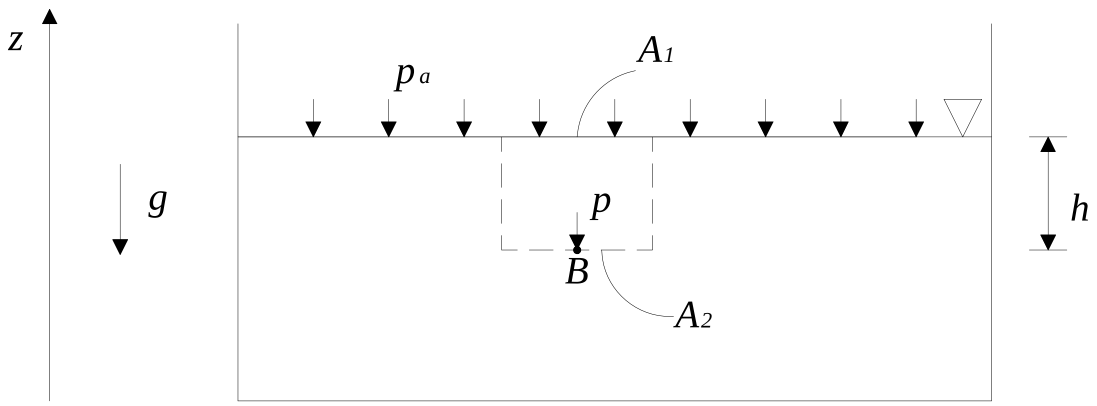
EQUAZIONI DI BILANCIO

Legge di Stevino

Si supponga di voler conoscere il valore della pressione in punto B, posto ad una profondità pari ad h rispetto al pelo libero dell'acqua contenuta in un recipiente.



Si scelga come volume di controllo un cilindro con area di base pari ad A ($A=A_1=A_2$) ed altezza h. L'equazione di bilancio della quantità di moto estesa a tale volume di controllo è espressa dalla:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i\,(\rho_i \underline{V}_i V_{ni} + p_i \underline{n}_1) + \underline{S} = M\,\underline{g}$$

in cui si è ritenuta costante l'accelerazione di gravità nel volume di controllo. Il primo termine al primo membro è una sommatoria estesa alle superfici permeabili, ovvero alle superfici interessate da flussi di massa; poiché nel caso in esame il fluido è in quiete, tale termine è nullo. In termini generali, la quantità *S* rappresenta l'integrale di tutti gli sforzi superficiali (parte dissipativi e non) sulle superfici impermeabili del sistema. Nel caso in esame, essa si limita ad essere l'integrale delle pressioni agenti sulle superfici impermeabili, ovvero su tutte le superfici del volume di controllo, trattandosi di fluido in quiete.

Proiettando l'equazione (vettoriale) lungo l'asse z si ottiene:

$$S_z = M(-g) = -\rho V_c g = -\rho A h g$$

in cui si è tenuto conto che:

- l'accelerazione di gravità ha verso opposto rispetto all'asse z, per cui la sua proiezione su tale asse risulta essere negativa;
- la massa contenuta nel volume di controllo è pari al volume per la densità costante del fluido in esame;

La spinta S_z può essere scissa nei due contributi agenti sulle due basi del cilindro:

$$S_z = S_{z1} + S_{z2} = p_a A + (-pA)$$

dove con p si è indicata la pressione nel punto B. Si noti che con *S* si è indicato la spinta totale del fluido sulle superfici impermeabili; di conseguenza, sulla superficie A_1 il fluido esercita una spinta (positiva verso l'esterno del volume di controllo) concorde con l'asse z, mentre su A_2 la spinta del fluido risulta essere discorde all'asse z.

