliatamente diagrammato M_c in funzione di δ per diversi valori di M_1 .

Nel diagramma i **numeri di Mach a monte dell'onda d'urto** sono identificabili con le **intercette** delle relative curve per $\delta = 0$ e $M_c \geq 1$.

È interessante notare che, qualunque sia il numero di Mach M_1 , **esistono sempre coppie di valori δ, ϵ tali che il moto a valle dell'onda possa passare da un regime supersonico ad uno subsonico senza ulteriori onde d'urto.**

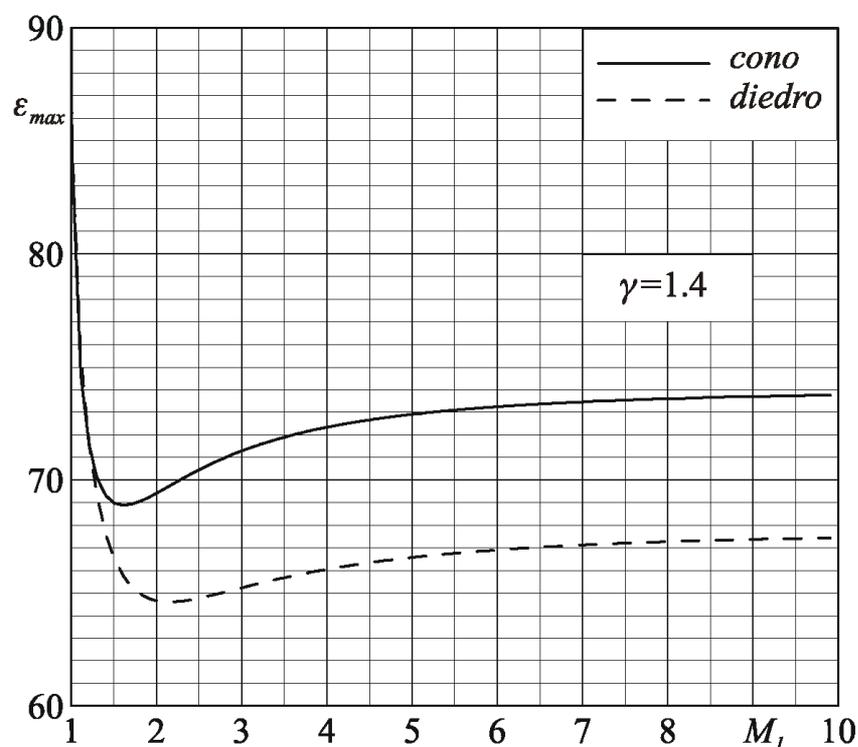
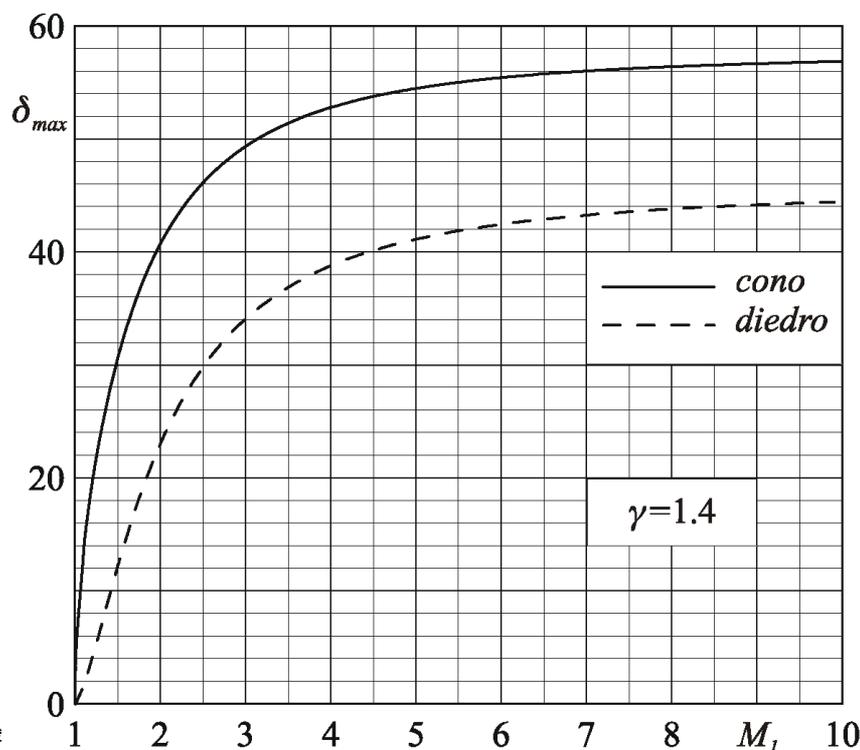
Questo fenomeno accade per tutti i punti appartenenti alla **regione delimitata superiormente dalla retta orizzontale di equazione $M_c = 1$ e inferiormente dalla curva $M_2 = 1$**



Nella due figure in basso sono diagrammati rispettivamente δ_{max} ed ϵ_{max} in funzione di M_1 per i due casi d'onda conica e bidimensionale piana.

Come già detto precedentemente, a causa del convergere delle linee di corrente, la **deviazione imposta dall'onda conica è minore** o, in altri termini, essendo l'onda meno intensa, il disturbo prodotto dal corpo sulla corrente a monte è più piccolo.

Ne consegue che l'**angolo di deviazione massimo è maggiore** nel caso del cono rispetto al caso piano.



Attenzione: Il fatto che per $M_1 \geq 1.2$ l'angolo d'urto massimo per il cono sia maggiore di quello per il diedro non contraddice quanto già affermato sulla minore inclinazione dell'onda conica rispetto a quella piana, giacché ciò è valido solo a parità di δ .

Infine occorre qui esplicitamente osservare che, in modo del tutto analogo a quanto accade nel caso di una corrente supersonica che investe un diedro piano, **se l'angolo di semiapertura del cono è maggiore di δ_{max} l'onda d'urto si stacca dal vertice.**

