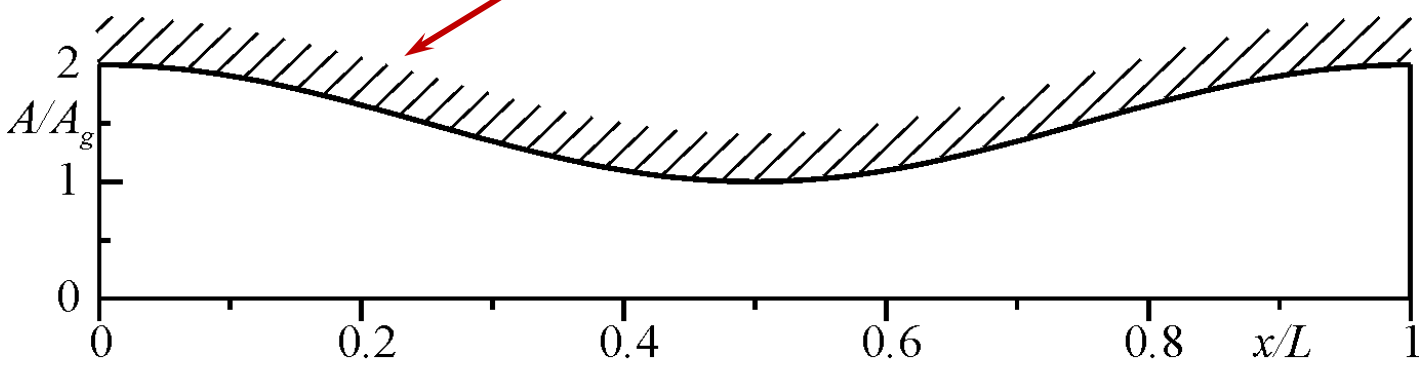
UGELLI

Si intende per ***ugello*** un condotto ad area variabile, non molto lungo rispetto al suo diametro medio, ***convergente*** e/o ***divergente***, avente una generica distribuzione dell'area della sua sezione del tipo diagrammato in figura.

Ciascun tratto di questo condotto nel quale la ***pressione diminuisce*** (la velocità aumenta) è chiamato **effusore**; viceversa, il tratto in cui la ***pressione aumenta*** (la velocità diminuisce) viene detto **diffusore**.

Ad esempio, per quanto detto in precedenza, il tratto ***convergente*** di un ugello si comporterà come ***effusore***, se attraversato da un flusso ***subsonico***, e come ***diffusore***, se attraversato da un flusso ***supersonico***.

Il moto del fluido negli ugelli è abbastanza ben descritto con le ipotesi di moto ***quasi-unidimensionale, quasi-stazionario, omoenergetico e isoentropico*****,** purchè essi non siano molto lunghi rispetto al loro diametro medio e la variazione di sezione sia abbastanza graduale.



Sulla base di queste ipotesi sono quindi valide le equazioni di bilancio:

$$H = h + V^2/2 = cost$$

$$\dot{m} = \rho V A = G A = cost$$

$$s = cost$$

che, come già visto, ***per un gas più che perfetto*** conducono alle stesse relazioni relative alle ***condizioni di ristagno*** (che, ovviamente, sono ***costanti***):

$$T_o = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

$$\rho_o = \rho\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sono altresì valide tutte le considerazioni derivate sulla scorta di dette ipotesi ed in particolare la formula (anche essa valida ***per gas più che perfetto***) sul legame tra ***il rapporto delle aree e il numero di Mach***:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

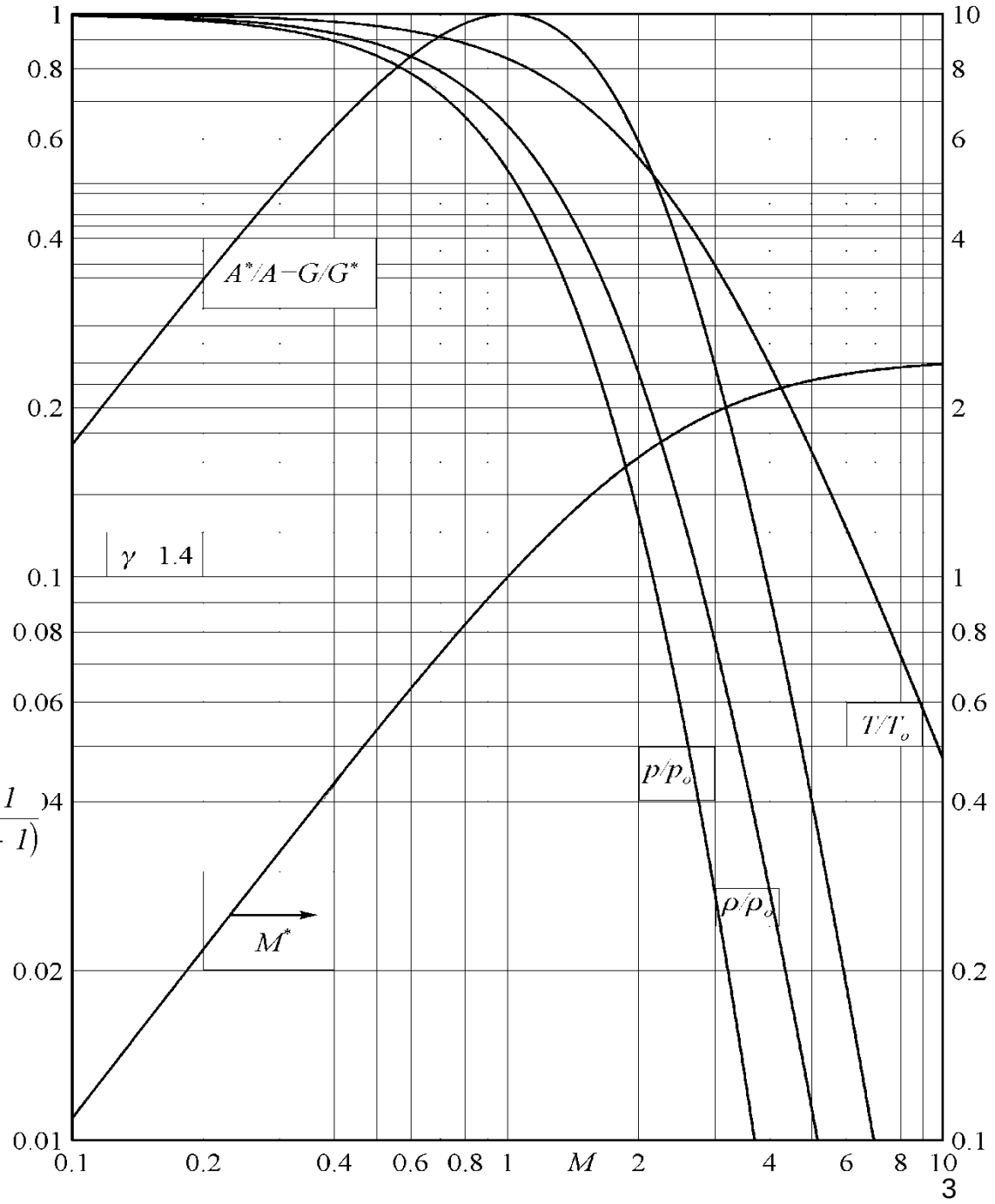
$$T_o = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

$$\rho_o = \rho\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$M^{*2} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{\gamma + 1}{2}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$



Tutti i rapporti si leggono sulla scala di sinistra, tranne M^* che va letto su quella di destra.

All'aumentare di Mach, i rapporti T / T_o, ρ / ρ_o e p / p_o ***sono tutti monotonicamente decrescenti***.

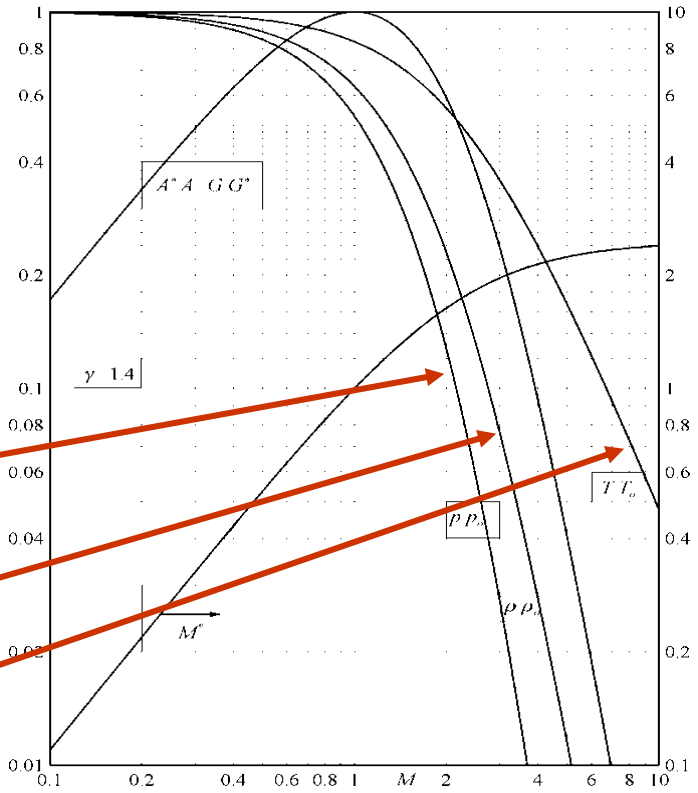
La diminuzione maggiore si ha per la pressione, poi per la densità e, infine, per la temperatura.

Nel caso di $\gamma = 1.4$, gli esponenti della quantità in parentesi sono rispettivamente **3.5**, **2.5** e **1**.

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\rho_o = \rho\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$T_o = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

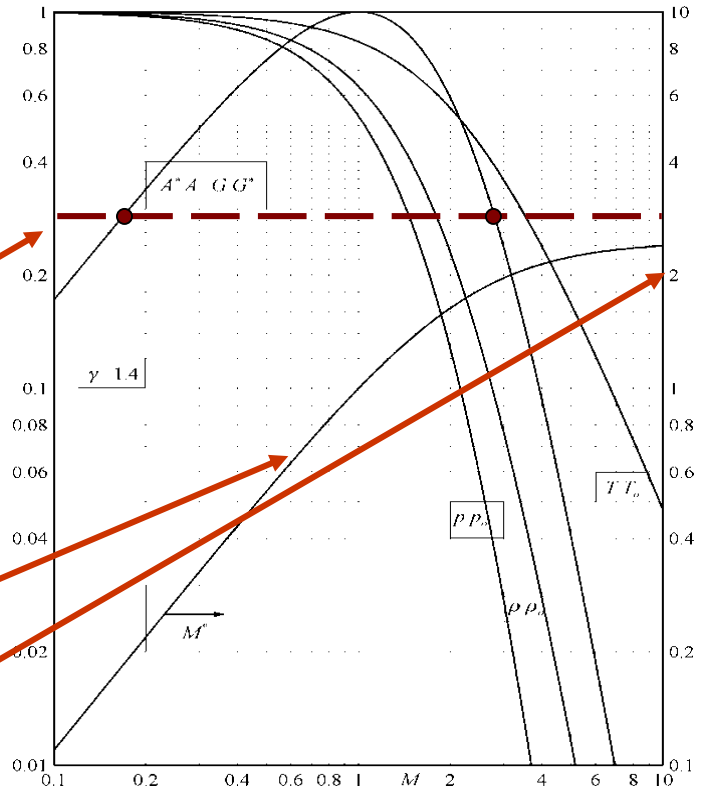


All'aumentare di Mach, i rapporti T / T_o, ρ / ρ_o e p / p_o ***sono tutti monotonicamente decrescenti***.

La diminuzione maggiore si ha per la pressione, poi per la densità e, infine, per la temperatura.

Nel caso di $\gamma = 1.4$, gli esponenti della quantità in parentesi sono rispettivamente **3.5**, **2.5** e **1**.

Tranne che per $M = 1$, ***per ogni*** A/A^****, esistono due valori del numero di Mach, uno in regime subsonico e l'altro in supersonico***.



Il numero di Mach critico, già definito dalla:

$$M^* = \frac{V}{a^*}$$

rappresenta anche V/V^* e ***misura la velocità sempre con la*** $V^* = a^*$. Quindi, indica l'andamento della velocità del fluido in funzione del numero di Mach.

Il suo valore limite, ***asintotico*** ($M \to \infty$):

$$\sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)} \qquad (\cong 2.45 \text{ per } \gamma = 1.4)$$

si ottiene quando la velocità del gas raggiunge la velocità limite V_l e può essere ricavato facendo tendere $M \to \infty$ nella:

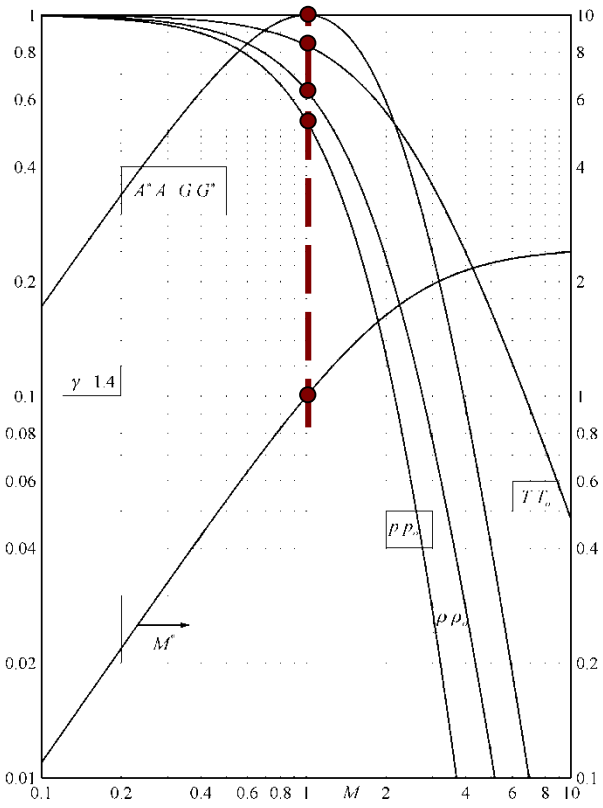
$$M^{*2} = \frac{V^2}{a^2}\frac{a^2}{a^{*2}} = M^2 \frac{T}{T_o}\frac{T_o}{T^*} = \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}\frac{\gamma + 1}{2}$$

Per le ***condizioni critiche*** ($M = 1$), si ha:

$$\frac{T^*}{T_o} = \frac{a^{*2}}{a_o^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad ; \quad (0.8333)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_o} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad ; \quad (0.6339)$$

$$\frac{p^*}{p_o} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad ; \quad (0.5283)$$



I valori numerici in parentesi valgono per $\gamma = 1.4$.

I rapporti critici sono, infatti, solo funzione di γ.

Chiaramente, per $M = 1$, si ha:

$$A/A^* = 1 \quad ; \quad M^* = 1$$

Si vuole ora ricavare la ***velocità del fluido in funzione della pressione*** da esso raggiunta in un determinato punto del condotto.

Per un gas più che perfetto, la $H = h + V^2/2$ si può scrivere nella forma:

$$V^2 = 2(H - h) \quad \Rightarrow \quad V = \left[2 c_p T_o \left(1 - \frac{T}{T_o}\right)\right]^{1/2}$$

$$V = \left[2 c_p T_o \left(1 - \frac{T}{T_o} \right) \right]^{1/2}$$

Questa espressione, ricordando che:

$$c_p = \gamma R / (\gamma - 1) \quad ; \qquad a_o^2 = \gamma R T_o$$

e che per una trasformazione isoentropica vale:

$$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

diventa:

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

Questa relazione, generalmente chiamata ***formula di de Saint Venant e Wantzel***, consente di calcolare la ***velocità raggiunta da un gas che, a partire dalla pressione di ristagno*** p_o ***, si porta ad una pressione*** p .

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

$$c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$$

La ***formula di de Saint Venant e Wantzel***, per $p/p_o \to 0$, ovviamente conduce alla **velocità limite**:

$$V_\ell = a_o \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} = \sqrt{\frac{2 \gamma R T_o}{\gamma - 1}} = \sqrt{2 H}$$

La prima relazione mostra, ad esempio, che, per $\gamma = 1.4$, la massima velocità raggiungibile dal fluido è pari a $\sqrt{5}\, a_o$ e cioè a circa 2.24 volte la velocità del suono in condizioni di ristagno (nel serbatoio).

Infine, occorre porre qui in evidenza che, nel caso in cui $(p_o - p)/p << 1$ dalla:

$$p_o - p = \frac{\gamma}{2} p M^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2 - \gamma}{24} M^4 + \ldots \right)$$

si ricava: $M^2 << 1$ e $F_c \cong 1$, ***quindi il moto del fluido può essere considerato incompressibile.***

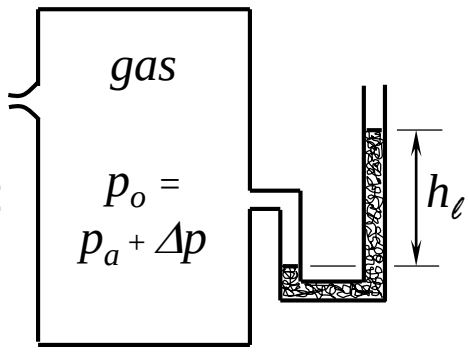
Infatti, per valori di:

$$1 - \Delta p/p_o = p_a/p_o = (p_o - \Delta p)/p_o \cong 1$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2/2 + \ldots \quad (x << 1)$$

espandendo in serie arrestandosi al secondo termine la quantità elevata a potenza all'interno della parentesi quadra della formula

$$V = a_o \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$



si ricava la formula della ***velocità in regime incompressibile***:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

nella quale la p_a (pressione ambiente) ha sostituito la p perché, come si vedrà, per l'ipotesi fatta è sempre valida la condizione di Kutta (pressione nella sezione di uscita dell'ugello eguale alla pressione ambiente).

La ***differenza di pressione*** Δp ***tra serbatoio e ambiente*** può essere valutata come $\Delta p = \rho_l g h_\ell$, dove ρ_l e h_ℓ sono, rispettivamente ***la densità e il dislivello del liquido manometrico*** in un manometro differenziale a liquido e g ***il modulo dell'accelerazione di gravità***.

Allora, invece di usare la formula di de Saint Venant e Wantzel, risulta molto più conveniente ricavare la velocità all'uscita di un ugello (anche ***per motivi di migliore approssimazione numerica***) attraverso la ***formulazione incompressibile del teorema di Bernoulli***:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \cancel{gz} = cost = p_o/\rho$$

Nel serbatoio:
$V = 0$; $p = p_o$

nella quale cui si trascuri il termine gravitazionale e applicata tra il serbatoio e la sezione di uscita dell'ugello (dove $p = p_a$) che conduce alla relazione già anticipata in precedenza:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

In questa relazione la ***densità*** ρ, a causa della piccola differenza tra le due pressioni p_a e p_o , può essere calcolata ***sia alla pressione di ristagno*** p_o, ***che alla pressione ambiente*** p_a, che,

Meglio ancora, si può calcolare alla pressione media tra le due $(p_o + p_a)/2$.

Comunque, essa deve essere ***sempre calcolata alla temperatura di ristagno*** (nel serbatoio) in quanto ***la temperatura dell'ambiente in cui scarica l'ugello non influenza in alcun modo la densità stessa***.

L'ultimo modo (e cioè il ***calcolo della densità alla pressione media tra quella nel serbatoio e quella ambiente***) consente di estendere, con una buona approssimazione (migliore del 3%), la validità della precedente relazione sino a valori di $(p_o - p) / p_o \cong 0.5$, cioè praticamente fino a $M \cong 1$.

In tal caso la:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

diventa:

$$\rho = (p_o + p_a)/2RT$$

$$V = \sqrt{\frac{4(p_o - p_a)RT_o}{p_o + p_a}}$$

Va fatto, poi , rilevare che, ponendo $p_a = p$, le precedenti relazioni possono essere applicate ad una ***qualunque sezione del condotto*** nella quale la pressione sia pari a p, ***purché ivi sia valida la condizione*** $M << 1$.

Ovviamente, anche la formula di de Saint Venant e Wantzel può essere applicata ad una ***qualunque sezione del condotto*** nella quale la pressione sia pari alla p che in essa compare.

PORTATA IN UN UGELLO

La portata di massa attraverso un ugello ***convergente***, o ***convergente divergente***, in cui il moto sia quasi-unidimensionale e quasi-stazionario, può essere calcolata in una ***qualunque sezione*** del condotto mediante la formula:

$$\dot{m} = \rho V A$$

Nel caso di ***gas più che perfetto*** e di ***trasformazione isoentropica***, quale quella che si sta studiando, si ha:

$$\rho = \rho_o \frac{\rho}{\rho_o} = \frac{p_o}{RT_o}\left(\frac{p}{p_o}\right)^{1/\gamma} = \frac{\gamma p_o}{a_o^2}\left(\frac{p}{p_o}\right)^{1/\gamma}$$

per cui, sostituendo nella precedente relazione questa espressione e la formula di de Saint Venant e Wantzel:

$$V = a_o \left\{\frac{2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$$

si ottiene infine:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o}\left\{\frac{2\gamma^2}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{p_o}\right)^{2/\gamma}\left[1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$$

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o}\left\{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_o}\right)^{2/\gamma}\left[1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$$

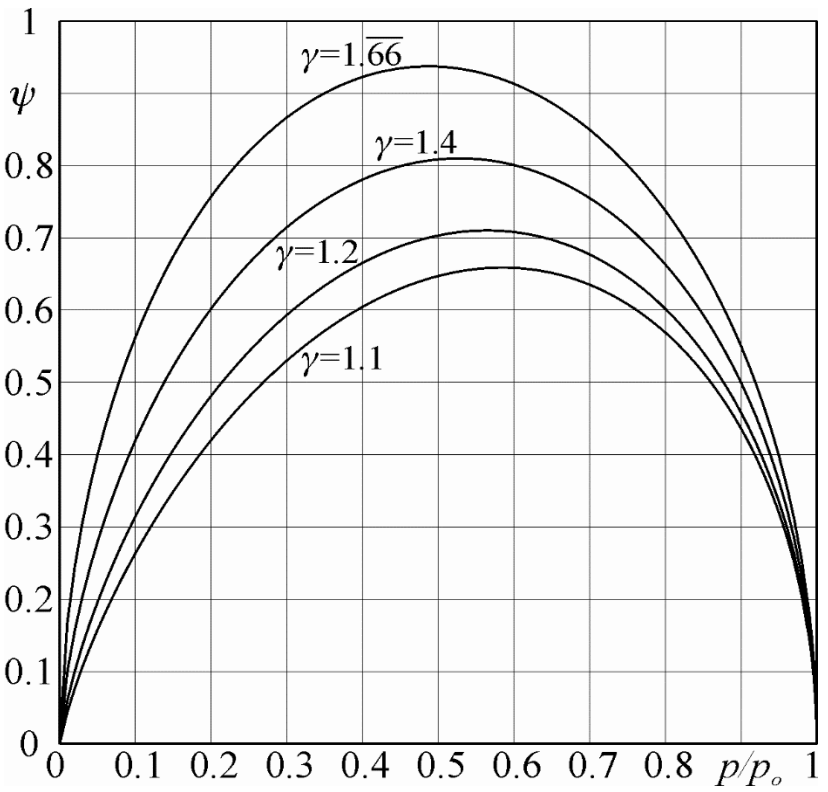
Si ricorda che la pressione p è quella che si realizza nella sezione di area A.
È conveniente, allora, introdurre il ***fattore di efflusso*** ψ definito come:

$$\psi = \frac{\dot{m}\, a_o}{p_o\, A} = \left\{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_o}\right)^{2/\gamma}\left[1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$$

che consente di scrivere la portata nella forma:

$$\dot{m} = \frac{p_o\, A}{a_o}\,\psi$$

Il ***fattore di efflusso*** ψ è stato riportato nel diagramma a lato per quattro diversi valori di γ.



$$\psi = \frac{\dot{m}\, a_o}{p_o\, A} = \left\{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1}\left(\frac{p}{p_o}\right)^{2/\gamma}\left[1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$$

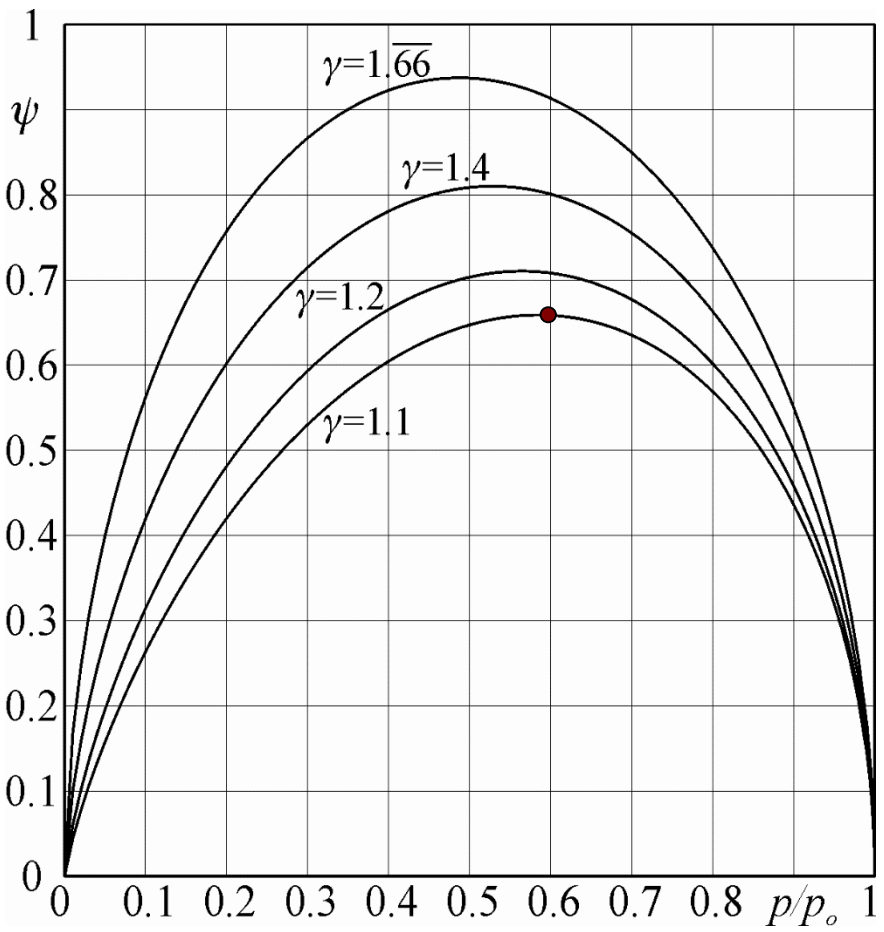
Il fattore di efflusso ψ è ***nullo per*** $p/p_o = 0$, in quanto si annulla la quantità:

$$(p/p_o)^{2/\gamma}$$

nel prodotto entro la parentesi graffa.

ψ è ***anche nullo per*** $p/p_o = 1$, in quanto si annulla la quantità nella parentesi quadra.

Inoltre, il fattore di efflusso raggiunge un ***valore massimo*** ψ^* per un determinato valore di p/p_o che può essere facilmente calcolato.



Indicando con $\eta = p/p_o$, la relazione:

$$\psi = \frac{\dot{m}\, a_o}{p_o\, A} = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{p_o} \right)^{2/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \right\}^{1/2}$$

può essere scritta come:

$$\psi = K\, \eta^{1/\gamma} \left[1 - \eta^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2}$$

dove K è una costante dipendente da γ. Derivando la relazione precedente rispetto ad η ed uguagliando a zero, si ha:

$$\left. \frac{d\psi}{d\eta} \right|_{\eta=\overline{\eta}} = K\, \frac{1}{\gamma}\, \overline{\eta}^{(1-\gamma)/\gamma} \left[1 - \overline{\eta}^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2} +$$

$$- K\, \frac{\overline{\eta}^{1/\gamma}}{2}\, \frac{(\gamma-1)\overline{\eta}^{-1/\gamma}/\gamma}{\left[1 - \overline{\eta}^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2}} = 0$$

per cui, risolvendo rispetto ad $\overline{\eta}$, si ottiene infine ***il particolare valore di*** p/p_o ***per il quale si ha il valore massimo di*** ψ:

$$\overline{\eta} = \frac{p}{p_o} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\overline{\eta} = \frac{p^*}{p_o} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Questo valore ***coincide*** con quello già trovato per le ***condizioni critiche del moto***.

Si può concludere che il valore massimo di ψ si raggiunge nelle condizioni critiche (M = 1), può essere quindi indicato con ψ^* e vale:

$$\psi^* = \gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad ; \quad (0.8102)$$

dove il valore numerico riportato tra parentesi si riferisce al caso di γ = 1.4.

Chiaramente, quando $\psi = \psi^*$, è anche $A = A^*$ e la portata attraverso l'ugello può essere calcolata mediante la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o}\, \psi^*$$

Attenzione: Come si vedrà in seguito, ***in un ugello semplicemente convergente***, la condizione $p_a/p_o > p^*/p_o$ si traduce nella situazione $p_u = p_a$ e $M_u < 1$ (dove p_u e M_u sono la pressione ed il numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello).

È importante sottolineare che, in un ugello convergente, ***la relazione***:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

si può applicare anche nel caso in cui il numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello risulti minore di **1** e cioè quando si ha la condizione:

$$p_a/p_o > p^*/p_o$$

Infatti, dal valore di $p_u / p_o = p_a / p_o$, mediante la formula:

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

è immediatamente ricavabile il valore del numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello M_u. Questo valore, sostituito nell'espressione:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma + 1}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

consente di calcolare il rapporto tra l'area della sezione di uscita dell'ugello e ***l'area critica, nella quale si raggiungerebbe*** $M = 1$ ***se il fluido continuasse ad accelerare dopo l'uscita***.

Poiché l'area della sezione di uscita dell'ugello si presume nota, la conoscenza del rapporto A_u/A^* consente di calcolare il valore di A^* da sostituire nella relazione per il calcolo della portata :

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

.

Questo modo di procedere è chiamato ***metodo per il calcolo della portata mediante l'area critica fittizia*** in quanto l'area critica non esiste nel campo di moto ma è possibile effettuare i calcoli come se esistesse.

L'utilizzo dell'area critica fittizia consente di determinare la portata molto più rapidamente, senza dover calcolare densità e velocità all'uscita dell'ugello.

Occorre, poi, rilevare che la relazione ricavata in precedenza:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \psi$$

è del tutto generale e può essere applicata ad una ***qualunque sezione*** di un qualunque condotto, purché ***il moto rispetti le ipotesi fatte*** e ψ ***sia calcolato con il rapporto*** p/p_o ***che si realizza in detta sezione***.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + \alpha\,(\alpha-1)\, x^2/2 + \ldots$$
$$(\, x << 1)$$

Per valori di

$$1 - \Delta\, p/p_o = p_a\, /p_o\, = (p_o - \Delta\, p)/\, p_o \cong 1$$

espandendo in serie arrestandosi al secondo termine le quantità elevata a potenza all'interno della parentesi quadra della formula

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o}\left\{\frac{2\gamma^2}{\gamma - 1}\left(\frac{p}{p_o}\right)^{2/\gamma}\left[1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}$$

si ricava l'espressione della ***portata di massa in regime incompressibile***:

$$\dot{m} = A_u\, \sqrt{2(p_o - p_a)\,\rho} = A_u \sqrt{2\rho\, \Delta\, p}$$

ricavabile peraltro più semplicemente sostituendo la già trovata formula:

$$V = \sqrt{\frac{2\,(p_o - p_a)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\,\Delta\, p}{\rho}}$$

nella relazione $\dot{m} = \rho V A$.

Nella espressione che esprime la portata in regime incompressibile:

$$\dot{m} = A_u\, \sqrt{2(p_o - p_a)\,\rho} = A_u \sqrt{2\rho\, \Delta\, p}$$

il calcolo della densità alla pressione media tra il serbatoio e l'ambiente, pur migliorando l'approssimazione del calcolo stesso, questa volta non ne estende di molto la sua validità.

Utilizzando questo metodo, infatti, la relazione precedente (con la densità calcolata alla pressione media) può essere applicata fino a valori di:

$$(p_o - p_a)/p_o \cong 0.1$$

e cioè fino a $M \approx 0.4$, con uno ***scostamento massimo*** dal risultato esatto pari a circa il **3%.**

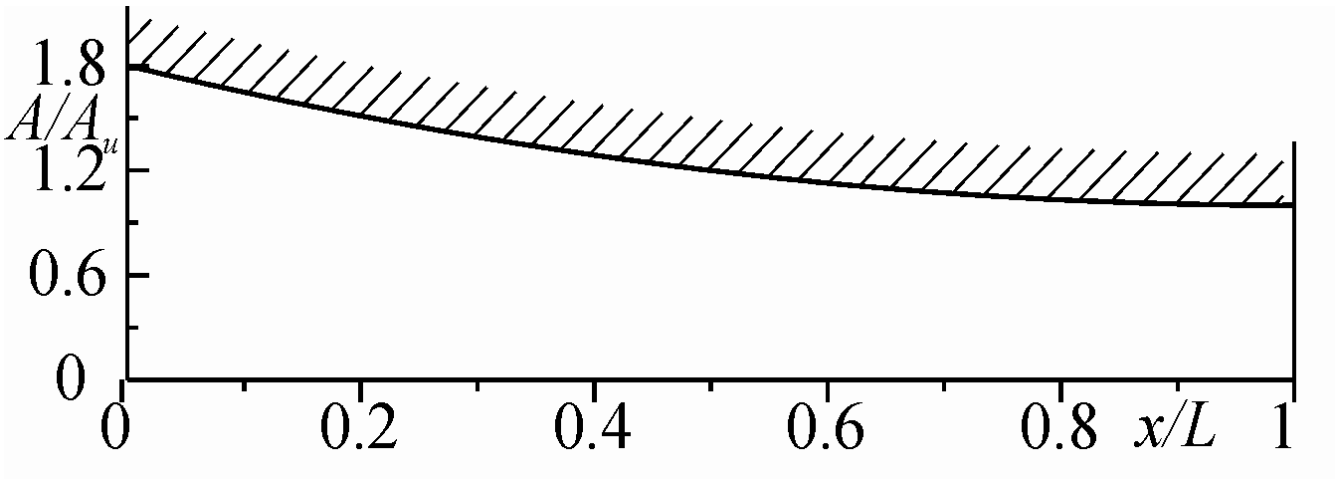
Ovviamente, lo scostamento è tanto più piccolo quanto più piccolo è il valore del rapporto precedente, e cioè quanto più si tende verso le condizioni di regime incompressibile.

Queste condizioni si intendono generalmente verificate per $M < 0.2$.

UGELLO CONVERGENTE COLLEGATO A UN SERBATOIO

Si supponga ora di avere un ***ugello convergente*** (del quale per semplicità è stata disegnata solo la metà superiore della sua sezione longitudinale), che sia collegato ad un serbatoio nel quale è noto lo stato termodinamico del gas.

Nel serbatoio, per definizione, la velocità del fluido è nulla per cui, ipotizzando attraverso l'ugello un moto quasi-stazionario, omoenergetico ed isoentropico. ***le condizioni nel serbatoio (ad esempio*** p_o ***e*** T_o***) coincidono con le condizioni di ristagno del gas lungo tutto l'ugello***.