Dunque, l'equazione di bilancio diventa:

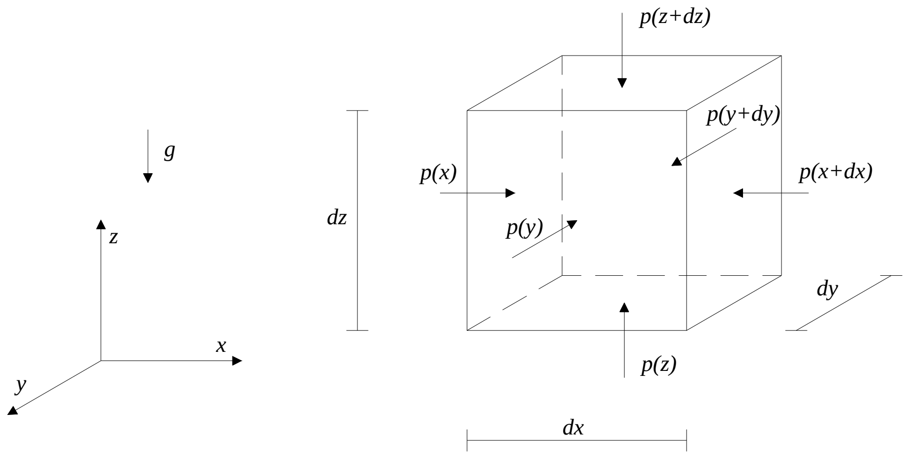
$$-\rho A h g = p_a A - pA$$

da cui si ricava:

$$p = p_a + \rho g h \qquad (1)$$

equazione nota come Legge di Stevino per fluidi a densità costante.

La (1) può essere ottenuta anche ricavando l'*equazione differenziale dell'idrostatica* e integrandola successivamente.



A tale scopo si consideri un volume di controllo infinitesimo di lati *dx*, *dy* e *dz*. Poiché il fluido è in quiete, per l'equilibrio del cubetto le forze agenti su di esso devono essere bilanciate: le forze di massa sono pari a ($\rho g\ dx\ dy\ dz$) ed agiscono nel verso opposto all'asse *z* scelto; le forze superficiali si riducono alla pressione agente sulle sei facce del cubetto. Il bilancio delle forze scritto lungo le tre direzioni produce:

$$\left[p(x) - p(x+dx)\right]dydz = \left[p(x) - \left(p(x) + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dydz = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

$$\left[p(y) - p(y+dy)\right]dxdz = \left[p(y) - \left(p(y) + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)\right]dxdz = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

$$\left[p(z) - p(z+dz)\right]dxdy - \rho g dxdydz = \left[p(z) - \left(p(z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right]dxdy - \rho g dxdydz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad (4)$$

Tenendo conto delle (2) e (3), la (4) può essere scritta nella forma:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow dp = -\rho g dz \qquad (5)$$

La (5) è nota come *equazione differenziale dell'idrostatica*; integrata tra un punto posto sulla superficie libera (alla quota z_a) ed un punto posto ad una profondità *h* (alla quota *z*):

$$\int_p^{p_a} dp = \int_z^{z_a} -\rho g dz$$

permette di ottenere la già menzionata Legge di Stevino per fluidi a densità costante:

$$p_a - p = -\rho g(z_a - z) = -\rho g h \Rightarrow p = p_a + \rho g h$$

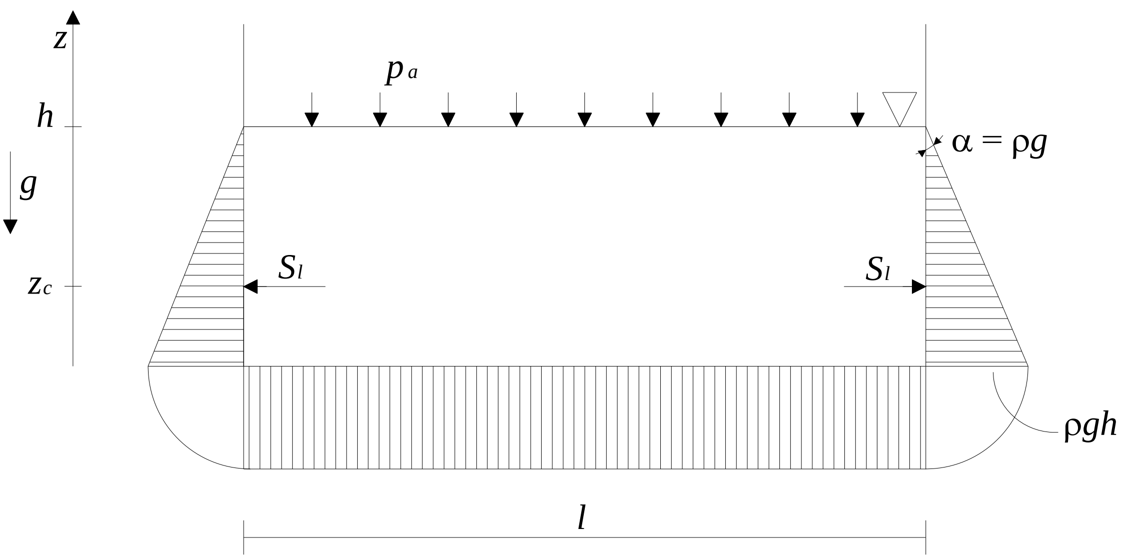
Distribuzione della pressione e spinte esercitate sulle pareti di un recipiente