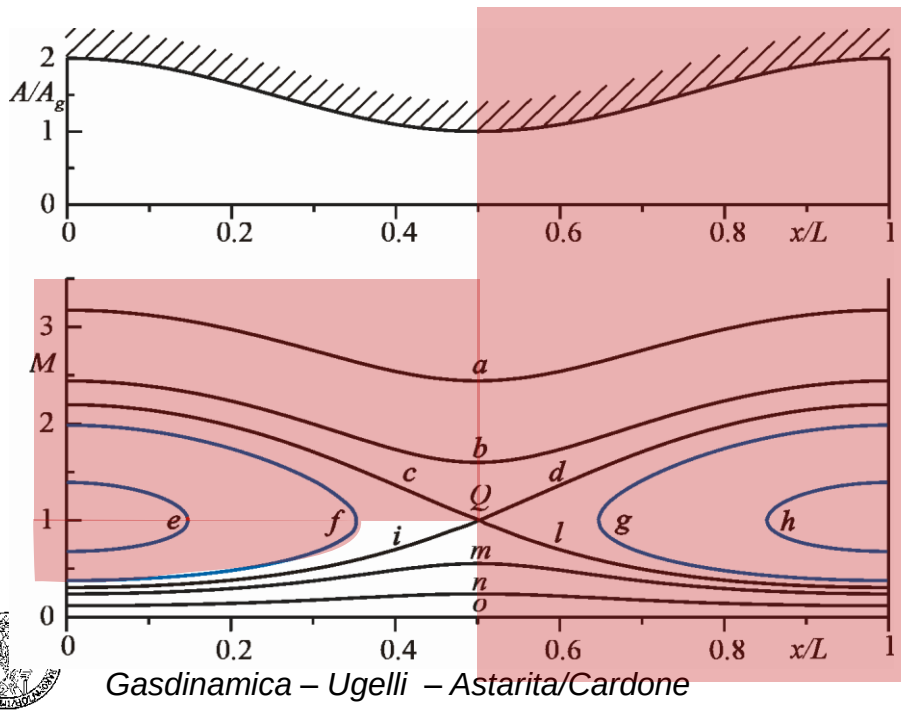


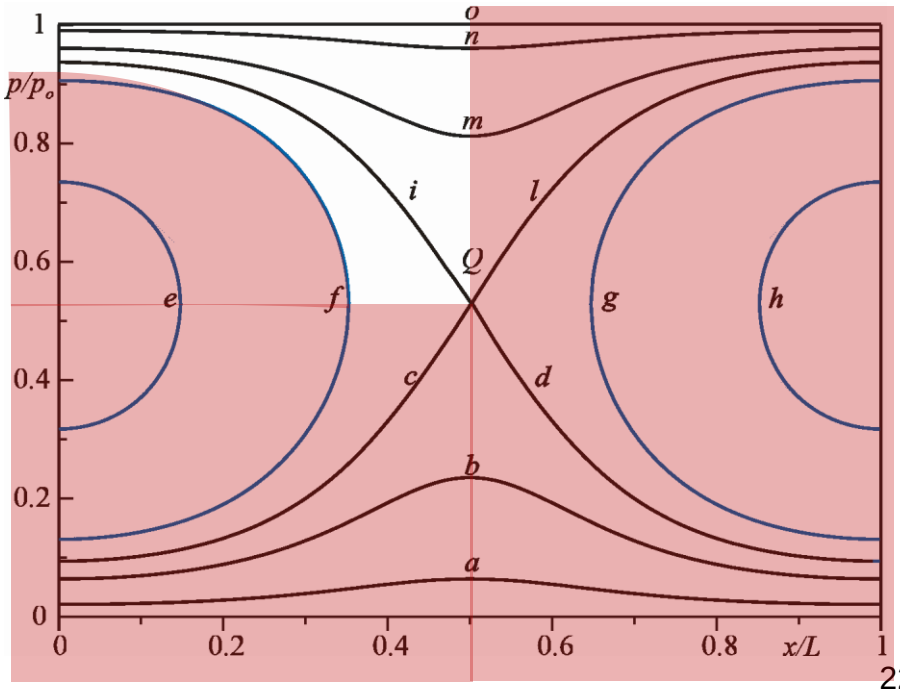
Si ricordino le ***curve soluzione per un moto quasi unidimensionale, quasi-stazionario, omoenergetico e isoentropico in condotti ad area variabile***.

Per un ugello semplicemente convergente ovviamente non esistono i tratti a destra del punto Q. Delle curve e ed f si è già detto.

Infine, ***poiché l'ugello è attaccato ad un serbatoio nel quale la velocità è nulla, si devono escludere anche le curve soluzioni del tipo*** a, b, ***e*** c, ***che prevedono un ingresso supersonico nell'ugello***.

Infatti, per avere un ingresso supersonico (partendo da velocità nulla nel serbatoio) è necessario che il fluido passi attraverso condizioni soniche (M = 1) prima dell'ingresso, e quindi per una gola (dA = 0), che certo non esiste.

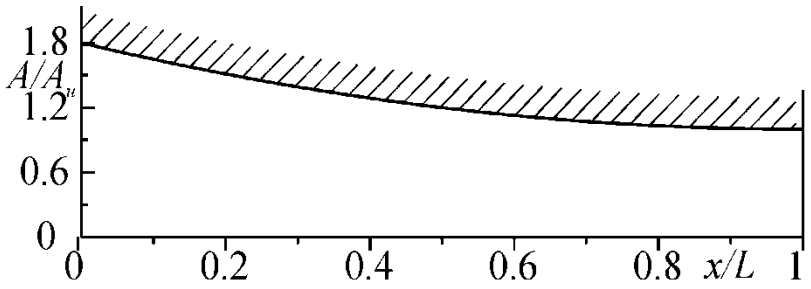




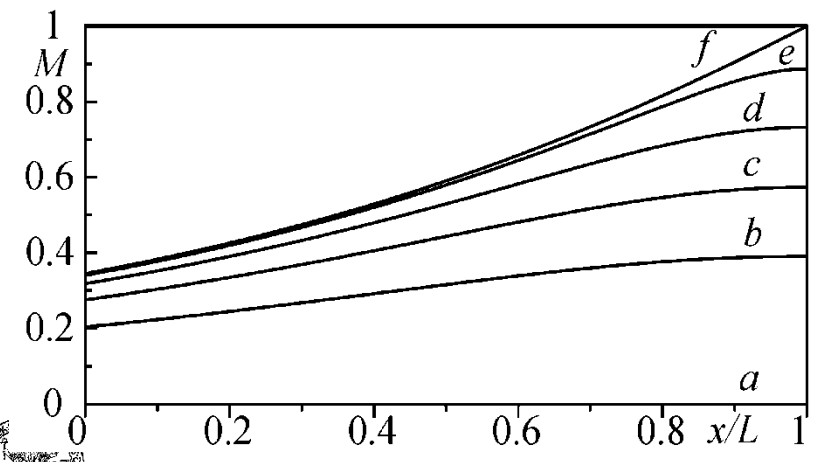
Le curve soluzione che restano sono pertanto (sui piani M - x/L e p/p_o - x/L) del tipo di quelle rappresentate in figura (per un ugello che, nella fattispecie, ha un'area di ingresso pari a 1.8 volte quella di uscita - ***di gola*** - ed è attraversato da un gas avente γ = 1.4).

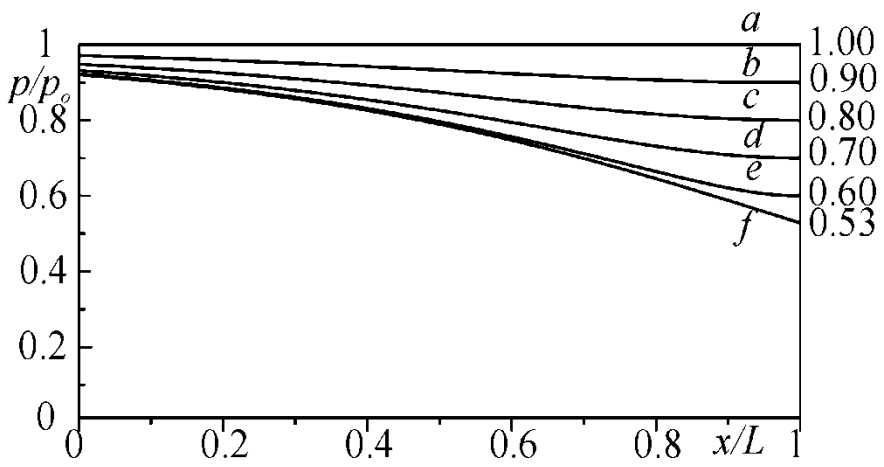
L'ugello si comporterà quindi sempre come un ***effusore***.

Di seguito, si vuole determinare il funzionamento dell'ugello al variare o delle condizioni termodinamiche nel serbatoio (la pressione di ristagno p_o), ovvero della pressione ambiente p_a.



Sia fissata, d'ora in poi, la pressione di ristagno p_o.

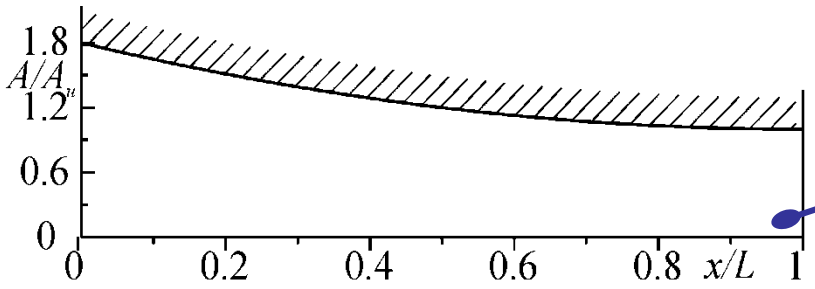




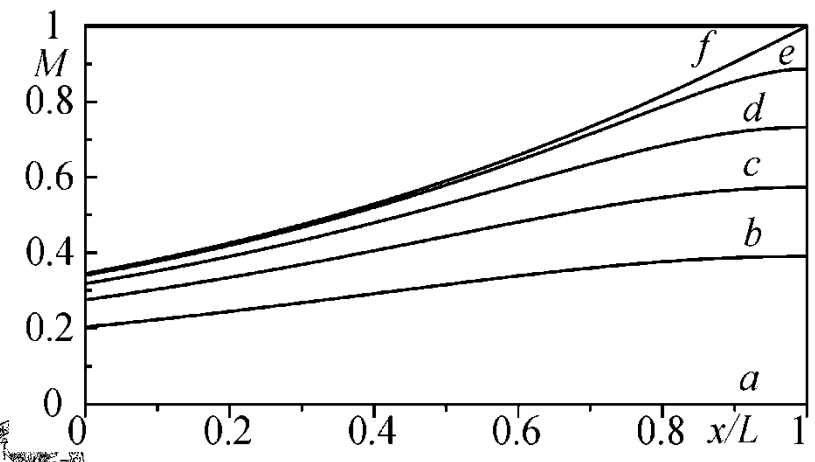
Per semplicità, si può supporre che il serbatoio contenga un gas ad una pressione costante p_o = 1ata e che l'ugello scarichi in un ambiente (in una camera a vuoto) in cui sia possibile regolare la pressione p_a da 1ata in giù.

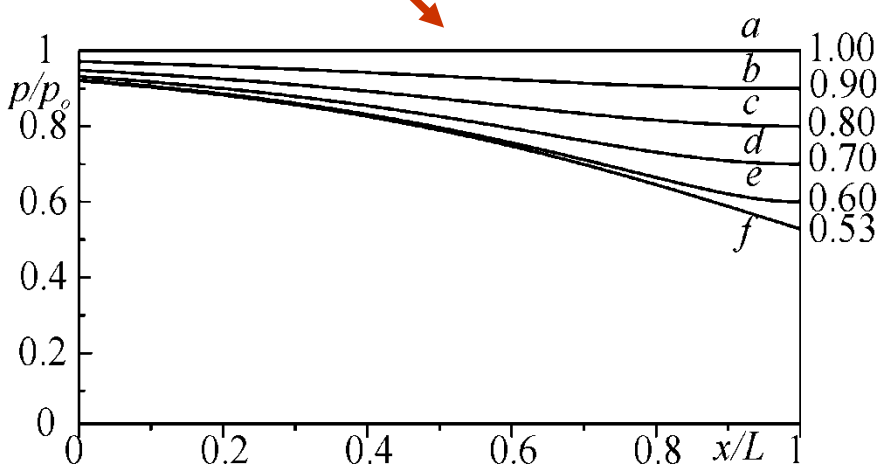
Poiché p_o = 1ata, i valori del rapporto adimensionale p/p_o rappresentano, quindi, direttamente la pressione del fluido espressa in ***ata***.

Ad es., le curve tracciate nel grafico corrispondono a quelle per cui la pressione nella sezione di uscita dell'ugello p_u vale (dall'alto verso il basso) 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, e 0.53ata, cioè rispettivamente le curve ***a, b, c, d, e*** ed ***f*** di figura.



p_u ***pressione nella sezione di uscita dell'ugello***

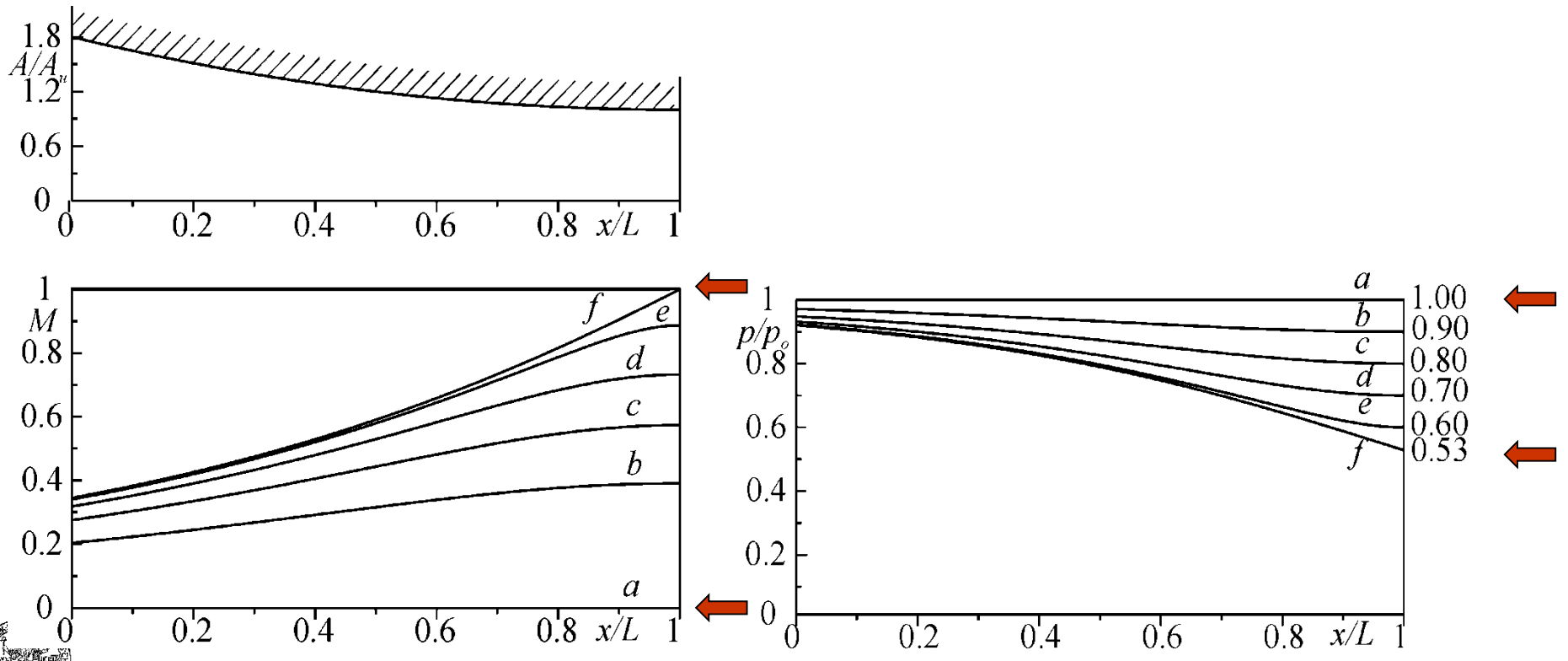




La curva ***f*** corrisponde al raggiungimento delle condizioni soniche nella sezione di uscita dell'ugello (p^*/p_o = 0.5283 per γ = 1.4)

Inoltre, anche alla luce di ciò che verrà detto in seguito, è verosimile che la curva ***a***, corrispondente a $p_u = p_o = 1ata$, sia relativa al caso per il quale si ha $p = p_o$ lungo tutto l'ugello perché la velocità (e, quindi, il numero di Mach M) sono ovunque nulli.

In questo caso ***la portata di massa attraverso l'ugello è anch'essa nulla***.

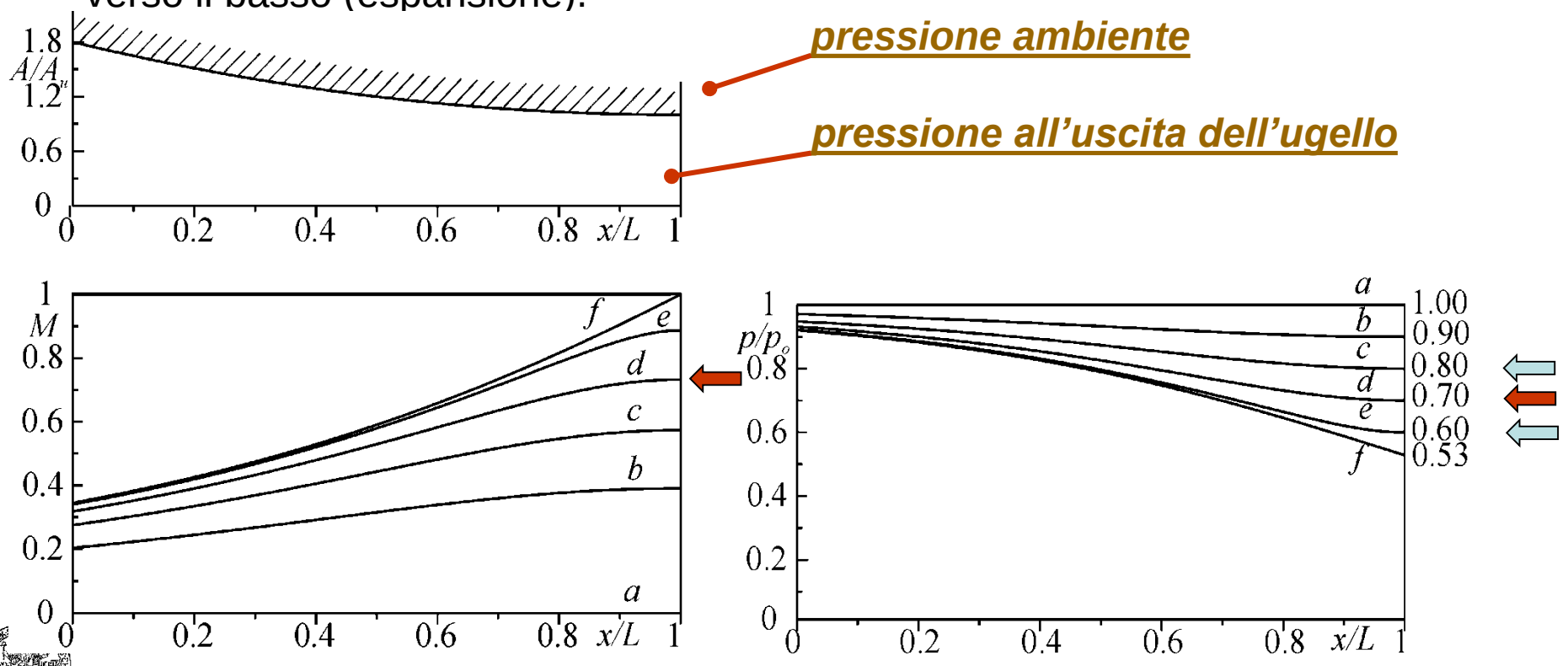


Si vuole ora mostrare che, qualunque sia il valore della pressione ambiente p_a compreso tra p^* = 0.5283ata ed 1ata, la pressione del fluido all'uscita dell'ugello p_u ***deve necessariamente essere uguale a*** p_a, cioè deve rispettare la cosi-detta ***condizione di Kutta*** (***pressione ambiente = pressione all'uscita***).

Si immagini, ad esempio, che l'ugello stia funzionando lungo la curva ***d*** corrispondente a p_u = 0.7ata e che sia $p_u = p_a$.

La pressione ambiente p_a diventi poi 0.6ata (ovvero a 0.8ata).

Nella sezione di uscita dell'ugello dovrebbero essere, quindi, presenti o un salto di pressione verso l'alto (compressione), ovvero un salto di pressione verso il basso (espansione).



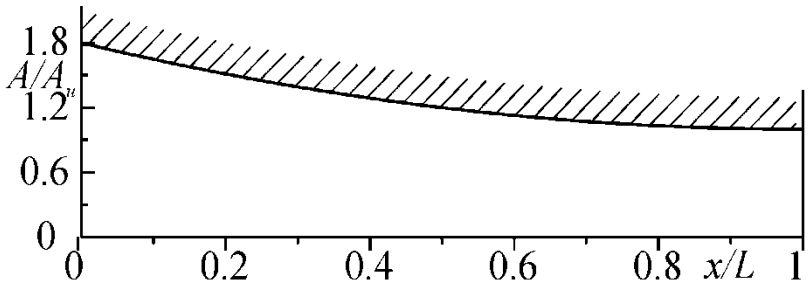
pressione ambiente

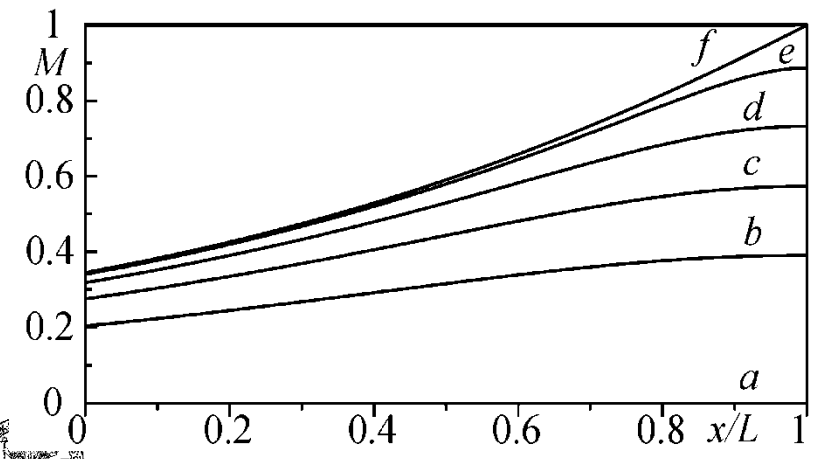
pressione all'uscita dell'ugello

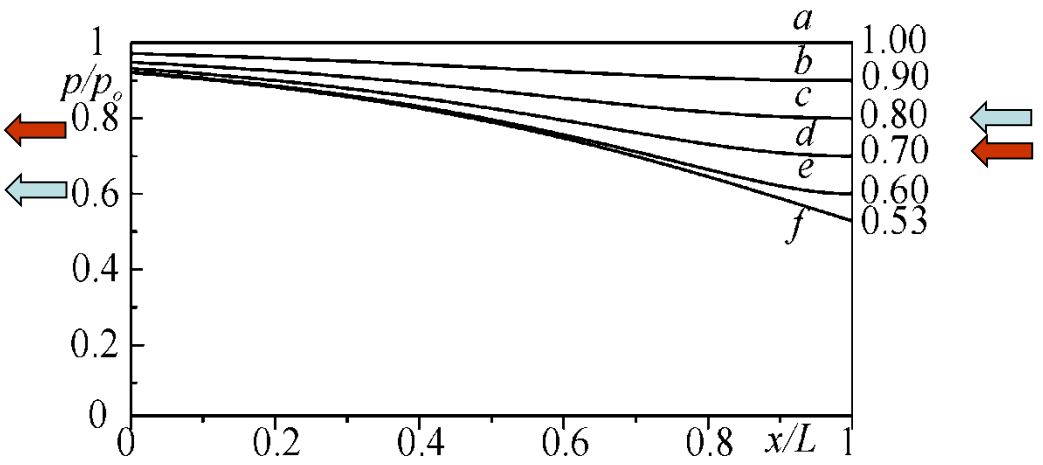
Il brusco salto di pressione verso l'alto si può spiegare solo con un'***onda d'urto instazionaria*** (perché il moto nella sezione di uscita è ***subsonico***).

Questa, muovendosi verso il serbatoio (poiché ha velocità maggiore di quella del suono e la corrente che esce dall'ugello è subsonica), fa rallentare la corrente per il fatto che ***sovrappone alla velocità verso valle una velocità verso monte***.

L'onda d'urto tende quindi a far rallentare il gas e quindi a farlo fluire secondo la curva di funzionamento ***c***.





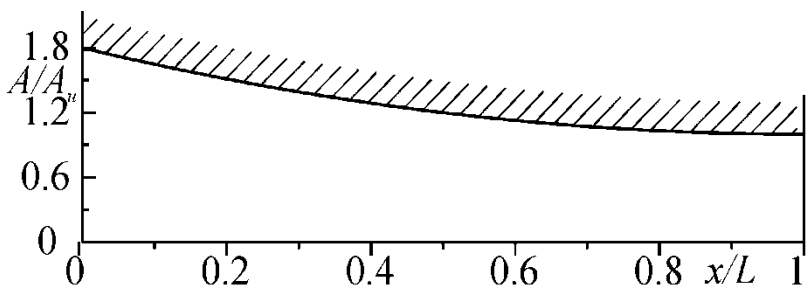


Viceversa, il brusco salto di pressione verso il basso può avvenire attraverso ***un treno di onde di Mach di espansione*** (anche esse ***instazionarie***).

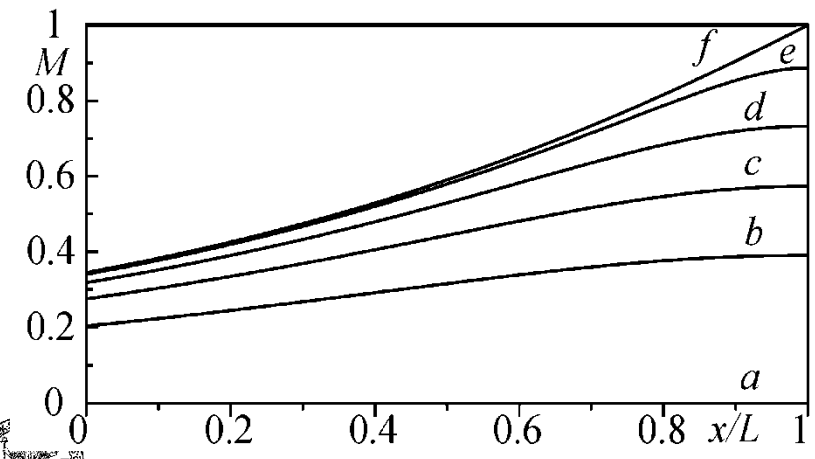
Queste ***risalgono l'ugello***, ***viaggiando alla velocità del suono***, e poichè ***accelerano il fluido verso valle***, lo portano a fluire secondo la curva ***e*** sino a che la differenza di pressione non si annulla.

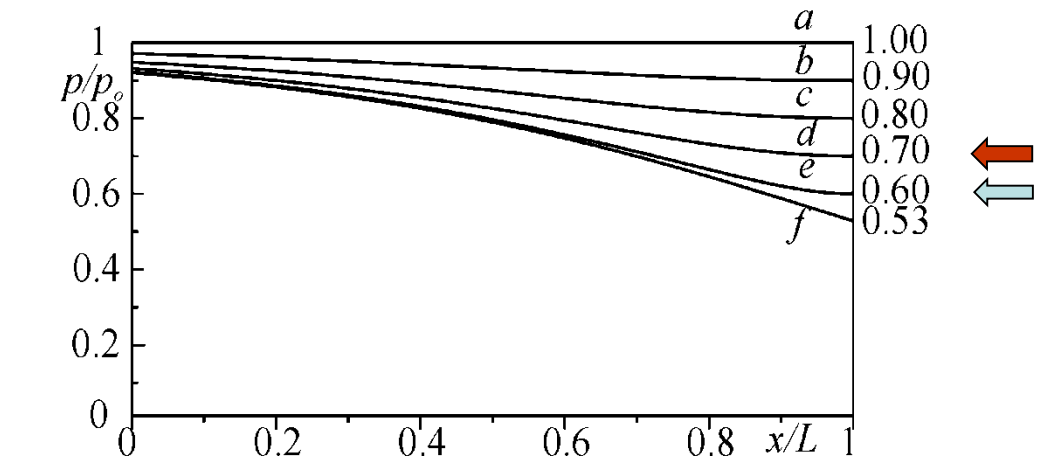
In definitiva, si può concludere che, ***per*** $p^*/p_o \le p_a/p_o \le 1$, ***deve essere*** $p_u = p_a$.

Il calcolo del numero di Mach nella sezione di uscita dell'ugello può quindi essere eseguito, in questo caso, ponendo $p = p_a$ nella:



$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$



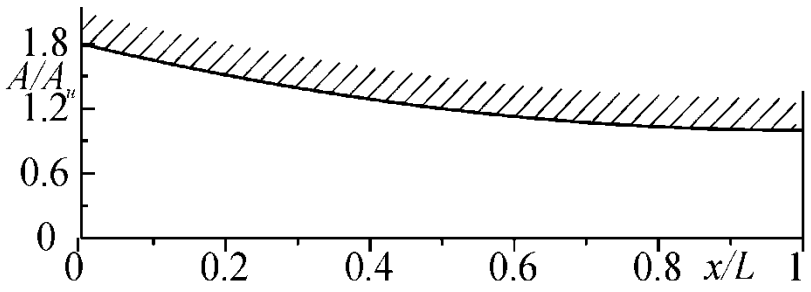


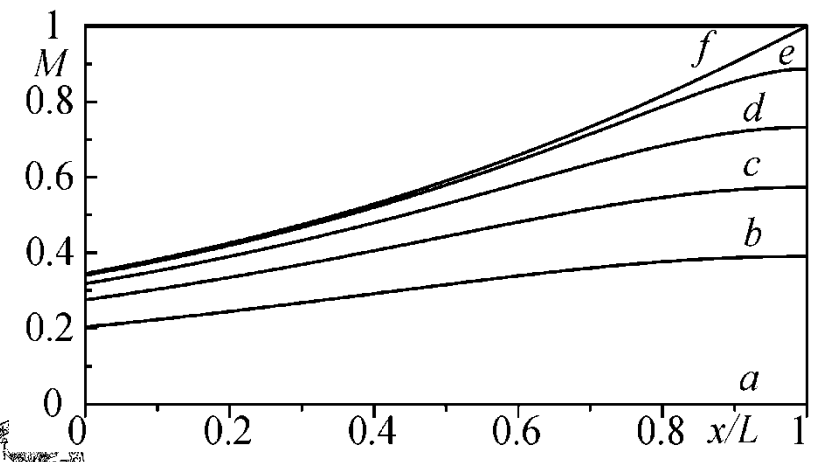
Ben diverso è il caso di $p^*/p_o \geq p_a/p_o$.

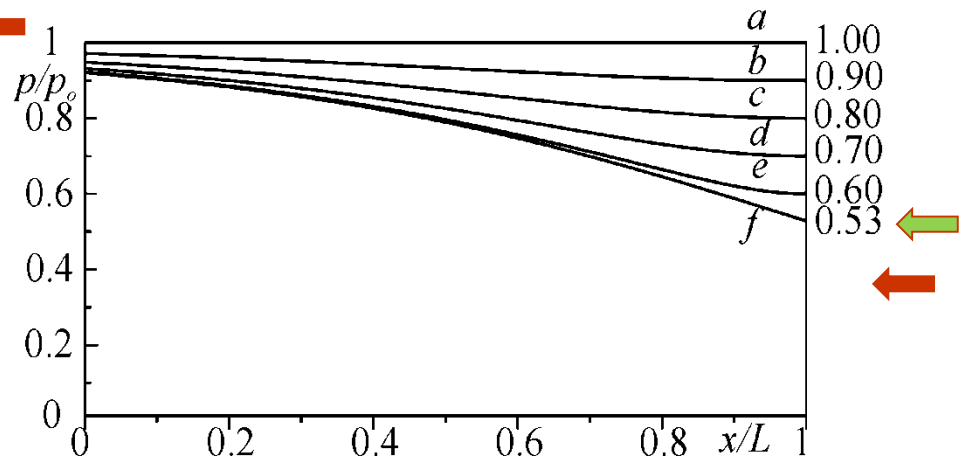
Infatti, qualunque sia il valore di $p_a < p^*$, l'ugello ***continuerà a funzionare secondo la curva f*** poiché, essendo questa relativa al caso di una corrente sonica all'uscita dell'ugello, ***il treno di onde di espansione*** (che viaggiano verso monte alla velocità del suono), ***non può risalire la corrente***.

Le onde pertanto resteranno ferme nella sezione di uscita dell'ugello.

Quindi, in questo caso, la pressione del fluido nella sezione di uscita sarà sempre ***uguale alla pressione critica***. Il numero di Mach nella sezione di uscita sarà sempre pari a 1 e l'ugello si dirà ***strozzato***, o ***sottoespanso***, perché ***la corrente non riesce a completare nell'ugello stesso la sua espansione fino alla più bassa pressione ambiente***.







Il motivo per cui viene utilizzato l'aggettivo ***strozzato*** è dovuto al fatto che, come si vedrà nel seguito, ***se la pressione di ristagno è costante, la portata di massa effluente dall'ugello resta costante al diminuire della pressione ambiente dal valore*** p^* ***sino al vuoto più assoluto***.

L'ugello non riesce a scaricare più fluido perché si strozza. Per un ugello convergente, ***il fenomeno dello strozzamento non dipende dalla geometria dell'ugello stesso.***

Tutto ciò vale purchè sia sempre possibile ritenere il moto unidimensionale nell'ugello stesso.

I risultati descritti in precedenza per p_a variabile sono del tutto generali (in quanto legati ai valori dei rapporti p/p_o) e possono essere facilmente estrapolati ad altri casi.

Essi sono pertanto applicabili, ***mutatis mutandis***, al caso di ***un ugello convergente che scarichi in un ambiente a pressione costante*** p_a ***e per il quale cambi la pressione nel serbatoio*** p_o.

Se la p_a è costante e la p_o aumenta il rapporto p_a/p_o diminuisce.

Ovviamente si intende sempre che sia $p_o \geq p_a$.

Il diagramma riportato in basso sintetizza ***l'andamento della pressione nella sezione di uscita dell'ugello in funzione della pressione ambiente***.

Le pressioni sono state adimensionalizzate rispetto alla pressione di ristagno.

Per $p^*/p_o \le p_a/p_o$, si ha $p_u = p_a$, e cioè è rispettata la condizione di Kutta;

Invece, per $p^*/p_o > p_a/p_o$, la p_u resta costantemente uguale al valore p^*.

A titolo di curiosità, si vuol fare osservare che per un gas non è molto difficile raggiungere le condizioni critiche di $M = 1$.

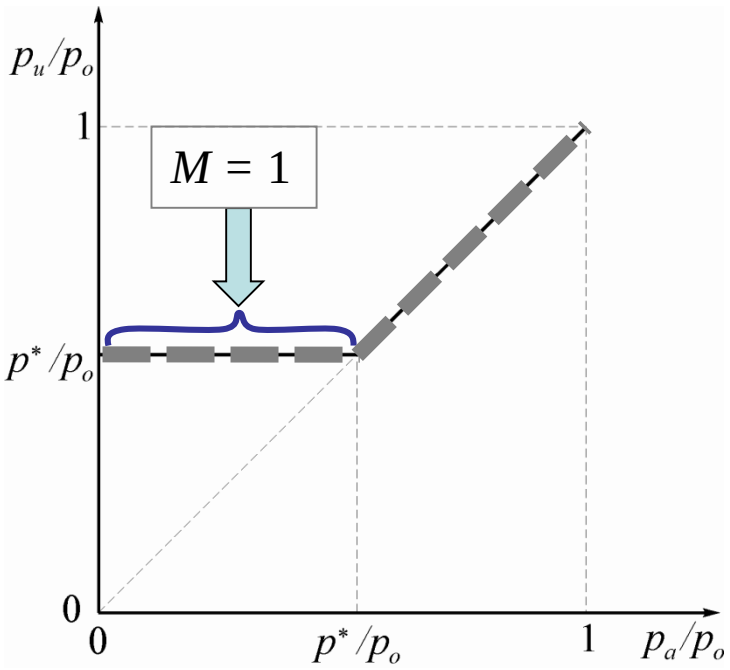
Se l'ugello convergente scarica ad esempio aria ($\gamma = 1.4$) nell'atmosfera (a $1ata$), per avere $M = 1$ basta che la pressione nel serbatoio sia pari a:

$$p_a/p_o = 0.5283$$

$$p_o = 1/0.5283 ata = 1.8929 ata$$

(***pressione assoluta***) e cioè circa 0.9 *atmosfere relative*, ovvero circa $0.9 kp/cm^2$.

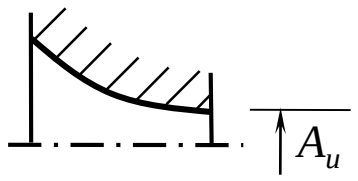
Si pensi ad esempio cosa succede ***quando si fora un pneumatico*** nel quale l'aria si trova inizialmente a una pressione relativa pari a circa $2 kp/cm^2 \approx 3 ata$ (*pressione assoluta*).



PORTATA ATTRAVERSO UN UGELLO CONVERGENTE COLLEGATO AD UN SERBATOIO

Per poter applicare la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A}{a_o} \psi$$



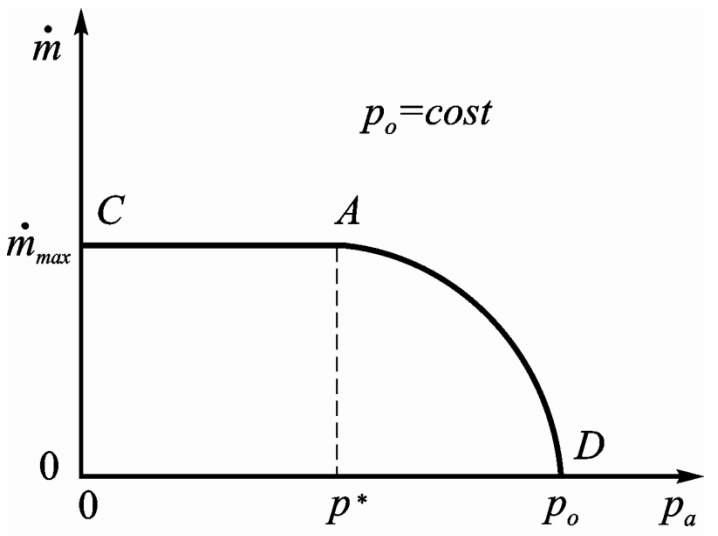
ad un ***ugello convergente***, conviene scegliere per A la sezione di uscita dell'ugello di area A_u per cui si ha:

$$\dot{m} = \frac{p_o A_u}{a_o} \psi_u$$

dove la ψ_u è il valore del fattore di efflusso valutato alla p_u/p_o e cioè nella A_u.

Si consideri un ugello convergente collegato ad un serbatoio in cui siano ***fissate*** ad esempio ***le condizioni di ristagno*** (a_o) e che scarichi in un ambiente a pressione p_a variabile tra 0 e p_o.

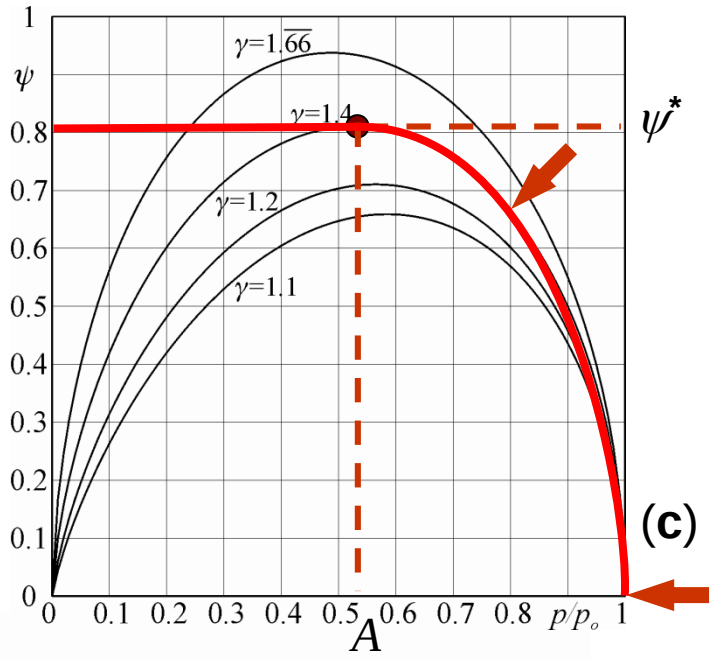
Il diagramma che rappresenta la portata in funzione della pressione ambiente p_a è del tipo riportato in figura.

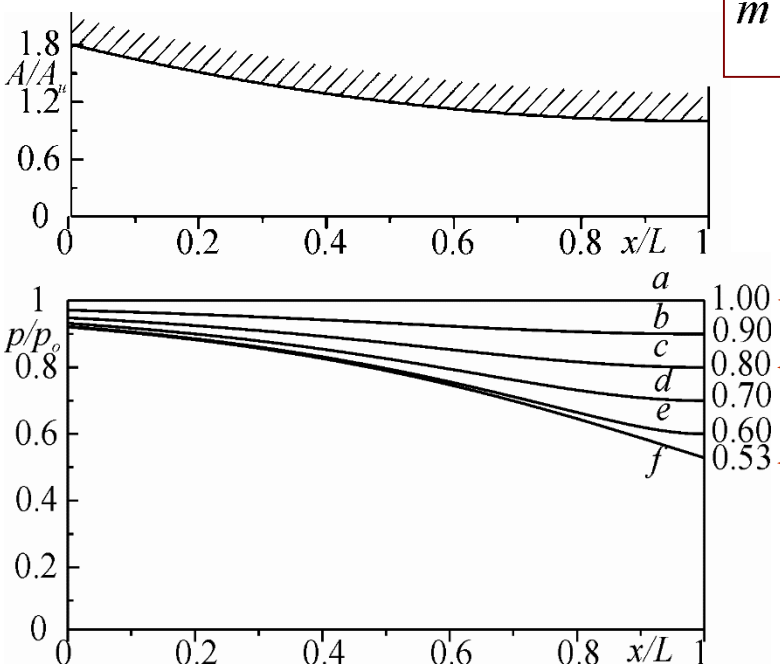


Infatti, a partire dal valore $p_a = p_u = p_o$, per cui $\psi_u = 0$ e la portata è nulla (curva ***a*** della Fig.(**a**) e punto ***D*** di Fig.(**b**)), man mano che la p_a diminuisce (curve ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** ed ***f*** di Fig.(**a**)), poiché la $p_a = p_u$ e p_o è costante, il tratto relativo di curva è simile al diagramma di ψ, a destra del massimo.

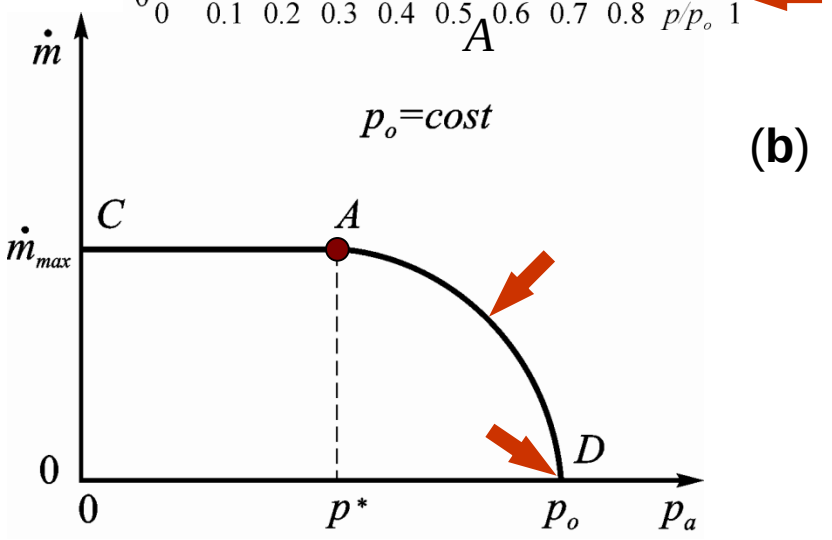
Quando, però, la p_u diventa uguale alla pressione critica (punto A di Fig.(**b**) e (**c**)), ulteriori diminuzioni della p_a non si risentono nella sezione di uscita dell'ugello dove la pressione p_u resta comunque bloccata alla pressione p^*. Il valore di ψ_u resta quindi costantemente uguale a ψ^*.

$$\dot{m} = \frac{p_o A_u}{a_o} \psi_u$$





(**a**)



(**b**)

Questo fatto giustifica il tratto orizzontale del diagramma a sinistra del punto A (fino al punto C) nel quale la portata di massa resta costante e giustifica altresì il motivo per cui, quando nella sezione di uscita dell'ugello si raggiungono le condizioni critiche ($M = 1$), l'ugello stesso si dice ***strozzato***.

Si ricordi che il diagramma è relativo ad ***assegnati valori di*** γ, p_o, a_o e A_u.

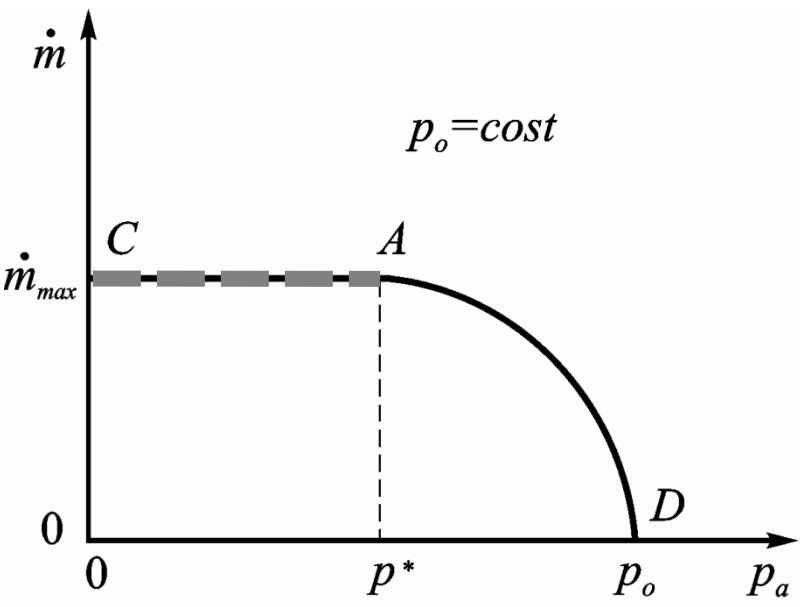
Il fatto che, per valori della pressione ambiente al di sotto di p^*, la portata di massa resta costante deve essere, ad esempio, tenuto in conto nella progettazione degli impianti a vuoto.

È inutile usare pompe che diano, all'inizio, una depressione sempre più spinta per aumentare la portata poiché, per $p_a < p^*$***, questa non cambia.***

Ricordando la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

si vede che, in questi casi, è preferibile soprattutto aumentare la A^* e cioè l'area della sezione minima tra il serbatoio in cui si vuol fare il vuoto e la pompa.



Per lo stesso ugello convergente già considerato, si vuole ora vedere ***l'andamento della portata in funzione della pressione di ristagno*** (nel serbatoio) p_o per un fissato valore della pressione p_a dell'ambiente in cui scarica l'ugello.
Oltre al valore di p_a si suppongono assegnati i valori di γ, a_0 e A_u.
Il diagramma che rappresenta la portata in funzione di p_o è del tipo rappresentato in figura. Infatti, a partire dal valore $p_o = p_a$ relativo al caso di portata nulla (punto E), ***man mano che la*** p_o ***aumenta***, nella:

$$\dot{m} = \frac{p_o A_u}{a_o} \psi_u$$

cresce anche il valore di ψ_u (perché $p_u = p_a$ e p_u/p_o diminuisce) e quindi la portata cresce. Quindi, l'aumento in questa zona si ha perchè nella relazione precedente aumentano sia ψ_u, che p_o.

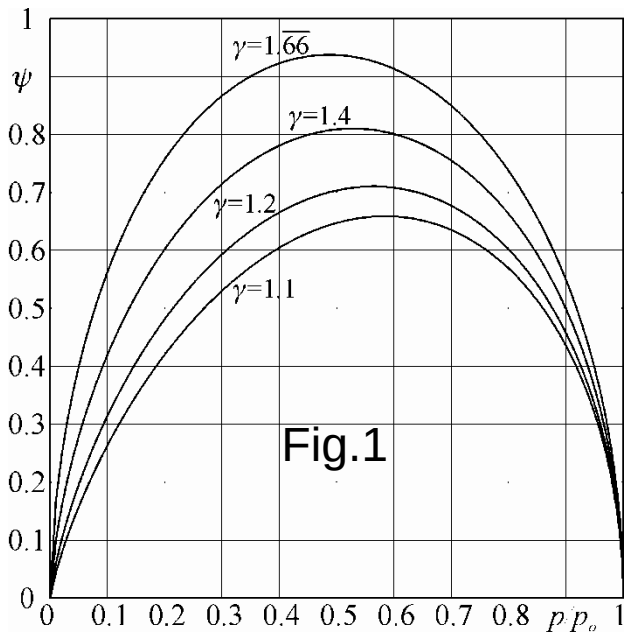


Fig.1

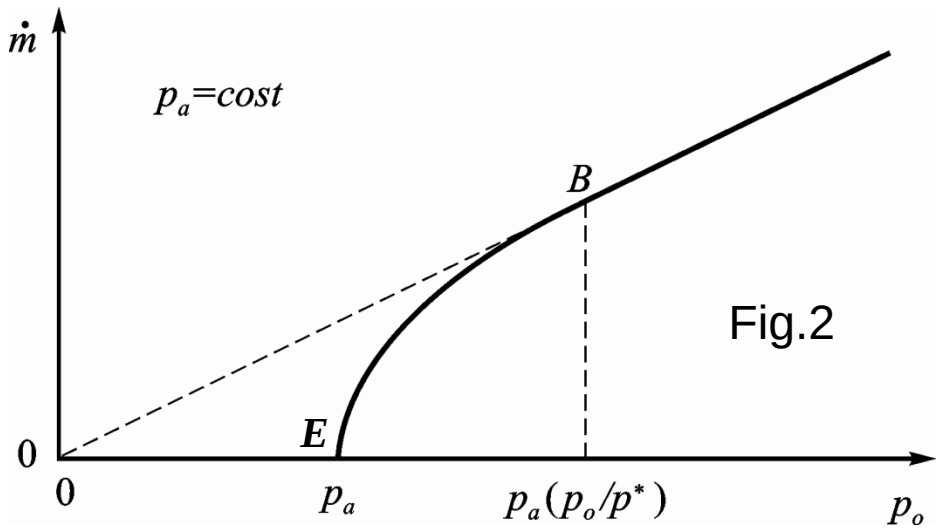


Fig.2

Quando la p_o diventa pari a $p_a(p_o/p^*)$, che per il caso di γ = 1.4 è pari a $p_o = p_a/0.5283 = 1.8929 p_a$ (punto B del diagramma di Fig.2), nella sezione di uscita dell'ugello si raggiungono le condizioni critiche.

Ulteriori aumenti di p_o, poiché conducono a $p_a/p_o < p^*/p_o$, rendono p_u/p_o sempre uguale a p^*/p_o, e quindi bloccano il fattore di efflusso al valore ψ^*.

Ne consegue che la formula che si deve applicare dal punto B in poi è la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

con ***dipendenza lineare*** della portata dalla p_o poiché ψ^* resta costante.

La portata di massa dipende solo dalla pressione assoluta di ristagno.

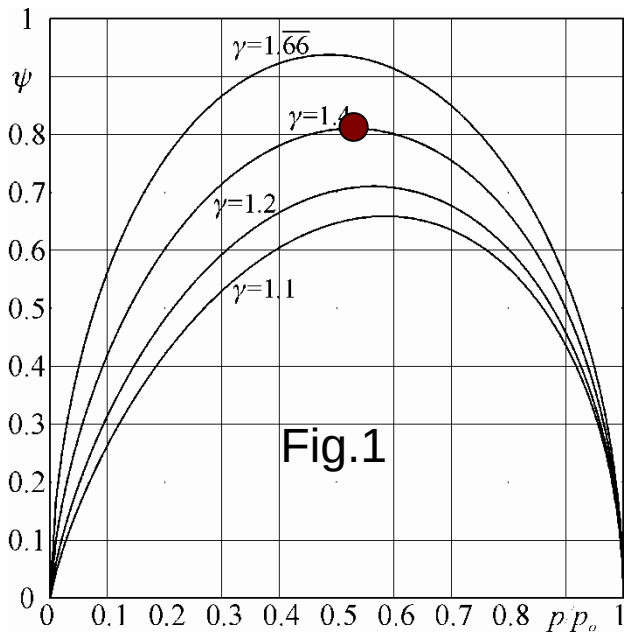


Fig.1

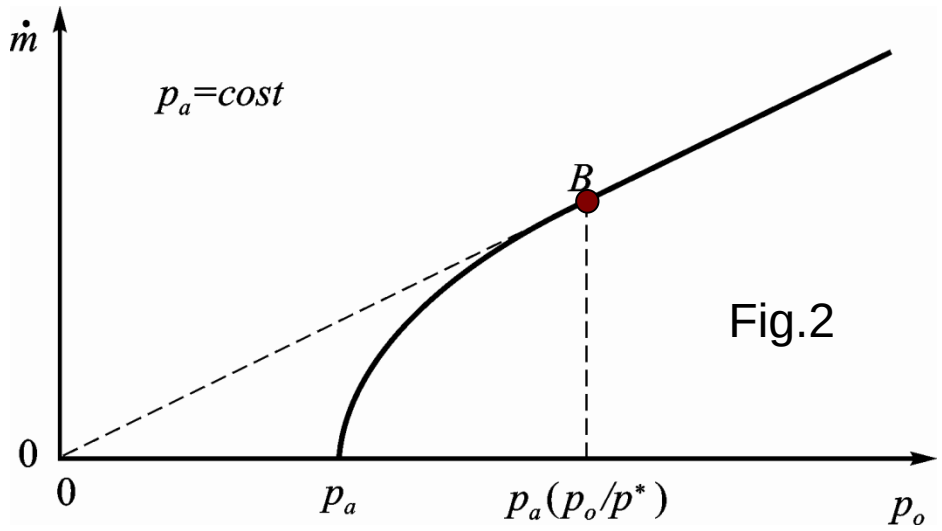


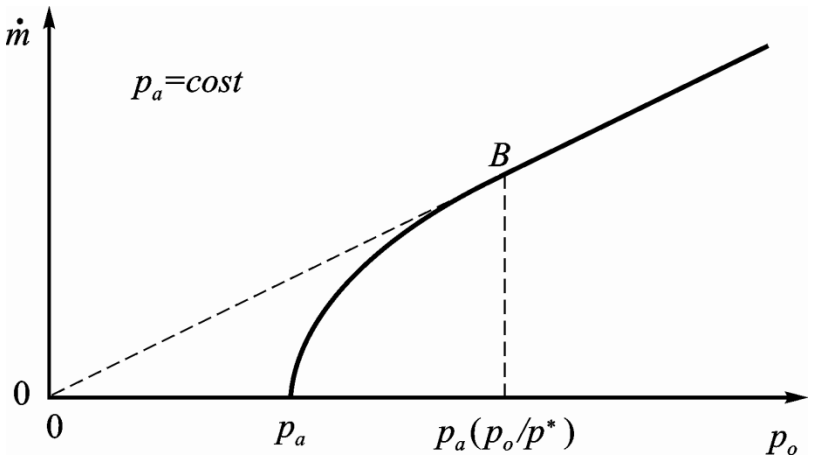
Fig.2

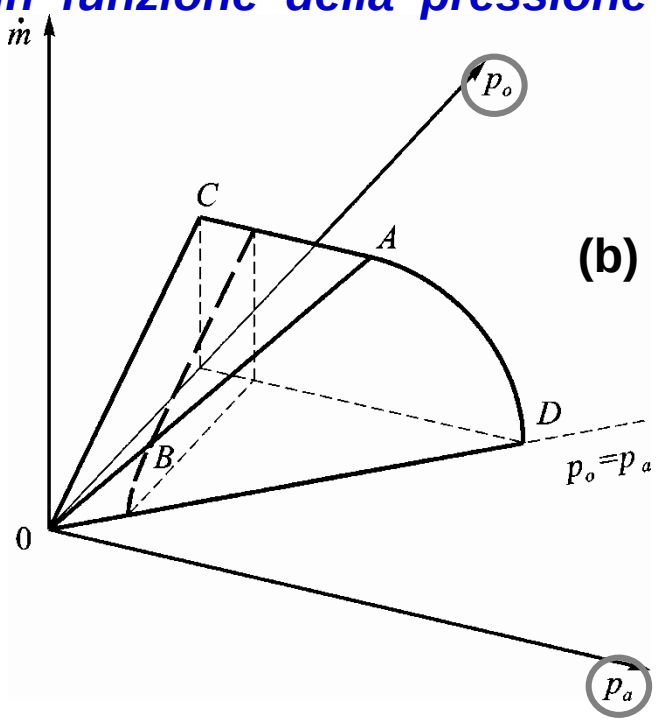
Questo ultimo evento viene spesso utilizzato nella pratica industriale per una ***regolazione lineare della portata di massa con la pressione assoluta di ristagno***. Si usano, inoltre, misuratori di portata di massa, cosiddetti ***sonici***, nei quali la misura della sola p_o e della T_o (per poter calcolare la a_o) con la:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

conduce alla misura della portata di massa.

I due diagrammi prima visti non sono altro che due sezioni del cosiddetto <u>solido della portata</u> (rappresentato in assonometria in figura **(b)**), la cui superficie dà ***il valore della portata sia in funzione della pressione di ristagno che della pressione ambiente.***





La superficie del solido della portata è costituita dal triangolo OCA e dalla superficie conica (non circolare) OAD che con esso ha in comune il segmento OA.

In effetti si tratta di ***una sola superficie conica*** (perché anche il triangolo OCA può essere considerato tale), avente come ***<u>vertice</u> il punto O*** e ***<u>generatrice</u> la curva CAD*** che coincide con quella della Fig. 2.

Quest'ultima, infatti, rappresenta una sezione retta del cono essendo per essa p_o = *cost* (cioè l'intersezione della superficie conica con un piano parallelo al piano $\dot{m} - p_a$).

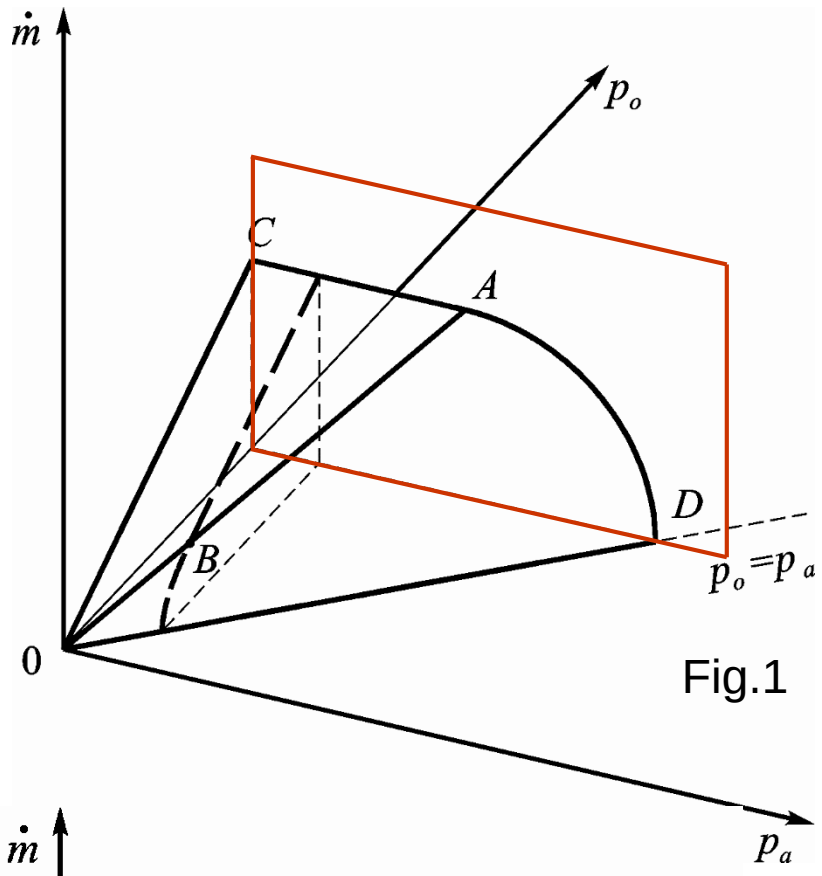


Fig.1

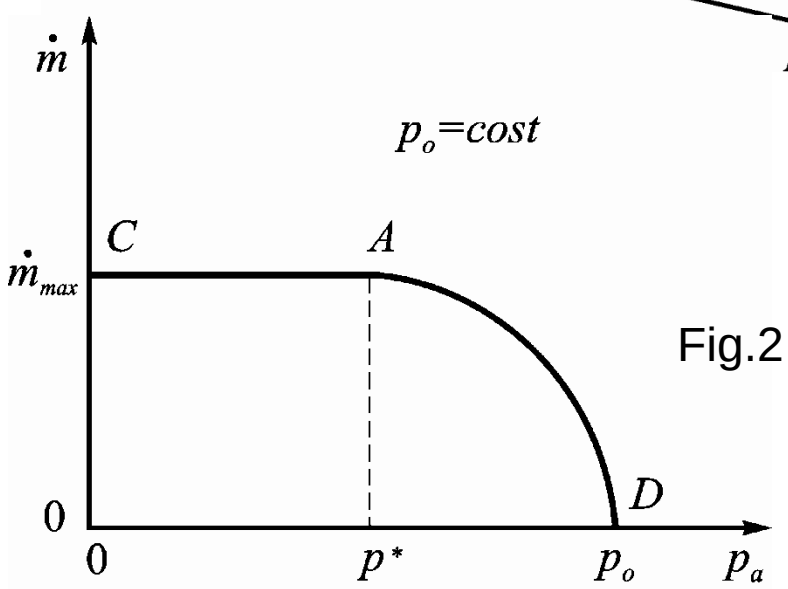


Fig.2

Nella Fig. 1 è anche rappresentata con linea tratteggiata la curva che si ottiene dall'***intersezione della superficie conica con un piano parallelo al piano*** $\dot{m} - p_o (p_a = cost)$, che corrisponde al diagramma della Fig. 3.

Il segmento OD ($p_o = p_a$), che dà luogo ad una portata nulla, appartiene, ovviamente, alla ***bisettrice*** del piano p_o - p_a.

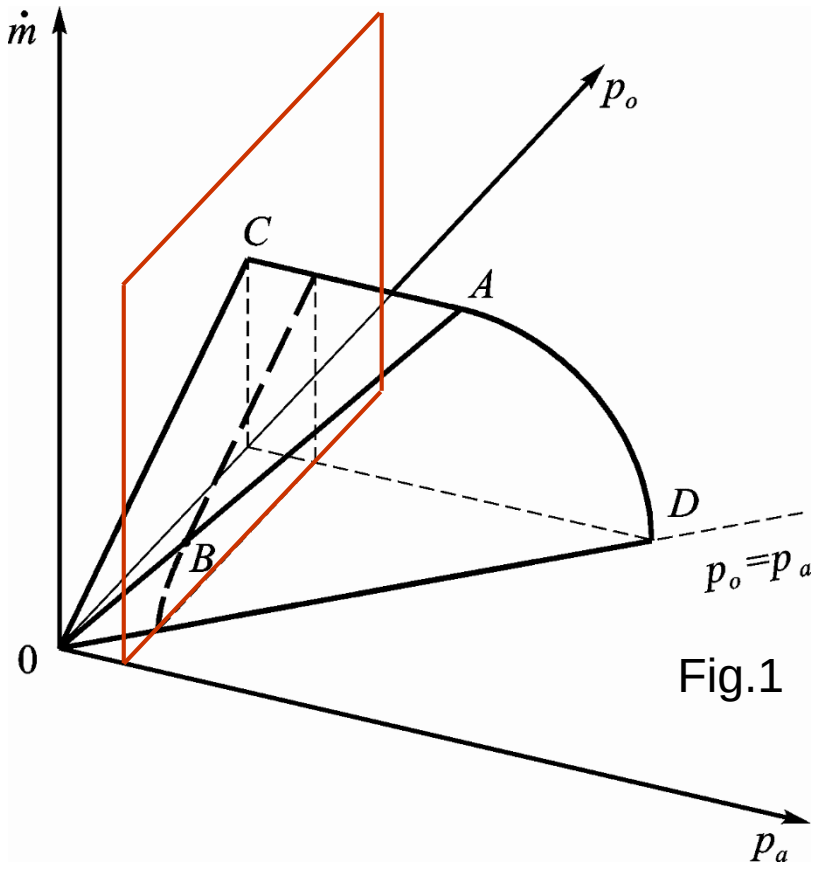


Fig.1

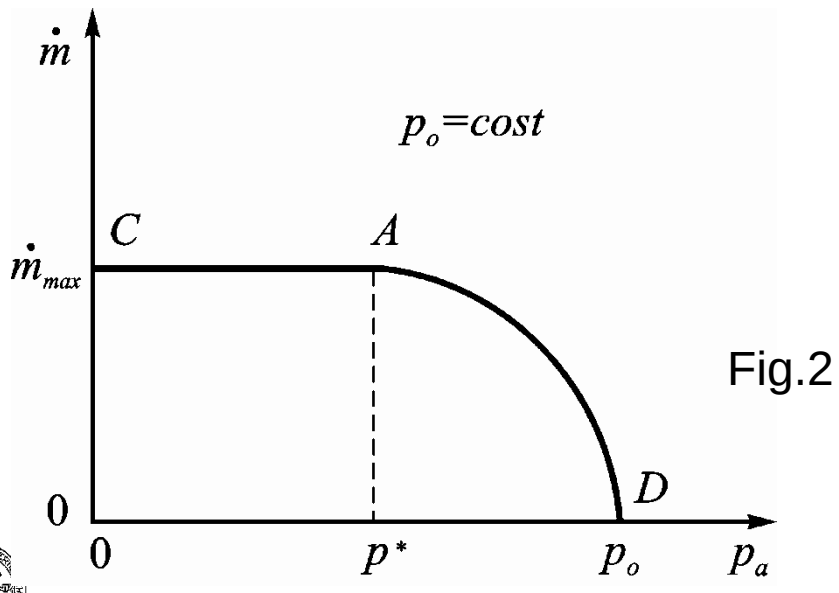


Fig.2

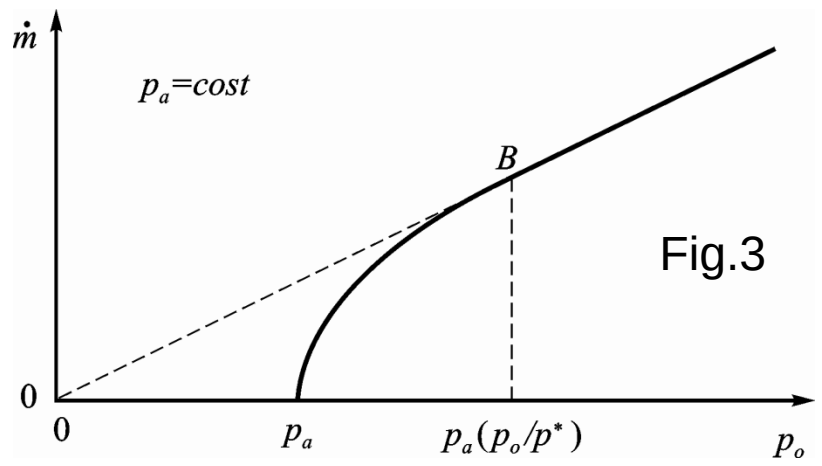


Fig.3

ATTENZIONE

Quanto detto in questo contesto si applica ovviamente a moti:

- ***adiabatici e isoentropici,***
- ***quasi-unidimensionali***
- ***quasi-stazionari.***

Per la prima ipotesi è necessario che l'***ugello non sia molto lungo*** rispetto al suo diametro medio in modo tale che si possano trascurare gli effetti associati allo scambio termico e alla viscosità del fluido.

Dall'altro lato, la seconda ipotesi (quasi-unidimensionalità), che prevede una variazione graduale dell'area della sezione dell'ugello, richiede che l'***ugello non sia molto corto***.

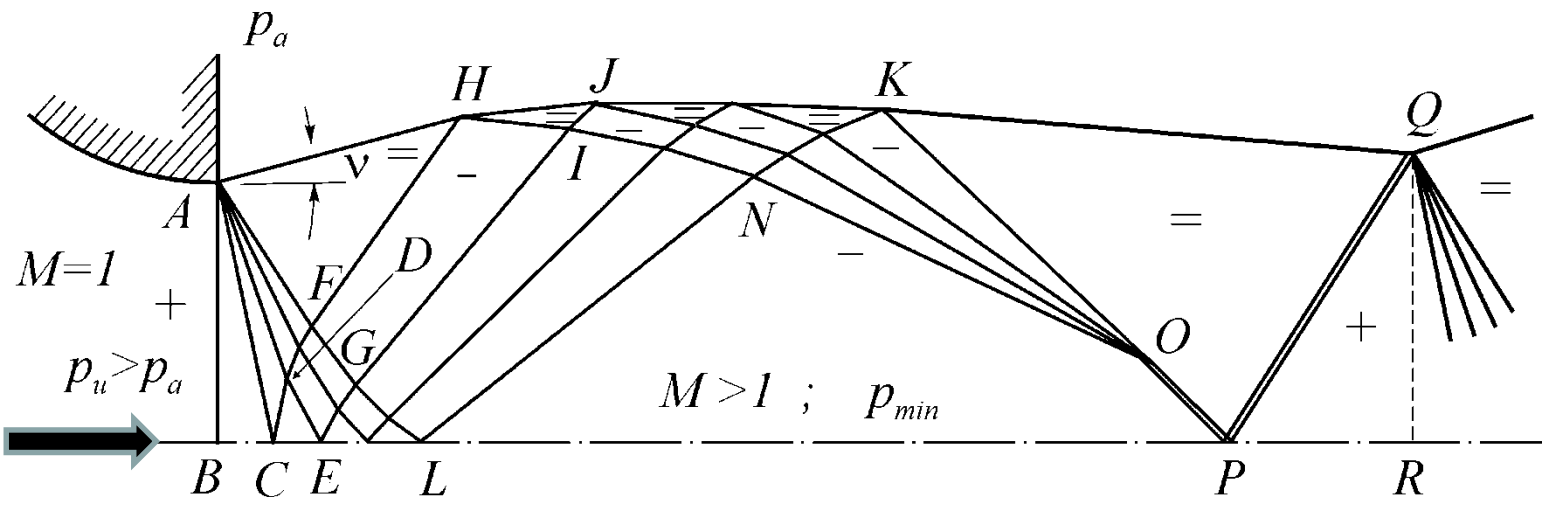
Va comunque osservato che per ugelli molto corti, al limite ***fori in una parete*** (caso limite di ugello convergente), ***gli aspetti salienti della trattazione restano validi salvo che è necessario introdurre dei coefficienti correttivi in particolare per la portata***.