Utilizzando la legge di Stevino è possibile tracciare il diagramma della pressione lungo le pareti di un recipiente, contenente un qualsivoglia fluido che presenti una densità uniforme. La legge di Stevino, infatti, fornisce l'andamento delle pressioni relative in funzione della quota:

$$p(z) = \rho g(h - z)$$

Tale relazione è stata scritta tenendo in considerazione che il vettore accelerazione di gravità ha verso opposto rispetto all'asse z scelto. Sulle pareti laterali si registra un andamento lineare della pressione: la pendenza di tale andamento è tanto maggiore quanto maggiore è la densità del fluido in esame. Questa circostanza si traduce in una pressione sul fondo maggiore per un fluido più denso, a parità di battente. Le considerazioni svolte in questa sezione sono valide qualora il fluido in esame presenti una densità praticamente costante al variare delle pressioni in gioco, quale un liquido.

Si consideri un recipiente con base quadrata ($l = 2m$) che contenga acqua ($\rho = 998 kg/m^3$) con un battente di $h = 0.7m$. Sul fondo del recipiente (z=0) si misura la pressione maggiore, pari a $\rho g h = 998 kg/m^3 \cdot 9.81 m/s^2 \cdot 0.7 m = 6.85 kPa$



Nota la distribuzione della pressione, è possibile ricavarsi il valore delle spinte esercitate sulle pareti del recipiente effettuando un integrale della pressione esteso alla superficie interessata. Sulla parete di fondo, data l'uniformità della pressione, la spinta risulta essere banalmente pari a:

$$S_b = p_b A_b = \rho g h l^2 = 27.4 kN$$

Sulle pareti laterali, la spinta (uguale per entrambe, data la simmetria) risulta invece pari a:

$$S_l = \int_0^h p(z) l dz = \int_0^h \rho g l(h - z) dz = \left[\rho g l h z - \rho g l \frac{z^2}{2}\right]_0^h = \rho g l \frac{h^2}{2} = \left(\rho g \frac{h}{2}\right)(hl) = 4.80 kN$$

ovvero, pari alla pressione che agisce nel punto posto ad una quota pari ad $h/2$ ($\rho g h/2$) per la superficie su cui agisce (hl).

Se alla distribuzione della pressione si vuole sostituire la spinta totale esercitata dal fluido è necessario conoscerne il punto di applicazione. Affinché i due sistemi di forze (la distribuzione di pressione e la spinta) siano perfettamente equivalenti, è necessario che il punto di applicazione della spinta sia tale che rispetto ad esso risulti nullo il momento delle pressioni. Ovvero:

$$M_l = \int_0^h p(z)(z - z_c)ldz = \int_0^h \rho g(h - z)(z - z_c)ldz = \int_0^h \rho gl(hz - z^2 - z_c h + z_c z)dz =$$

$$= \rho gl\left[h\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - z_c hz + z_c\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \rho gl\frac{h^3}{6} - z_c \rho gl\frac{h^2}{2} = 0Nm \Rightarrow$$

$$z_c = \frac{h}{3} = 0.23m$$

La spinta esercitata sul fondo, invece, è applicata al centro della base del recipiente, essendo uniforme la distribuzione della pressione. Tale risultato può essere ricavato rigorosamente operando analogamente a quanto fatto per la spinta laterale.