Dell'applicabilità dell'ultima ipotesi (quasi-stazionarietà) si è già discusso in precedenza.

CONDIZIONI DI EFFLUSSO DA UN UGELLO CONVERGENTE SOTTOESPANSO

È interessante ora esaminare, nel caso in cui $p_u > p_a$, ***quanto avviene a valle della sezione di uscita*** AB ***di un ugello piano, convergente, sottoespanso***, schematicamente rappresentata a sinistra della figura in basso.

Per fare ciò si deve ***abbandonare l'ipotesi di moto quasi-unidimensionale*** e trattare il problema dal punto di vista ***bidimensionale*.**



Il fluido, che esce dalla sezione di uscita dell'ugello AB con ***una pressione maggiore di quella ambiente*** (indicata dal segno +) e con M = 1.

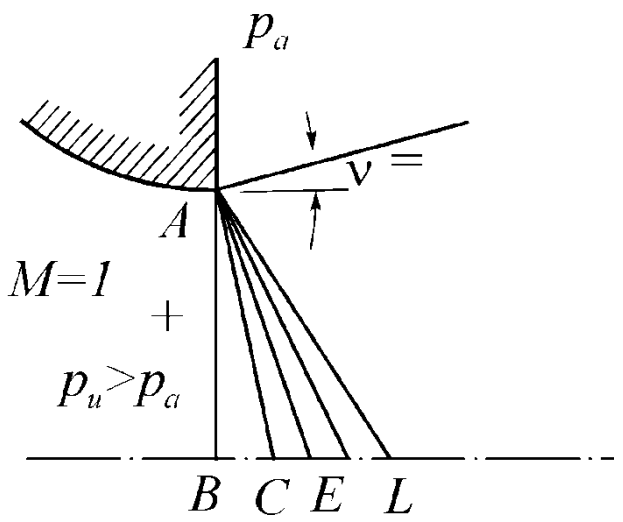
Nel seguito il segno + indicherà una pressione maggiore della p_a, il segno = una pressione uguale e il segno – una pressione inferiore alla p_a.

La corrente ***deve espandere sino alla*** p_a.

Ciò può avvenire soltanto mediante un ***ventaglio di espansione***, che ha origine in A, del quale sono rappresentate solo 5 onde (in effetti, sono ***infinite***), di cui la prima è la AB stessa che ha luogo per M = 1 e quindi deve essere ortogonale alla direzione della corrente, e l'ultima è la AL.

Attenzione: Poiché a valle trova una convessità, la corrente sonica che esce dalla sezione AB, seguendo l'espansione di Prandtl e Meyer, ***dovrebbe ruotare di 90° verso l'alto***.

In effetti, questa corrente ruoterà ***solo dell'angolo*** ν corrispondente al numero di Mach supersonico per il quale ***la pressione della corrente stessa sarà uguale a quella ambiente*.**



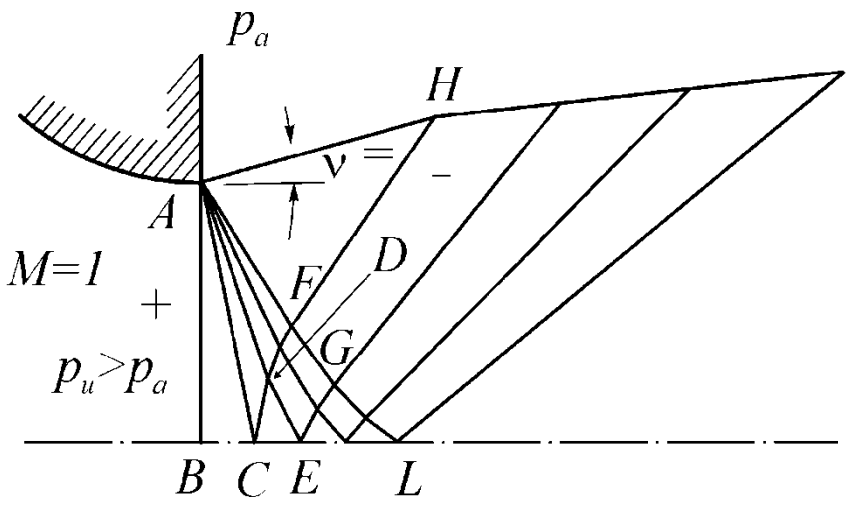
Poiché ***sul piano di simmetria*** BL ***la corrente deve continuare dritta***, ***ogni onda di espansione*** (ad esempio, la AC) ***si riflette come onda di espansione*** (la CD).

Quando l'onda riflessa CD incontra la terza onda di espansione AD, poiché quest'ultima fa aumentare il numero di Mach, ***la sua inclinazione deve aumentare rispetto alla verticale per mantenere il Mach normale pari ad uno***.

Le onde del tipo AB, AC, AD ed AF (***che sono diritte***) si chiamano ***onde semplici***, mentre ***non semplici sono le onde che intersecandosi con altre onde cambiano continuamente la loro pendenza.***

In realtà, poiché le onde di Mach sono infinite, la figura riportata è solo una schematizzazione del fenomeno. Infatti, ***la riflessione delle onde dovrebbe iniziare immediatamente a valle del punto*** B.

Anche l'onda DE deve cambiare la sua pendenza rispetto alla AD perché il fluido, oltre alla espansione attraverso l'onda AC, ha subito anche quella attraverso la CD ed ha quindi aumentato il suo numero di Mach.



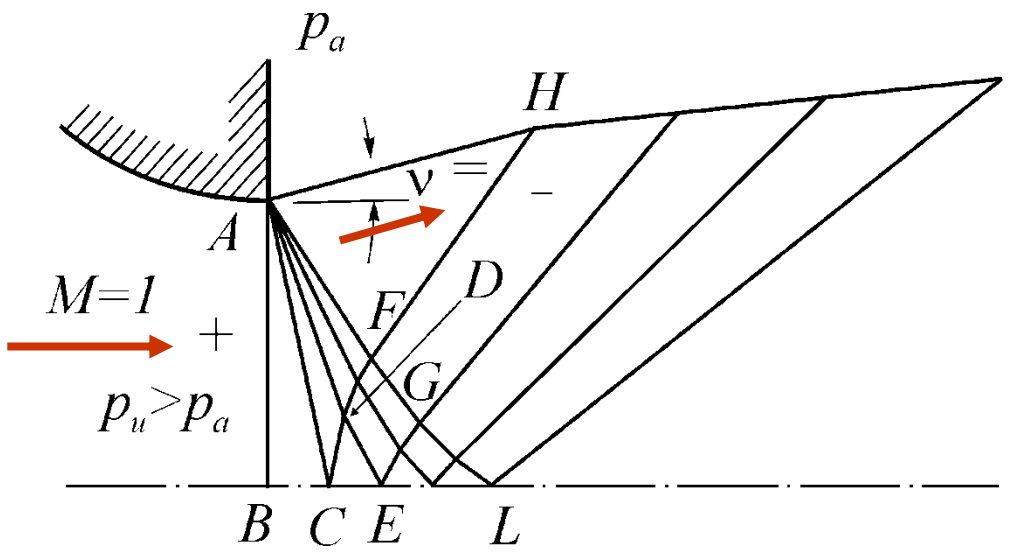
L'espansione della corrente, dalla p_u alla p_a, è completata dall'onda AF per cui, nell'ambito della schematizzazione, nella regione triangolare AFH esiste una ***corrente supersonica*** il cui numero di Mach è calcolabile mediante la:

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

con $p = p_a$; infatti, ***l'espansione del fluido attraverso il ventaglio*** AB-AF ***è quasi-stazionaria omoenergetica ed isoentropica***.

La direzione della corrente in questa regione è parallela al segmento AH (che rappresenta il confine del getto) ed è ovviamente inclinata rispetto all'asse dell'ugello dell'angolo di Prandtl e Meyer ν che corrisponde al numero di Mach nella regione AFH.

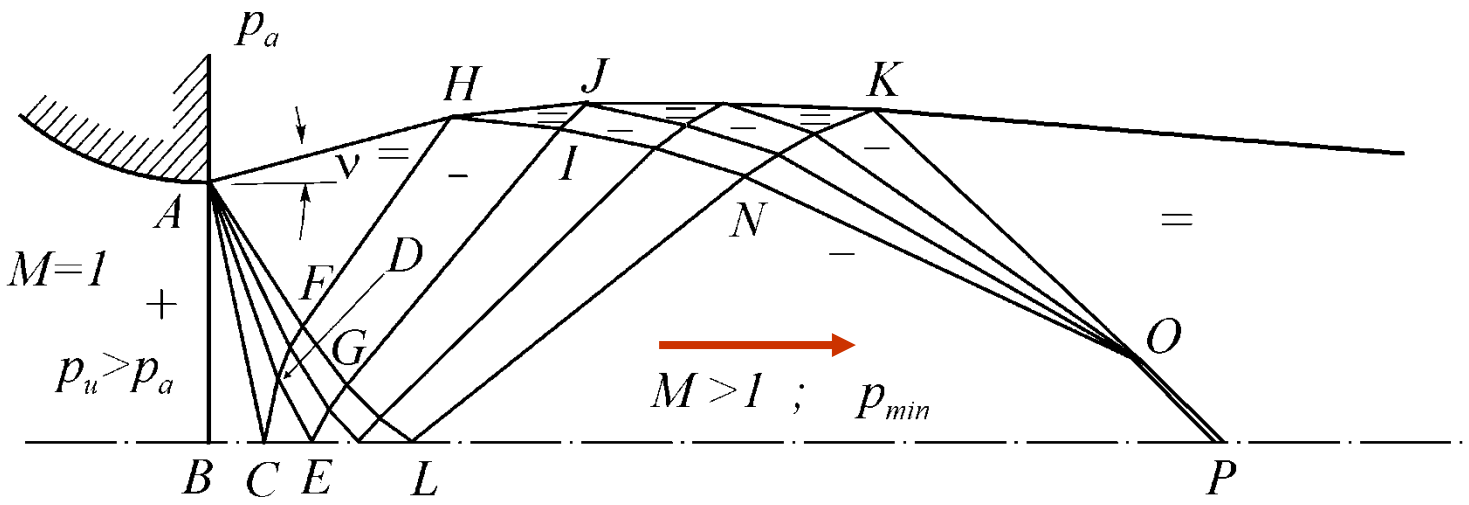
Si ricordi che la corrente nella sezione AB ha M = 1 ed è diretta lungo l'asse dell'ugello BL.



Le ***onde di Mach di espansione*** riflesse del tipo CH, EJ ed LK (che, nell'ambito di questa schematizzazione, nei loro tratti FH, GI ed LN sono onde semplici), quando raggiungono il confine del getto (superficie libera) si riflettono ivi come ***onde di Mach di compressione*** con una continua deviazione della corrente ai confini del getto HJK verso il basso.

Le onde di Mach di compressione riflesse saranno, invece, ***convergenti*** (anche perché il numero di Mach si va progressivamente abbassando) e si può ***schematizzare*** che esse si incontrino in un punto indicato nella figura con O dando luogo, per la loro coalescenza, ad un'onda d'urto obliqua OP.

La ***regione quadrangolare*** $LNOP$, in cui esiste fluido che attraversa i due ventagli di espansione (quello che parte dal punto A e quello riflesso) che la precedono, è una regione in cui il numero di Mach è massimo, la pressione è minima e la direzione della corrente ritorna parallela all'asse dell'ugello BP.

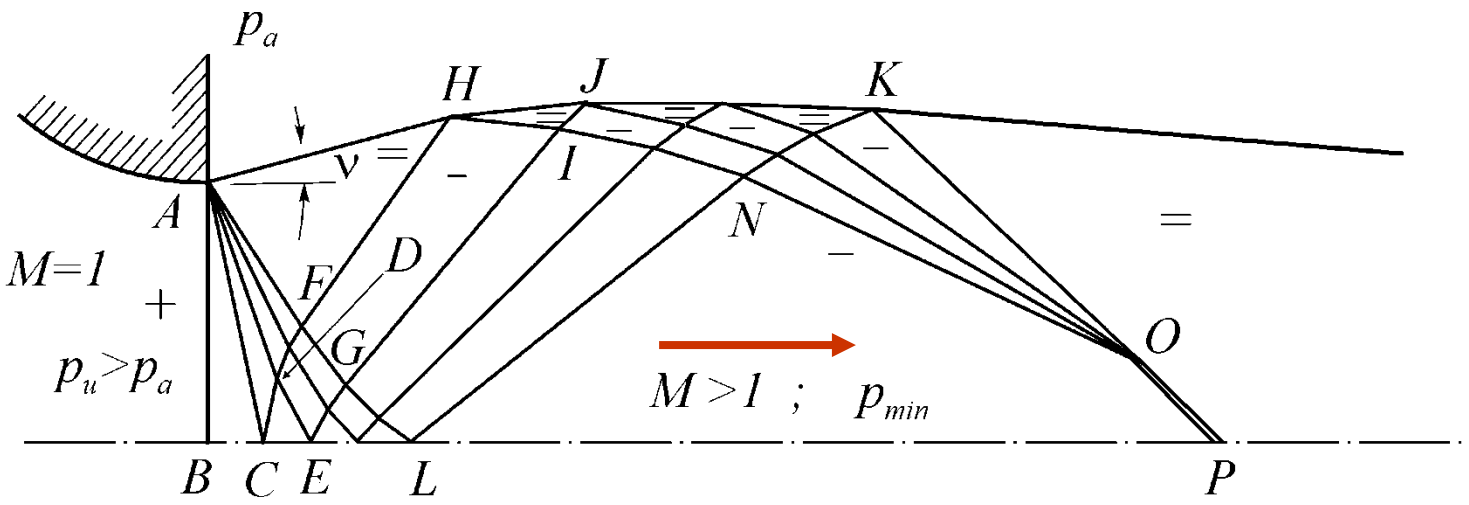


È facile convincersi che il numero di Mach nella regione $LNOP$ è quello per il quale l'angolo di Prandtl e Meyer vale 2ν poiché ***la corrente ha subito una ulteriore deviazione (convessa), anch'essa pari a ν, che la ha raddrizzata.***

Una volta noto il numero di Mach supersonico nella $LNOP$, è possibile anche calcolare la pressione in questa regione utilizzando sempre la:

$$p_o = p\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

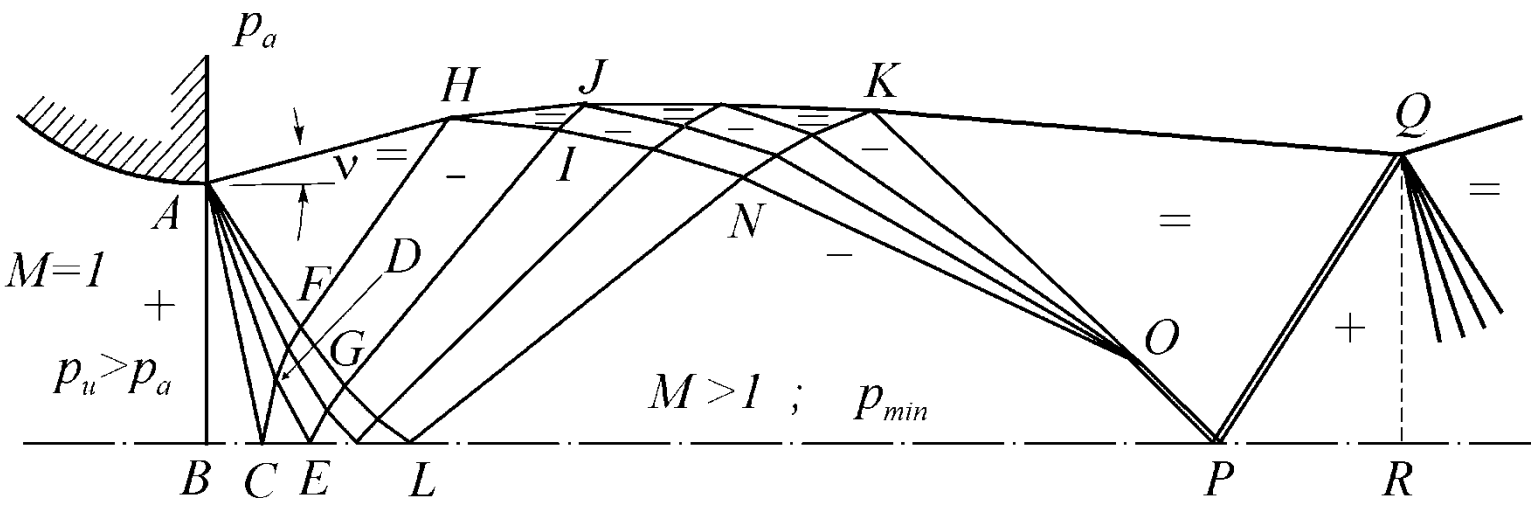
perché, si ricorda, che ***il moto attraverso i due ventagli di espansione è omoenergetico ed isoentropico*** .



Se il numero di Mach a valle lo consente, l'onda d'urto obliqua OP si riflette ***regolarmente*** sull'asse dell'ugello (piano di simmetria) nell'altra onda d'urto obliqua PQ portando la pressione, che (prima dell'onda) lungo il confine del getto KQ era uguale a p_a, ad un valore maggiore di quello ambiente.

È chiaro che a questo punto, nella sezione QR, ci si ritroverà in ***condizioni analoghe (salvo che per il diverso numero di Mach) a quelle della sezione*** AB. D'altronde, ***l'onda d'urto obliqua*** PQ ***si deve riflettere sulla superficie libera come ventaglio di espansione***.

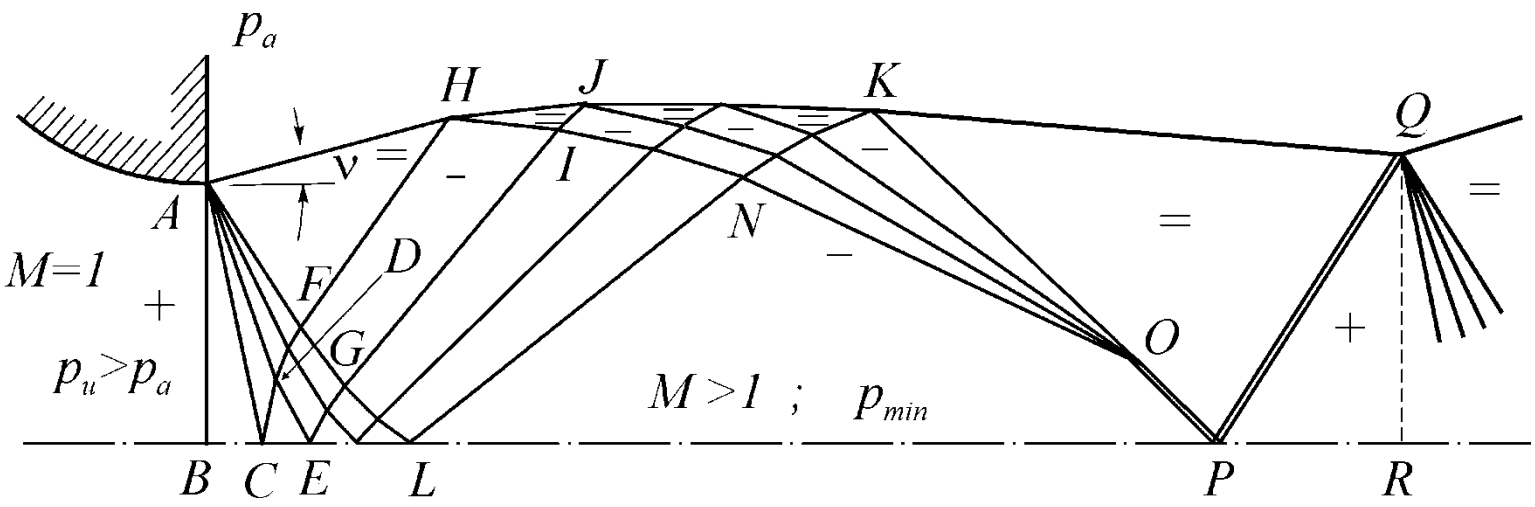
Quindi l'evoluzione del getto si può ***ciclicamente ripetere*** fino a che il numero di Mach resta sufficientemente elevato da consentire onde di Mach (di espansione e compressione) e onde d'urto.



Certamente gli effetti viscosi (il mescolamento) e le diminuzioni della pressione di ristagno associate alle onde d'urto porteranno, prima o poi, ad un abbassamento della velocità del getto, e conseguentemente del suo numero di Mach, a valori subsonici.

Il campo di onde, il cui tratto iniziale, riportato in figura, rappresenta un'evoluzione della corrente per così dire ***a salsicciotto***, è chiaramente visibile nella fase di decollo (soprattutto al tramonto, o di notte) a valle dei turbogetti dei velivoli da caccia supersonici, o a valle di motori a razzo.

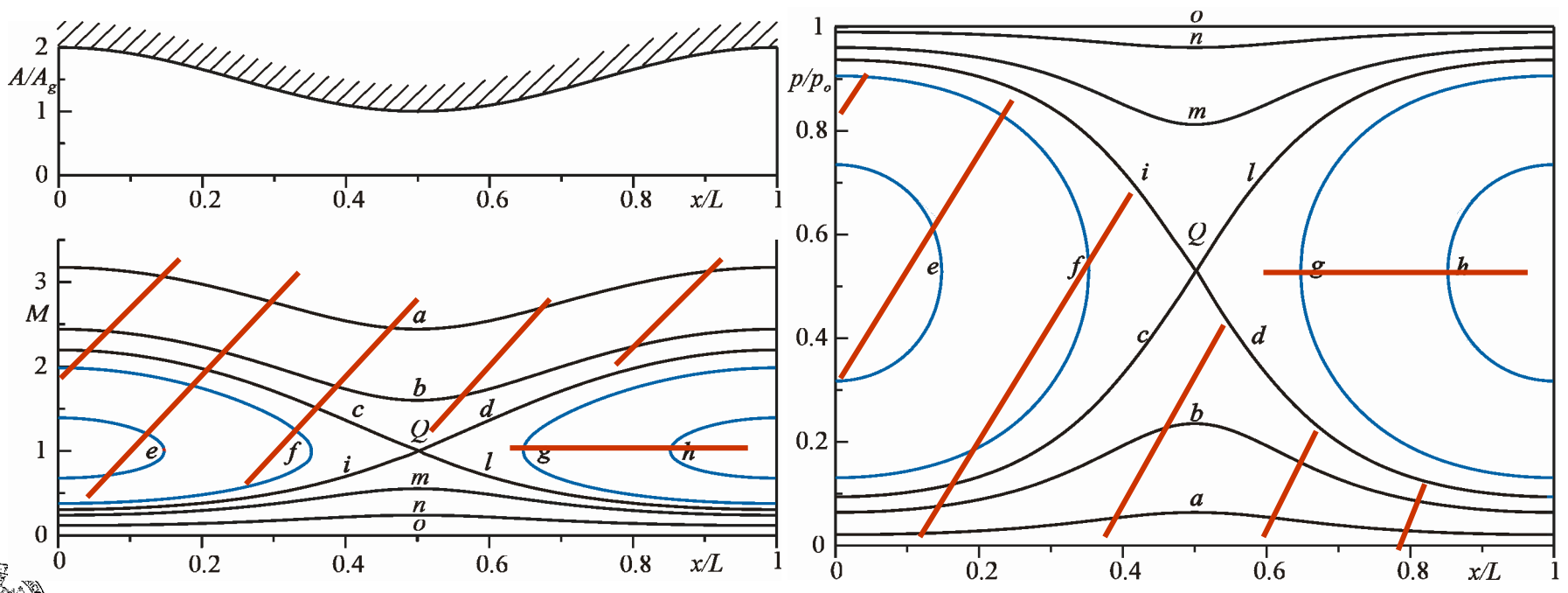
In condizioni di sottoespansione, ***un comportamento analogo esiste anche quando all'uscita dell'ugello si hanno condizioni di moto supersonico,*** con la differenza che l'angolo della prima onda AB non è 90° ma μ.



UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE COLLEGATO AD UN SERBATOIO

Se paragonati a quelli di un ugello semplicemente convergente, i diversi comportamenti di un ugello convergente divergente collegato ad un serbatoio risultano molto più articolati.

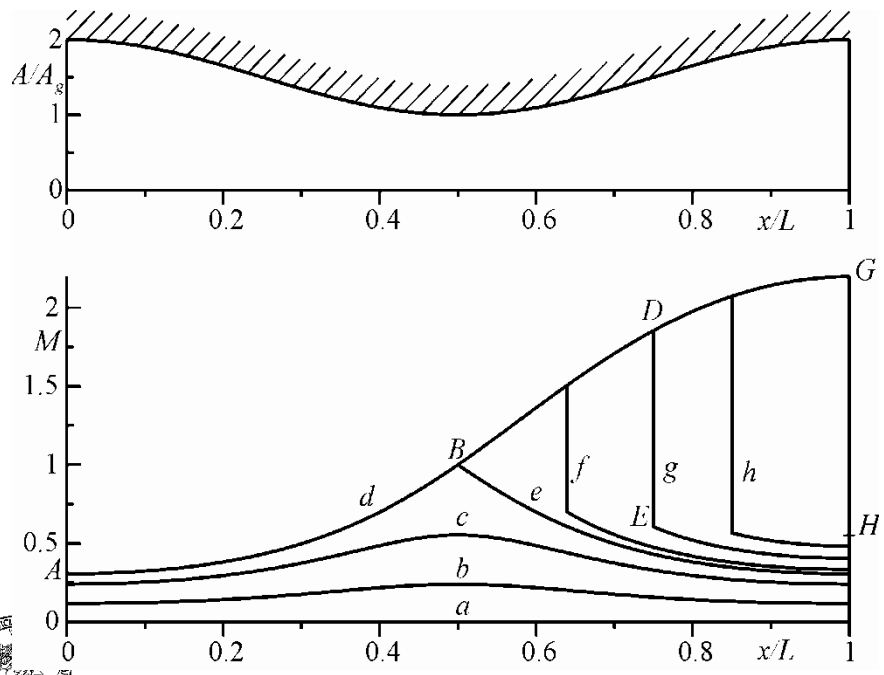
Anche in questo caso ***conviene partire dalle curve soluzione per un moto quasi-unidimensionale, quasi-stazionario, omoenergetico e isoentropico in un condotto ad area variabile*** riportate in figura, nelle quali occorre ***escludere le curve del tipo a, b, c, e, f, g*** ed ***h*** per gli stessi motivi esposti nel caso di un ugello convergente.



Le curve restanti sono rappresentate in figura, sempre per il caso di distribuzione cosinusoidale dell'area ed aree di ingresso e di uscita doppie rispetto a quella di gola) ***insieme ad altre di cui si dirà in seguito e che***, come si vedrà, ***non corrispondono ad un moto completamente isoentropico nell'ugello***, perchè prevedono la ***presenza di onde d'urto***.

Sull'asse delle ordinate a destra del grafico p/p_o, sono indicati tre particolari valori del rapporto di pressione p_d/p_o contrassegnati con $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ ed $\boldsymbol{r_3}$ e di solito denominati ***primo***, ***secondo*** e ***terzo rapporto critico di pressione*** rispettivamente.

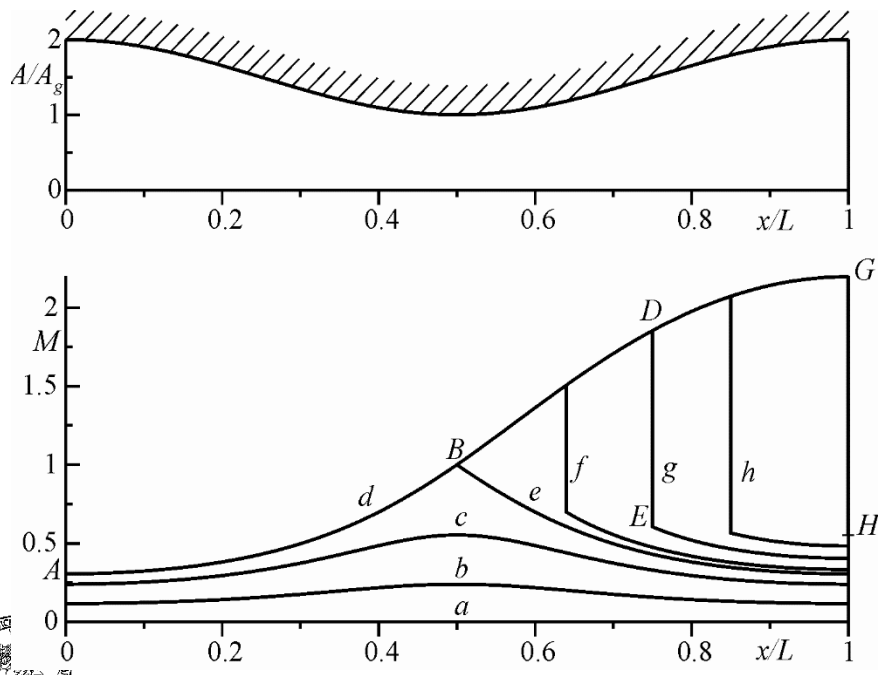
Come si vedrà, essi delimitano particolari campi di funzionamento dell'ugello.



Questi tre rapporti sono funzione del rapporto tra i calori specifici γ e del rapporto tra l'area di uscita dell'ugello e quella di gola. I tre rapporti sono relativi a funzionamenti dell'ugello per il quale si ha M = 1 nella sezione di gola.

In particolare, ***il rapporto r_1 è relativo a condizioni di uscita subsoniche mentre r_3 a condizioni di uscita supersoniche***. ***Il rapporto r_2 si ottiene moltiplicando il rapporto r_3 per il rapporto tra le pressioni statiche a valle e a monte di un'onda d'urto normale stazionaria*** che ***si ha al numero di Mach corrispondente al punto*** G, cioè posta nella sezione di uscita dell'ugello.

I tre punti C, H e G si chiamano ***punti caratteristici*** perché, come si vedrà in seguito, ***delimitano diversi campi di funzionamento dell'ugello***.

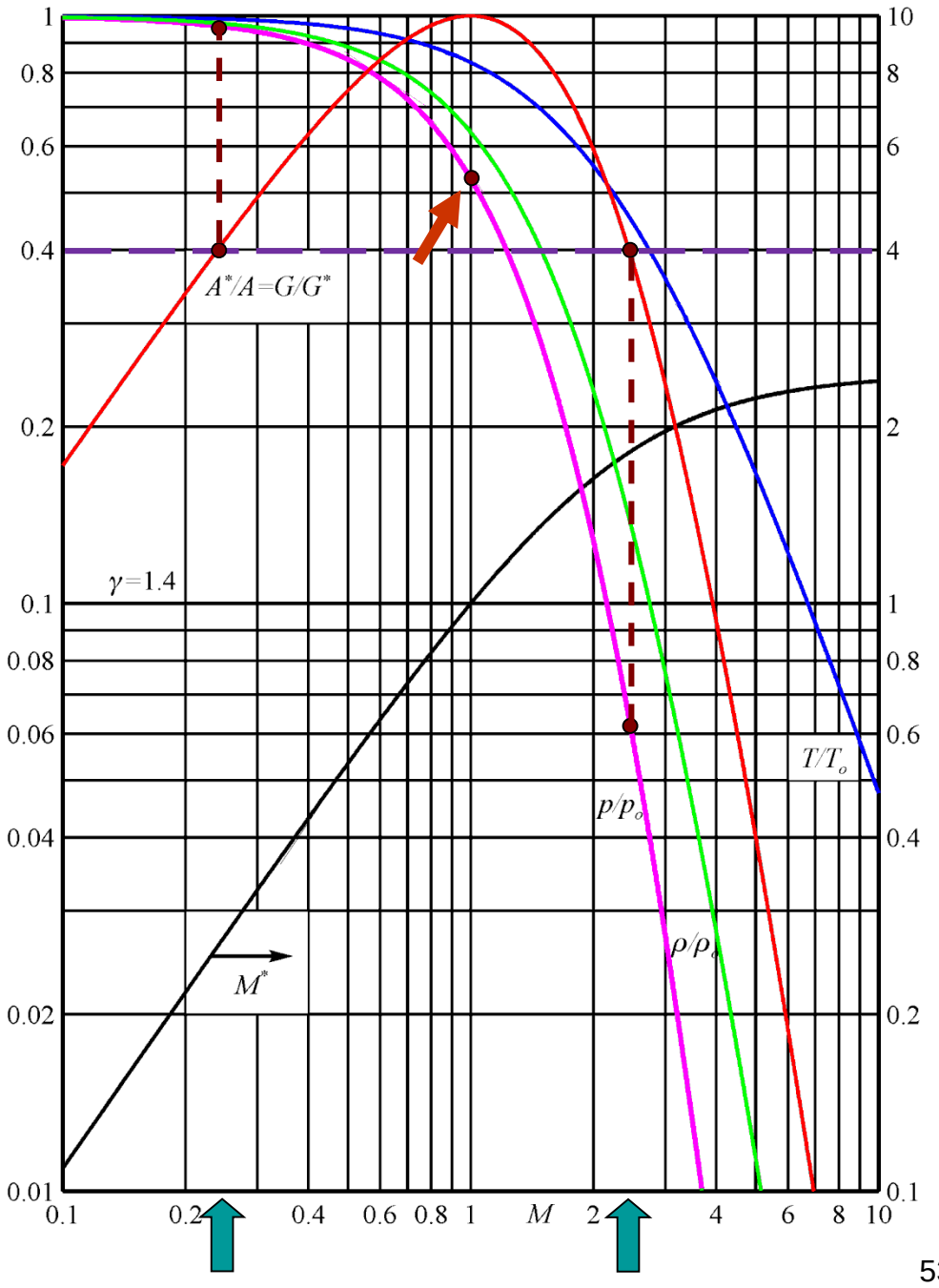


Con riferimento alla figura riportata i due rapporti r_1 ed r_3 si leggono sull'asse delle ordinate entrando dapprima nella figura con il rapporto assegnato tra l'area di gola e quella di uscita dell'ugello, A_g/A_u che, per l'ipotesi di funzionamento dell'ugello con M = 1 nella sezione di gola, risulta pari ad A^*/A_u.

Questo valore del rapporto corrisponderà a ***due valori*** del numero di Mach, ***uno in regime subsonico ed uno in regime supersonico***.

In corrispondenza di questi due valori del numero di Mach, si potranno leggere nella stessa figura i valori di r_1 e r_3.

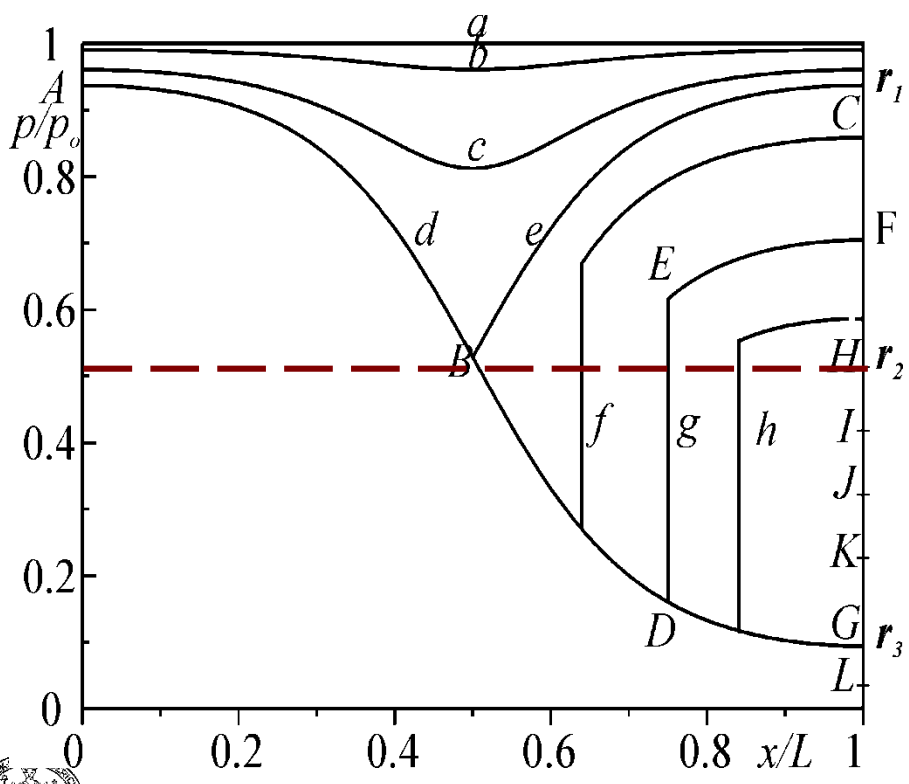
Attenzione: r_1 risulta sempre maggiore di p^*/p_o ed r_3 minore.

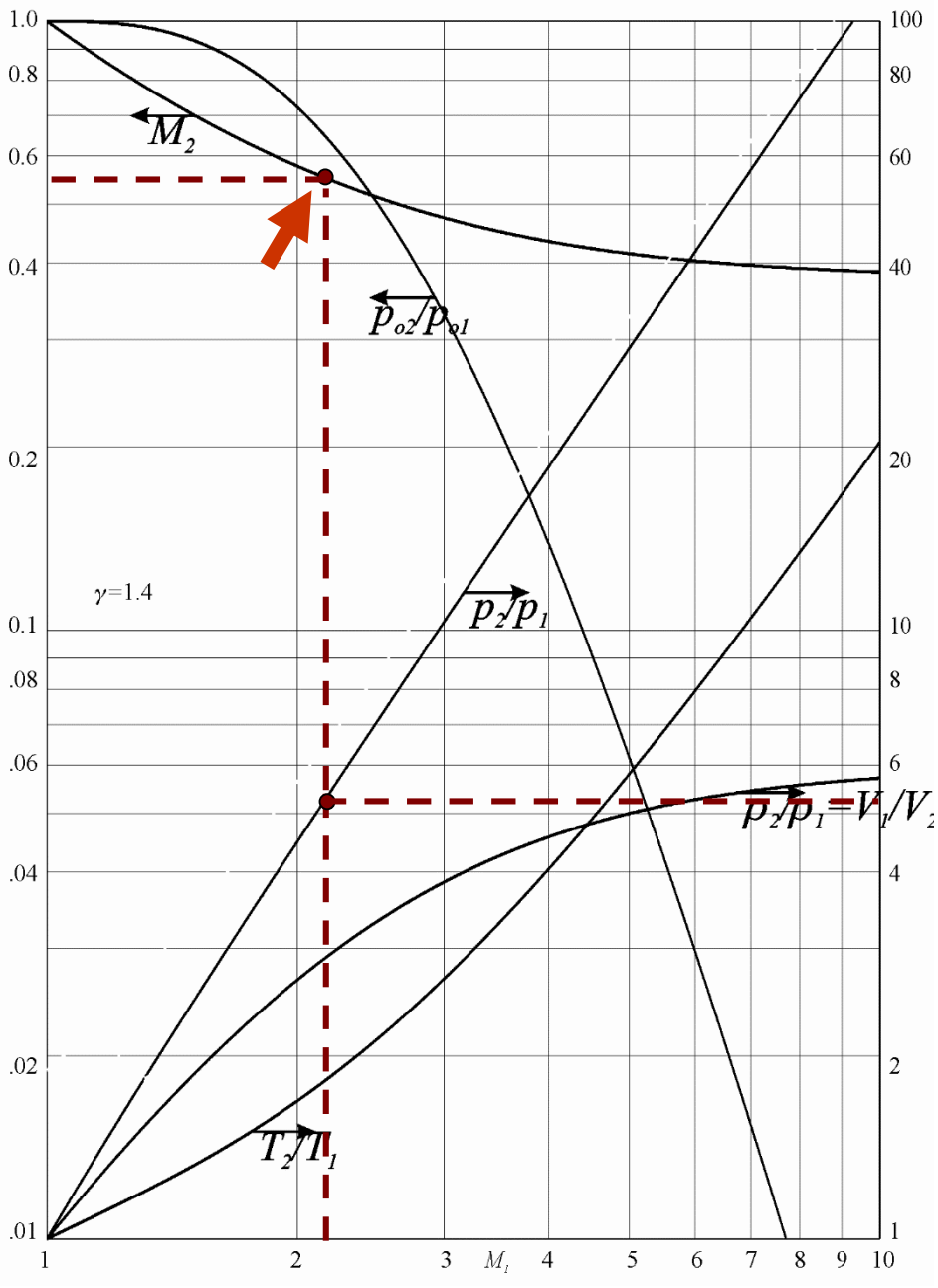


Per calcolare il valore di r_2, occorre entrare nel grafico delle onde d'urto con il valore di M_G (2.2) e leggere il rapporto p_2/p_1.

Poiché la p_G non rappresenta altro che la p_1 e la p_H la p_2, si avrà:

$$r_2 = r_3 \times p_2/p_1$$





Non deve meravigliare il fatto che r_2 risulti minore di 0.5283 anche se il numero di Mach a valle dell'onda d'urto è circa 0.55, cioè è minore di uno.

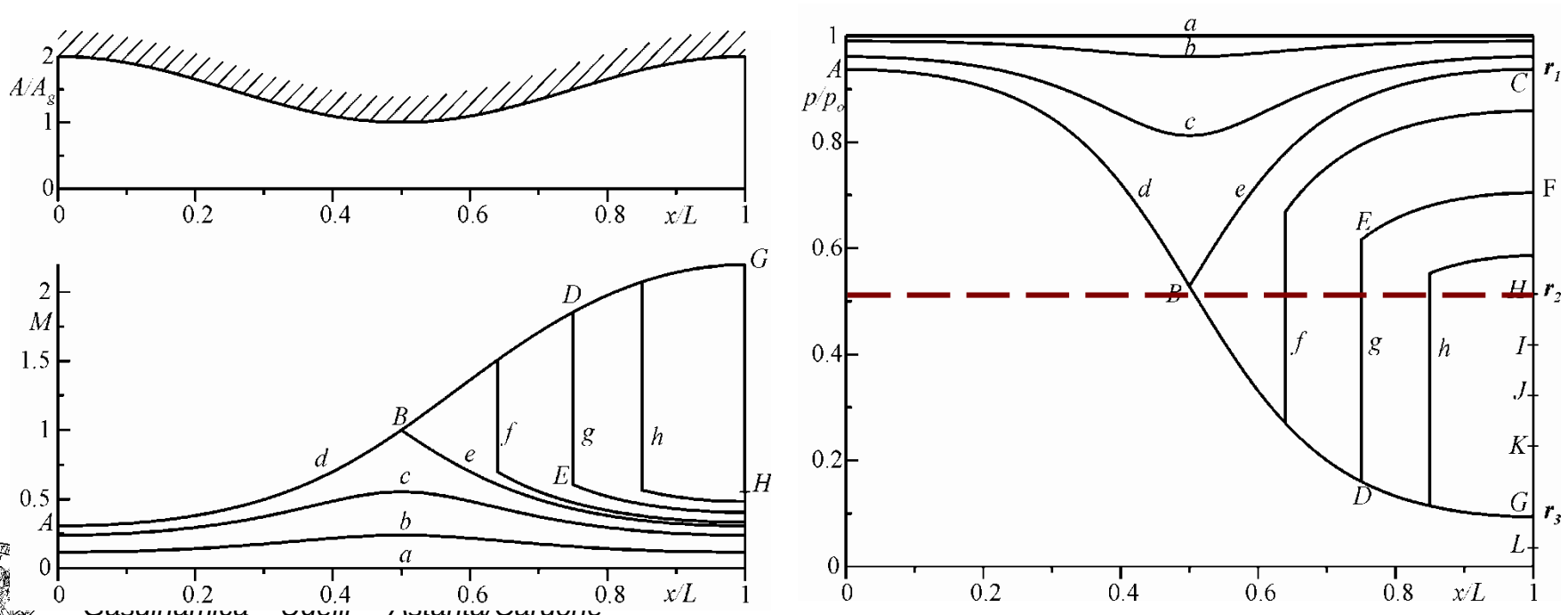
Infatti, il diagramma di figura adimensionalizza la pressione rispetto a quella nel serbatoio e non rispetto alla p_{o2}, riportando quindi la quantità:

$$p_2/p_{o1} = p_2/p_{o2} \times p_{o2}/p_{o1}$$

e, poiché:

$$p_{o2} / p_{o1} < 1$$

anche, per $M_2 < 1$, il prodotto può risultare ***minore di*** 0.5283.

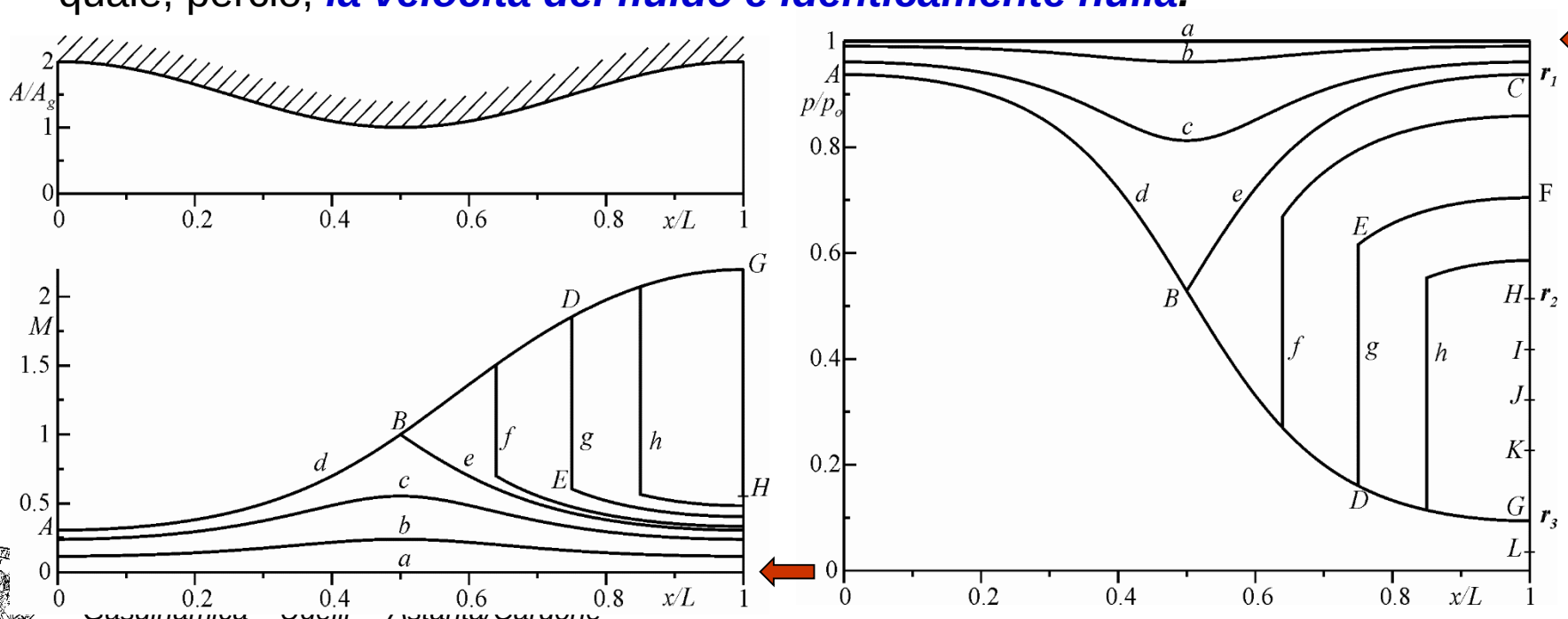


Di seguito si esamineranno i diversi comportamenti dell'ugello al variare del rapporto tra la pressione ambiente e quella di ristagno nel serbatoio.

Come nel caso dell'ugello convergente, si suppone che il serbatoio contenga un gas ad una pressione costante p_o = 1ata e che l'ugello scarichi in un ambiente in cui sia possibile far variare la pressione p_a da 1ata in giù.

Le possibili generalizzazioni, cioè il caso di pressione di ristagno diversa, o pressione ambiente costante e pressione di ristagno variabile sono simili a quelle già discusse per l'ugello solamente convergente.

La curva ***a***, corrispondente al caso p_u= p_a= p_o= 1ata, è sempre relativa alla condizione per la quale la pressione p è uguale a p_o lungo tutto l'ugello nel quale, perciò, ***la velocità del fluido è identicamente nulla.***

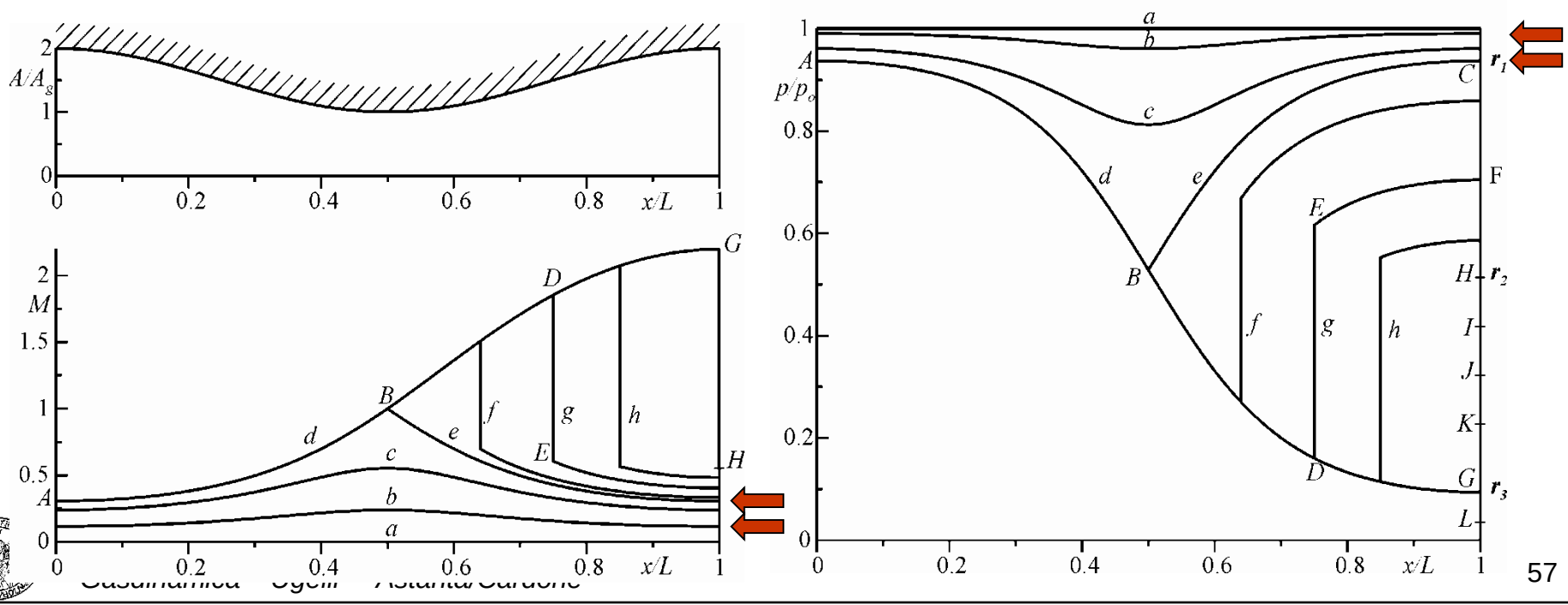


Al diminuire della pressione ambiente, l'ugello funziona secondo curve del tipo ***b*** e ***c*** e la pressione del fluido nella sezione di uscita dell'ugello , per quanto già detto per l'ugello convergente, deve rispettare la condizione di Kutta.

Il moto del gas è subsonico lungo tutto l'ugello ***con un valore minimo della pressione*** (valore massimo del numero di Mach) ***nella sezione di gola***.

Per p_a/p_o = $\boldsymbol{r_1}$, il fluido raggiunge per la prima volta condizioni critiche (M = 1, punto B di figura) nella sezione di gola, seguendo le curve ***d*** ed ***e***.

Come si vedrà, ***in queste condizioni l'ugello si strozza.*** Ulteriori diminuzioni della pressione ambiente non cambiano lo stato B del gas nella gola e, quindi, per pressione nel serbatoio costante, ***non cambia la portata***.



Se ora, a partire da p_a/p_o = $\boldsymbol{r_1}$ la pressione ambiente viene ulteriormente diminuita (ad es. punto F di figura), ***le onde di espansione*** (che si generano per la depressione esistente nella sezione di uscita dell'ugello e viaggiano alla velocità del suono) ***riescono a risalire la corrente subsonica presente nel divergente facendo accelerare il fluido verso valle.***

È come se l'ugello tendesse a funzionare seguendo il ramo superiore della curva ***g*** o ***h*** di Fig.1, cosa che, peraltro, non può accadere perché queste curve prevedono M = 1 in una sezione diversa da quella di gola.

In Fig.2 è, invece, rappresentato cosa accade, sia pure dal punto di vista unidimensionale, per tutte le condizioni $\boldsymbol{r_2} < p_a/p_o < \boldsymbol{r_1}$ (curve ***f***, ***g*** ed ***h***).

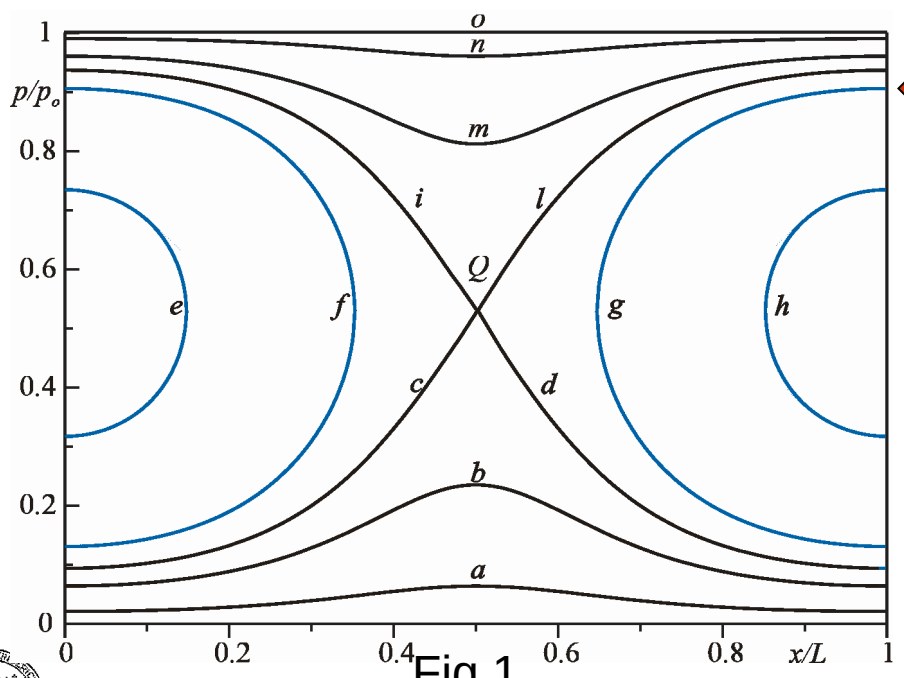


Fig.1

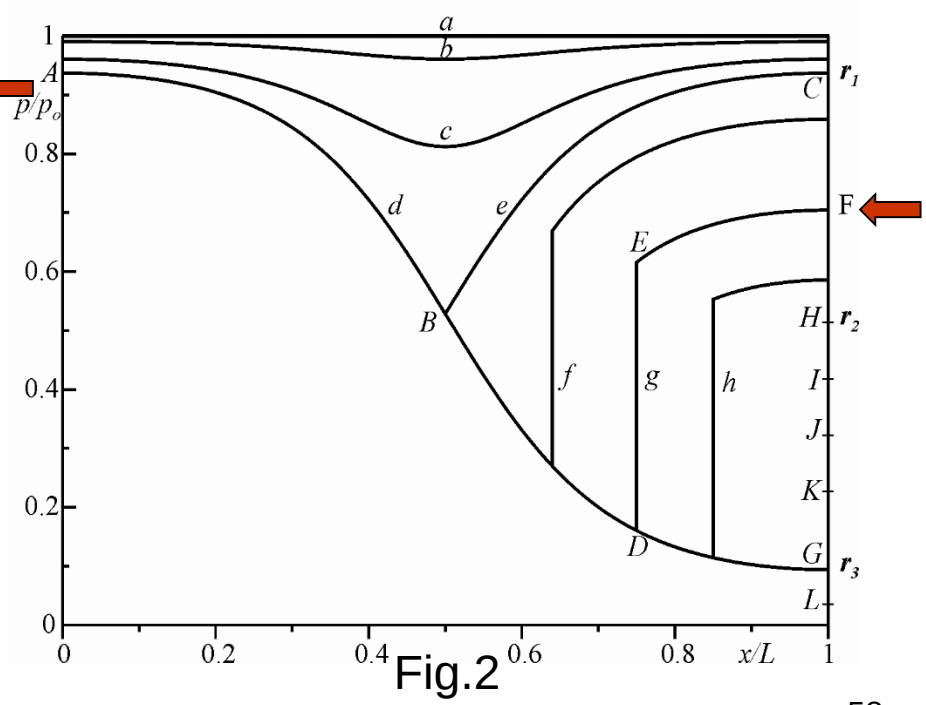
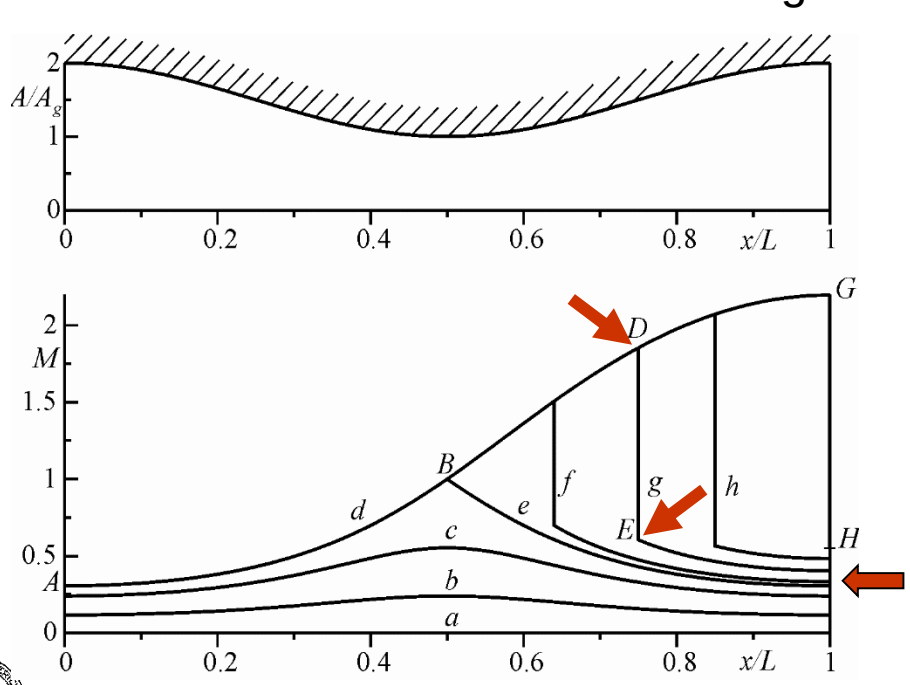


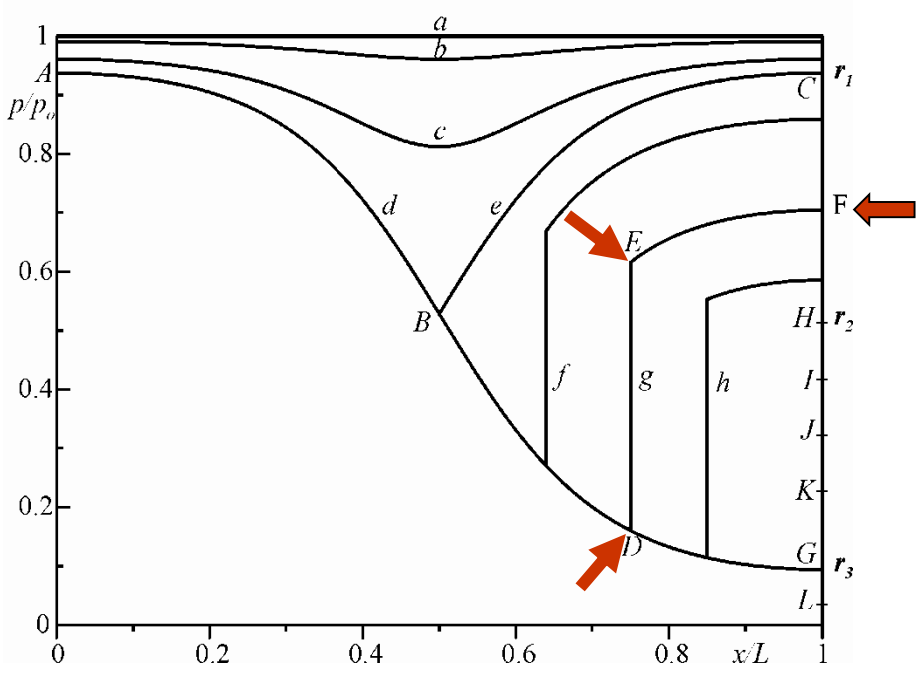
Fig.2

Si supponga, ad esempio, che il rapporto di pressione p_a/p_o sia quello corrispondente al punto F del diagramma. ***La corrente***, che nel convergente segue la curva ***d*** (accelerando e contemporaneamente espandendosi), sino a M = 1 (punto B) ***imbocca il divergente continuando ad accelerare (tratto BD) raggiungendo in D un numero di Mach supersonico***.

Nella sezione corrispondente al punto D si ha un'onda d'urto normale che porta lo stato del fluido a quello ***subsonico*** rappresentato dal punto E.

A valle di questa sezione si ha una graduale ricompressione (decelerazione isentropica) ***del fluido sino alle condizioni F***, poiché il fluido si trova a M < 1 ed il condotto a valle è divergente.





Attenzione: L'***onda d'urto fa cambiare la pressione di ristagno*** e quindi l'***area critica***. Per la:

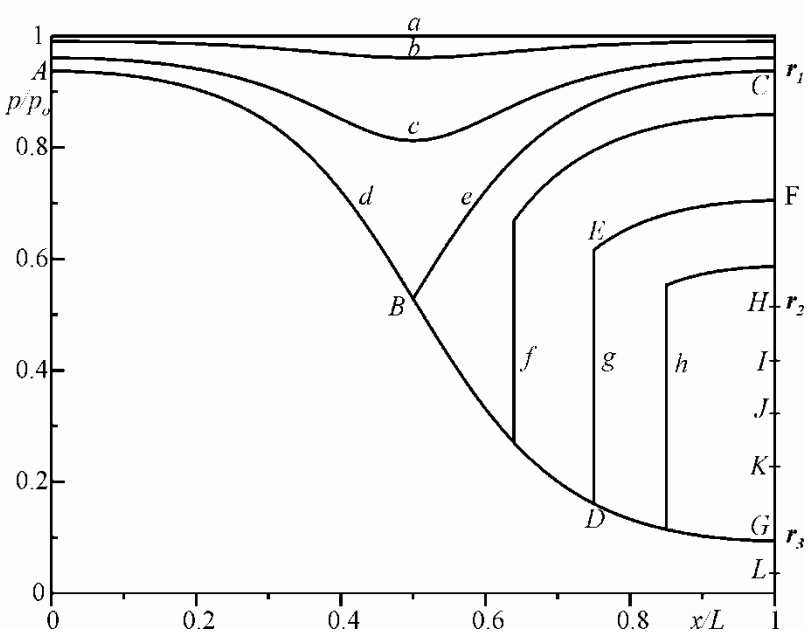
$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

si ha:

$$A_D^*/A_E^* = p_{oE}/p_{oD} = p_{oE}/p_o$$

Il numero di Mach nella sezione di uscita si dovrà calcolare mediante la:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



sostituendovi il rapporto:

$$A_u / A_E^* = (A_u / A^*) \times (A^* / A_E^*)$$

Ovviamente, della A/A^* occorre considerare la ***sola soluzione subsonica***, osservando che nella sua espressione è stato assunto:

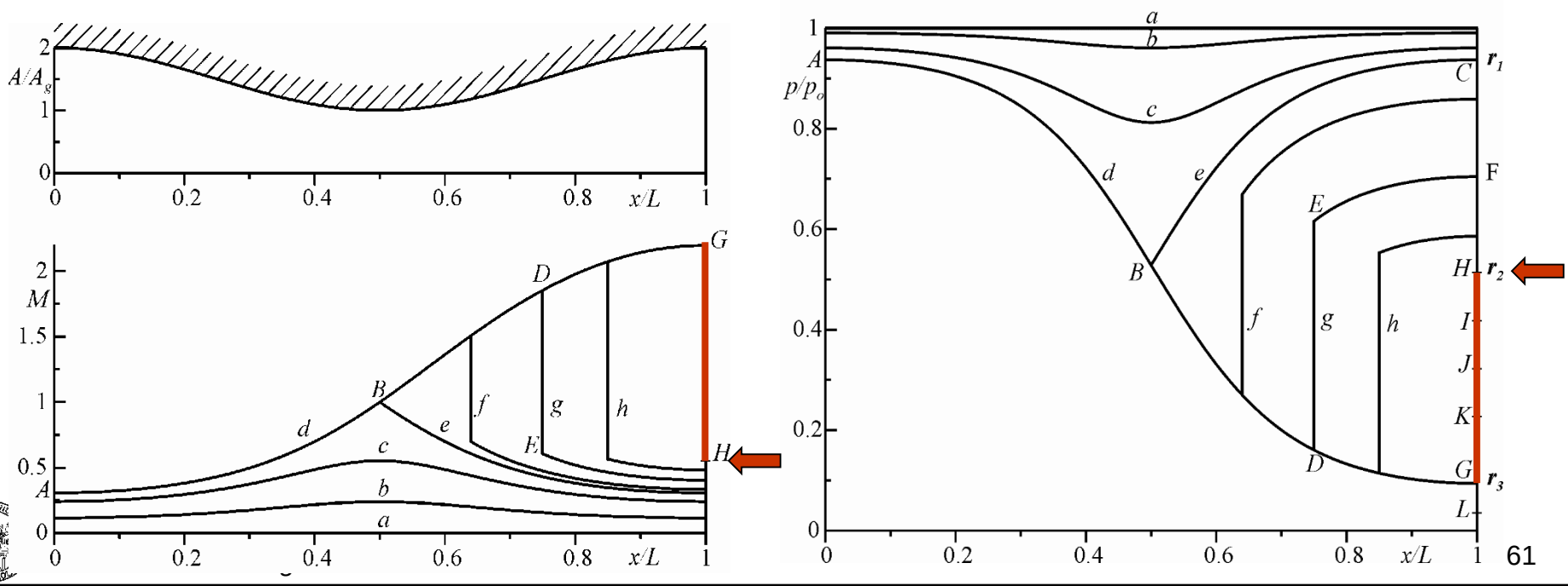
$$A^* = A_D^*$$

Al progressivo diminuire del rapporto di pressione dal valore r_1 a quello r_2, l'***onda d'urto normale si muove lungo il divergente*** dalla sezione corrispondente al punto B (*onda di Mach* normale ad effetto nullo) a quella del punto G (onda d'urto normale posta nella sezione di uscita dell'ugello) che porta ad H.

Per questi valori di p_a/p_o, il moto nell'ugello non è ***sempre isoentropico*** per la presenza dell'onda d'urto, anche se ***è ancora valida la condizione di Kutta*** perché il fluido nella sezione di uscita dell'ugello è sempre subsonico.

Quindi, il rapporto r_2 corrisponde ad un valore del rapporto p_a/p_o per il quale si ha un'onda d'urto normale nella sezione di uscita dell'ugello che porta le condizioni del fluido da G ad H.

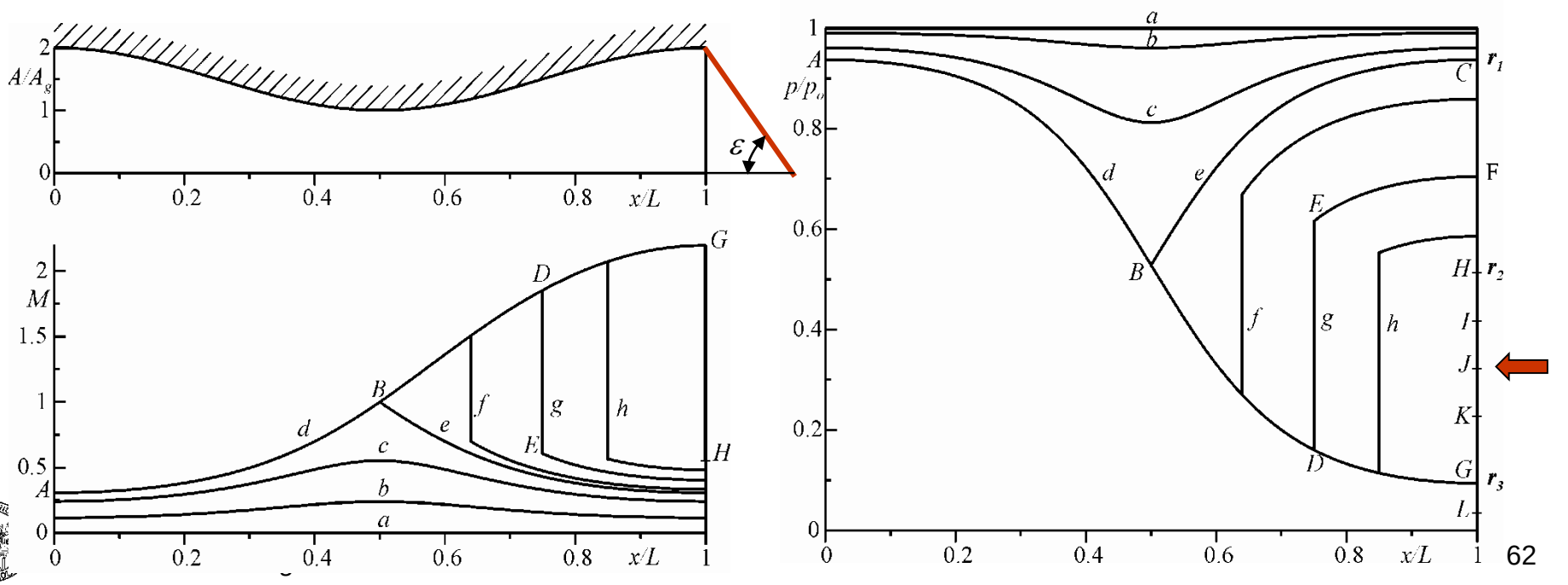
Ovviamente si intende per p_o la quantità: $p_{oA} = p_{oB} = p_{oD} = p_{oG} > p_{oH}$



Per ulteriori diminuzioni del rapporto di pressione p_a/p_o, da r_2 a r_3 (ad es. punti I, J e K), l'onda d'urto normale darebbe una ricompressione troppo forte.