Andamento della pressione atmosferica al variare della quota

L'aria obbedisce all'equazione dei gas perfetti $p=\rho RT$, eccetto che in particolari zone rarefatte dell'atmosfera. La suddetta equazione indica che la pressione è una funzione della densità e della temperatura. Di conseguenza, poiché la pressione dell'atmosfera varia con l'altitudine secondo l'*equazione differenziale dell'idrostatica* (5):

$$dp = -\rho g dz \tag{5}$$

la densità varierà anch'essa con l'altitudine. Assumendo g = cost, la (5) diventa un'equazione nelle due variabili dipendenti p e ρ e nella variabile indipendente z. Di conseguenza, per risolverla è necessaria un'altra equazione indipendente che lega p e ρ. Se a tale scopo si utilizza l'equazione di stato, si introduce insieme ad essa una terza variabile (T). La terza equazione necessaria che lega le tre variabili dipendenti T, p e ρ si ottiene stabilendo la trasformazione termodinamica che una particella atmosferica deve seguire quando si sposta da una quota ad un'altra. In genere, tale trasformazione termodinamica dipende dalla quota. Per questo motivo, nel caso generale si utilizza una legge politropica:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \tag{6}$$

in cui il pedice 0 si riferisce alla quota a livello del mare e l'esponente n è l'esponente della politropica. Di conseguenza, la densità può essere espressa come:

$$\rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Sostituendo tale relazione nella (5) si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Separando le variabili si ottiene l'equazione differenziale:

$$p^{\frac{-1}{n}} dp = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p_0^{\frac{n-1}{n}} dz$$

che integrata:

$$\left[\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}}\right]_{p_0}^{p} = \left[-\frac{\rho_0 g}{p_0} p_0^{\frac{n-1}{n}} z\right]_{z_0}^{z}$$

restituisce:

$$\frac{n}{n-1}\left(p^{\frac{n-1}{n}}-p_0^{\frac{n-1}{n}}\right)=-\frac{\rho_0 g}{p_0}p_0^{\frac{n-1}{n}}(z-z_0)$$

Si ottiene in tal modo il risultato:

$$z-z_0=\frac{nRT_0}{g(n-1)}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

ovvero la relazione che lega p con z:

$$\frac{p}{p_0}=\left[1-\frac{g(n-1)}{nRT_0}(z-z_0)\right]^{\frac{n}{n-1}} \tag{7}$$

Considerando la (6) si ottiene un'analoga relazione per ρ:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left[1-\frac{g(n-1)}{nRT_0}(z-z_0)\right]^{\frac{1}{n-1}}$$

Ricordano, inoltre, che lungo una politropica vale anche:

$$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

si ottiene una relazione simile anche per T:

$$\frac{T}{T_0}=\left[1-\frac{g(n-1)}{nRT_0}(z-z_0)\right]$$

da cui si ottiene che la variazione della temperatura con la quota è lineare, in accordo con la relazione:

$$T=T_0-\frac{g(n-1)}{nR}(z-z_0)$$

dove il coefficiente di linearità $\lambda=\frac{g(n-1)}{nR}$ indica la velocità di variazione della temperatura. Sperimentalmente si è ottenuto un valore di λ pari a 5.87K/km, che implica un valore di n pari a 1.21. In realtà questa approssimazione è vera al di sotto dei 45000*ft* (13.7*km*) dal livello del mare. Questo primo strato dell'atmosfera è detto *troposfera*. Supponiamo per esempio di voler conoscere il valore della pressione atmosferica alla quota di 2000*m*, considerando la pressione e la temperatura a livello del mare pari rispettivamente a 101.3*kPa* e 23°*C*. Utilizzando la (7):

$$p=p_0\left[1-\frac{g(n-1)}{nRT_0}(z-z_0)\right]^{\frac{n}{n-1}}=p_0\left[1-\frac{\lambda}{T_0}(z-z_0)\right]^{\frac{n}{n-1}}=$$

$$=101.3\cdot 10^3\left[1-\frac{5.87\cdot 10^{-3}}{296}(2000)\right]^{\frac{1.21}{1.21-1}}=80.0kPa$$

in cui T_0 = 23+273 = 296K e λ = 5.87*$10^{-3}K/m$. La tabella dell'*U. S. Standard Atmosphere* fornisce per una quota di 2000*m* un valore della pressione atmosferica pari a 7.95*$10^4 Pa$. La scelta del modello utilizzato, pertanto, comporta un errore dello 0.6%.