Quindi nella sezione di uscita dell'ugello (in particolare, alla sua periferia direttamente a contatto con la pressione ambiente) ***deve esistere un'onda d'urto obliqua che dia luogo alla sola ricompressione necessaria***.

Al diminuire del rapporto p_a/p_o, l'angolo di inclinazione ε dell'onda d'urto rispetto alla corrente diminuisce (perché è necessaria una ricompressione sempre minore) ***dal valore di 90°*** (corrispondente al secondo rapporto critico di pressione r_2) ***al valore*** $\mu = arcsin 1/M$ (corrispondente al terzo rapporto critico di pressione r_3), che è cioè ***relativo ad un'onda di Mach***.

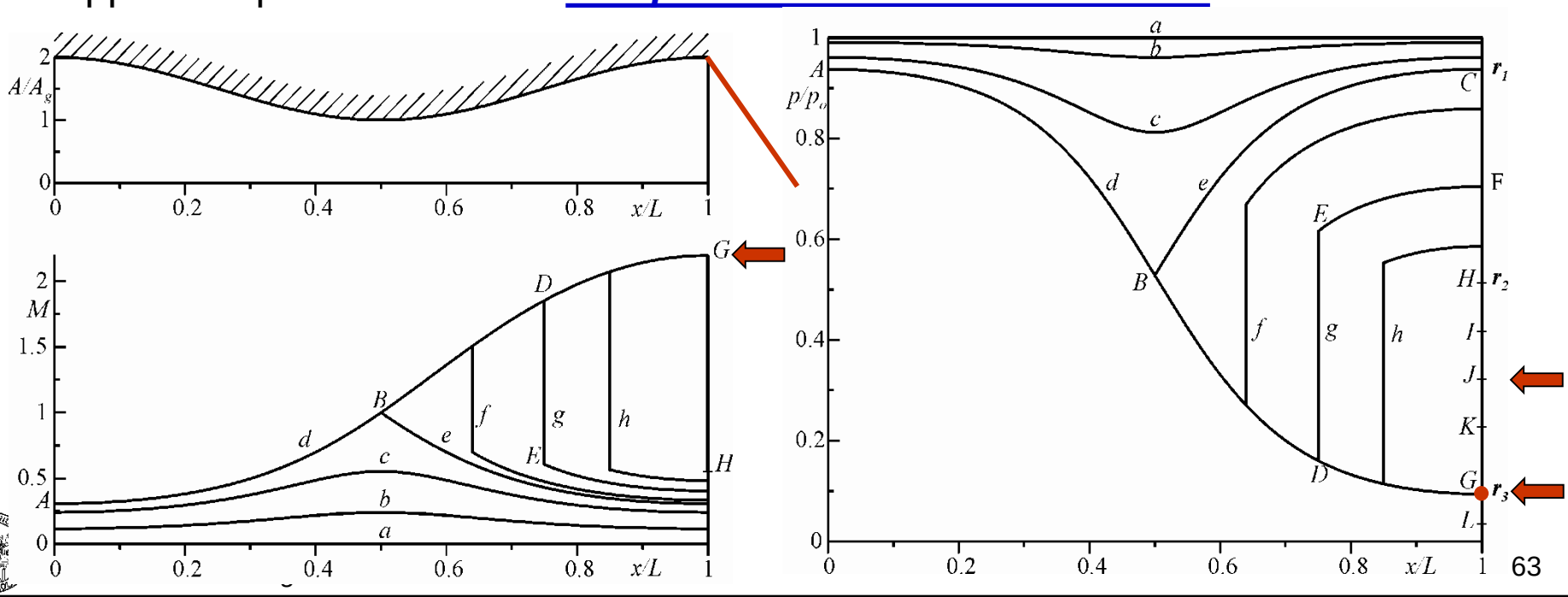


L'onda d'urto obliqua parte dalla periferia della sezione di uscita dell'ugello e, poiché come si vedrà essa si sviluppa ***al di fuori*** di quest'ultima, il flusso nella sezione di uscita dell'ugello è ***sempre supersonico*** con numero di Mach corrispondente al punto G; cioè, nell'ugello, il fluido segue sempre la curva ABG.

Quindi ***non è più rispettata la condizione di Kutta*** e l'ugello, in questa situazione, viene detto ***sovraespanso***.

La condizione per la quale il rapporto è proprio quello corrispondente al punto G è anche detta ***condizione di progetto dell'ugello convergente divergente*** e l'espansione del gas nell'ugello è detta ***espansione corretta.***

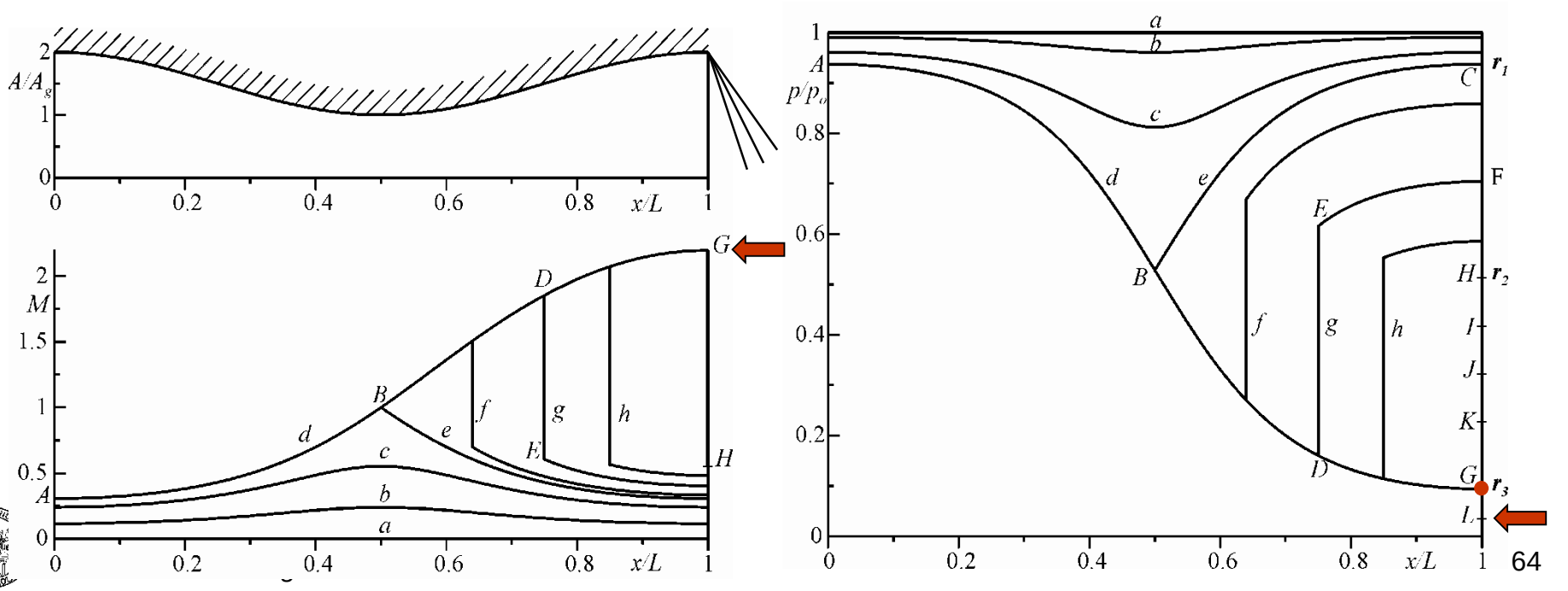
Essa conduce nella sezione di uscita dell'ugello ad un flusso supersonico con una ***pressione uguale a quella ambiente***. Per questo solo valore del rapporto di pressione viene ***recuperata la condizione di Kutta.***



Come nell'ugello convergente per valori di $p_a/p_o < p^*/p_o$, nel caso di un ugello convergente divergente, quando si ha $p_a/p_o < \boldsymbol{r_3}$, si genera un ***ventaglio di espansione*** a valle della sezione di uscita dell'ugello che parte dalla periferia della sezione di uscita ma, nell'ugello, il fluido continua a seguire la curva ABG.

In questa situazione l'ugello viene detto sottoespanso perché $p_u > p_a$.

A differenza di quanto avviene nell'ugello convergente, nel quale la prima onda del ventaglio di espansione è ortogonale alla corrente poichè il numero di Mach di uscita è pari ad 1, per un ugello convergente divergente ***la prima onda di Mach del ventaglio è inclinata rispetto alla corrente di un angolo pari a*** $\mu = arcsin(1/M_G)$.

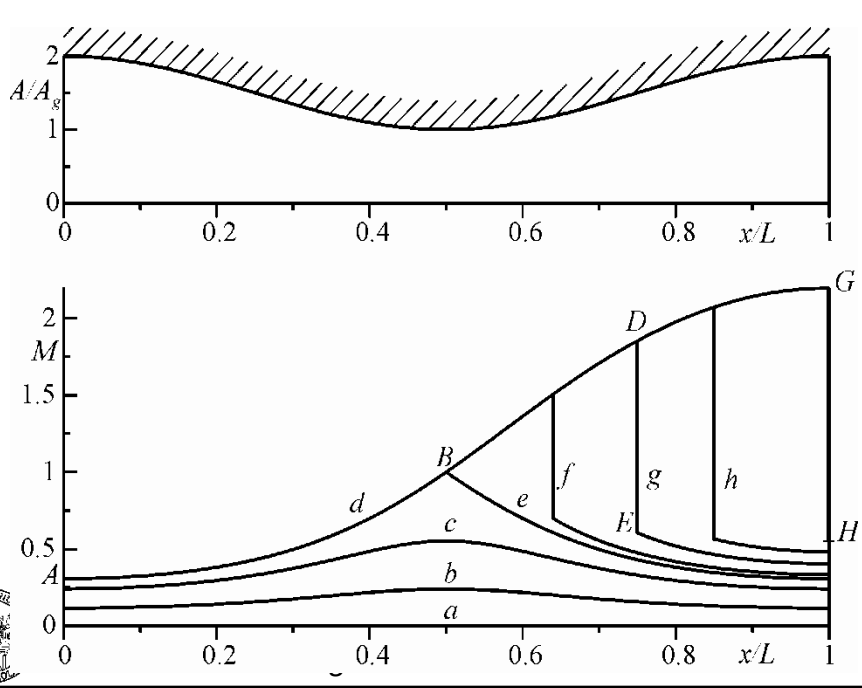


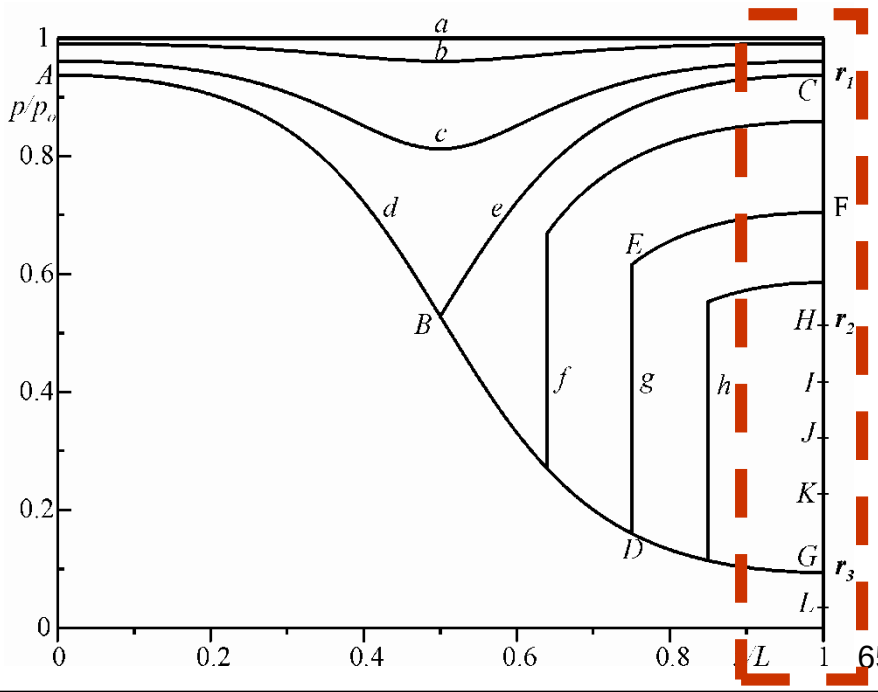
Si può quindi concludere che, ***per valori di*** p_d/p_o ***inferiori al primo rapporto critico di pressione*** r_1, ***si ha sempre*** $M = 1$ ***nella sezione di gola***.

Invece, ***per valori di*** p_d/p_o ***inferiore al secondo rapporto critico di pressione*** r_2, ***all'interno dell'ugello non vi è alcun effetto della diminuzione della pressione ambiente sia sulla distribuzione del numero di Mach, che sulla distribuzione di pressione***.

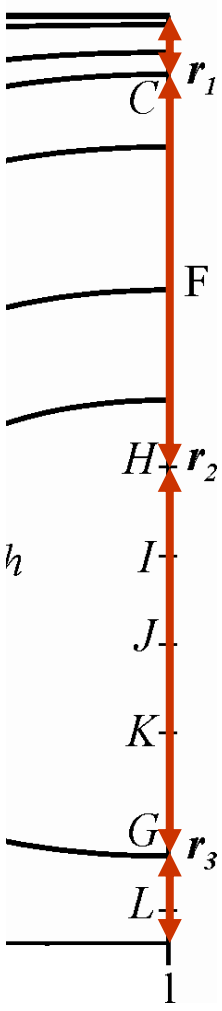
L'adattamento della corrente alla pressione ambiente avviene al di fuori dell'ugello e non interessa il moto all'interno dell'ugello stesso.

Per valori di p_d/p_o ***inferiore al secondo rapporto critico di pressione*** r_2, ***tranne che per*** $p_d/p_o = r_3$, ***non vale la condizione di Kutta***.





In conclusione, il comportamento dell'ugello convergente divergente si può riassumere nei seguenti quattro regimi di funzionamento:



- $p_d/p_o < r_3$ - ***ugello sottoespanso***; l'efflusso dall'ugello è supersonico, ***la pressione nella sezione di uscita dell'ugello è maggiore di quella ambiente*** e la corrente completa la sua espansione sino alla pressione ambiente al di fuori dell'ugello mediante un ventaglio di espansione;

  non è valida la condizione di Kutta.

- $r_3 < p_d/p_o < r_2$ - ***ugello sovraespanso***; l'efflusso dall'ugello è supersonico, ***la pressione nella sezione di uscita dell'ugello è minore di quella ambiente*** e la corrente si porta alla pressione ambiente fuori dell'ugello mediante un'onda d'urto obliqua;

  non è valida la condizione di Kutta.

- $r_2 < p_d/p_o < r_1$ - ***regime con onda d'urto nel divergente***; ***la corrente raggiunge*** $M = 1$ ***nella sezione di gola, percorre un tratto del diver-gente in regime supersonico, ma, per la presenza dell'onda d'urto, l'efflusso dall'ugello è subsonico***;

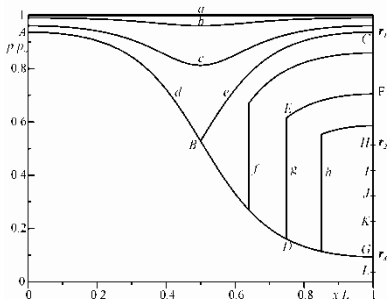
  è valida la condizione di Kutta.

- $r_1 < p_d/p_o < 1$ - ***regime alla Venturi***; ***la corrente è ovunque subsonica nell'ugello*** con un minimo della pressione (massimo della velocità e del numero di Mach) nella sezione di gola;

  è valida la condizione di Kutta.

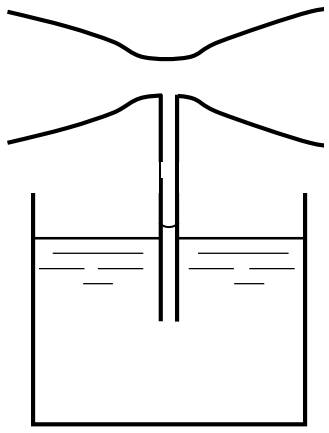
Il regime alla Venturi è, ad esempio, utilizzato nei ***carburatori*** dei motori alternativi ad accensione comandata.

In questo caso, la pressione di ristagno del comburente (aria aspirata dall'ambiente) è, ovviamente, la pressione atmosferica.



La depressione che si crea nella gola del Venturi, per l'accelerazione del fluido, serve a ***richiamare il combustibile*** (benzina).

Questo, miscelandosi al comburente, dà luogo alla miscela pronta a "*scoppiare*" in camera di combustione con l'ausilio della scintilla prodotta dalla candela di accensione.



Lo stesso regime è anche utilizzato negli ***spruzzaprofumi che hanno una pompetta a aria.***

A meno che non si sfrutti la presenza del minimo di pressione in gola, ***non è conveniente utilizzare un ugello convergente divergente che funzioni con regime alla Venturi*** perché i possibili fenomeni di separazione della corrente possono essere indesiderati.

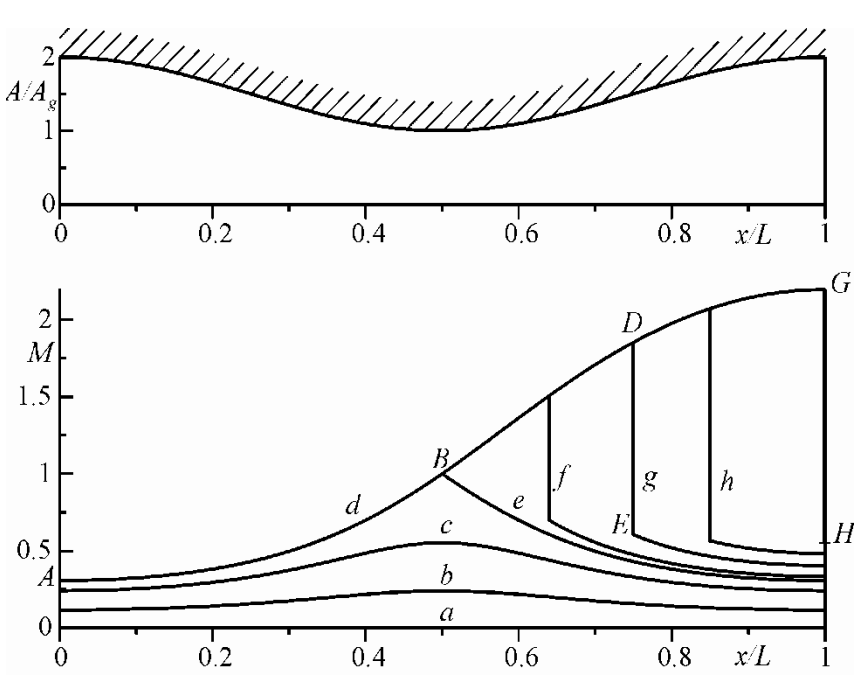
In quest'ultimo caso, invece, è preferibile utilizzare un ugello semplicemente convergente.

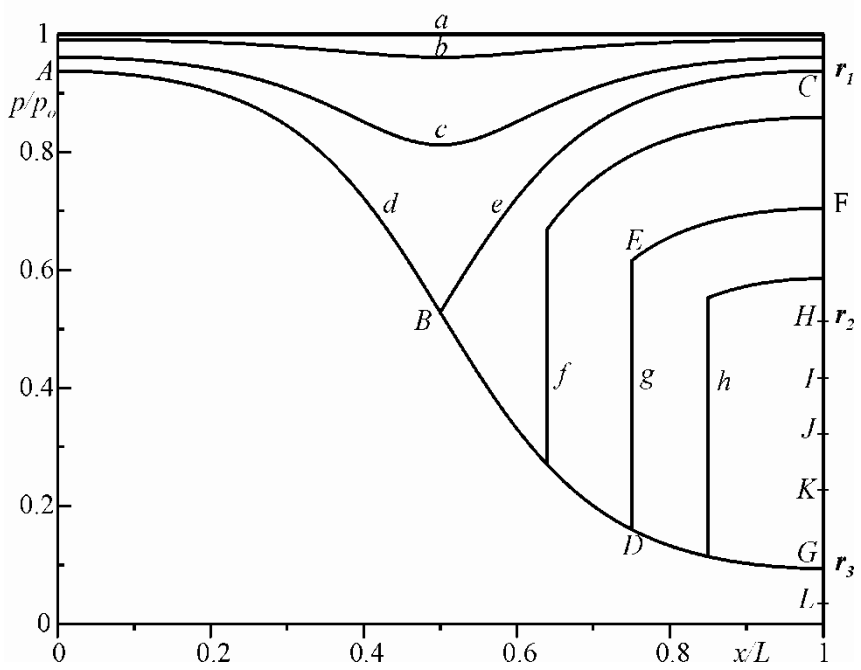
Nel caso di propulsione a razzo, è sempre preferibile un funzionamento con espansione corretta dell'ugello.

I punti C, H e G del grafico delle pressioni, rappresentativi dei tre rapporti critici di pressione, proprio perché suddividono i diversi regimi di funzionamento dell'ugello, sono anche detti ***punti caratteristici dell'ugello***, terminologia che viene adottata anche in altri modelli di moto.

Le relative curve di funzionamento che li interessano sono anche chiamate ***curve caratteristiche dell'ugello***.

Nel caso di un ugello solamente convergente si ha: $C \equiv H \equiv G$ ed $\boldsymbol{r_1 \equiv r_2 \equiv r_3}$.



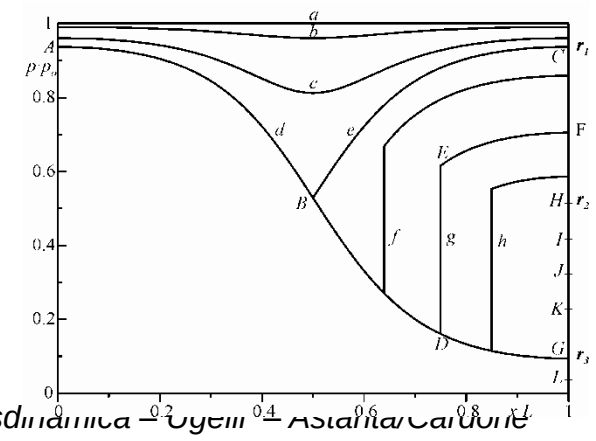


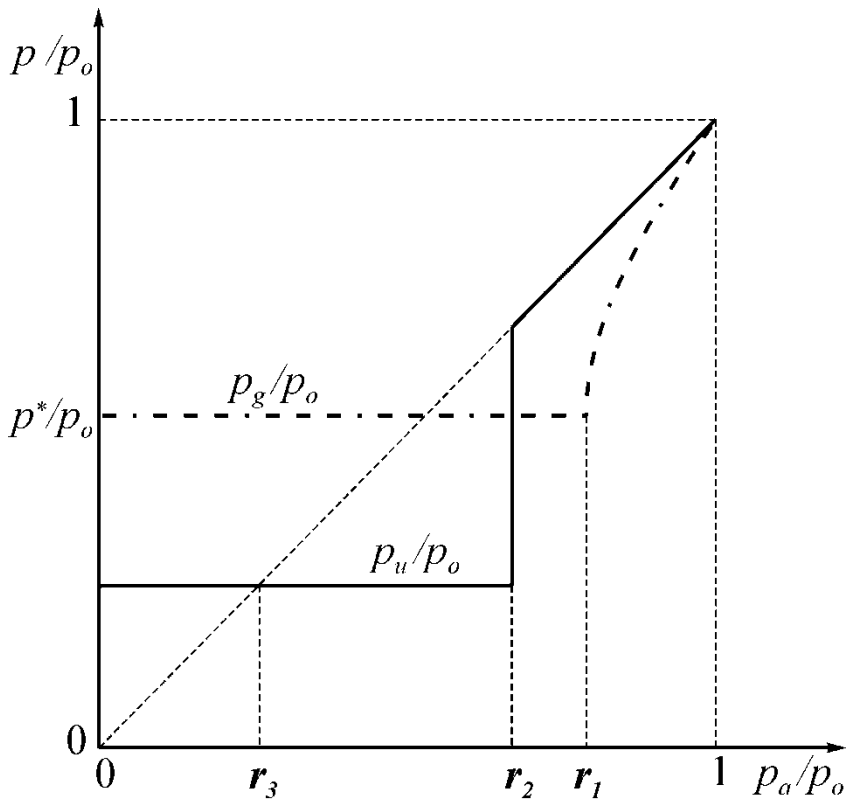
Il diagramma in basso sintetizza ***gli andamenti della pressione nella sezione di uscita dell'ugello e della pressione nella gola dell'ugello in funzione della pressione ambiente.*** Entrambe queste pressioni sono adimensionalizzate rispetto alla pressione di ristagno.

In particolare si nota che, al diminuire della pressione ambiente, la p_g/p_o resta fissata al valore p^*/p_o per $p_a/p_o \leq \boldsymbol{r_1}$ cioè per un valore di p_a/p_o maggiore di p^*/p_o.

Invece ***il rapporto*** p_u/p_o ***rispetta la condizione di Kutta per*** $p_a/p_o > \boldsymbol{r_2}$, ***dopo di ché resta costantemente bloccato al valore*** $\boldsymbol{r_3}$.

Si ricorda che, per quanto detto, $\boldsymbol{r_2}$ ***può essere maggiore, minore, o uguale, a*** p^*/p_o.





PORTATA ATTRAVERSO UN UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE COLLEGATO AD UN SERBATOIO

Una buona parte dei risultati già ottenuti per un ugello convergente, sono validi anche nel caso di un ugello convergente divergente collegato ad un serbatoio.

La differenza fondamentale tra questo caso e quello di un ugello solo convergente è che, mentre per quest'ultimo la relazione:

$$\dot{m} = \frac{p_o A^*}{a_o} \psi^*$$

è applicabile solo per valori di $p_a/p_o \leq p^*/p_o$, poiché un ugello convergente divergente raggiunge le condizioni di strozzamento per $p_a/p_o = \boldsymbol{r_1} > p^*/p_o$, questa relazione è applicabile per tutti i valori $p_a/p_o < \boldsymbol{r_1}$.

Ne consegue che i diagrammi già visti in precedenza, sia a pressione di ristagno costante che a pressione ambiente costante, devono essere corrispondentemente modificati.

Il diagramma di Fig.1 si modifica così come rappresentato in Fig.2.

In particolare, il punto A di Fig. 1 viene ad essere spostato verso destra (poiché $\boldsymbol{r_1} p_o > p^*$) e, quindi, il campo dei valori di p_a, per il quale la portata di massa resta costante ($0 \le p_a \le \boldsymbol{r_1} p_o$), risulta ***più esteso rispetto al caso di un ugello semplicemente convergente.***

L'estensione dipende dalla geometria dell'ugello ed, in particolare, dal rapporto tra la sezione di uscita e quella di gola.

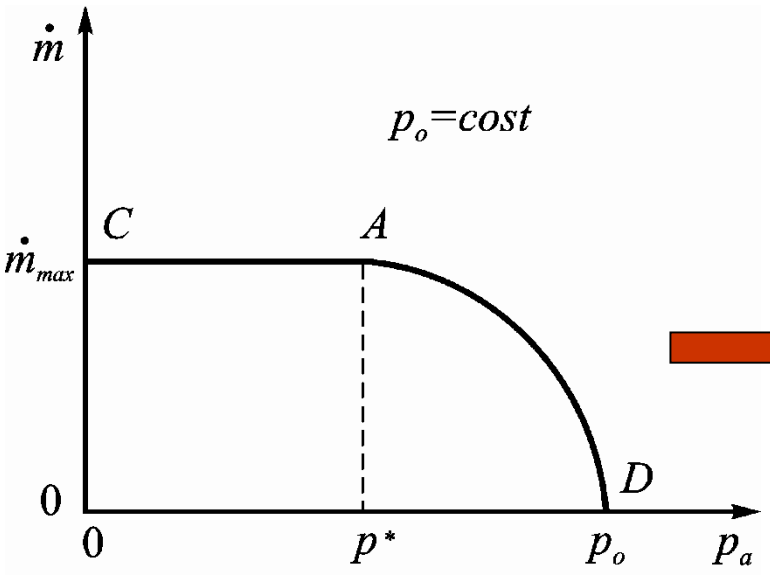


Fig.1

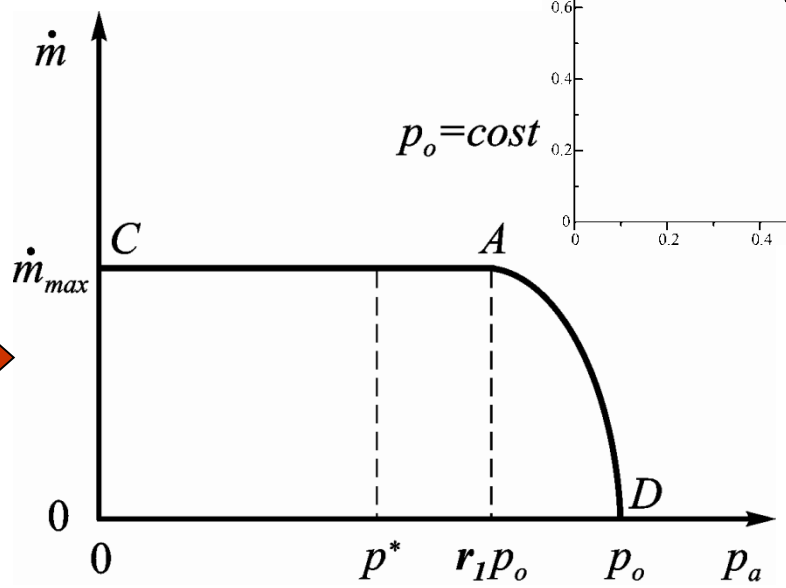
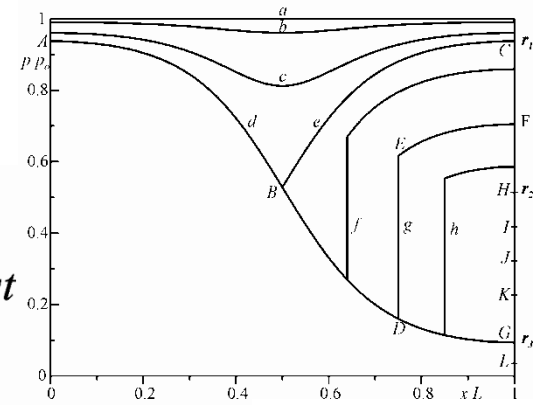


Fig.2



Per quanto riguarda invece il diagramma di Fig.1, nel caso di un ugello convergente divergente, esso viene ad essere modificato così come è mostrato nella Fig.2.

Il punto B di Fig.1 si sposta verso sinistra [poiché $p_a/\boldsymbol{r_1} < p_a\ (p_o/p^*)$] e ***la zona per la quale la portata di massa non dipende linearmente dalla pressione di ristagno si riduce conseguente-mente***.

La riduzione dipende dalla geometria dell'ugello ed, in particolare, dal rapporto tra la sezione di uscita e quella di gola.

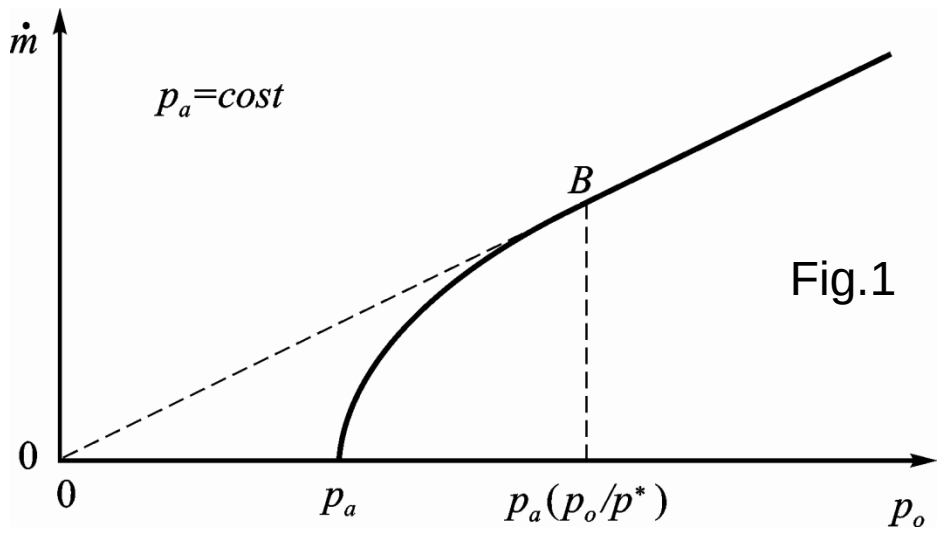


Fig.1

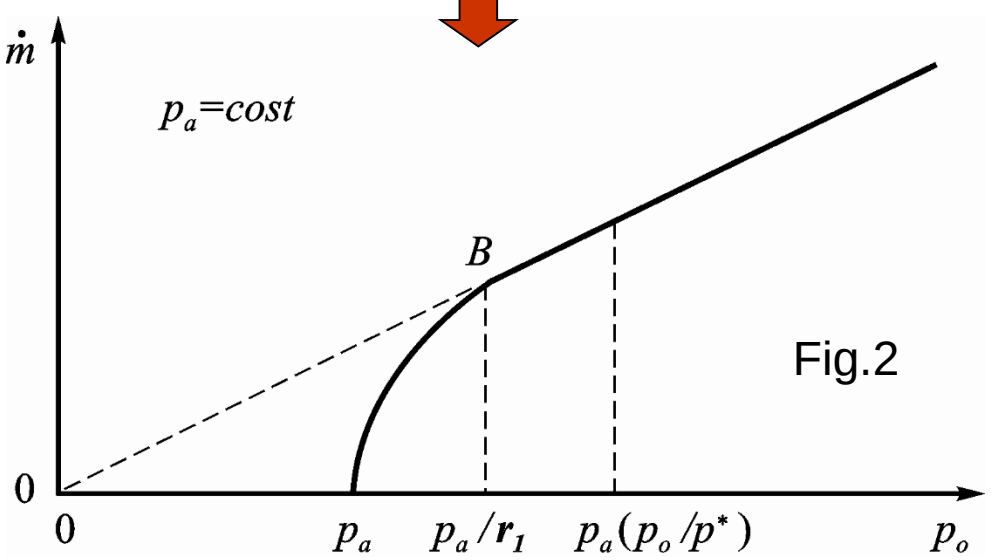
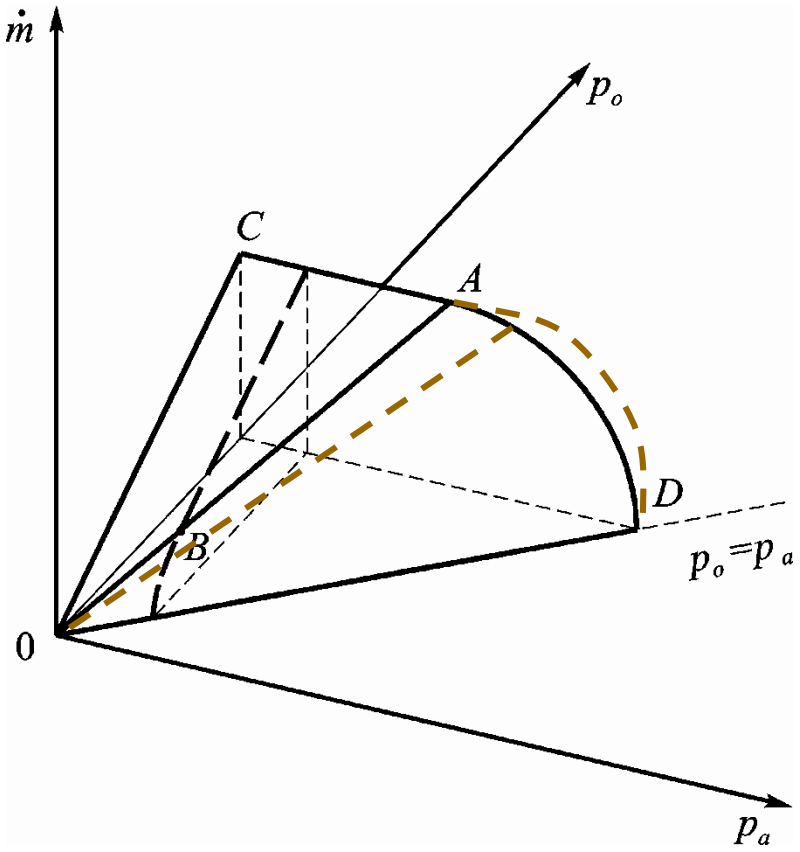


Fig.2

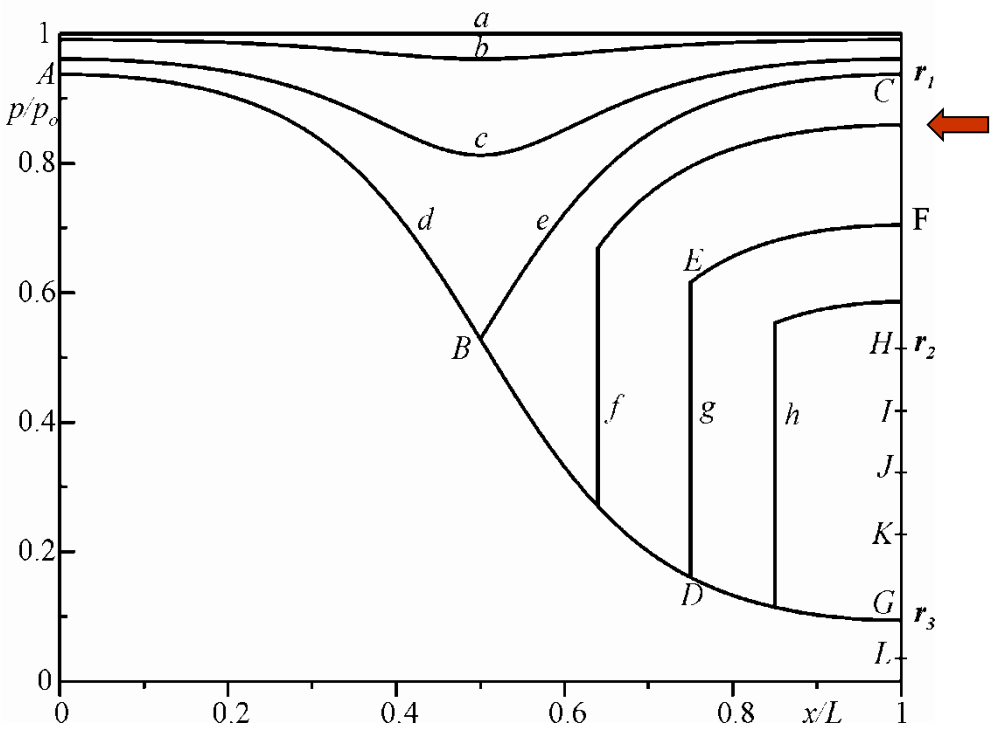
In definitiva, con riferimento al problema riguardante la portata di massa, l'ugello convergente divergente, poiché strozza ad un rapporto di pressione maggiore di quello dell'ugello semplicemente convergente, presenta un campo della pressione ambiente per il quale la portata resta costante (per p_o = *cost*), ovvero un campo della pressione di ristagno per il quale la portata dipende linearmente dalla pressione di ristagno stessa (per p_a = *cost*), entrambi più estesi di quelli relativi all'ugello convergente.

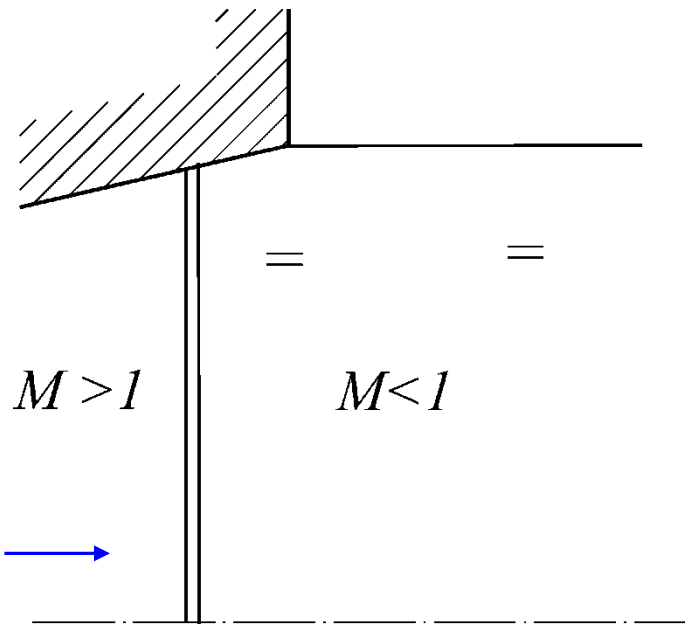
Corrispondentemente, il solido della portata di figura, valido per un ugello convergente, si modificherà presentando, in questo caso, la superficie triangolare *OCA* più estesa in quanto la semiretta determinata dal segmento *OA* ruoterà di una certa quantità (determinata da $\boldsymbol{r_1}$) verso il piano $\dot{m} - p_a$.



Per $\boldsymbol{r_2} < p_a/p_o < \boldsymbol{r_1}$, si ha un'onda d'urto nel divergente e nella sezione di uscita dell'ugello è valida la condizione di Kutta .

Tale situazione è schematicamente rappresentata in figura nella quale il segno = sta proprio a significare ***una pressione nella sezione di uscita dell'ugello, e nel getto fuoriuscente da esso, uguale a quella dell'ambiente in cui l'ugello scarica.***

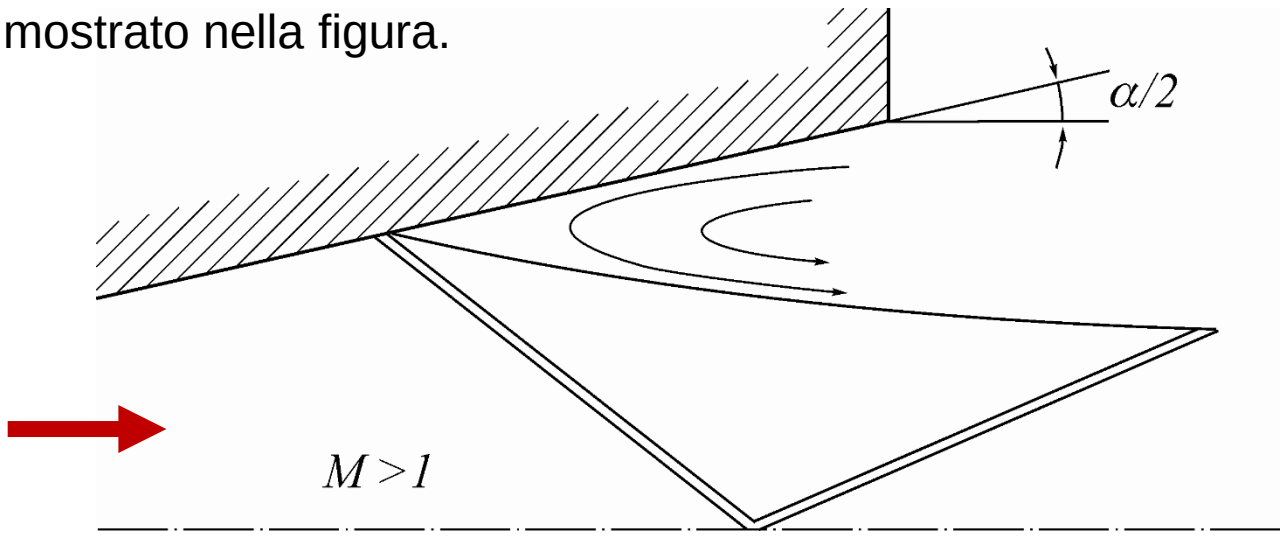




In effetti, in questo caso, ***quanto dettato dalla teoria di moto quasi-unidimensionale isoentropico non è completamente vero***.

Infatti, quando in una corrente il gradiente di pressione in direzione assiale è ***favorevole*** ($dp/dx < 0$), lo strato limite alle pareti dell'ugello è molto sottile per cui i risultati di moto non viscoso sono applicabili dal punto di vista ingegneristico.

Viceversa, un gradiente di pressione ***sfavorevole*** ($dp/dx > 0$) come quello presente nel divergente a valle dell'onda d'urto può indurre separazione della corrente dalla parete con la formazione di onde d'urto oblique all'interno del divergente ed una zona di ricircolo. Questo comportamento è schematicamente mostrato nella figura.



Tale comportamente si può mantenere sino a che l'onda d'urto non si porta nella sezione di uscita dell'ugello.

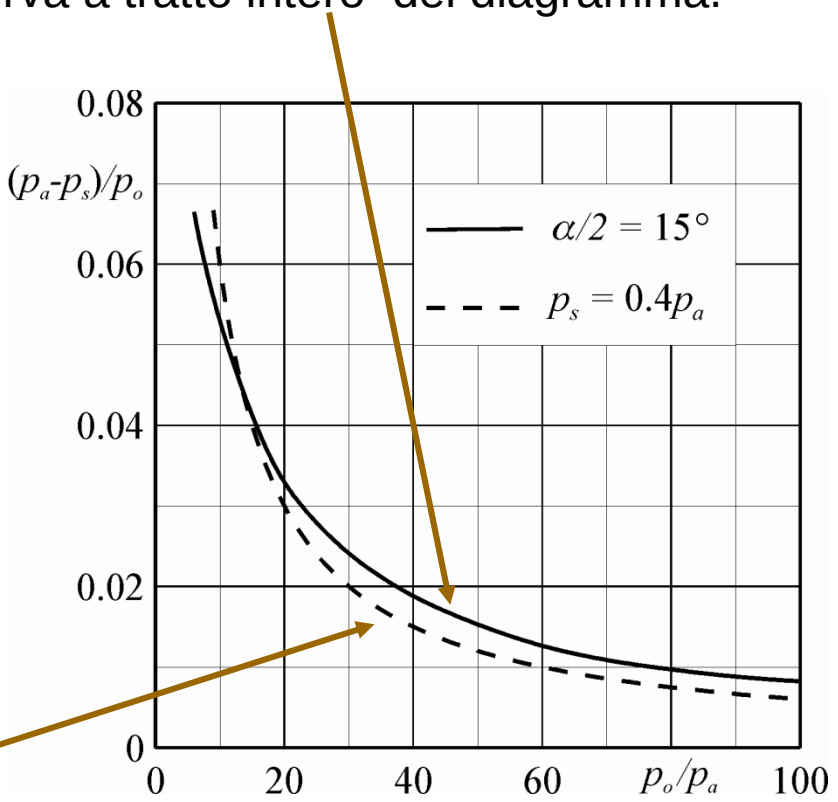
Tale separazione è tanto più possibile quanto maggiore risulta il dp/dx e quindi quanto maggiore è l'angolo di divergenza. Pertanto, questa fenomenologia è tipica degli ugelli propulsivi nei quali motivi di peso e di ingombro richiedono divergenti relativamente corti e quindi ad elevato angolo di divergenza.

Green ha trovato sperimentalmente che per ugelli conici con angolo di semi-apertura $\alpha/2$ pari a 15°, il punto di separazione si ha all'incirca nella sezione in cui la pressione statica p_s è data dalla curva a tratto intero del diagramma.

Si trova pure che ugelli con elevato rapporto di espansione p_o/p_a separano non appena la pressione p_s (nella sezione in cui il flusso separa) scende al di sotto della pressione ambiente di circa l'1% della pressione di ristagno.

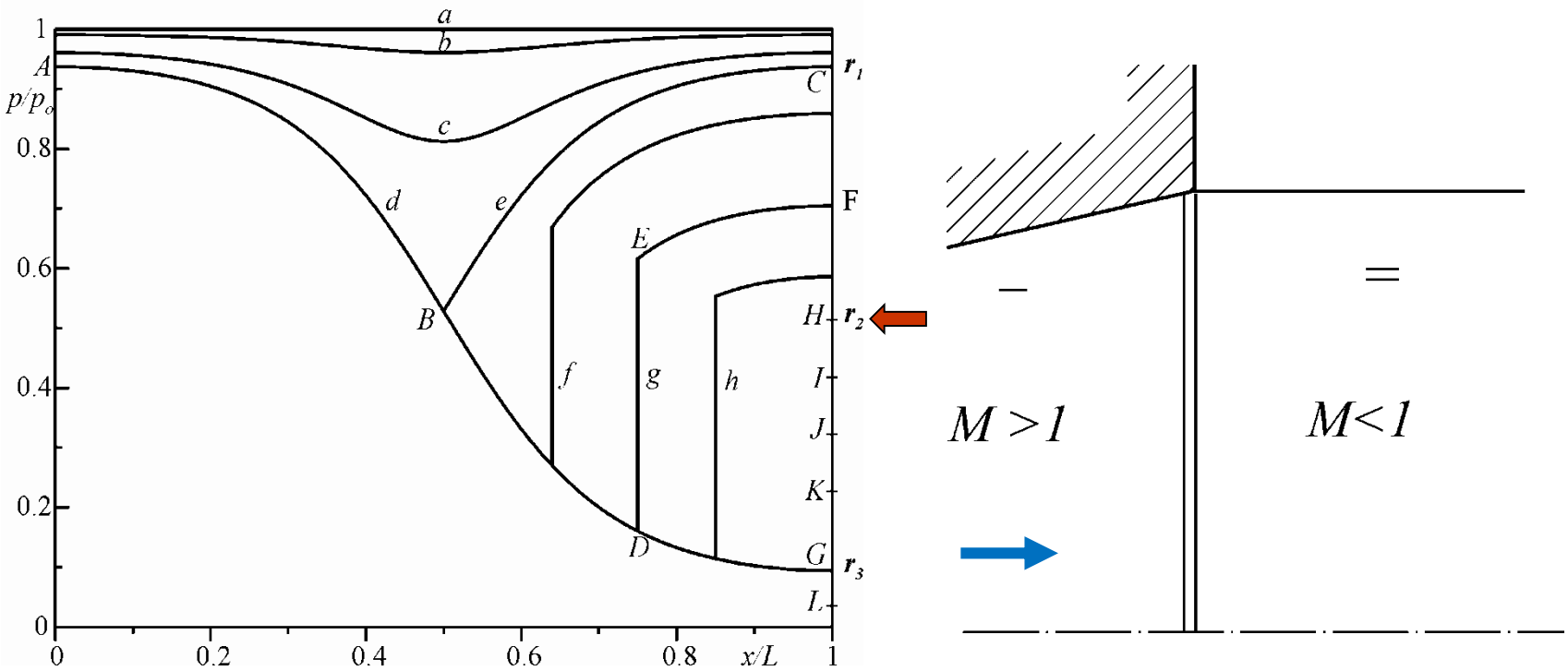
Una regola più generale, anche se più grossolana, fissa il punto di separazione nella sezione in cui p_s è circa pari a 0.4 p_a, ***curva tratteggiata***, perché in tal caso ($p_a - p_s = 0.6\ p_a$):

$$[(p_a - p_s)/p_o]\,p_o/p_a = 0.6$$



Per p_a/p_o = $\boldsymbol{r_2}$, l'onda d'urto si porta esattamente nella sezione di uscita dell'ugello. Il segno – indica una pressione inferiore a quella ambiente.

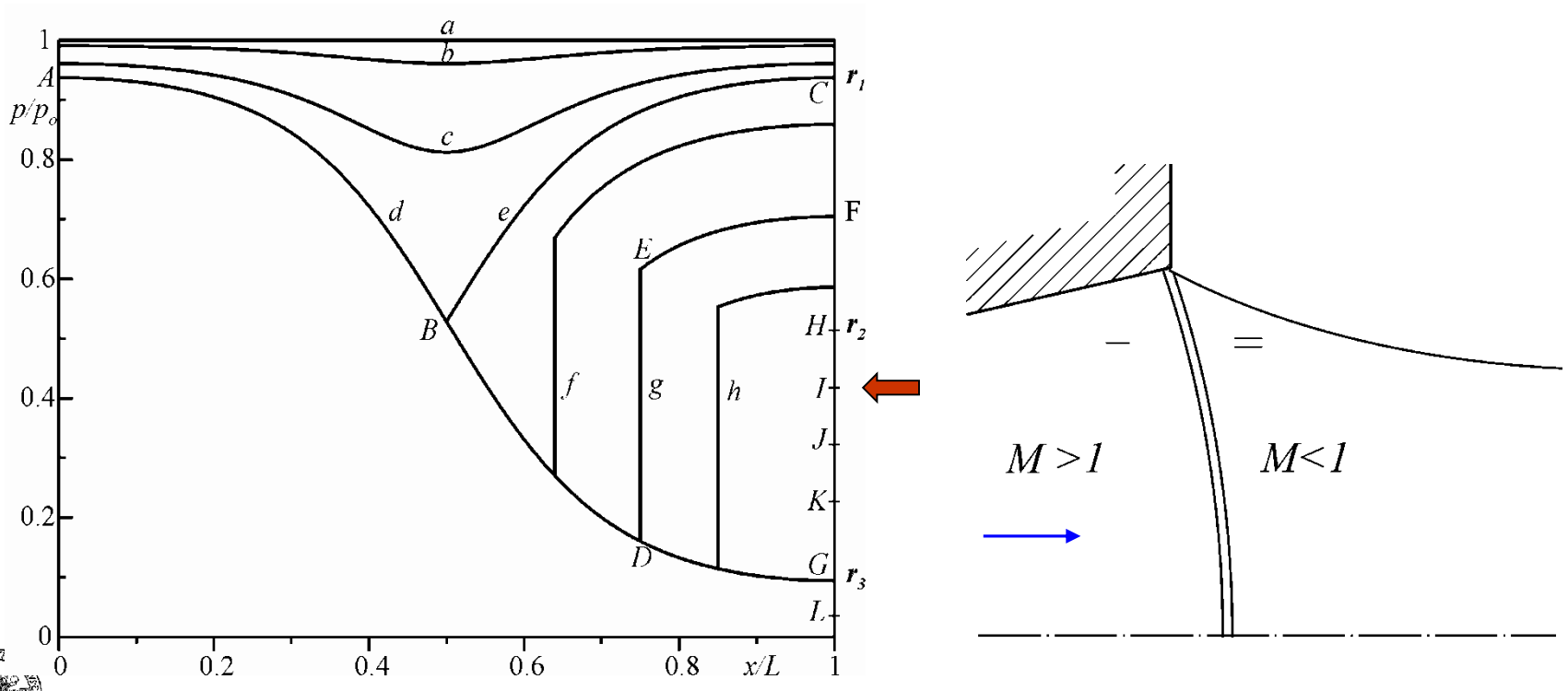
Attenzione**:* in entrambe le due precedenti condizioni, come nelle successive riportate in questo paragrafo, sono stati ***trascurati gli effetti viscosi che si accompagnano al mescolamento del getto con il gas presente nell'ambiente e, in questo caso, è stato possibile rappresentare il confine del getto uscente dall'ugello con una linea parallela all'asse di quest'ultimo.



Se il rapporto di pressione diminuisce a partire da $\boldsymbol{r_2}$, l'onda d'urto normale, già presente all'uscita dell'ugello per p_a/p_o = $\boldsymbol{r_2}$, darebbe luogo ad una ricompressione della corrente effluente dall'ugello troppo forte.

Ne consegue che, almeno alla periferia della sezione di uscita (direttamente a contatto con la pressione ambiente), deve esistere un'onda d'urto obliqua.

Per il relativamente alto rapporto di pressione tra valle e monte dell'onda d'urto, quest'onda d'urto obliqua deve corrispondere ad una ***soluzione forte*** (che comporta un più elevato valore di ε) per cui il numero di Mach a valle di essa è senz'altro subsonico e quindi l'onda d'urto non può riflettersi.



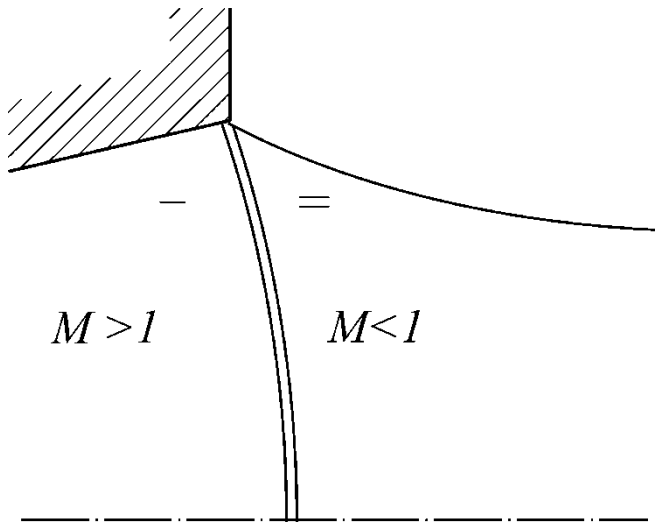
Inoltre, l'onda d'urto obliqua provoca una deviazione della corrente verso il basso, per cui, affinché il getto possa comunque effluire nell'ambiente, la linea di corrente periferica del getto a valle dell'onda deve avere una curvatura del tipo rappresentato in figura.

Questo evento, unitamente al fatto che sull'asse dell'ugello la corrente deve continuare diritta per motivi di simmetria, fa sì che l'angolo d'inclinazione ε rispetto alla corrente dell'onda d'urto, che parte obliqua alla periferia dell'ugello, vada man mano aumentando sino a divenire pari a 90° sull'asse dell'ugello (dando ivi luogo ad una deviazione nulla).

La curvatura delle linee di corrente del getto dopo l'onda d'urto è causata proprio dal gradiente di pressione esistente tra asse e periferia del getto, generato dalla inclinazione variabile dell'onda.

Il campo di moto a valle di tale onda d'urto è ovviamente tutto subsonico e non uniforme.

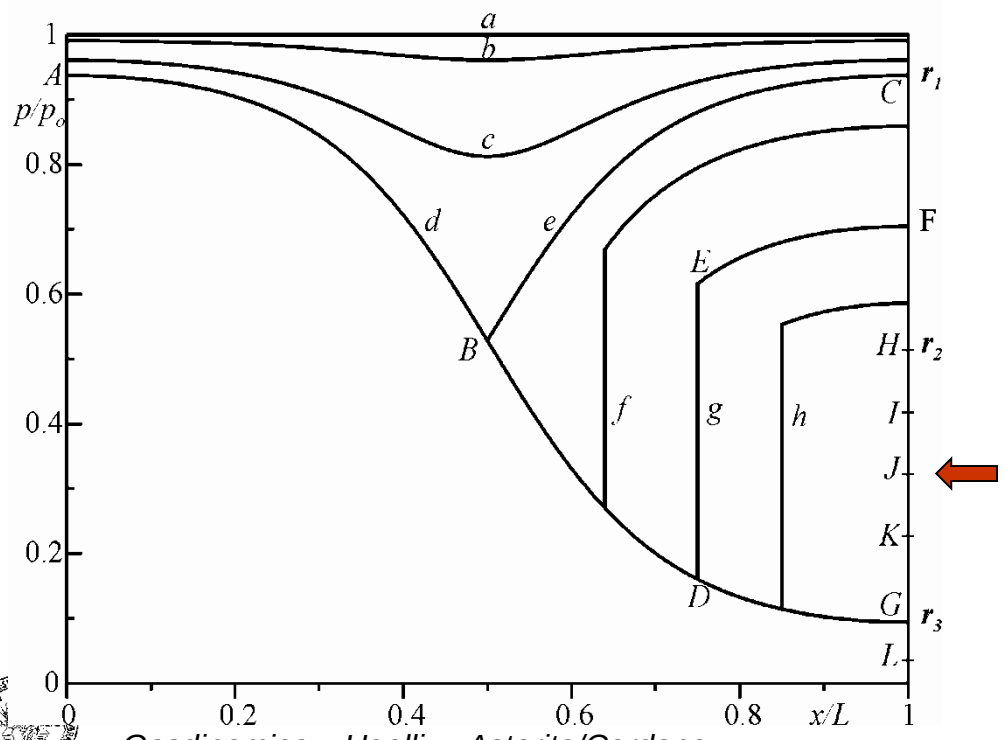
L'uguaglianza della pressione della corrente con quella ambiente è rispettata ***solo alla periferia del getto***.

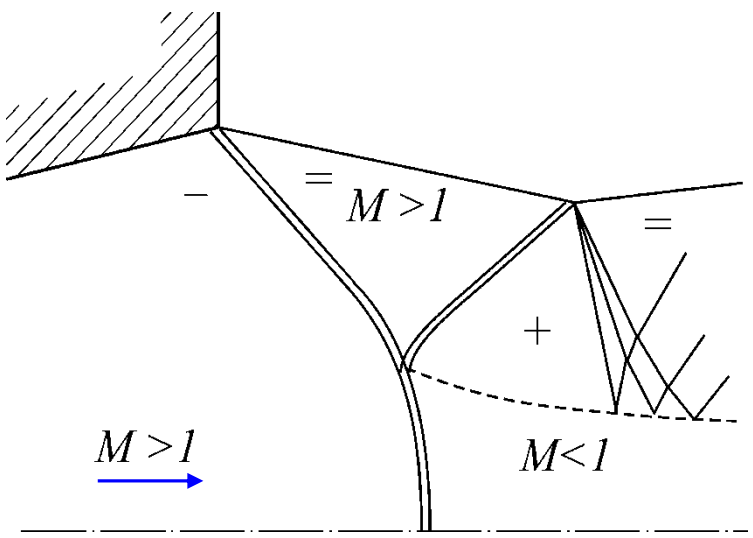


Man mano che il rapporto di pressione p_a/p_o continua a diminuire, il numero di Mach a valle dell'onda d'urto aumenta progressivamente diventando infine supersonico. A questo punto però, ***l'angolo di deviazione della corrente dovuto all'onda d'urto obliqua ha un valore molto elevato ed il numero di Mach a valle della stessa è solo debolmente supersonico***.

Quindi, la corrente ***non può essere raddrizzata***, in direzione dell'asse dell'ugello, dall'onda riflessa in quanto risulta ($|-\delta| > \delta_{max}$). Si ha allora un'***onda a λ.***

Si verifica poi, una riflessione dell'onda d'urto al confine del getto (superficie libera) mediante un ventaglio di espansione. La linea tratteggiata di figura rappresenta ancora una ***linea di slip*** per la quale vale quanto già detto.





- In effetti, trattandosi di un ugello completo, si avrà una ***intersezione alla Mach, o a doppio λ,*** così come mostrata nella foto.

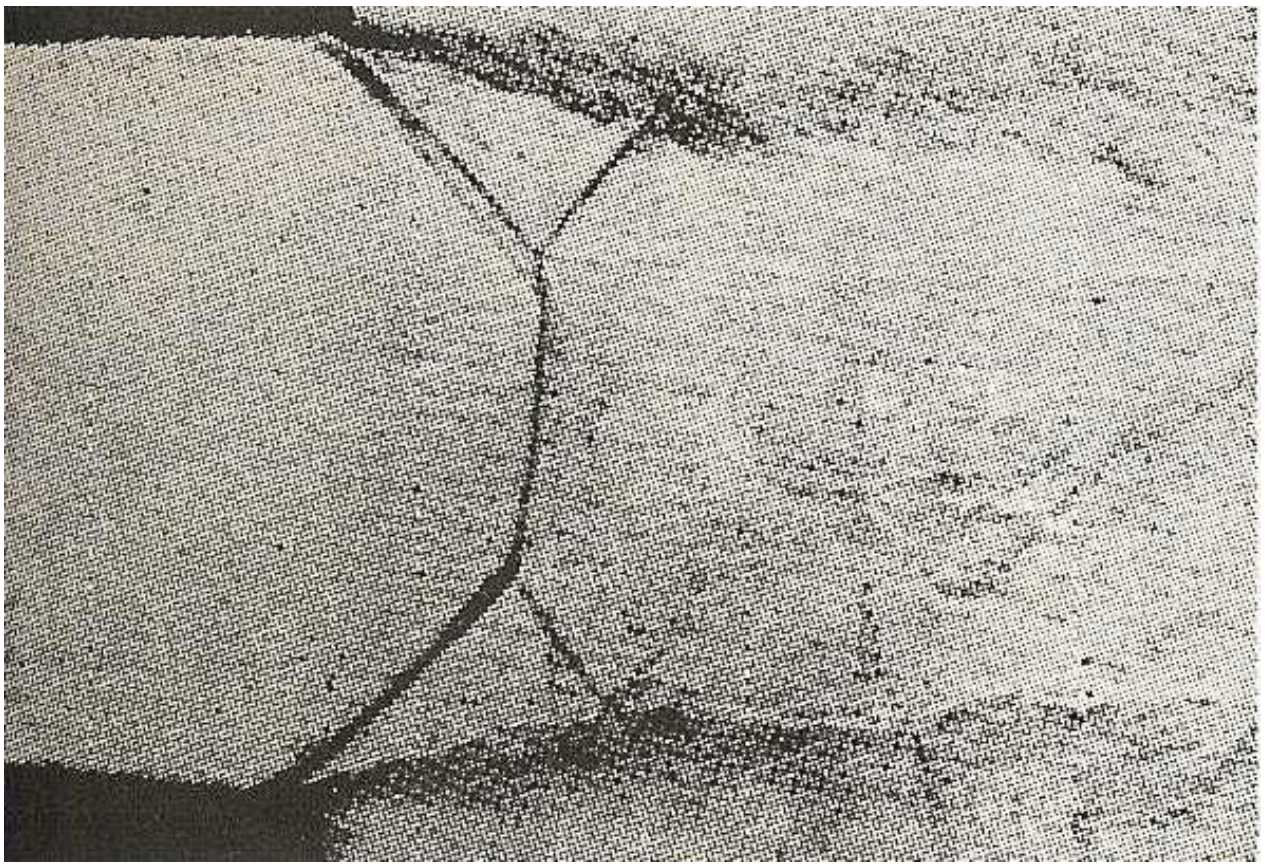
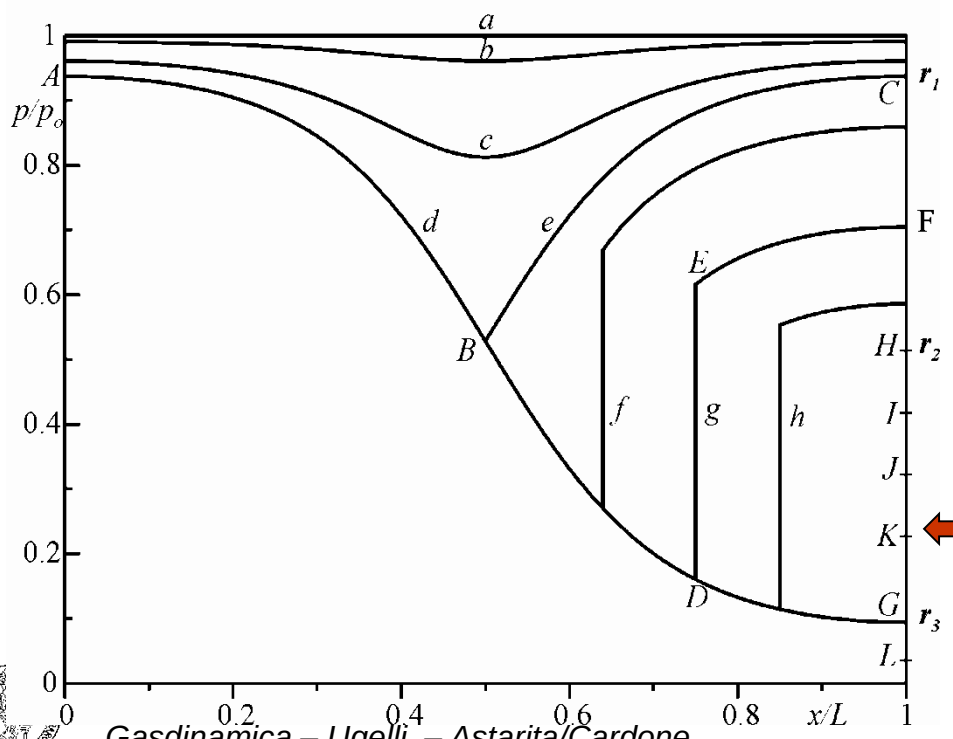


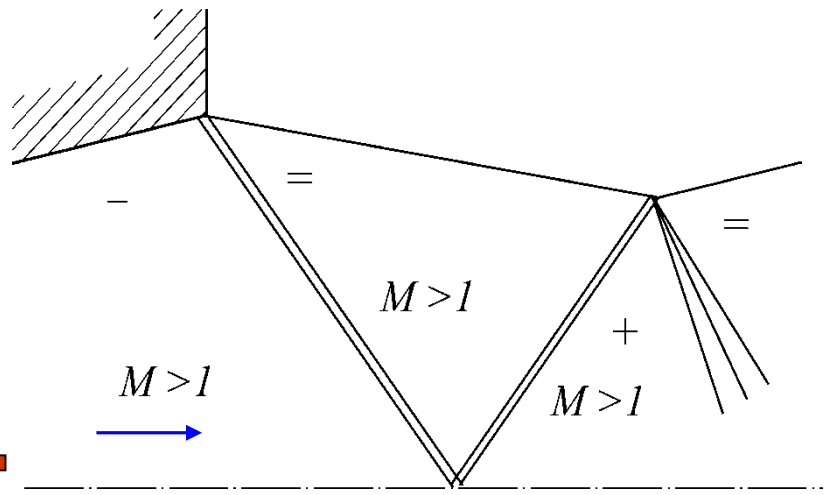
Foto Schlieren che mostra l'intersezione di onde d'urto a doppio λ all'uscita di un ugello

Per ulteriori diminuzioni del rapporto p_a/p_o, il numero di Mach a valle dell'onda d'urto obliqua continua ad aumentare e contemporaneamente la deviazione della corrente indotta dall'onda tende a diminuire. È allora possibile una riflessione regolare dell'onda d'urto.

Dopo l'onda d'urto riflessa, la pressione della corrente è maggiore di quella ambiente, ancorché con un numero di Mach in generale maggiore di uno.