Lo strato successivo dell'atmosfera è detto *stratosfera*: esso si estende da 45000*ft* fino ad un'altitudine di 55000*ft* (16.8*km*) e presenta una temperatura pressoché costante e pari a -57.5°*C* (215.5*K*). Per quest'ultimo strato è quindi ragionevole considerare isoterma l'atmosfera. La terza relazione che lega le tre variabili dipendenti T, p e ρ diventa, dunque, la seguente:

$$T=cost=T_0 \tag{8}$$

La densità isoterma può essere espressa mettendo in relazione la (8) con l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\rho = \frac{p}{RT_0}$$

relazione che sostituita nella (5) restituisce:

$$dp = -\frac{p}{RT_0} g dz$$

Separando le variabili:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0} dz$$

Integrando:

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{g}{RT_0}(z - z_0)$$

Ovvero:

$$\frac{p}{p_0} = \exp\left[-\frac{g}{RT_0}(z - z_0)\right] \qquad (9)$$

E poiché nel caso isotermico vale l'uguaglianza $p / p_0 = \rho / \rho_0$, si ottiene:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left[-\frac{g}{RT_0}(z - z_0)\right]$$

Si supponga di voler conoscere il valore della pressione ad una quota di 55000*ft* (55000·0.3048 = 16.77*km*), assumendo i valori di pressione e temperatura a 45000*ft* (13.72*km*) rispettivamente pari a 2.31*psia* (2.31·6.895·10^3 = 15.9*kPa* assoluti) e -71.5°*F* ((-71.5-32)/1.8 = -57.5°C). Applicando la (9):

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{g}{RT_0}(z - z_0)\right] = 2.31 \cdot \exp\left[-\frac{32.2}{1716 \cdot 388.5} \cdot 10000\right] = 1.43\,psia = 9.82\,kPa \text{ ass.}$$

avendo posto:

- T_0 = -71.5+460 = 388.5°*R*
- $g = 9.81 m/s^2 \cdot 3.281 ft/m = 32.2 ft/s^2$
- $R = 287 J/kgK = 287 m^2/s^2K = 287 m^2/s^2K \cdot 3.281^2 ft^2/m^2 \cdot 0.555 K/°R = 1716 ft^2/s^2°R$

ed avendo riferito il pedice 0 alla quota di 45000 *ft*.

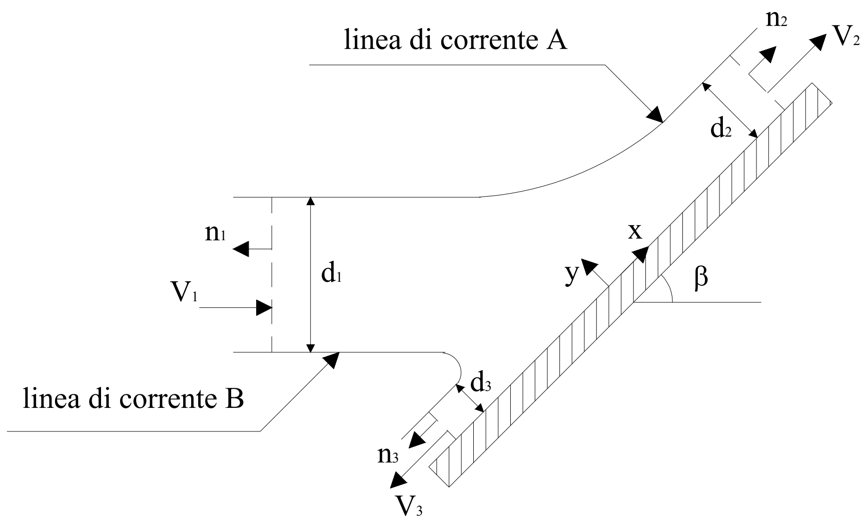
Bibliografia

Eskinazi S., *Vector mechanics of fluids and magnetofluids*, Academic Press New York and London, 1967.

Crowe C. T., Elger D. F., Roberson J. A., *Engineering Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., 2005.

Spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete

Si vuole calcolare la spinta esercitata da una corrente che impinge su una parete inclinata di in angolo β rispetto alla direzione della corrente stessa. Il moto considerato è bidimensionale, ovvero, si considera una parete infinitamente lunga nella direzione ortogonale al foglio. Si considera il moto incompressibile (ρ=cost) e stazionario e si trascurano sia le forze viscose (*Re*>>1), che le forze di massa (*Fr*>>1). Si assuma una velocità iniziale V_1 = 10*m/s*, un angolo β = 45° ed uno spessore d_1 = 10*cm* (distanza tra le linee di corrente rappresentate in figura nella sezione di imbocco).