Quindi, la prima onda di Mach del ventaglio di espansione non è ortogonale alla corrente (che quì è parallela all'asse dell'ugello) bensì inclinata di un angolo $\mu = arcsin 1/M$. Comunque, ***a valle di questa zona, il getto evolve in modo simile a quanto visto per un ugello convergente sottoespanso***.





INTERSEZIONE REGOLARE DI ONDE D'URTO OBLIQUE

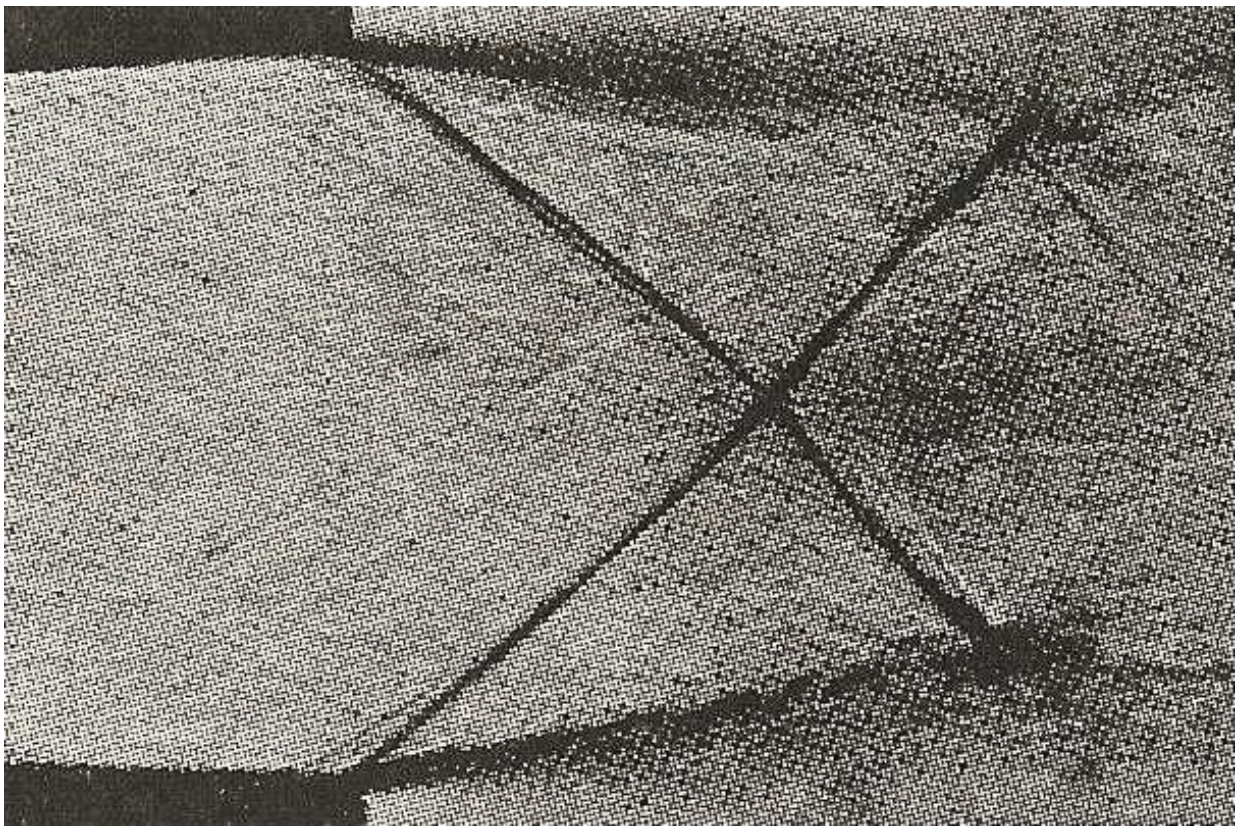
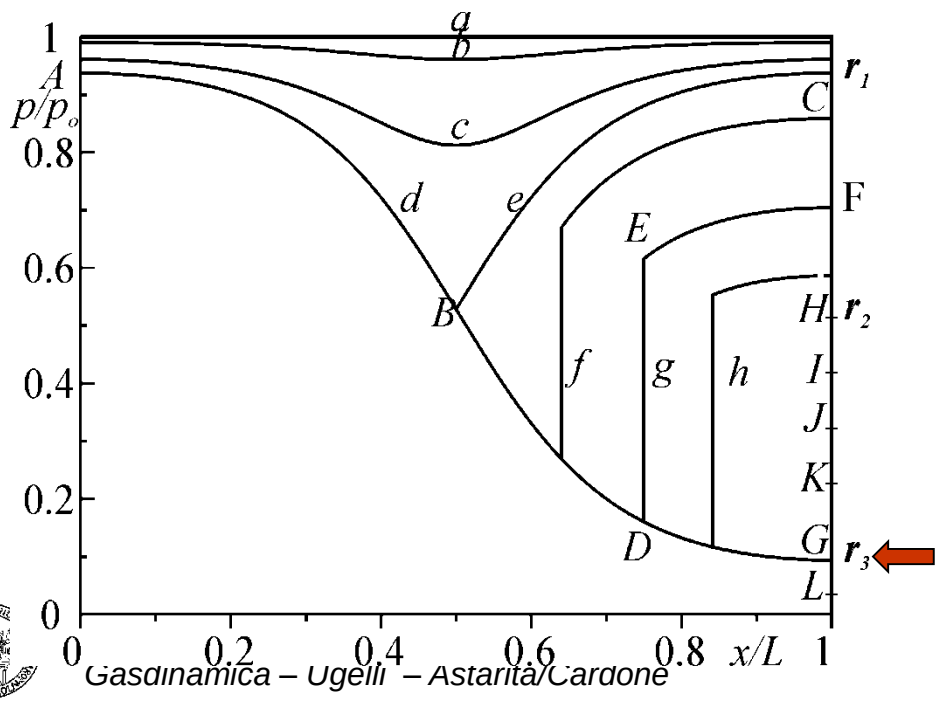
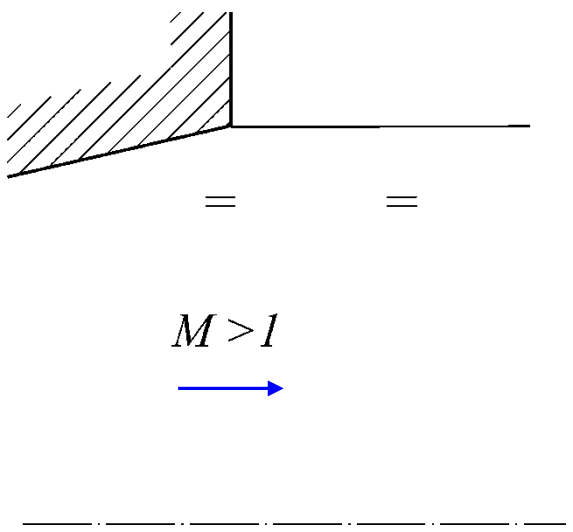


Foto Schlieren che mostra l'intersezione regolare
di onde d'urto oblique all'uscita di un ugello

Per p_a/p_o = $\boldsymbol{r_3}$ la pressione della corrente supersonica presente nella sezione di uscita dell'ugello è esattamente uguale a quella ambiente e quindi teoricamente non sono presenti onde nel getto effluente dall'ugello stesso.

In effetti, se si osserva un getto in tali condizioni (ad esempio mediante la tecnica *schlieren*), si può notare che esso è attraversato da ***una serie di onde di Mach***, praticamente parallele tra di loro, dovute alle piccole irregolarità sempre presenti sulle pareti dell'ugello e/o all'impossibilità di mantenere sperimentalmente il rapporto di pressione p_a/p_o precisamente uguale a $\boldsymbol{r_3}$.

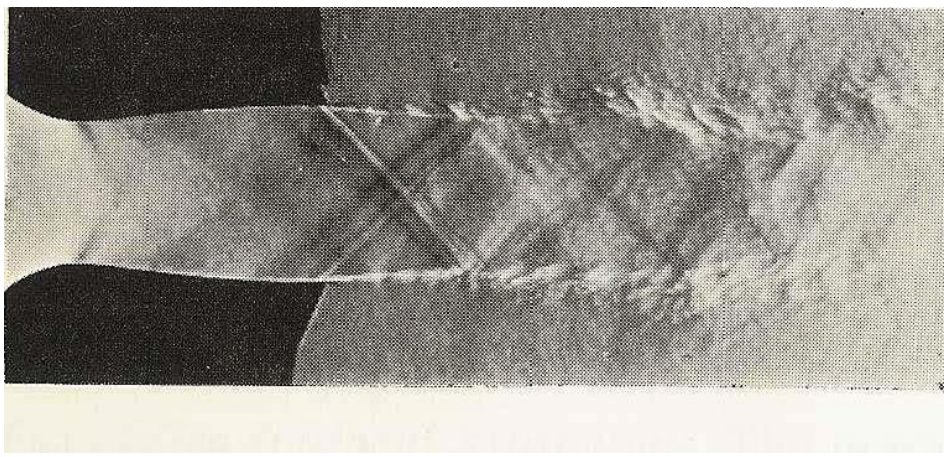


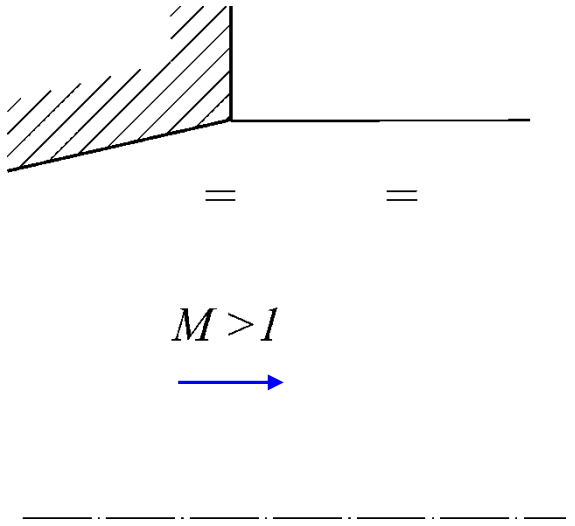


Per $p_a/p_o = \boldsymbol{r_3}$ la pressione della corrente supersonica presente nella sezione di uscita dell'ugello è esattamente uguale a quella ambiente e quindi teoricamente non sono presenti onde nel getto effluente dall'ugello stesso.

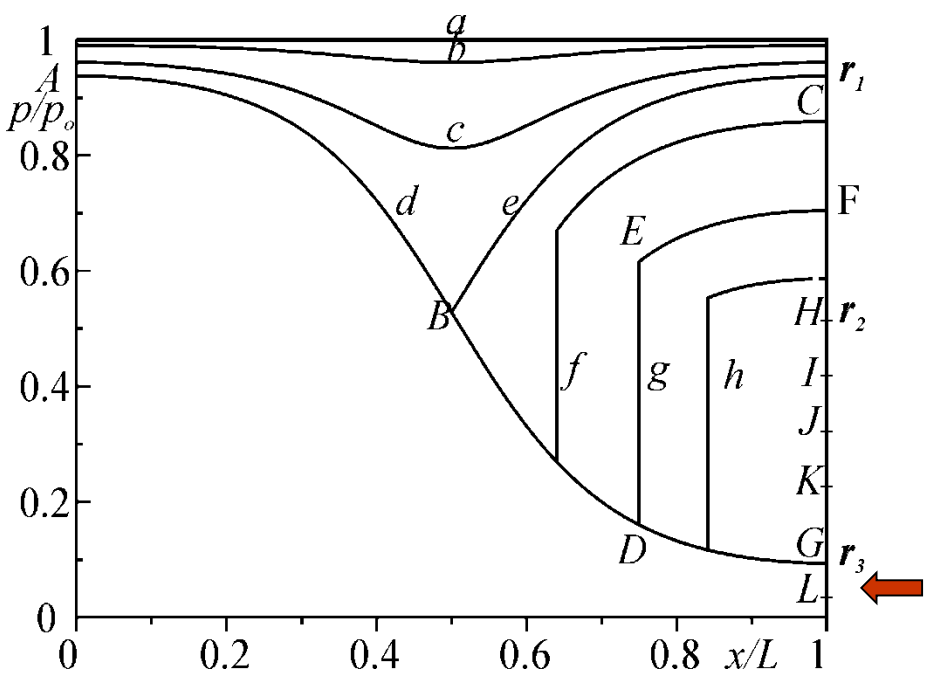
In effetti, se si osserva un getto in tali condizioni (ad esempio mediante la tecnica *schlieren*), si può notare che esso è attraversato da ***una serie di onde di Mach***, praticamente parallele tra di loro, dovute alle piccole irregolarità sempre presenti sulle pareti dell'ugello e/o all'impossibilità di mantenere sperimentalmente il rapporto di pressione p_a/p_o precisamente uguale a $\boldsymbol{r_3}$.

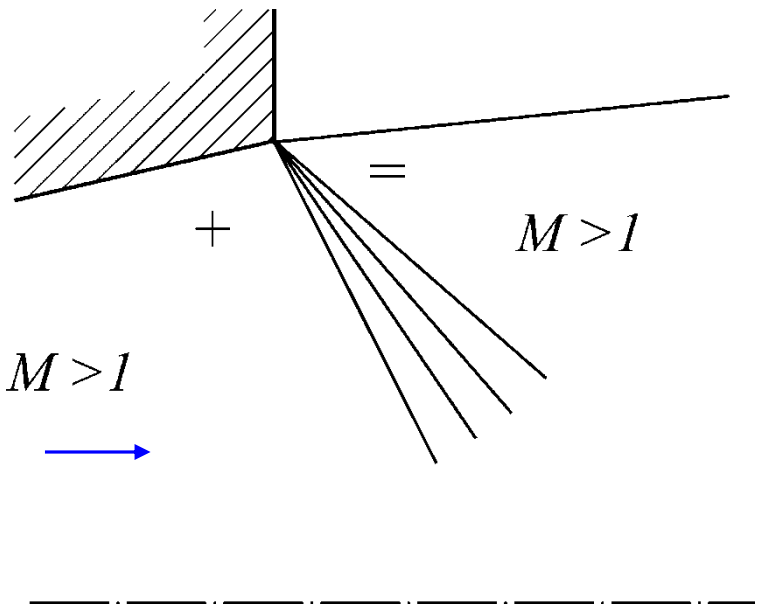
L'angolo di inclinazione μ di queste onde di Mach rispetto alla corrente consente, tra l'altro, di valutare il numero di Mach all'uscita dell'ugello mediante la relazione $M = 1/\sin \mu$, qualora quest'ultimo sia incognito.





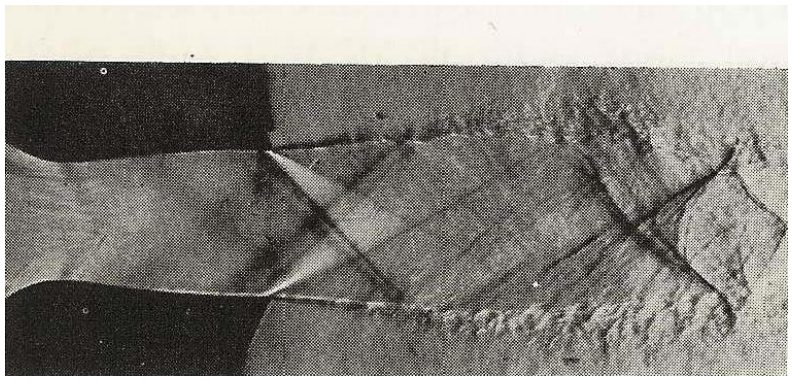
Infine per $p_a/p_o < \boldsymbol{r_3}$, a valle della sezione di uscita dell'ugello è presente un ventaglio di espansione.

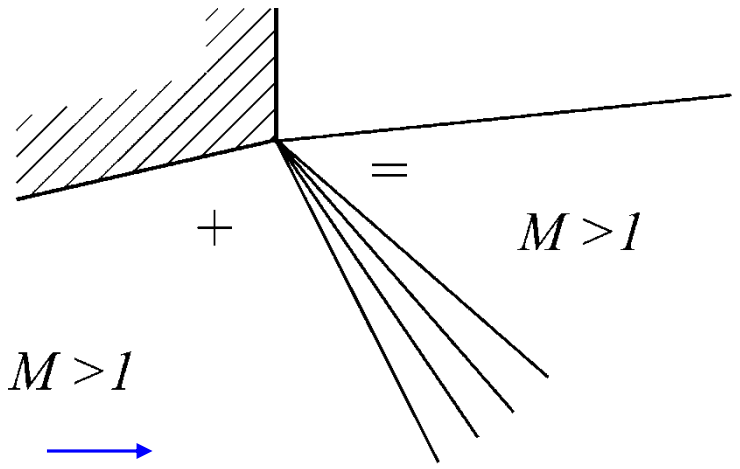




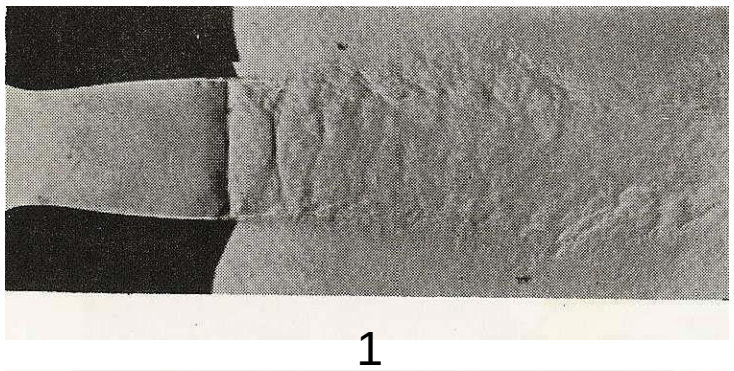
Infine per $p_a/p_o < r_3$, a valle della sezione di uscita dell'ugello è presente un ventaglio di espansione.

Anche in questo caso la prima onda del ventaglio di espansione non è ortogonale alla corrente bensì inclinata di un angolo di $\mu = arcsin 1/M$.

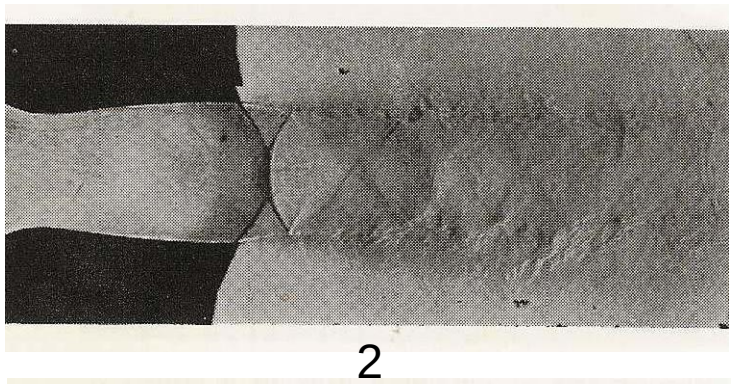




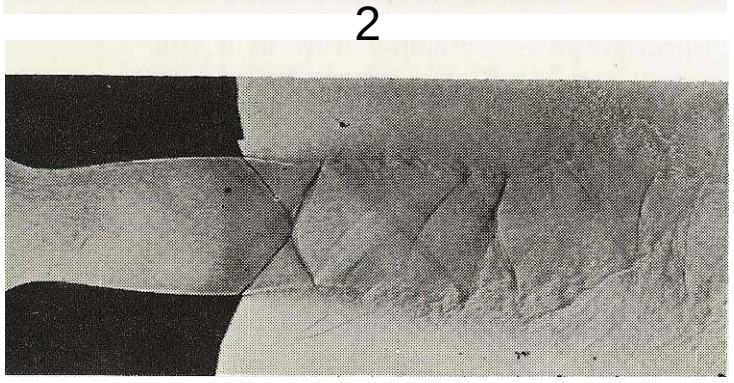
CONDIZIONI DI EFFLUSSO DA UN UGELLO CONVERGENTE DIVERGENTE



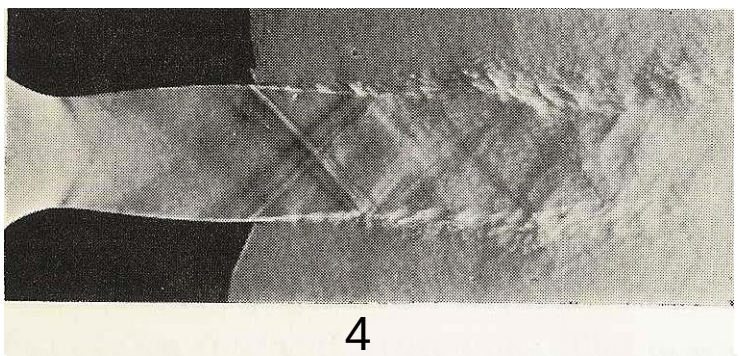
1



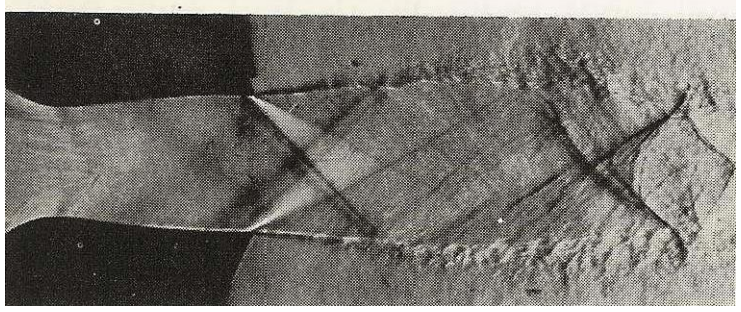
2



3



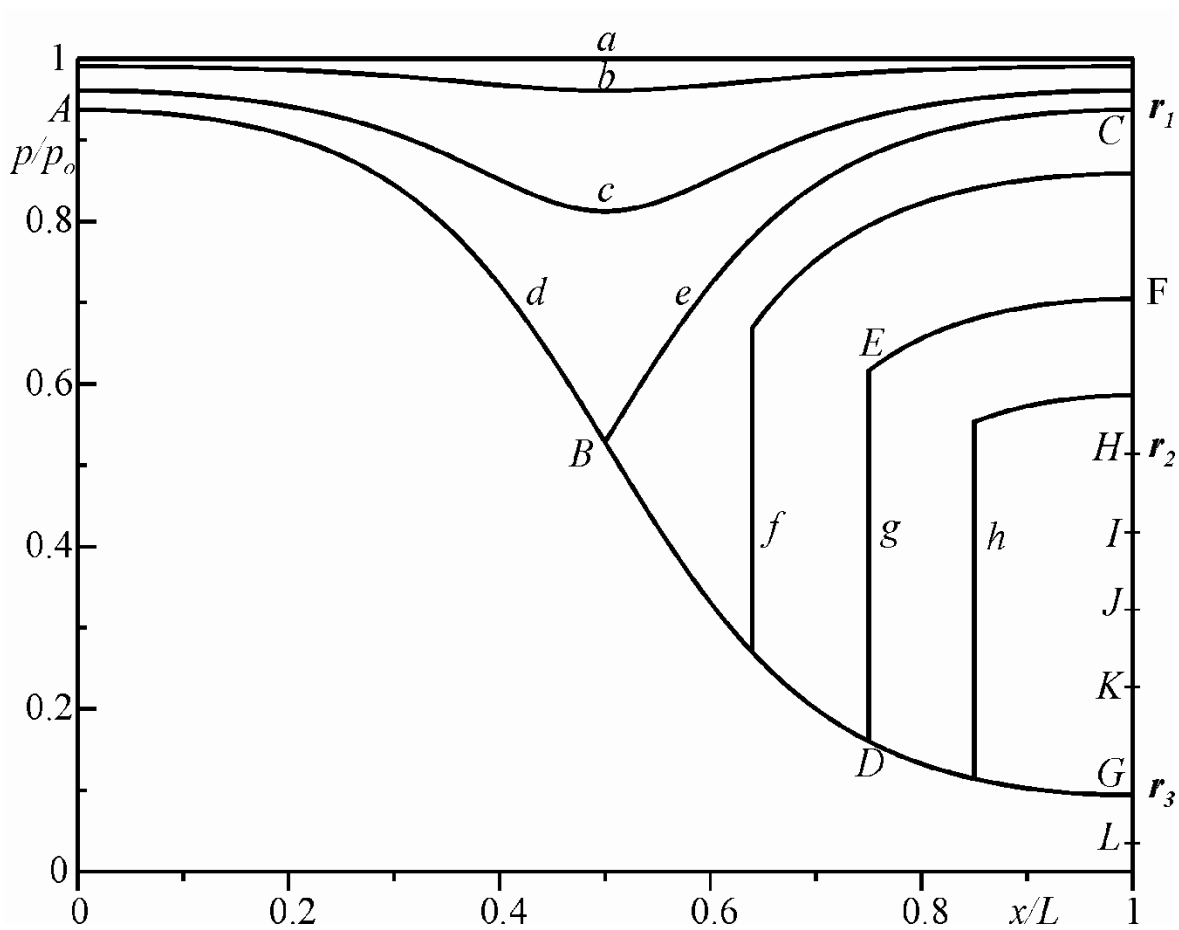
4



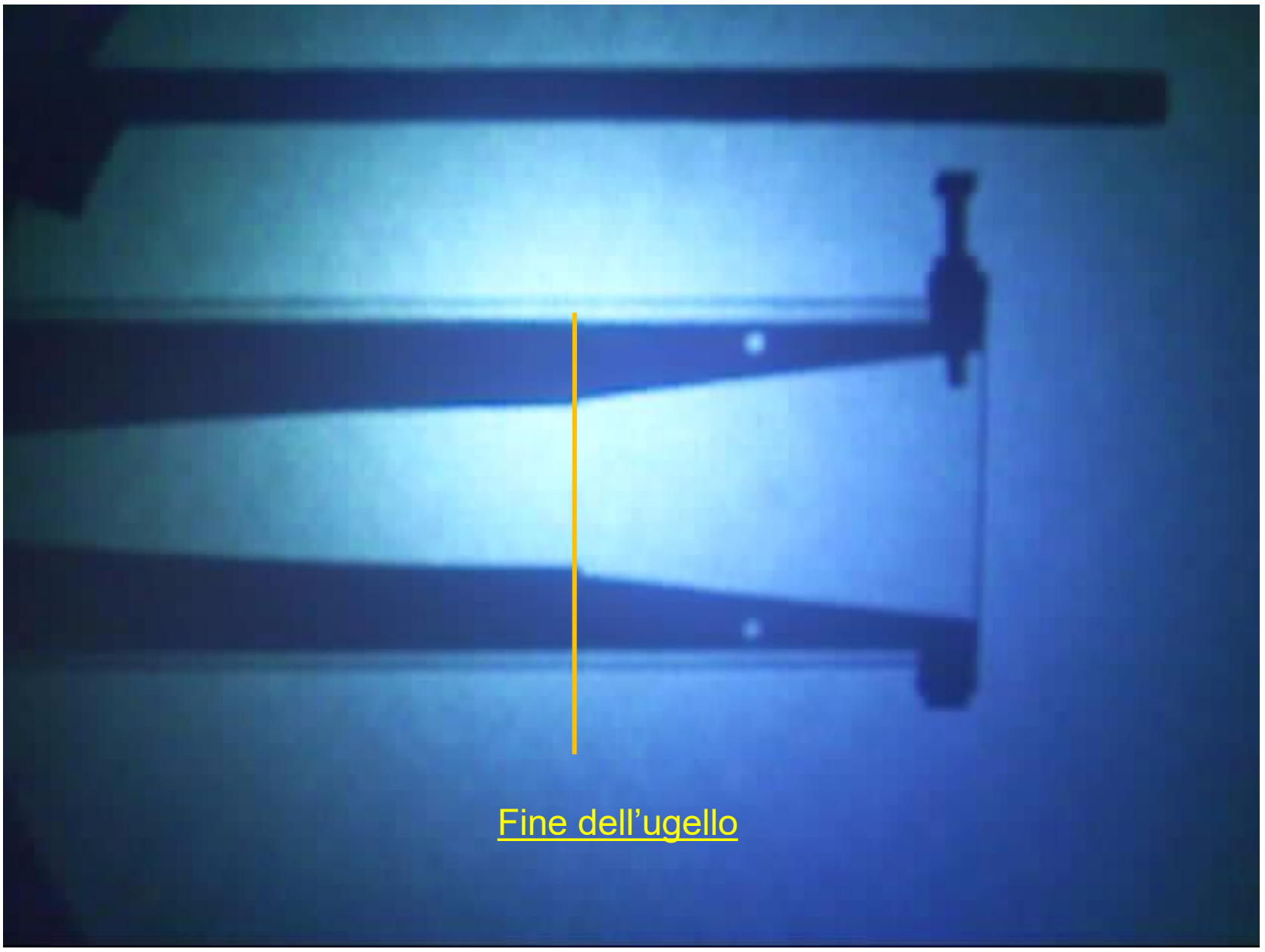
5

Condizioni di efflusso da un ugello convergente divergente al diminuire della pressione ambiente.

Space Shuttle as seen from its back with fired engines



Per p_a *costante e* p_o *in aumento*



RICERCA DELLA POSIZIONE DELL'ONDA D'URTO NORMALE NEL DIVERGENTE

Ci si riferisce, qui di seguito, a situazioni del tipo rappresentato in figura e cioè a rapporti di pressione tali che $\boldsymbol{r_2} < p_a/p_o < \boldsymbol{r_1}$.

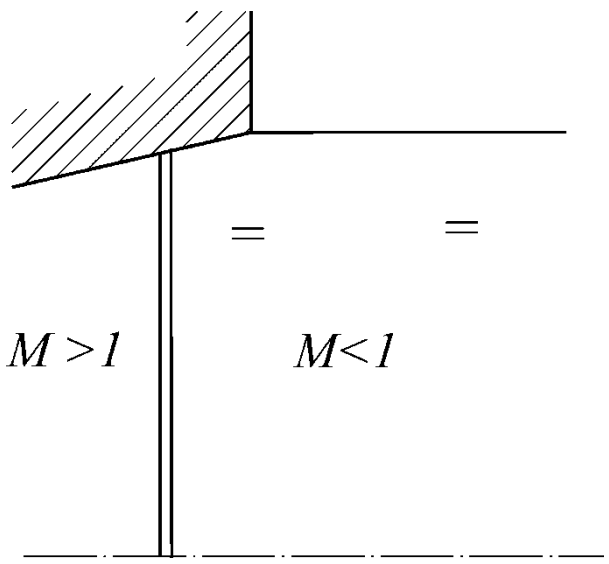
Nel caso in cui ***la posizione dell'onda d'urto normale nel divergente è nota***, la determinazione delle condizioni all'uscita dell'ugello è immediata.

Occorre, infatti, procedere come già indicato in precedenza, ovvero attraverso la determinazione di A_2^*/A_1^* causata dall'onda d'urto e, quindi, la determinazione del numero di Mach M nella sezione di uscita dell'ugello mediante la relazione:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

nella quale deve essere posto:

$$A_2^* = A^*$$

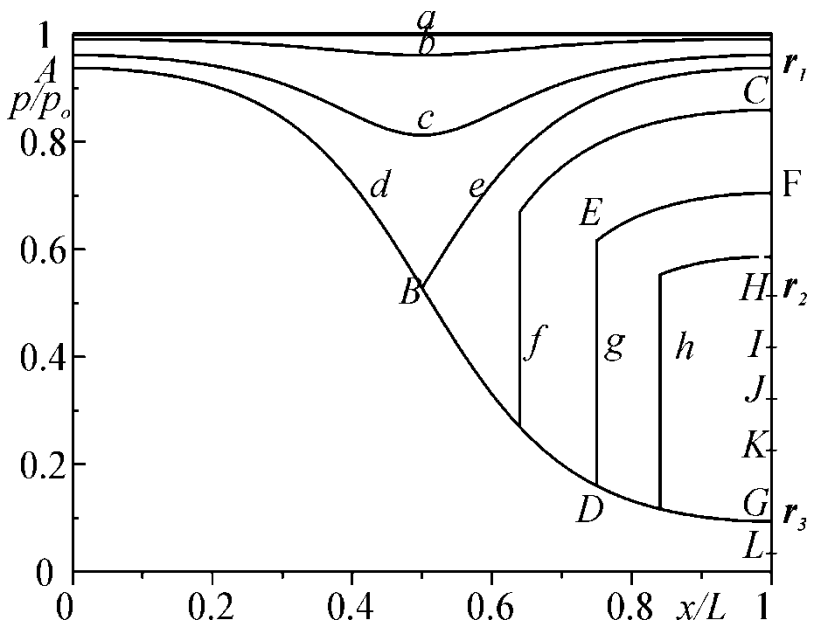


Se, invece, ***si conosce il numero di Mach all'uscita*** e si vuole conoscere la posizione dell'urto, occorre osservare che, la costanza, sia della portata di massa nell'ugello che della temperatura di ristagno della corrente, impongono:

$$\frac{p_{oE}}{p_{oD}} = \frac{p_{oF}}{p_o} = \frac{A_D^*}{A_E^*} = \frac{A^*}{A_F^*} = \frac{A^*}{A_u}\frac{A_u}{A_F^*}$$

dove con A^* e p_o sono state indicate l'area critica e la pressione di ristagno a monte dell'onda d'urto.

Poiché la A_u / A^* è un dato del problema ed il rapporto A_u / $A_F{}^*$ è deducibile dalla conoscenza di M_u, si può ricavare il rapporto tra le due pressioni di ristagno, noto il quale si conosce anche il numero di Mach a monte dell'onda d'urto e di conseguenza la posizione di quest'ultima.



Infine, nel caso in cui ***sia nota la pressione nella sezione di uscita***, dalla costanza della portata di massa si ha:

$$\rho^* V^* A^* = \rho_u V_u A_u$$

ovvero, nel caso di gas più che perfetto:

$$\frac{p^*}{RT^*}\sqrt{\gamma RT^*}\,A^* = \frac{p_u}{RT_u}M_u\sqrt{\gamma RT_u}\,A_u$$

e semplificando:

$$\frac{M_u}{\sqrt{T_u / T_o}} = \frac{p^*}{p_u}\frac{A^*}{A_u}\sqrt{\frac{T_o}{T^*}} = \frac{p_o}{p_u}\frac{A^*}{A_u}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = B$$

dove con A^* e p_o sono state indicate l'area critica e la pressione di ristagno a monte dell'onda d'urto.

Per l'ipotesi fatta di p_u nota, il secondo, o il terzo membro, della precedente relazione è anch'esso noto per cui è possibile porlo uguale alla costante B.

$$\frac{M_u}{\sqrt{T_u / T_o}} = \frac{p^*}{p_u}\frac{A^*}{A_u}\sqrt{\frac{T_o}{T^*}} = \frac{p_o}{p_u}\frac{A^*}{A_u}\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} = B$$

Quadrando e risolvendo, tenendo conto della:

$$T_o = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)$$

per la cui validità è solo necessario che il moto sia omoenergetico e non isoentropico, si ottengono le due radici:

$$M_u^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(\gamma - 1)B^2}}{\gamma - 1}$$

di cui è necessario scartare quella con il segno negativo che condurrebbe a valori complessi del numero di Mach all'uscita dell'ugello.

A questo punto, è possibile applicare la:

$$\frac{p_{oE}}{p_{oD}} = \frac{p_{oF}}{p_o} = \frac{A_D^*}{A_E^*} = \frac{A^*}{A_F^*} = \frac{A^*}{A_u}\frac{A_u}{A_F^*}$$

e quindi ricavare il rapporto tra le pressioni di ristagno a monte ed a valle dell'urto, il numero di Mach a monte di esso ed infine la posizione dell'onda d'urto nel divergente.