L'equazione di Bernoulli scritta lungo le linee di corrente, tenendo conto che p=p_a diventa:

- $p_a + \rho\frac{V_1^2}{2} = p_a + \rho\frac{V_2^2}{2} \Rightarrow V_1 = V_2$ linea di corrente A
- $p_a + \rho\frac{V_1^2}{2} = p_a + \rho\frac{V_3^2}{2} \Rightarrow V_1 = V_3$ linea di corrente B

Mentre l'equazione di continuità scritta per il volume di controllo, delimitato dalle linee tratteggiate, le linee di corrente e la parete diventa:

$$-\rho V_1 d_1 + \rho V_2 d_2 + \rho V_3 d_3 = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 + d_3 \qquad (10)$$

in cui si è tenuto conto dei versi delle velocità e delle normali alle superfici permeabili.

Il bilancio della quantità di moto scritto per il volume di controllo in esame, produce:

$$\rho V_1^2 d_1 \underline{n}_1 + \rho V_2^2 d_2 \underline{n}_2 + \rho V_3^2 d_3 \underline{n}_3 + \underline{S} = 0 \qquad (11)$$

avendo assunto p_a=0.

Proiettando la (11) (vettoriale) lungo x (S_x=0):

$$-\rho V_1^2 d_1 \cos\beta + \rho V_2^2 d_2 - \rho V_3^2 d_3 = 0$$

considerando che V_1= V_2= V_3 e ricordando la (10), si ottiene:

$$\begin{aligned} d_1\cos\beta &= d_2 - d_3 \\ d_1 &= d_2 + d_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} d_2 &= \frac{d_1}{2}(1+\cos\beta) = \frac{0.10}{2}(1+\cos 45°) = 8.54cm \\ d_3 &= \frac{d_1}{2}(1-\cos\beta) = \frac{0.10}{2}(1-\cos 45°) = 1.46cm \end{aligned} \qquad (12)$$

Proiettandola invece lungo y (S_y=S):

$$\rho V_1^2 d_1 \sin\beta + S = 0 \Rightarrow$$

$$S = -\rho V_1^2 d_1 \sin\beta = -\dot{m} V_1 \sin\beta = -998\cdot 10^2 \cdot 0.10 \cdot \sin 45° = -7.06kN$$

avendo assunto $\rho = 998kg/m^3$.

È interessante notare che se la corrente fosse ortogonale alla parete (β=90°) il flusso si dividerebbe in due parti uguali:

$$d_2 = d_3 = \frac{d_1}{2}$$

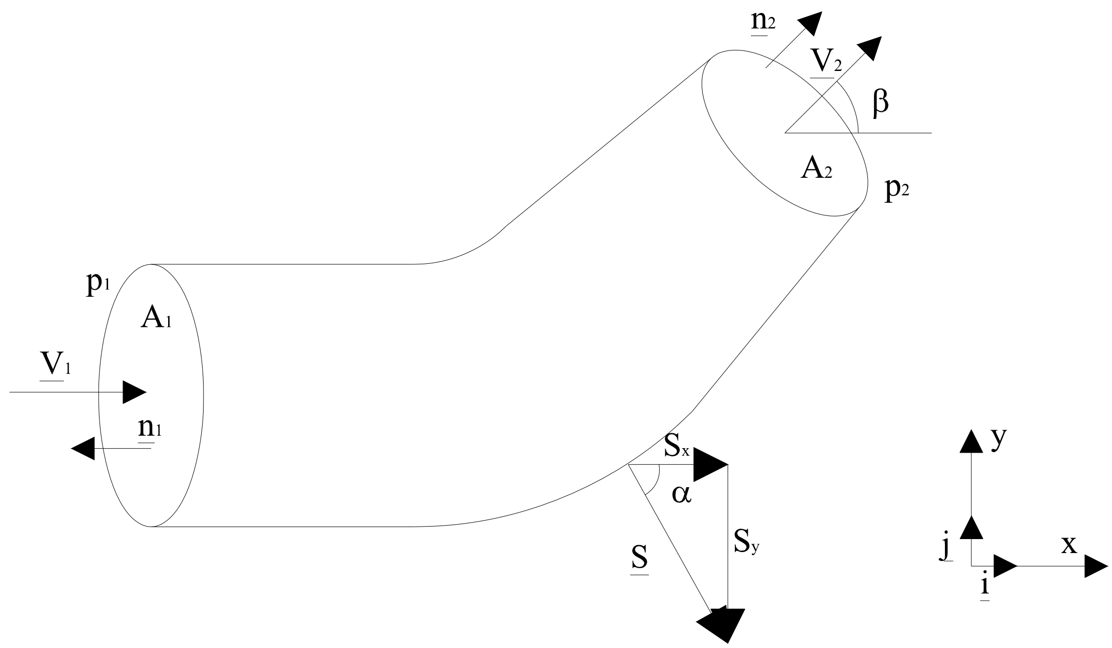
relazione ottenuta considerando le (12) e tenendo conto che $\cos\beta = 0$. La spinta esercitata sulla parete risulterebbe invece pari a:

$$S_{\beta=90°} = -\rho V_1^2 d_1 \sin\beta = -998 \cdot 10^2 \cdot 0.10 \cdot \sin 90° = -9.98kN$$

Spinta su una curva

Si consideri un fluido che percorre una curva, con sezioni d'ingresso e d'uscita diverse. Si vuole calcolare la spinta esercitata dal fluido sulla suddetta curva. Si considera il moto incompressibile (ρ=cost) e stazionario e si trascurano sia le forze viscose (*Re*>>1), che le forze di massa (*Fr*>>1). Si conoscono i valori dei seguenti parametri:

- $p_1 = 101.3kPa$
- $V_1 = 10m/s$
- $A_1 = 0.30m^2$
- $A_2 = 0.20m^2$
- $\beta = 30°$
- $\rho = 998kg/m^3$



Dai valori noti è possibile calcolare il valore della portata:

$$\dot{m} = \rho A_1 V_1 = 998 \cdot 0.30 \cdot 10 = 3.0 \cdot 10^3\, kg/s$$

L'equazione di continuità produce:

$$\rho A_1 \underline{V}_1 \underline{n}_1 + \rho A_2 \underline{V}_2 \underline{n}_2 = -\rho A_1 V_1 + \rho A_2 V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{0.30}{0.20} \cdot 10 = 15m/s$$

Mentre il teorema di Bernoulli:

$$p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} \Rightarrow$$

$$p_2 = p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] = 1.01 \cdot 10^5 + 998 \frac{10^2}{2} \left[1 - \left(\frac{0.30}{0.20}\right)^2\right] = 0.39 \cdot 10^5\, Pa$$

Il bilancio della quantità di moto:

$$(p_1 + \rho V_1^2) A_1 \underline{n}_1 + (p_2 + \rho V_2^2) A_2 \underline{n}_2 + \underline{S} = 0$$

proiettata in direzione x produce ($\underline{n}_1 \underline{i} = -1; \underline{n}_2 \underline{i} = \cos\beta$):

$$-(p_1+\rho V_1^2)A_1+(p_2+\rho V_2^2)A_2\cos\beta+S_x=0\Rightarrow$$
$$S_x=p_1A_1-p_2A_2\cos\beta+\dot{m}(V_1-V_2\cos\beta)$$
$$=1.01\cdot10^5\cdot0.30-0.39\cdot10^5\cdot0.20\cdot\cos30°+3.0\cdot10^3(10-15\cos30°)=14.5kN$$
mentre proiettata in direzione y ($\underline{n}_1\,\underline{j}=0;\underline{n}_2\,\underline{j}=\sin\beta$):
$$S_y=-(p_2+\rho V_2^2)A_2\sin\beta=$$
$$=-(0.39\cdot10^5+998\cdot15^2)\cdot0.20\cdot\sin30°=26kN$$
Pertanto la spinta totale avrà un modulo pari a:
$$S=\sqrt{S_x^2+S_y^2}=\sqrt{14.5^2+(-26)^2}=29.8kN$$
e sarà inclinata rispetto all'asse y di un angolo:
$$\alpha=\arctan\left(\frac{S_y}{S_x}\right)=\arctan\left(\frac{-26}{14.5}\right)=-60.9°$$